2026

Ольга Антипина
Алексей Вереникин

Углубленная микро-экономика

Оглавление

Глава 1. Характеристики технологии производства и процессов потребления
1.1. Классификация благ
1.2. Логика анализа предпочтений потребителя
1.3. Теорема Дебре о представимости предпочтений потребителя функцией полезности
1.4. Характеристики функций полезности и производственных функций в статике
1.5. Эффект масштаба хозяйственной деятельности
1.6. Производственные функции и технологический прогресс
Глава 2. Оптимизация производства и потребления в статике
2.1. Максимизация полезности при ограничении по доходу потребителя
2.2. Потребительский выбор: минимизация расходов при заданной полезности
2.3. Задачи связанной максимизации объема производства и минимизации его издержек
2.4. Максимизация прибыли и предложение продукции конкурентной фирмой
Глава 3. Двойственность в теории потребления и производства
3.1. Двойственность в теории потребительского выбора
3.2. Уравнение Слуцкого: эффекты замещения и дохода
3.3. Измерение изменений благосостояния потребителя
3.4. Уравнение Слуцкого с учетом индивидуальных активов: эффекты замещения, дохода и богатства
3.5. Двойственность в теории производства: эффекты замещения и выпуска
Глава 4. Потребительские и инвестиционные решения в динамике
4.1. Межвременной потребительский выбор: дискретное время
4.2. Потребительский выбор в непрерывном времени
4.3. Максимизация прибыли и накопление капитала
4.4. Накопление индивидуального человеческого капитала
4.5. Накопление человеческого капитала компании
4.6. Оптимальное управление максимизацией прибыли
Глава 5. Потребительский выбор в условиях неопределенности и ограниченной рациональности
Введение
5.1. Теория ожидаемой полезности
5.2. Денежные лотереи и отношение к риску
5.3. Меры Эрроу-Пратта и теорема Эрроу-Пратта
5.4. Модель выбора в пространстве обусловленных благ
5.5. Покупка информации и цена информации
5.6. Подходы к моделированию выбора с учетом поведенческих аспектов и ограниченной рациональности
Литература
Глава 6. Рыночное равновесие
6.1. Фирма и отрасль в условиях совершенной конкуренции
6.2. Устойчивость конкурентного равновесия: паутинообразная модель
6.3. Альтернативные модели динамического взаимодействия спроса и предложения на конкурентных рынках
6.4. Эволюционная рыночная динамика
6.5. Равновесие монополиста
6.6. Равновесие монопсонии
6.7. Равновесие в условиях олигополии
6.8. Равновесие фирмы и рынка в условиях монополистической конкуренции
6.9. Равновесие на рынках активов
Глава 7. Анализ поведения фирм и рыночных структур
7.1. Анализ схем ценовой дискриминации
7.2. Версионирование. Модель Вэриана
7.3. Продажа товаров наборами и связанные продажи
7.4. Двухчастные и многочастные тарифы
7.5. Ценообразование с учетом пиковой загрузки и многопериодная ценовая дискриминация
7.6. Социальные воздействия на цены
7.7. Инновации и рыночные структуры

Литература
Глава 8. Асимметрия информации
8.1. Информация и эффективность рыночных исходов. Причины асимметрии информации
8.2. Скрытые характеристики. Неблагоприятный отбор
8.3. Скрытые действия. Моральный риск
8.4. Проблема заказчика-исполнителя
Литература
Глава 9. Общее экономическое равновесие и теория благосостояния
9.1. Закон Вальраса и существование общего экономического равновесия
9.2. Характеристики общего экономического равновесия вальрасова типа
9.3. Общее экономическое равновесие в теории международной торговли
9.4. Общее равновесие на рынках активов
9.5. Принцип классической дихотомии и общее экономическое равновесие в неоклассике
9.6. Эффект реальных денежных остатков, спрос на деньги и общее экономическое равновесие в концепции неоклассического синтеза
9.7. Межотраслевой баланс как вычислимая модель общего экономического равновесия
9.8. Конкурентное равновесие, оптимальность экономической системы и общественное благосостояние
9.9. Теория общественного выбора
9.10. Общее экономическое равновесие и общественное благосостояние при монополистической конкуренции
Глава 10. Внешние эффекты и общественные блага
10.1. Экстерналии. Неэффективность равновесия в экономике с экстерналиями. Регулирование экстерналий
10.2. Анализ рынков с сетевыми внешними эффектами
10.3. Общественные блага
Литература
Глоссарий

Глава 1. Характеристики технологии производства и процессов потребления

1.1. Классификация благ
1.2. Логика анализа предпочтений потребителя
1.3. Теорема Дебре о представимости предпочтений потребителя функцией полезности
1.4. Характеристики функций полезности и производственных функций в статике
1.5. Эффект масштаба хозйственной деятельности
1.6. Производственные функции и технологический прогресс

1.1. Классификация благ

Под благами будем понимать материальные и нематериальные объекты [1], характеризуемые наборами качественных характеристик, которые, будучи доступными индивидууму, обладают для него полезностью, т.е. совокупностью свойств, позволяющих удовлетворять широкий спектр потребностей человека.

Продукты и услуги, потребляемые в разных географических точках, будем считать различными благами. Такая предпосылка анализа является разумной, поскольку для перемещения идентичных по качеству благ в различные места необходимо затратить определенное количество ресурсов подобно тому, как это требуется при непосредственном процессе производства товаров и услуг.

Аналогично будем различать товары и услуги, пусть даже качественно однородные, но произведенные не одновременно. Такое различие также оправданно, поскольку потребители и производители существуют в изменяющейся природной и экономической среде и, кроме того, меняются сами. Поэтому блага, произведенные в разное время, будут отличаться по тому, как они удовлетворяют потребности экономических субъектов, и, следовательно, будут качественно различными.

Таким образом, блага отличаются друг от друга не только качественными характеристиками, но и пространственным, а также временным расположением.

Проведем классификацию благ, которая играет важную роль на разных уровнях общности микроэкономического анализа [2].

Прежде всего, важным является выделение таких групп товаров и услуг, как свободные и экономические. Свободное благо – это предмет, имеющийся в природе в неограниченном количестве, достаточном для насыщения данной потребности, причем это благо доступно для потребления без каких бы то ни было издержек. Цена на такой товар равна нулю. В отличие от свободных, экономические блага являются ограниченными по отношению к существующим потребностям. Количество такого блага недостаточно для насыщения данной потребности, и поэтому за его потребление взимается положительная цена.

Экономические блага, в свою очередь, делятся на частные и общественные (рис. 1.2). Для того чтобы определить данные виды благ, необходимо ввести вспомогательные понятия.

Исключаемым благом назовем то, которое можно исключить из потребления всех индивидуумов, кроме одного, заплатившего за него установленную цену. За необходимую плату индивид становится единственным потребителем такого блага.

Если за счет ценового механизма нельзя целиком закрепить права на данный товар или услугу за одним лицом, поскольку издержки исключения из потребления остальных экономических агентов запретительно высоки, и в случае потребления этого блага одним из них другие лица также получают возможность воспользоваться этой вещью, то такое благо будет неисключаемым. Благо является неисключаемым, если никто не может быть исключен из числа его потребителей, когда оно уже произведено.

Конкурентным благом будем считать продукт или услугу, которые физически не могут быть потреблены одновременно несколькими потребителями. Конкурентные блага – это товары и услуги, предназначенные только для одного потребителя и ликвидируемые в процессе потребления, т.е. не существующие после того, как они были использованы данным экономическим агентом. При этом каждый потребитель конкурирует с другими за приобретение своей доли нужного ему блага. Конкурентные блага не допускают совместное пользование группой потребителей.

Если же потребление блага одним экономическим агентом не будет означать невозможность его использования другим, причем такое использование не будет сопряжено с дополнительными затратами, то это благо будет неконкурентным. Потребление такого блага одним индивидом не приводит к уменьшению его потребления любым другим.

Частное благо – это конкурентное исключаемое благо. Множество примеров частных благ можно найти потребительских товаров. Таковыми, например, являются такие традиционные предметы потребления, как продукты питания, одежда, жилье. Чистое общественное благо – это неконкурентное и неисключаемое благо. Примерами чистых общественных благ могут служить национальная оборона и безопасность, фундаментальная наука, городское освещение.

Помимо крайних случаев частных и чистых общественных благ наблюдаются и промежуточные ситуации так называемых смешанных товаров и услуг, которые представляют собой одновременно конкурентные и неисключаемые либо исключаемые и неконкурентные блага. К смешанным относятся так называемые клубные и перегружаемые общественные блага (табл. 1.1).

Клубные блага являются исключаемыми из потребления для всех остальных экономических агентов, кроме тех, кто получил к ним доступ, но при этом они обладают свойством неконкурентности в использовании. К примеру, потребитель услуг кабельного телевидения не конкурирует с другими зрителями за объём просмотра, но доступ к каналам он может получить лишь за абонентскую плату.

Перегружаемые общественные блага – это неисключаемые, но конкурентные блага. Начиная с некоторого их количества, появление дополнительного потребителя снижает полезность, получаемую остальными. Такая ситуация возникает, когда количество их пользователей начинает превышать имеющийся их объем или потенциальную емкость. Примерами перегружаемых общественных благ являются чистый воздух, пастбища, биоресурсы мирового океана, бесплатные автомобильные дороги, общественные пляжи, публичные библиотеки и др. Доступ к ним не требует оплаты, но индивидам приходится конкурировать друг с другом за необходимый им объем потребления. Проявления перегружаемости можно наблюдать, например, на автомобильных дорогах общего пользования в «часы пик», в городские скверах и парках в периоды проведения массовых мероприятий, при использовании бесплатного интернета в публичных местах в условиях высокого трафика.

Рисунок 1.1. Виды экономических благ

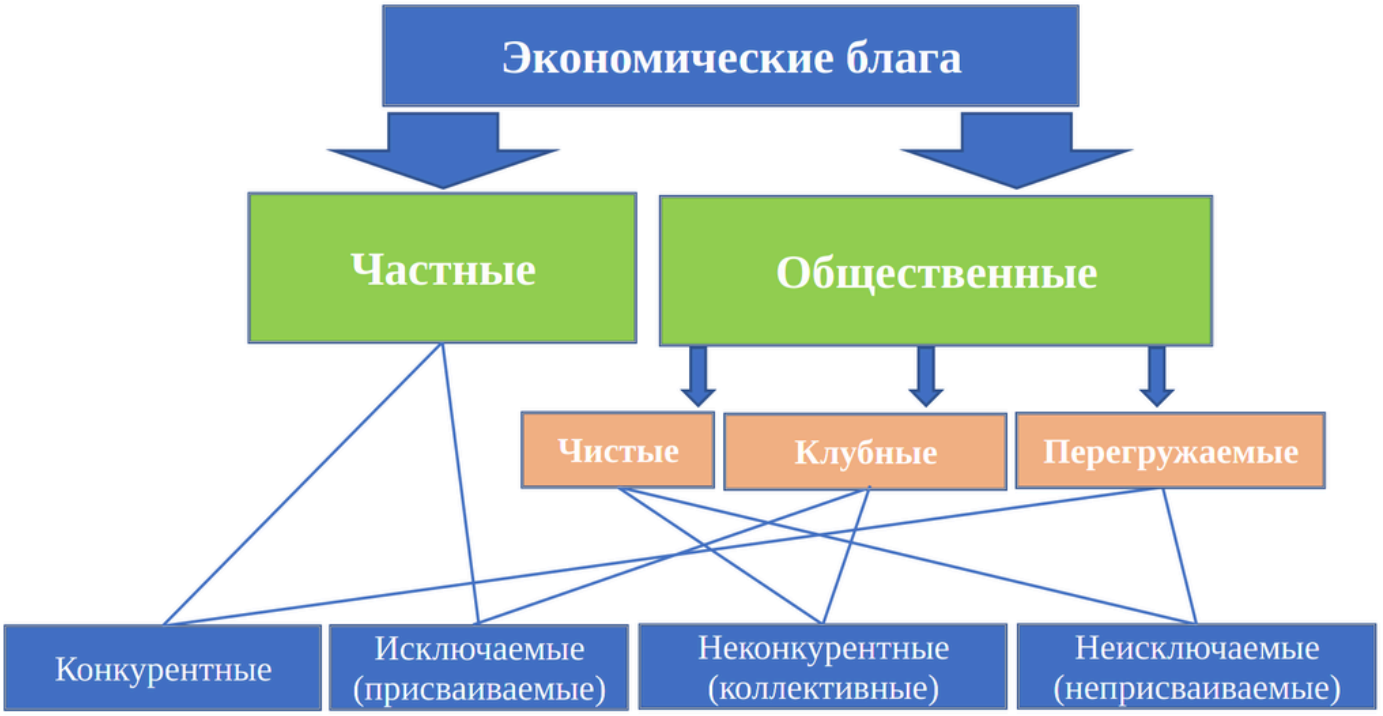


Таблица 1.1. Классификация благ

	Исключаемость		
Да	Нет		
Конкурентность	Да	Частные блага	Перегружаемые общественные блага
Нет	Клубные блага	Чистые общественные блага	

В качестве потребителей могут выступать отдельные индивидуумы и семьи, или домашние хозяйства. Кроме того, потребителями могут быть более крупные социальные общности, выделяемые по различным принципам, такие, как, например, роды, племена, общины, коммуны, общественные организации, а также коллективы иного рода, в том числе даже столь широкие, как народности и нации. Исходно будем предполагать, что потребители тождественны индивидуумам, всегда, однако, имея в виду и возможное более широкое толкование понятия «потребитель». Это упрощение позволит отложить рассмотрения распределения потребления благ и расходов на их приобретение внутри названных выше коллективов; т.е. вопросов, связанных с использованием общественных благ, которые в отличие от частных относятся к сфере не индивидуального, а коллективного потребления, до последней главы учебника.

БОЛЬШАЯ РОССИЙСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ	Заглянем в Большую российскую энциклопедию: Экономические блага

1. В дальнейшем круг анализируемых благ будет расширен за счет включения в него досуга, использование которого так же, как и потребление продуктов и услуг, приносит индивидууму полезность. ↩
2. Антипина О.Н. Экономические блага // Научно-образовательный портал «Большая российская энциклопедия». Режим доступа: <*https://bigenc.ru/c/ekonomicheskie-blaga-5d93e3*>, свободный. ↩

1.2. Логика анализа предпочтений потребителя

Пусть в экономике существуют *l* продуктов. Присвоим каждому из товаров индекс h, $h = 1, \ldots, l$. Набор из *l* потребительских благ обозначим через x. Потребительский набор товаров, или потребительская корзина, x – это произвольный вектор, состоящий из неотрицательных действительных чисел. Множество потребляемых продуктов, или потребительское множество *X* – это совокупность всех x. Оно представляет собой весь неотрицательный вещественный ортант [1] R_{+^l}.

В дальнейшем анализе будем опираться на важные информационные предпосылки. Мы полагаем наличие полноты информации хотя бы у одного хозяйствующего субъекта или у всех экономических агентов в совокупности. Другими словами, не допускается ситуация, когда массивы или элементы информации не доступны ни одному из субъектов в экономике. В данном разделе будет использоваться еще более сильное предположение о полной рациональности всех экономических агентов. Тем самым, исключается ограниченная рациональность. Под ограниченной рациональностью понимается отсутствие информации у субъекта о полном наборе возможных вариантов собственных поступков, а также действий остальных контрагентов и внешних сил или же его незаинтересованность в использовании имеющейся информации в планировании своего поведения.

Использование аппарата математической логики позволяет рассматривать базовые предпосылки рациональности потребительских предпочтений не как аксиомы, а в качестве подлежащих доказательству утверждений. Это дает возможность выстроить как ординалистскую теорию потребительского выбора, так и теорию принятия общественных решений на едином, мощном фундаменте.

Пусть x_1, x_2, x_3 – это варианты организации хозяйственной деятельности, а $\succsim_i$ – упорядочение этих альтернатив некоторым индивидуумом, которого мы обозначим индексом *i*. Выражение $x_1 \succsim_i x_2$ означает, что альтернатива x_1 является для него предпочтительной или безразличной по отношению к x_2. Присвоим значение 1 выбранной альтернативе, а 0 – отвергнутой. Тогда отношение $x_1 \succsim_i x_2$ можно представить как булеву функцию, заданную таблично (табл. 1.2).

Таблица 1.2. Отношение предпочтения как булева функция

x_1	x_2	$x_1 \succsim_i x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, независимые переменные которой определены на множестве $E^2 = \{0, 1\}$ ($x_i = \alpha_i$, где $\alpha_i \in E^2, i = 1, \ldots, n$), называют булевой функцией, или функцией алгебры логики [2], если она принимает значения $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \delta_i, i = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$, так же на множестве E^2.

Очевидно, что множество булевых значений $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ конечно и саму функцию можно задать, расположив наборы переменных в лексикографическом порядке, т.е. по возрастанию, и указав ее значения на каждом наборе коэффициентов (табл. 1.3).

Таблица 1.3. Табличное представление булевой функции

x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \ldots, x_n)$
0	0	...	0	0	δ_0
0	0	...	0	1	δ_1
0	0	...	1	0	δ_2
...	...	...	...	...	...
α_1	α_2	...	α_{n-1}	α_n	...
...	...	...	...	...	...
1	1	...	1	1	δ_{2^n-1}

Приведем примеры булевых функций одной и двух переменных (табл. 1.4-1.5).

Таблица 1.4. Булевы функции одной переменной

x	0 (тождественный нуль)	1 (тождественная единица) [3]	*x* (тождественная функция)	$\overline{x}$ (отрицание, или инверсия)
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Константы 0 и 1 – это две особенные функции, которые не имеют существенных переменных. Некоторая, *i*-я булева переменная является существенной, если найдется такой набор значений остальных переменных $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$, что изменение *i*-й переменной при неизменных остальных переменных приводит к изменению значения функции [4]: $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$.

Таблица 1.5. Элементарные булевы функции двух переменных

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

Функция логического умножения, или конъюнкция, $f_1(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 = x_1 \bullet x_2 = x_1 x_2$ отвечает на вопрос, является ли истинным утверждение, состоящие из двух положений и совпадающее как с одним из них, так и с другим. Очевидно, что если хотя бы одно из утверждений, составляющих данное, является ложными, то и итоговое утверждение будет ложным. Итоговое утверждение будет истинным, только если оба из его составляющих будут верными.

Функция логического сложения, или дизъюнкция, $f_2(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ отвечает на вопрос, является ли истинным утверждение, состоящие из двух положений и совпадающее хотя бы с одним из них. Очевидно, что если оба из утверждений, составляющих данное, являются ложными, то и итоговое утверждение будет ложным. Если хотя бы одно из утверждений, составляющих данное, верно, то и итоговое утверждение будет истинным.

Логическая функция суммы по модулю два $f_3(x_1, x_2) = x_1 \bigoplus x_2$ определяется по аналогии с тем же алгебраическим понятием – как остаток от деления $(x_1 + x_2)$ на 2.

Эквивалентность $f_4(x_1, x_2) = x_1 \quad x_2 = x_1 \equiv x_2$ подразумевает истинное утверждение, только если значения переменных совпадают.

При определении импликации [5] $f_5(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$ учитывается, что, поскольку ложное утверждение не несет в себе никакой позитивной информации, из неверного утверждения может следовать как ложь, так и истина.

Последние булевы функции двух переменных – это штрих Шеффера $f_6(x_1, x_2) = x_1/x_2$ и стрелка Пирса $f_7(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$, которые представляют собой соответственно отрицание конъюнкции $f_6(x_1, x_2) = \overline{x_1 \wedge x_2}$ и дизъюнкции $f_7(x_1, x_2) = \overline{x_1 \vee x_2}$.

Свойства элементарных булевых функций позволяют сформулировать базовые законы формальной логики (табл. 1.6).

Доказательство данных законов осуществляется путем обоснования эквивалентности соответствующих формул [6], т.е. равенства реализуемых ими булевых функций [7].

Таблица 1.6. Элементарные булевы функции и законы формальной логики

Название закона	Формулировка закона
Ассоциативности: а) конъюнкции; б) дизъюнкции; в) суммы по модулю два	а) $x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \wedge x_2) \wedge x_3$; б) $x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3$; в) $x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3$
Коммутативности: а) конъюнкции; б) дизъюнкции; в) суммы по модулю два	а) $x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1$; б) $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$; в) $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$
Дистрибутивности – а) конъюнкции относительно дизъюнкции; б) дизъюнкции относительно конъюнкции	а) $(x_1 \vee x_2) \wedge x_3$ $(x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3)$; б)$(x_1 \wedge x_2) \vee x_3$ $(x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3)$
Двойного отрицания	$\overline{\overline{x}} = x$
Де Моргана	$\overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$; $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2$
Поглощения	$x_1 \vee (x_1 \wedge x_2) = x_1$; $x_1 \wedge (x_1 \vee x_2) = x_1$
Противоречия [8]	$x \wedge \overline{x} = 0$
Исключенного третьего	$x \vee \overline{x} = 1$
Идемпотентности	$x \wedge x = x$; $x \vee x = x$
Операций с константой: а) умножения на константу; б) сложения с константой	а) $x \wedge 1 = x$, $x \wedge 0 = 0$; б) $x \vee 1 = 1$, $x \vee 0 = x$

Пример 1.1. Закон исключенного третьего [9]: $x \vee \overline{x} = 1$

x	$\overline{x}$	$x \vee \overline{x}$
0	1	1
1	0	1

Итак, формула $x \vee \overline{x}$ эквивалентна тождественной единице.

Пример 1.2. Закон де Моргана: $\overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$\overline{x_1 \wedge x_2}$	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Итак, $\overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$, поскольку левая и правая формулы реализуют эквивалентные булевы функции. Остальные свойства элементарных булевых функций доказываются аналогично [10].

Итак, упорядочение $x_1 \succsim_i x_2$ – это отношение следования, или импликации, $x_1 \to x_2$. Действительно, в отношении упорядоченности x_1 «следует за» x_2.

Обычно от ординалистской, или порядковой, функции предпочтений экономического субъекта требуют, чтобы она представляла собой (отличное от константы) отношение полного предпорядка [11], т.е. удовлетворяла следующим свойствам рационального выбора.

Первое свойство – это сравнимость любых возможных вариантов организации хозяйственной деятельности, или полнота данного множества. Для любых вариантов x_1 и x_2 верно $(x_1 \succsim_i x_2) \vee (x_2 \succsim_i x_1)$:

$$(x_1 \succsim_i x_2) \vee (x_2 \succsim_i x_1) = 1. \quad (1.1)$$

Выкладки, приведенные в табл. 1.7, доказывают полноту предпочтений.

Таблица 1.7. Полнота предпочтений

x_1	x_2	$x_1 \succsim_i x_2$	$x_2 \succsim_i x_1$	$(x_1 \succsim_i x_2) \vee (x_2 \succsim_i x_1)$

0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

В частности, при $x_1 = x_2$ следствием полноты предпочтений становится их рефлексивность (табл. 1.8):

$x_1 \succsim_i x_1 = 1.$

Таблица 1.8. Рефлексивность предпочтений

x_1	$x_2 = x_1$	$x_1 \succsim_i x_1$
0	0	1
1	1	1

Второе свойство – это транзитивность отношения упорядоченности. Формула $(x_1 \succsim_i x_2) \wedge (x_2 \succsim_i x_3) \to (x_1 \succsim_i x_3)$ верна для любых наборов x_1, x_2, x_3:

$(x_1 \succsim_i x_2) \wedge (x_2 \succsim_i x_3) \to (x_1 \succsim_i x_3) = 1. (1.2)$

Транзитивность предпочтений доказана в табл. 1.9.

Таблица 1.9. Транзитивность предпочтений

x_1	x_2	x_3	$x_1 \succsim_i x_2$	$x_2 \succsim_i x_3$	$(x_1 \succsim_i x_2) \wedge (x_2 \succsim_i x_3)$	$(x_1 \succsim_i x_3)$	$(x_1 \succsim_i x_2) \wedge (x_2 \succsim_i x_3) \to (x_1 \succsim_i x_3)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Свойства (1.1) – (1.2) выполняются только для трех булевых функций двух переменных – тождественной единицы и импликаций $x_1 \to x_2$, $x_2 \to x_1$. Поэтому, если переменные не являются фиктивными, т.е. отношение предпочтения отлично от константы, то свойства (1.1) – (1.2) можно использовать в качестве аксиом рационального упорядочения хозяйственных альтернатив.

Обозначим через $\overline{\succ_i}$ отношение строгого предпочтения. Оно означает, что должны одновременно выполняться соотношения $x_1 \succsim_i x_2$ и $x_2 \overline{\succsim_i} x_1$, или в формальной записи:

$x_1 \succ_i x_2 = (x_1 \succsim_i x_2) \wedge \left(\overline{x_2 \succsim_i x_1}\right).$

Доказательство этого свойства отношения строго предпочтения приведено в табл. 1.10.

Таблица 1.10. Отношение строго предпочтения

x_1	x_2	$x_1 \succ_i x_2$	$x_1 \succsim_i x_2$	$x_2 \succsim_i x_1$	$\overline{x_2 \succsim_i x_1}$	$(x_1 \succsim_i x_2) \wedge \left(\overline{x_2 \succsim_i x_1}\right)$
0	0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0

Очевидно, что, если x_1 хуже, чем x_2, то x_2 лучше, чем x_1:

$\left(\overline{x_1 \succsim_i x_2}\right) \to (x_2 \succ_i x_1) = 1. (1.3)$

Кроме того, аналогично нестрогому отношению предпочтения (1.2), легко доказать, что строгое предпочтение транзитивно:

$(x_1 \succ_i x_2) \wedge (x_2 \succ_i x_3) \to (x_1 \succ_i x_3) = 1. (1.4)$

Обозначим через $\sim_i$ отношение безразличия. Оно означает, что одновременно должны выполняться соотношения $x_1 \succsim_i x_2$ и $x_2 \succsim_i x_1$:

$x_1 \sim_i x_2 = (x_1 \succsim_i x_2) \wedge (x_2 \succsim_i x_1).$

Доказательство этой характеристики отношения безразличия приводится в табл. 1.11.

Таблица 1.11. Отношение безразличия

x_1	x_2	$x_1 \sim_i x_2$	$x_1 \succsim_i x_2$	$x_2 \succsim_i x_1$	$(x_1 \succsim_i x_2) \wedge (x_2 \succsim_i x_1)$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Обозначим через *S* множество допустимых альтернатив и назовем его предъявлением. Пусть *C*(*S*) – множество таких альтернатив x_1 в *S*, что для каждого x_2 в *S* $x_1 \succsim_i x_2$. Несложно проверить, что:

$x_1 \succ_i x_2 \Longleftrightarrow x_1 – единственный элемент в C(\{x_1, x_2\}). (1.5)$

Очевидно, $\left(\overline{x_1 \succsim_i x_2}\right) \wedge \left(\overline{x_2 \succsim_i x_1}\right) \to (x_1 \succ_i x_2)$, а значит, $C(\{x_1, x_2\}) = \{x_1, x_2\}$. Итак, знание *C*(*S*), где $S = \{x_1, x_2\}$ – множество, состоящее из двух альтернатив, полностью определяет отношения $\succ_i$ и $\sim_i$, а значит, и $\succsim_i$. Но, по определению,

знание $\succsim_i$ полностью определяет функцию выбора *C*(*S*) для всех возможных наборов альтернатив *S*. Итак, выбор в произвольном множестве определяется выбором во всевозможных соответствующих ему двухэлементных подмножествах [12].

---

1. Здесь и далее будем обозначать через R_{+^l} неотрицательный ортант *l*-мерного пространства действительных чисел: $R_{+^l} \equiv \{x \in R^l, x \geqslant 0\}$. ↩
2. См.: Редькин Н.П. Дискретная математика. 2-е изд. – СПб.: Лань, 2006. В силу того, что каждая переменная x_i может принимать два значения {0, 1}, количество возможных значений аргумента, состоящего из *n* переменных, равно 2^n. ↩
3. Булевская тождественная единица известна как один из аристотелевских законов формальной логики – «закон тождества», который утверждает, что всякая мысль обязана иметь строго определенный смысл (см.: Нуреев Р.М. Курс микроэкономики. – М.: Норма, 2008). ↩
4. В противном случае переменная называется несущественной, или фиктивной. ↩
5. С данной функцией непосредственно связан логический закон достаточного основания (Лейбница), который требует, чтобы каждое верное утверждение обосновывалось другими, справедливость которых была уже прежде установлена (Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. – М.: Едиториал УРСС, 2003). ↩
6. Формулой над некоторым множеством булевых функций *M* называется такая функция алгебры логики, аргументом которой является либо булева переменная, либо значение некоторой логической функции из данного множества *M*. ↩
7. Булевы функции равны, когда каждая из них представляет собой другую с точностью до изъятия и/или добавления фиктивной переменной. ↩
8. Закон противоречия, известный еще со времен Аристотеля, гласит, что два противоположных суждения о едином предмете не могут быть справедливыми одновременно. На данном законе основан, в частности, принцип доказательства утверждения от противного $((\overline{x}_1 \to x_2) \vee (\overline{x}_1 \to \overline{x}_2)) \to x_1$: если отрицание x_1 ведет к противоречию, то x_1 – истинно (Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Введение в математическую логику. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982). ↩
9. В соответствии с аристотелевым законом исключенного третьего из двух одновременных противоположных суждений о едином предмете одно – обязательно будет справедливым (Нуреев Р.М. Указ. соч.). ↩
10. Любая булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ может быть реализована в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы $f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1}} (x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n})$, если $f(x_1, \ldots, x_n)$ не равна тождественно нулю; и в виде совершенной конъюнктивной нормальной формы $f(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{\substack{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 0}} \left(x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n}\right)$, если $f(x_1, \ldots, x_n)$ не равна тождественной единице. Здесь $\sigma_i = (0, 1)$, $x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i при \sigma_i = 1, \\ \overline{x}_i при \sigma_i = 0, \end{cases}$ *i*=1,...,*n*; то есть $x_i^{\sigma_i} = 1$ и $x_i^{\sigma_i} = 0$ тогда и только тогда, когда $x_i = \sigma_i$. Таким образом, любая булева функция может быть реализована в виде формулы через инверсию, дизъюнкцию и конъюнкцию и даже только через отрицание и конъюнкцию, поскольку $x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2}$; либо только через инверсию и дизъюнкцию в силу тождества $x_1 \wedge x_2 = \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2}$. Кроме того, любая булева функция может быть представлена своим полиномом Жегалкина $f(x_1, \ldots, x_n) = \bigoplus_{i_1 i_2 \ldots i_k} a_{i_1 i_2 \ldots i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$, где $a_{i_k} = (0, 1)$, а значит, реализована формулой над системой булевых функций, состоящей из 0, 1, конъюнкции и суммы по модулю два. Системы булевых функций, задающие произвольную булеву функцию, называются функционально полными.
Например, совершенная конъюнктивная и дизъюнктивная нормальная формы для функции, реализованной формулой $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \bigoplus x_2) \to (x_2 \wedge x_3)$, таковы: $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$. В качестве еще одного примера выпишем полином Жегалкина для одной из элементарных булевых функций двух переменных – "штриха Шеффера" (f_6): $f(x_1, x_2) = 1 \bigoplus x_1 x_2$. В справедливости этих утверждений можно убедиться, рассмотрев табличное представление соответствующих формул.
Отметим, что помимо функций алгебры логики существуют функции *k*-значной логики, которые, как и их переменные, принимают значения из множества $E^k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ (Редькин Н.П. Дискретная математика. 2-е изд. – СПб.: Лань, 2006). ↩
11. Иногда такое отношение называют слабым упорядочением (Эрроу К.Дж. Коллективный выбор и индивидуальные ценности. – М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 2004; Debreu G. Theory of value. – N.Y.: Willey; L.: Chapman & Hall, 1959). ↩
12. Эрроу К.Дж. Коллективный выбор и индивидуальные ценности. – М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 2004. ↩

1.3. Теорема Дебре о представимости предпочтений потребителя функцией полезности

Полезность – это мера удовлетворенности экономического агента потреблением хозяйственных благ. Принятие экономических решений не всегда предполагает количественную, числовую соизмеримость преимуществ и недостатков, выгод и издержек: зачастую возможно и достаточно порядковое, качественное сопоставление. Качественная характеристика товаров описывается порядковой функциональной зависимостью, которая ранжирует различные блага по уровню их качества, упорядочивает их с точки зрения качественной значимости для экономических агентов.

Одной из важнейших предпосылок в теории потребительского выбора является непрерывность предпочтений: для любой потребительской корзины $x \in X$, множества наборов, которые не хуже, чем *x*, т.е. верхние лебеговские множества $\left\{\widehat{x} \in X | \widehat{x} \succsim x\right\}$, и не лучше, чем *x*, т.е. нижние лебеговские множества $\left\{\widehat{x} \in X | x \succsim \widehat{x}\right\}$, предполагаются замкнутыми относительно *X*. Подмножества действительных чисел являются замкнутыми тогда и только тогда, когда они содержат свои границы.

В теории выбора традиционно вводится предпосылка о (строгой глобальной) ненасыщаемости потребления, согласно которой общая полезность «строго» возрастает при увеличении объемов потребляемых товаров. Здесь имеется в виду, что если для некоторых потребительских корзин $\widehat{x}, \widetilde{x} \in X \subset R_{+^l}$ выполнено неравенство $\widehat{x}_h \leqslant \widetilde{x}_h$, $h = 1, \ldots, l$, причем для некоторого индекса $k \in \{1, \ldots, l\}$ неравенство является строгим $\left(\widehat{x}_k < \widetilde{x}_k\right)$, то для соответствующих им величин полезности справедливо такое же неравенство $U\left(\widehat{x}\right) < U\left(\widetilde{x}\right)$.

В противоположность порядковому индикатору предпочтений экономического субъекта количественная функция полезности U ставит в соответствие различным наборам из *l* потребляемых товаров, или потребительским корзинам, содержащимся во множестве $X \subset R_{+^l}$, числовую степень значимости этих наборов для потребителя, которая может принимать любые неотрицательные действительные значения .

С формальной точки зрения взаимосвязь между порядковой, ординалистской и количественной, кардиналистской концепциями полезности зафиксирована в теореме Дебре. Теорема Дебре (в слабой форме) утверждает, что если множество *X* качественно сравнимых наборов благ, которое должно быть замкнутым подмножеством пространства действительных чисел R^l, представляет собой отношение полного предпорядка, т.е. удовлетворяет свойствам рациональности (1.1) – (1.2), и в добавление к этому данный индикатор потребительских предпочтений обладает свойствами непрерывности и строгой глобальной ненасыщаемости, то ему соответствует количественная, числовая функция полезности, которая при этом будет непрерывной [1] $\left(U \in C^0\right)$.

Докажем вначале существование числовой функции полезности, ставящей в соответствие произвольному набору неотрицательных действительных чисел $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_l)$ определенное действительное число [2] $U(\widetilde{x})$. Выделим в корзине товаров $\widetilde{x}$ максимальный $(\overline{x})$ и минимальный $\left(\underline{x}\right)$ элементы. В силу строгой глобальной ненасыщаемости и транзитивности (1.2) предпочтений векторы, каждая из *l* координат которых равна $\overline{x}$ либо $\underline{x}$, являются соответственно не менее и не более предпочтительными для потребителя, по сравнению с корзиной $\widetilde{x}$: $(\underbrace{\overline{x}, \ldots, \overline{x}}_{l}) \succsim (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_l)$; $(\underbrace{\underline{x}, \ldots, \underline{x}}_{l}) \precsim (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_l)$. Покажем теперь, что на отрезке $\left[\overline{x}, \underline{x}\right]$ существует такое число x^0, что *l*–мерный вектор $(\underbrace{x^0, \ldots, x^0}_{l})$ будет эквивалентен, с точки зрения потребителя, корзине $\widetilde{x}$: $\left(x^0, \ldots, x^0\right) \qquad (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_l)$. Если $\overline{x} = \underline{x}$, то отрезок $\left[\overline{x}, \underline{x}\right]$ вырождается в точку, которая представляет собой искомый товарный набор, эквивалентный $\widetilde{x}$. Рассмотрим теперь более интересный случай, когда $\overline{x} \neq \underline{x}$. Каждому числу x на отрезке $\left[\overline{x}, \underline{x}\right]$ поставим в соответствие *l*-мерный вектор, каждая компонента которого равна x: $(\underbrace{x, \ldots, x}_{l})$. В силу полноты предпочтений (1.1), данный вектор будет либо не хуже, либо не лучше, чем $\widetilde{x}$. Сформируем из таких векторов верхнее и нижнее лебеговские множества по отношению к корзине $\widetilde{x}$. Эти множества будут непустыми, поскольку в них содержатся хотя бы корзины $(\underbrace{\overline{x}, \ldots, \overline{x}}_{l})$ и $(\underbrace{\underline{x}, \ldots, \underline{x}}_{l})$ соответственно. Поскольку, по предположению о непрерывности предпочтений, данные множества являются замкнутыми, они будут содержать свои границы, в частности, верхнее лебеговское множество – нижнюю границу, а нижнее лебеговское множество – верхнюю границу, которые будут совпадать и представлять собой искомую корзину ($\underbrace{x^0, \ldots, x^0}_{l}$), эквивалентную, с точки зрения потребителя, корзине $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_l)$.

Положим $U\left(\widetilde{x}\right) = x^0$. В силу строгой глобальной ненасыщаемости предпочтений данное значение будет единственным. Покажем, что такое сопоставление функции полезности $U(x)$ ординалистским отношениям предпочтения потребителя является корректным, т.е. $U\left(\widehat{x}\right) \geqslant U\left(\check{x}\right)$ тогда и только тогда, когда $\widehat{x} \succsim \check{x}$.

Действительно, в соответствии с построением функции полезности векторы $(\underbrace{U\left(\widehat{x}\right), \ldots, U\left(\widehat{x}\right)}_{l})$ и $\widehat{x}$ эквивалентны с точки зрения потребителя. Соответственно, $(\underbrace{U\left(\check{x}\right), \ldots, U\left(\check{x}\right)}_{l}) \sim \check{x}$. Если $U\left(\widehat{x}\right) \geqslant U\left(\check{x}\right)$, то в силу ненасыщаемости предпочтений $\widehat{x} \succsim \check{x}$. И наоборот, следуя нашей конструкции функции полезности, переходим от отношения предпочтения-безразличия между корзинами $\widehat{x}$ и $\check{x}$ $\left(\widehat{x} \succsim \check{x}\right)$ к сопоставлению эквивалентных им корзин $(\underbrace{U\left(\widehat{x}\right), \ldots, U\left(\widehat{x}\right)}_{l})$ и $(\underbrace{U\left(\check{x}\right), \ldots, U\left(\check{x}\right)}_{l})$: $(\underbrace{U\left(\widehat{x}\right), \ldots, U\left(\widehat{x}\right)}_{l}) \succsim (\underbrace{U\left(\check{x}\right), \ldots, U\left(\check{x}\right)}_{l})$. В силу ненасыщаемости предпочтений, последнее отношение означает, что $U\left(\widehat{x}\right) \geqslant U\left(\check{x}\right)$. Таким образом, функция полезности построена корректно.

Наконец, замкнутости всех верхних и нижних лебеговских множеств необходимо и достаточно для того, чтобы действительная функция была непрерывна [3]. Итак, теорема Дебре (в слабой форме) доказана.

Ординалистский индикатор предпочтений предполагает возможность количественной оценки полезности с точностью до монотонного возрастающего преобразования. Для упрощения формальных выкладок на основе теоремы Дебре в нашем анализе, как правило, порядковая функция потребительских предпочтений будет сводиться к своему числовому представлению, т.е. непрерывной функции полезности. Это позволяет преодолеть качественные различия между теорией потребления, которая является ординалистской, и кардиналисткой теорией производства. Кардиналистские функции полезности и производственные функции обладают аналогичными характеристиками, что дает возможность анализировать их одновременно в одних и тех же терминах.

---

1. Теорема Дебре в сильной форме снимает требование ненасыщаемости предпочтений (Debreu G. Theory of value. – N.Y.: Willey; L.: Chapman & Hall, 1959). ↩

2. Gravelle H., Rees R. Microeconomics. – 2nd ed. – L., N.Y.: Longman, 1992. ↩

3. Александров П.С. Введение в общую теорию множеств и функций. – М.; Л.: ОГИЗ, 1948. ↩

1.4. Характеристики функций полезности и производственных функций в статике

Как и ранее, будет обозначать через x набор из l продуктов или ресурсов, приобретаемый и используемый некоторым потребителем или производителем: $x = \{x_h\}_{h=1}^{l}$. Производственная функция показывает максимально доступные объемы выпуска продукции предприятием при различных комбинациях используемых факторов производства. Производственная функция действует и принимает значения в области неотрицательных действительных чисел $\left(Q : R_{+}^{l} \to R_{+}\right)$.

Традиционно предполагается, что производственная функция $Q : R_{+^l \to R_{+}}$ обладает рядом фундаментальных характеристик. Во-первых, стандартной предпосылкой является определенная гладкость производственной функции, как минимум ее принадлежность классу непрерывных функций $\left(Q \in C^0\right)$.

От производственной функции может требоваться и бóльшая степень гладкости, зачастую дважды (непрерывная) дифференцируемость $\left(Q \in C^2\right)$. При этом первые частные производные технологии по объему используемых средств производства и рабочей силы называются соответственно предельными продуктами труда $\left(MP_L = \frac{\partial f(K,L)}{\partial L}\right)$ и капитала $\left(MP_K = \frac{\partial f(K,L)}{\partial K}\right)$.

Следующим важным предположением относительно технологии является эффективность производства: производственная функция является «строго возрастающей» на *X*. Здесь имеется в виду, что если для некоторых производственных наборов $\widehat{x}, \widetilde{x} \in X \subset R_{+^l}$ выполнено неравенство $\widehat{x}_h \leqslant \widetilde{x}_h$, $h = 1, \ldots, l$, причем для некоторого индекса $k \in \{1, \ldots, l\}$ неравенство является строгим $\left(\widehat{x}_k < \widetilde{x}_k\right)$, то для соответствующих им объемов производства справедливо такое же неравенство $Q\left(\widehat{x}\right) < Q\left(\widetilde{x}\right)$. Когда технология производства обладает достаточной степенью гладкости, осуществление экономического анализа в области эффективного производства предполагает, что предельные продукты факторов производства положительны: $MP_K > 0, MP_L > 0$.

Третьей фундаментальной предпосылкой служит так называемое отсутствие «рога изобилия»: если производитель не использует ресурсов $(x_h = 0, h = 1, \ldots, l)$, то он не выпускает никакой продукции: $Q(x) = 0$.

Введем несколько понятий из выпуклого анализа, используемой при аналитической и графической характеристике хозяйственной деятельности. В пространстве $R \times X$ множество

$$gr \equiv \{(\eta, x) \in R \times X | \eta = f(x)\} (1.6)$$

называется графиком функции $f : X \to R$.

Соответственно, множество

$$epigr \equiv \{(\eta, x) \in R \times X | \eta \geq f(x)\} (1.7)$$

называется надграфиком,
а множество

$$opigr \equiv \{(q, x) \in R \times X | f(x) \geq q\} (1.8)$$

– подграфиком, или технологическим множеством, данной функции. Технологическое множество – это совокупность допустимых технологических способов организации производства данной продукции.

Здесь *X* – подмножество пространства действительных чисел произвольного конечного числа измерений. Для целей нашего исследования требуется рассматривать *l*-мерное пространство вещественных чисел, причем достаточно ограничиться анализом его неотрицательного ортанта R_{+^l}.

Из приведенных выше определений видно, что график функции принадлежит как ее надграфику, так и подграфику.

Функция $f : X \to R$ называется выпуклой, если ее надграфик (1.7) – это выпуклое множество. При этом множество *X* называется выпуклым, если для произвольных векторов x_1, x_2 из *X* любой вектор *x*, лежащий на соединяющем их отрезке, так же принадлежит этому множеству: из того, что $x_1, x_2 \in X$, следует, что $x \in X$, где $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, $\lambda \in R$, $\lambda \in [0, 1]$. Таким образом, функция $f : X \to R$ является выпуклой, если при произвольном выборе двух точек $(\eta_1, x_1), (\eta_2, x_2) \in R \times X$ таких, что $\eta_1 \geq f(x_1)$, $\eta_2 \geq f(x_2)$, для любой точки соединяющего их отрезка $(\eta, x) = (\lambda\eta_1 + (1 - \lambda)\eta_2, \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$, $\lambda \in R$, $\lambda \in [0, 1]$, будет выполнено неравенство $\eta \geq f(x)$, т.е.

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda\eta_1 + (1 - \lambda)\eta_2. (1.9)$$

Покажем, что необходимым и достаточным условием выпуклости функции $f : X \to R$ является выполнение неравенства Йенсена:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2); x_1, x_2 \in X, \lambda \in R, \lambda \in [0, 1]. (1.10)$$

Возьмем две точки $(\eta_1, x_1), (\eta_2, x_2)$ на графике функции: $\eta_1 = f(x_1)$, $\eta_2 = f(x_2)$. Поскольку надграфик (1.7) – это выпуклое множество, то есть выполняется соотношение (1.9), где $\lambda \in R$, $\lambda \in [0, 1]$, для них верно неравенство Йенсена (1.10).

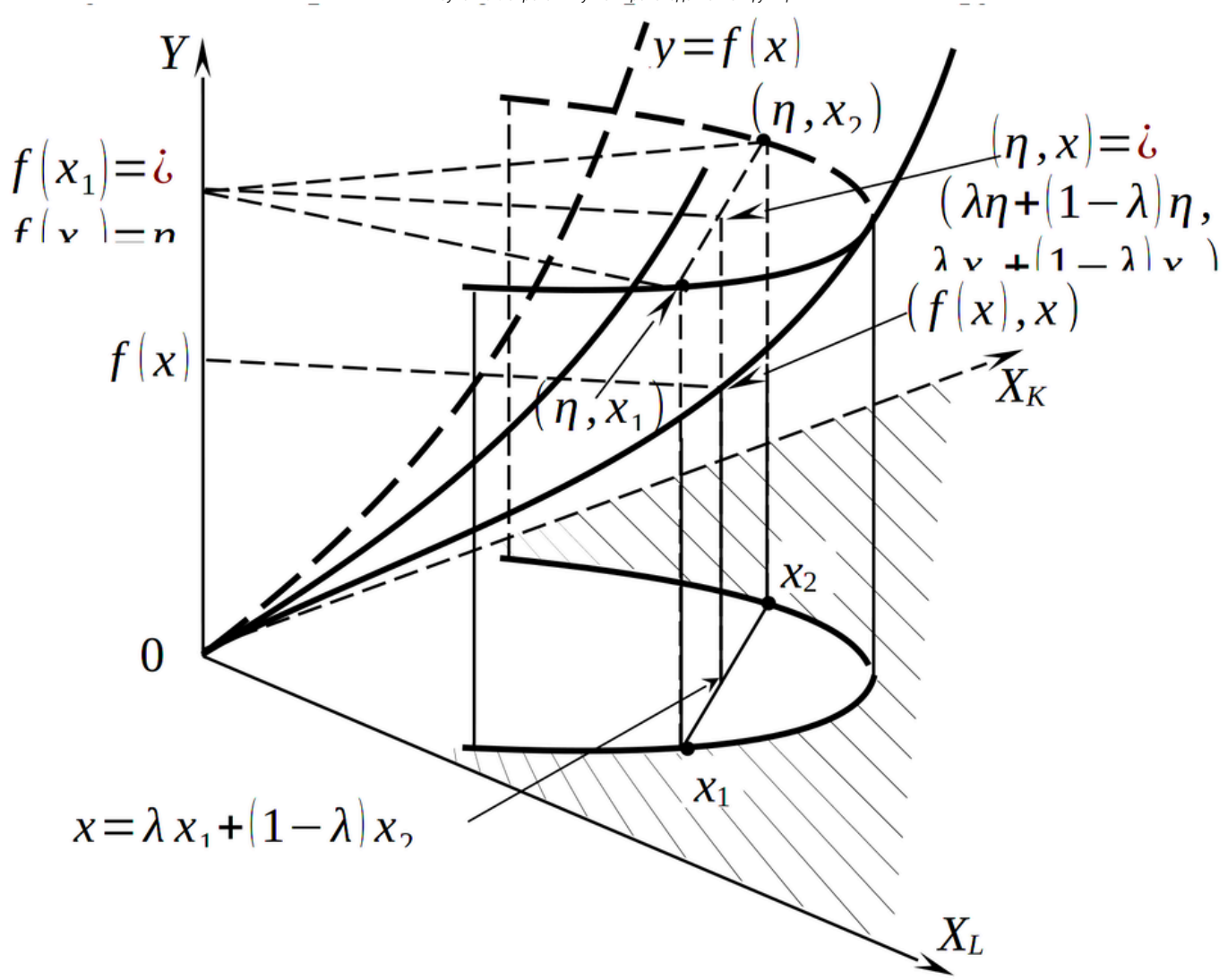
Выберем теперь две точки $(\eta_1, x_1), (\eta_2, x_2)$, принадлежащие надграфику функции: $\eta_1 \geq f(x_1)$, $\eta_2 \geq f(x_2)$. Возьмем $\lambda \in R, 0 \leq \lambda \leq 1$, то есть $1 - \lambda \geq 0$. Тогда $\lambda f(x_1) \leq \lambda\eta_1$, $(1 - \lambda)f(x_2) \leq (1 - \lambda)\eta_2$, а значит, $\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \leq \lambda\eta_1 + (1 - \lambda)\eta_2$. Следовательно, в силу неравенства Йенсена (1.10), имеем $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda\eta_1 + (1 - \lambda)\eta_2$, то есть точка $(\lambda\eta_1 + (1 - \lambda)\eta_2, \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$, $\lambda \in R$, $\lambda \in [0, 1]$, принадлежит надграфику функции, который, тем самым, представляет собой выпуклое множество.

Функция $f : X \to R$ называется строго выпуклой (рис. 1.2), если она является выпуклой и при этом для любых двух точек $(\eta_1, x_1), (\eta_2, x_2)$, принадлежащих графику функции (1.6), никакая внутренняя точка соединяющего их отрезка $(\eta, x) = (\lambda\eta_1 + (1 - \lambda)\eta_2, \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$, $\lambda \in R$, $\lambda \in (0, 1)$, уже не принадлежит графику функции (7.3.1).

Поскольку строго выпуклая функция обязательно является выпуклой, для нее выполняется неравенство Йенсена (1.10). При этом в силу того, что никакая внутренняя точка (η, x) отрезка, соединяющего произвольные две точки $(\eta_1, x_1), (\eta_2, x_2)$, лежащие на графике функции ($\eta_1 = f(x_1), \eta_2 = f(x_2)$), не принадлежит графику, неравенство (1.9) при $\lambda \in (0,1)$ не может выполняться как равенство, а значит, для строго выпуклой функции верно строгое неравенство Йенсена:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2); x_1, x_2 \in X, \lambda \in R, \lambda \in (0,1). (1.11)$$

Рисунок 1.2. Строго выпуклая производственная функция

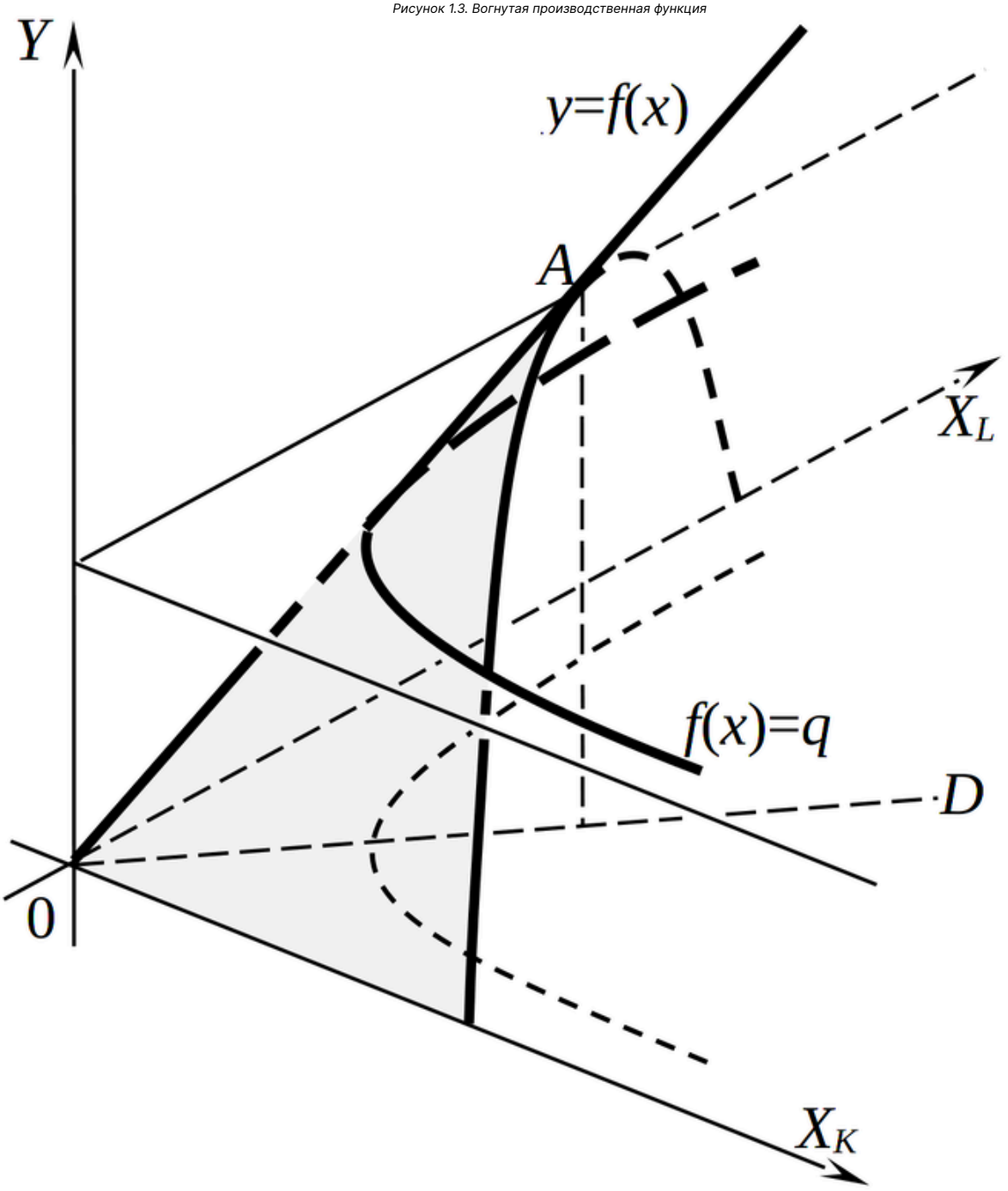


Функция $f: X \to R$ называется вогнутой (рис. 1.3), если противоположная ей по знаку функция $(-f: X \to R)$ является выпуклой. Вогнутость функции $f: X \to R$ имеет место в случае выпуклости надграфика (1.7) обратной к ней по знаку зависимости $(-f: X \to R)$, то есть выпуклыми должны быть множества $\{(\eta, x) \in R \times X | -f(x) < \eta\}$, или $\{(\eta, x) \in R \times X | -\eta < f(x)\}$. Поскольку η – произвольное действительное число, знак минус перед ним в левой части последнего неравенства не играет существенной роли. Переобозначив $q = -\eta$, можно сформулировать условие вогнутости функции как выпуклость ее технологического множества (1.8).

Вогнутая функция $f: X \to R$ характеризуется соотношением, противоположным неравенству Йенсена (1.10):

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2); x_1, x_2 \in X, \lambda \in R, \lambda \in [0,1]. (1.12)$$

Рисунок 1.3. Вогнутая производственная функция



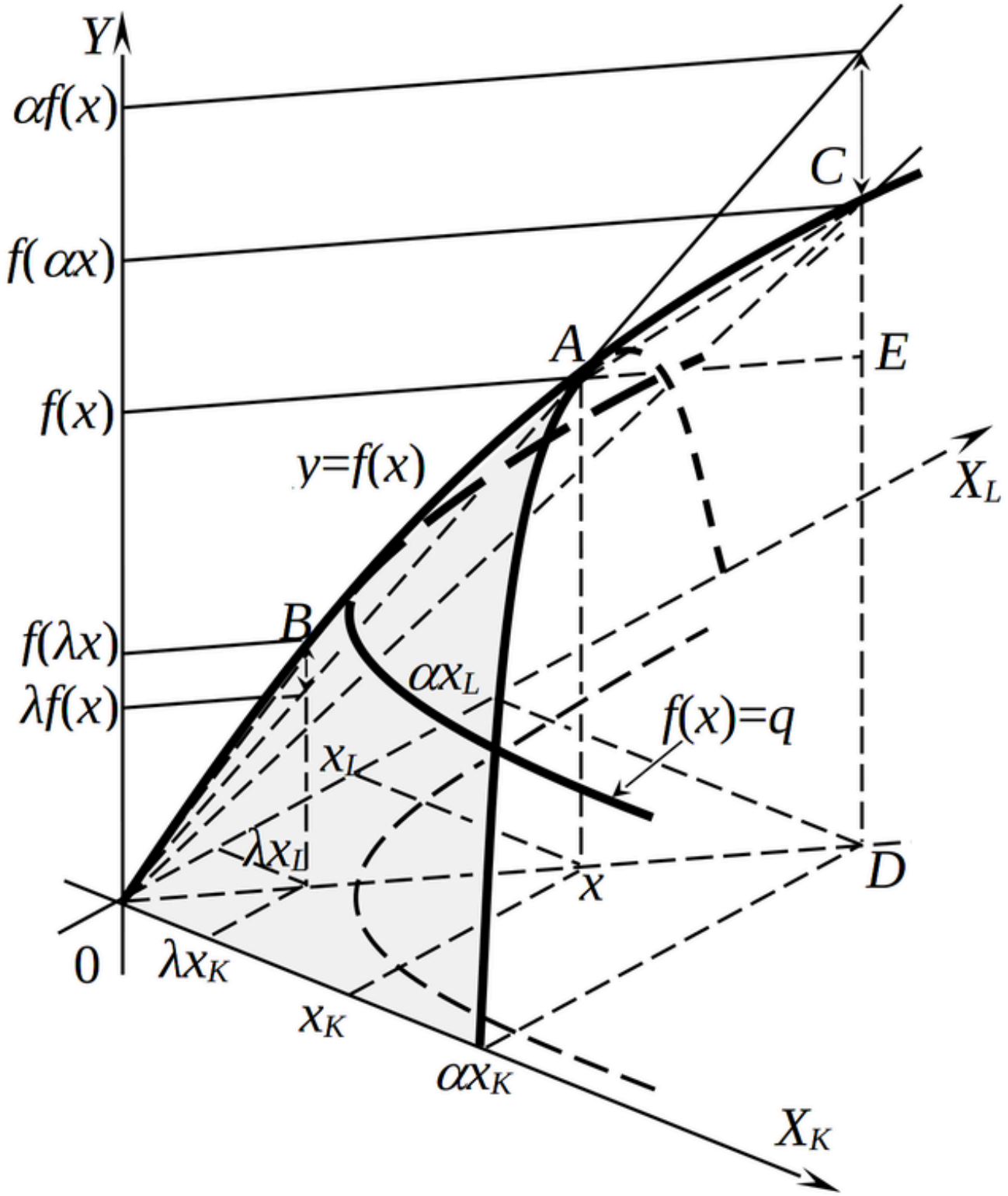
На рис. 1.3 также представлена проекция линии уровня производственной функции на плоскость X_K0X_L – ее изокванта, т.е. геометрическое место различных комбинаций ресурсов, использование которых обеспечивает одинаковый объем производства $\{x \in X | f(x) = q, q \in R\}$.

Функция $f : X \to R$ называется строго вогнутой, если противоположная ей по знаку функция $(-f : X \to R)$ является строго выпуклой. Для функциональной зависимости $f : X \to R$, обладающей свойством строгой вогнутости, будет справедливо соотношение, противоположное строгому неравенству Йенсена (1.11):

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2); x_1, x_2 \in X, \lambda \in R, \lambda \in (0,1). (1.13)$$

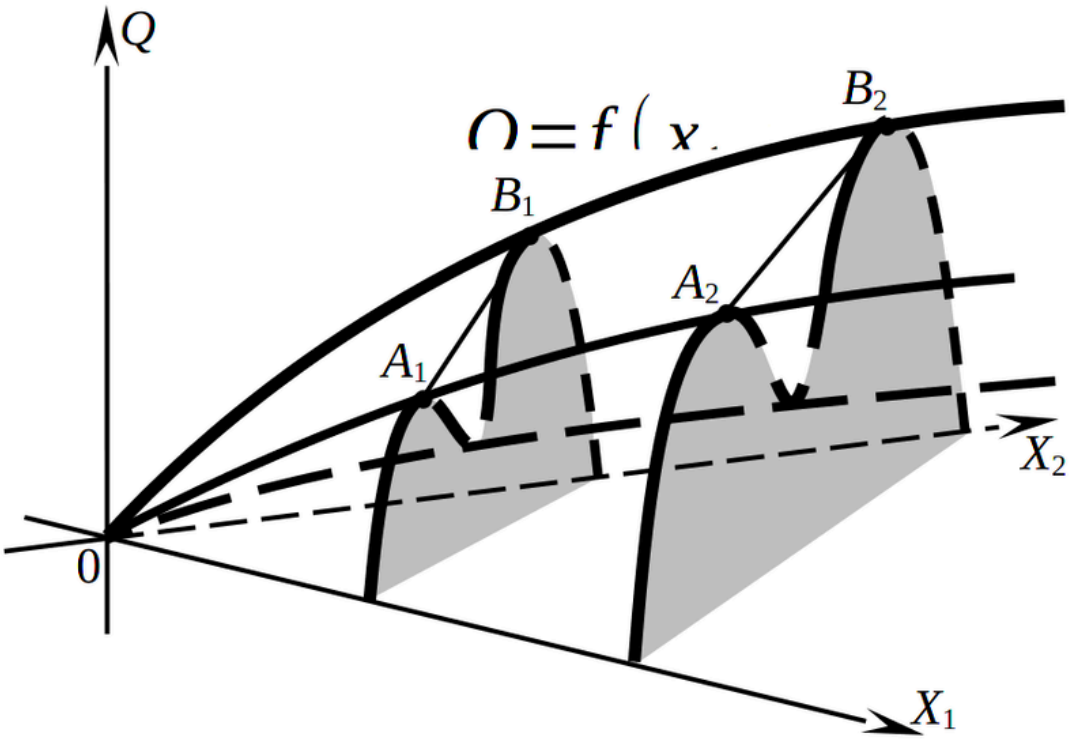
График строго вогнутой производственной функции (либо функции полезности) имеет вид «горки» (рис. 1.4).

Рисунок 1.4. Строго вогнутая производственная функция



На рис. 1.5 показан случай нарушения вогнутости: отрезки, соединяющие соответственно точки A_1 и B_1, A_2 и B_2, не принадлежат подграфику функции.

Рисунок 1.5. Отсутствие вогнутости производственной функции



В случае если производственная функция $f: R_{+^2 \to R_+}$ дважды непрерывно дифференцируема , необходимое и достаточное условие ее строгой вогнутости будет заключаться в том, что при любых ξ_K, ξ_L и допустимых x_K, x_L соответствующая квадратичная форма отрицательна:

$$\frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K^2}\xi_K^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_L \partial x_K}\xi_L\xi_K + \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_L^2}\xi_L^2 < 0. (1.14)$$

Здесь использована принадлежность производственной функции классу гладкости C^2, то есть непрерывность ее вторых частных производных, значения которых, в силу теоремы Юнга, не зависят от порядка дифференцирования [1].

По критерию Сильвестра, квадратичная форма является отрицательно определенной (1.14) тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K^2} < 0, \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K^2} \bullet \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_L^2} > \left(\frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_L \partial x_K}\right)^2; (1.15)$$

то есть если при возрастании порядка главный минор матрицы вторых частных производных

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K^2} & \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K \partial x_L} \\ \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_L \partial x_K} & \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_L^2} \end{pmatrix}$$

меняет значение с отрицательного на положительное.

Функция $f: X \to R$, где X – это выпуклое множество, называется квазивыпуклой, если ее нижние лебеговские, или просто лебеговские, множества $\{x \in X | f(x) \leq \eta, \eta \in R\}$ являются выпуклыми.

Аналогично соотношению между выпуклыми и вогнутыми зависимостями, функция $f: X \to R$, где X – это выпуклое множество, называется квазивогнутой, если выпуклыми являются ее верхние лебеговские множества [2] $\{x \in X | f(x) \geq q, q \in R\}$.

Другими словами, функция $f: X \to R$, где в нашем случае X – выпуклое подмножество R_{+^l}, является квазивогнутой, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in X$ таких, что $f(x_1) \geq q$, $f(x_2) \geq q$ при произвольном $q \in R$ для любой точки соединяющего их отрезка $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ выполняется неравенство $f(x) \geq q$, то есть

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq q, \lambda \in R, \lambda \in [0,1]. (1.16)$$

Пусть для определенности $f(x_1) = q_1$, $f(x_2) = q_2$, причем $q_2 \geq q_1$. Значит, $f(x_1) \geq q_1$ и $f(x_2) \geq q_1$. По определению квазивогнутости $f(x)$, должно выполняться неравенство $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq q_1 = \min\{f(x_1), f(x_2)\}$. Следовательно, определение квазивогнутой функции можно дать еще и следующим образом. Функция $f: X \to R$, где X – это выпуклое множество, является квазивогнутой, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in X$ будет справедливо неравенство

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{f(x_1), f(x_2)\}, \lambda \in R, \lambda \in [0,1]. (1.17)$$

Функция $f: X \to R$, где X – это выпуклое множество, называется строго квазивогнутой, если она является квазивогнутой и для любых двух различных $(x_1 \neq x_2)$ точек (q, x_1) и (q, x_2), принадлежащих графику функции $(f(x_1) = f(x_2) = q)$, никакая внутренняя точка соединяющего их отрезка $(q, x) = (q, \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$, $\lambda \in R, \lambda \in (0,1)$, не принадлежит графику функции (1.6). Другими словами, функция $f: X \to R$, где $X \subset R^l$ является выпуклым множеством, называется строго квазивогнутой, если множество $\{x \in X | f(x) \geqslant t, t \in R\}$ является выпуклым и его граница – кривая безразличия либо изокванта [3] $\{x \in X | f(x) = q, q \in R\}$ – не содержит прямых сегментов.

Покажем, что для строго квазивогнутой функции неравенства (1.16)-(1.17), где $\lambda \in (0,1)$, обязательно будут строгими. Пусть, $f(x_1) = f(x_2) = q$. Предположим, что утверждение неверно – соответствующие неравенства (1.16)-(1.17) выполняются в виде равенств: $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = q = \min\{f(x_1), f(x_2)\}$.

Это означает, что точка (q, x), где $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda \in R, \lambda \in (0,1)$ – внутренняя точка отрезка, соединяющего точки x_1 и x_2, принадлежит графику функции (1.6), чего не может быть по определению строгой квазивогнутости.

Таким образом, функция $f: X \to R$, где в рамках нашего анализа X – выпуклое подмножество R_{+^l}, является строго квазивогнутой, если для любых двух различных точек $x_1 \neq x_2 \in X$ таких, что $f(x_1) \geq q$, $f(x_2) \geq q$ при произвольном $q \in R$ для любой внутренней точки соединяющего их отрезка $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ выполняется неравенство $f(x) > q$, то есть

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > q, \lambda \in R, \lambda \in (0,1). \quad (1.18)$$

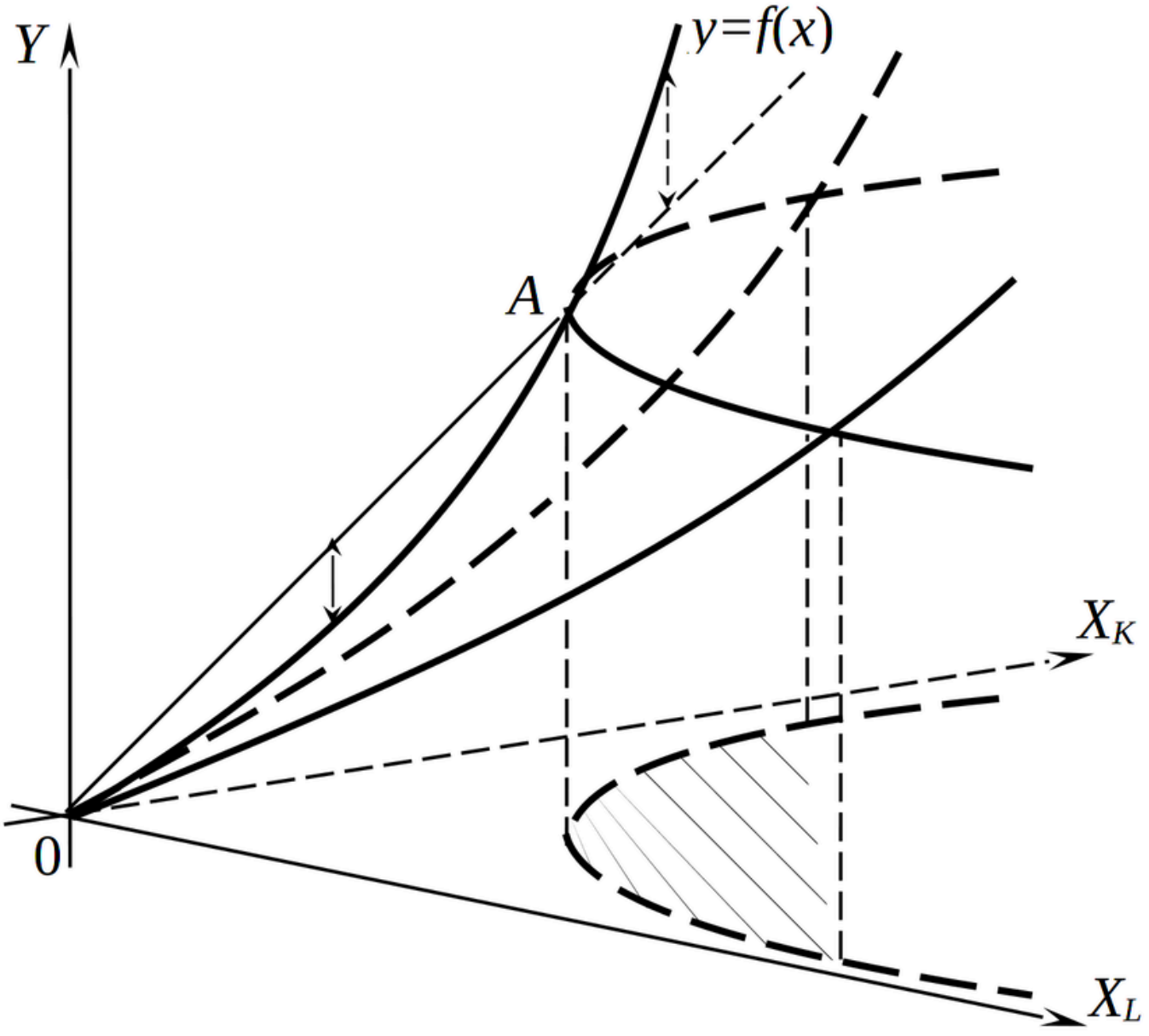
Другими словами, функция $f: X \to R$, где X – это выпуклое множество, является строго квазивогнутой, если для любых двух различных точек $x_1 \neq x_2 \in X$ будет справедливо неравенство:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \min\{f(x_1), f(x_2)\}, \lambda \in R, \lambda \in (0,1).$$

Вогнутые функции обязательно одновременно обладают характеристикой квазивогнутости. Чтобы показать это, возьмем $x_1, x_2 \in R_{+^l}$ и $q \in R$, такие, что $f(x_1) \geqslant q$, $f(x_2) \geqslant q$. Тогда из неравенства, противоположного неравенству Йенсена (1.10), для вогнутой функции имеем: $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda q + (1-\lambda)q = q$, $\lambda \in R$, $\lambda \in [0,1]$. Следовательно, $f: X \to R$ является квазивогнутой. Очевидно, что аналогичные рассуждения справедливы для случая строгой вогнутости и строгой квазивогнутости, когда соответствующие неравенства (1.13) и (1.18) являются строгими, а $\lambda \in (0,1)$.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: квазивогнутая функция не обязана быть вогнутой. Пример графика квазивогнутой функции, которая при этом не является вогнутой, приведен на рис. 1.6.

Рисунок 1.6. Строго квазивогнутая, но невогнутая производственная функция



Итак, квазивогнутой является функция, у которой подграфик (технологическое множество) является выпуклым в любом своем горизонтальном сечении. Другими словами, квазивогнутой является функция, вогнутая в любом своем горизонтальном сечении. Следовательно, Функция является квазивогнутой тогда и только тогда, когда ее второй дифференциал неположителен вдоль произвольной линии уровня:

$$\begin{cases} d^2y = \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K^2}dx_K^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_L \partial x_K}dx_L dx_K + \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_L^2}dx_L^2 \le 0; \\ dy = \frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_K}dx_K + \frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_L}dx_L = 0 \Leftrightarrow dx_L = \frac{-MP_K}{MP_L}dx_K. \end{cases}$$

Из данной системы вытекает следующее неравенство:

$$\left(\frac{\left(\frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_L}\right)^2 \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K^2} - 2\frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_K}\frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_L}\frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K \partial x_L} + \left(\frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_K}\right)^2 \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_L^2}}{\left(\frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_L}\right)^2} \right) dx_K^2 \le 0.$$

Выражение в числителе дроби в левой части неравенства выше представляет собой определитель окаймленной матрицы Гессе со знаком «–»:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_K} & \frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_L} \\ \frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_K} & \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K^2} & \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K \partial x_L} \\ \frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_L} & \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_L \partial x_K} & \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_L^2} \end{pmatrix} (1.19)$$

Таким образом, функция является квазивогнутой тогда и только тогда, когда ее окаймленный гессиан неотрицателен.

Строго квазивогнутой является функция, у которой подграфик (технологическое множество) является выпуклым в любом своем горизонтальном сечении и у которой на изоквантах (кривых безразличия) нет прямых участков. Другими словами, функция является строго квазивогнутой, если она строго вогнута в любом своем горизонтальном сечении. Следовательно, функция является строго квазивогнутой тогда и только тогда, когда ее второй дифференциал отрицателен вдоль произвольной линии уровня:

$$\begin{cases} d^2y = \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K^2}dx_K^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_L \partial x_K}dx_L dx_K + \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_L^2}dx_L^2 < 0; \\ dy = \frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_K}dx_K + \frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_L}dx_L = 0 \Leftrightarrow dx_L = \frac{-MP_K}{MP_L}dx_K. \end{cases}$$

Из данной системы вытекает следующее неравенство:

$$\left(\frac{\left(\frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_L}\right)^2 \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K^2} - 2\frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_K}\frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_L}\frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K \partial x_L} + \left(\frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_K}\right)^2 \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_L^2}}{\left(\frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_L}\right)^2} \right) dx_K^2 < 0.$$

Поскольку выражение в числителе дроби в левой части неравенства выше представляет собой определитель окаймленной матрицы Гессе со знаком «–» (1.19), постольку функция является строго квазивогнутой тогда и только тогда, когда ее окаймленный гессиан положителен.

Строгая квазивогнутость функции будет, в частности, иметь место, если допустить, принадлежность исследуемой зависимости $f: R_{+^2 \to R_+}$ классу дважды непрерывно дифференцируемых функций , а также наложить ограничения на знак частных производных:

$$\frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_K} > 0, \frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_L} > 0; (1.20)$$

$$\frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K^2} < 0, \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_L^2} < 0. (1.21)$$

$$\frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_K \partial x_L} > 0, \frac{\partial^2 f(x_K,x_L)}{\partial x_L \partial x_K} > 0. (1.22)$$

Данные свойства имеют важную экономическую интерпретацию. Свойство (1.20) – положительность предельных продуктов капитала и труда – подразумевает эффективность производства в том смысле, который был сформулирован выше. Свойство (1.21) – это закон убывающей предельной производительности факторов производства. Свойство (1.22) предполагает их взаимодополняемость в том смысле, что предельный продукт каждого из факторов производства будет возрастать при увеличении затрат другого фактора.

При заданном значении функции $(f = const)$ ее дифференциал

$$df(x_K, x_L) = \frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_K}dx_K + \frac{\partial f(x_K,x_L)}{\partial x_L}dx_L$$

равен нулю $(df = 0)$, поэтому вдоль линии уровня выполняется равенство:

$$MRTS_{KL} \equiv \frac{-dx_L}{dx_K}\Big|_{f=const} = \frac{\partial f/\partial x_K}{\partial f/\partial x_L} = \frac{MP_K}{MP_L}. (1.23)$$

Предельная норма технологического замещения положительна $MRTS_{KL} > 0$, поскольку первые частные производные функции – предельные продукты капитала и труда – положительны (1.20).

Продифференцируем $MRTS_{KL}$ (1.23), учитывая равенство в условии (1.22) вторых смешанных частных производных, в силу теоремы Юнга, а также свойства (1.20)-(1.21):

$$\frac{d}{dx_K}\left(\frac{dx_L}{dx_K}\right)\Big|_{f=const} = \frac{-\left(\frac{\partial f}{\partial x_L}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_K^2} - 2\frac{\partial f}{\partial x_K}\frac{\partial f}{\partial x_L}\frac{\partial^2 f}{\partial x_K \partial x_L} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_K}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_L^2}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_L}\right)^3} > 0. (1.24)$$

Положительность производной $MRTS_{KL}$ в соотношении (1.24) гарантирует строгую выпуклость линии уровня, которая вместе с убыванием линии уровня в силу предпосылки (1.20) обеспечивает строгую квазивогнутость функции.

В силу того, что квадратичная форма (1.14) отрицательна при любых ξ_K и ξ_L, для строго вогнутой функции всегда будет справедливо неравенство (1.24), где в качестве ξ_K можно взять $\partial f/\partial x_L$, а в качестве ξ_L – рассматривать $(-\partial f/\partial x_K)$. Знак перед удвоенным произведением ξ_K, ξ_L и $\partial^2 f/\partial x_K \partial x_L$ не играет принципиальной роли в силу произвольного значения ξ_K и ξ_L, что и было использовано при выборе $\xi_L = \frac{-\partial f}{\partial x_K}$, который позволяет компенсировать соответствующие формальные различия в знаках суммирования в квадратичной форме (1.14) и в числителе (1.24). Это свидетельствует о том, что для любой строго вогнутой функции автоматически выполняется принципиальная для определения строгой квазивогнутой зависимости (в классе гладкости C^2) характеристика, которая заключается в убывании (1.24) предельной нормы замещения (1.23).

Тем не менее, условий (1.20)-(1.22) будет еще недостаточно, чтобы гарантировать положительность определителя матрицы вторых частных производных – гессиана – а значит, строгую вогнутость функции (1.15). Строгая вогнутость является более сильным, ограничительным предположением относительно характеристик технологии производства и потребления, нежели строгая квазивогнутость.

С экономической точки зрения строго квазивогнутую зависимость, изображенную на рис. 1.6, можно трактовать не только как производственную функцию, но и как функцию полезности $U = f(x_1, x_2)$. На рис. 1.7 в трехмерном пространстве потребительского выбора изображена типичная поверхность полезности, на которой находятся линии ее фиксированного уровня $(U = \overline{U} = const)$. Проекция линии уровня поверхности полезности на координатную плоскость $X_1 0 X_2$ – это кривая безразличия, т.е. геометрическое место точек, соответствующих различным комбинациям товаров, использование которых в потреблении дает одинаковый уровень полезности экономического агента: $\left\{x \in X | f(x) = \overline{U}, \overline{U} \in R\right\}$.

Рисунок 1.7. Неоклассическая функция полезности

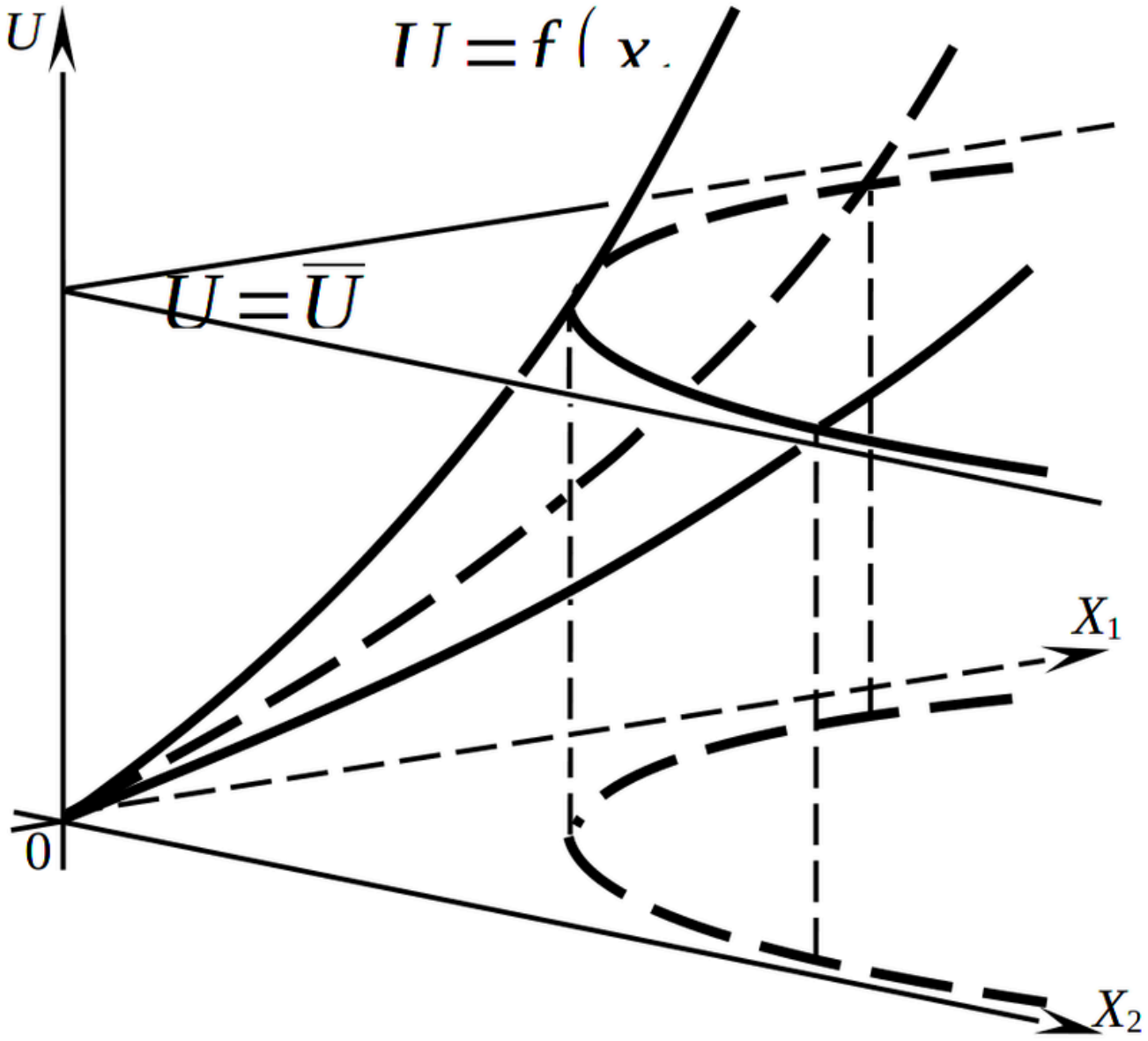
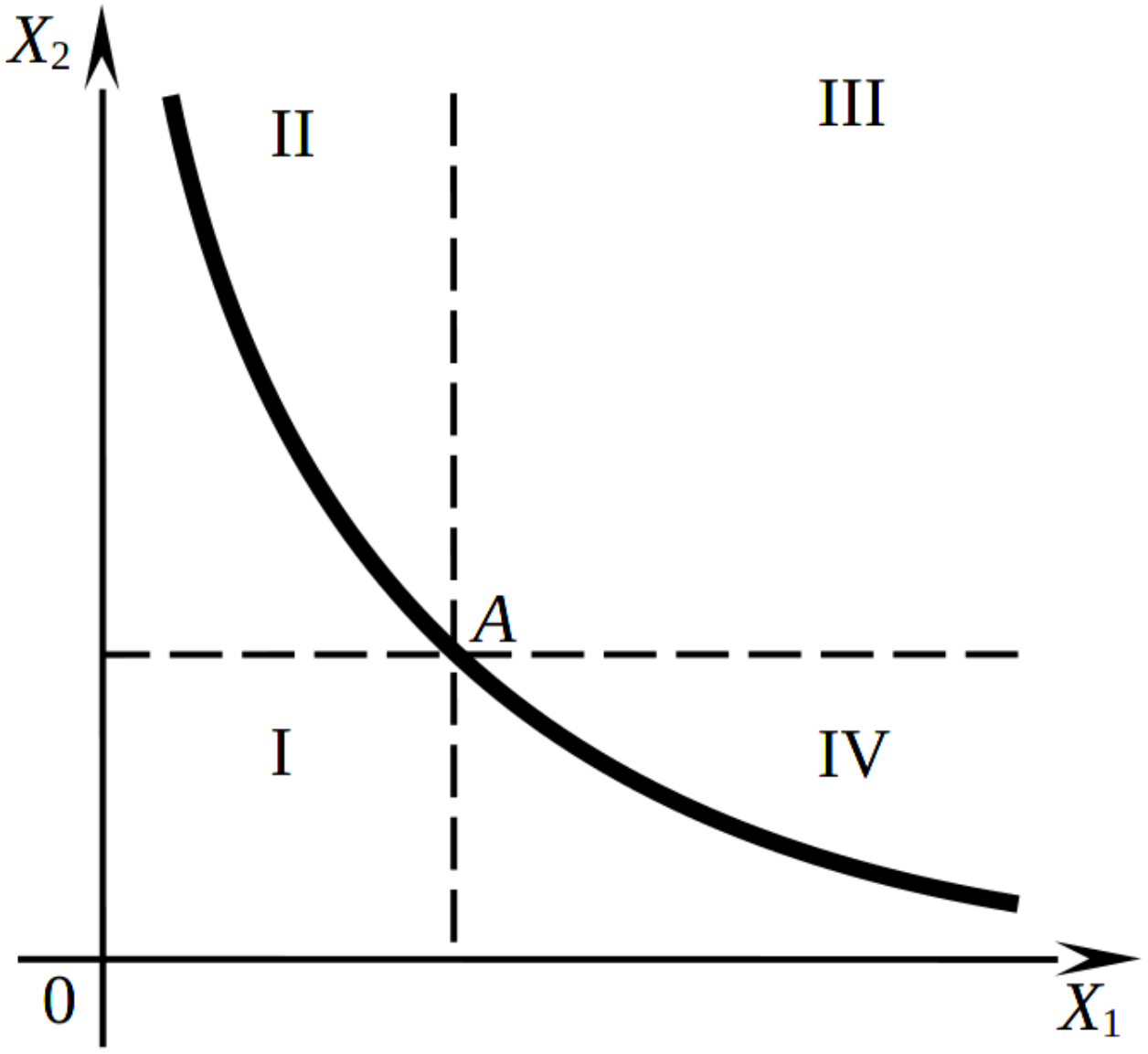


Рисунок 1.8. Кривая безразличия



Вследствие предположения о ненасыщении кривая безразличия, расположенная дальше от нуля (в положительном ортанте), соответствует более высокому уровню потребительского удовлетворения. Поэтому на рис. 1.8 корзины, эквивалентные *A*, с точки зрения данного потребителя, располагаются либо во II, либо в IV квадрантах. Следовательно, кривая безразличия – это убывающая зависимость объемов потребления одного из товаров x_2 от количества потребляемого другого блага x_1.

В силу предпосылок о транзитивности и ненасыщаемости предпочтений кривые безразличия не могут пересекаться. Действительно, предположим обратное, что две кривые безразличия пересекаются в некоторой точке $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$. Пусть при $x_1 > \widetilde{x}_1$ первая кривая безразличия лежит ниже второй. Зафиксируем наборы *A* и *B* соответственно на первой и второй кривых безразличия таким образом, чтобы они содержали одинаковое количество первого товара: $\widehat{x}_1 > \widetilde{x}_1$. Из предположения о ненасыщении следует, что $U(B) > U(A)$. С другой стороны, наборы $\widetilde{x}$ и *A* лежат на первой кривой безразличия, значит, $U(\widetilde{x}) = U(A)$. Аналогично $U(\widetilde{x}) = U(B)$. Следовательно, в силу транзитивности предпочтений (2.2) $U(A) = U(B)$. Возникшее противоречие с полученным выше неравенством $(U(B) > U(A))$ завершает доказательство.

В теории потребительского выбора, как и в теории производства, часто предполагается достаточно высокая степень гладкости – непрерывная дифференцируемость – функции полезности $U : R_{+^l \to R_+}$, т.е. ее принадлежность классу дважды непрерывно дифференцируемых функций $(U \in C^2)$. При этом для неоклассических функций полезности $U : R_{+^2 \to R_+}$ (см. пример 1.2) традиционно принимаются рассмотренные выше предположения (1.20)-(1.22), гарантирующие строгую квазивогнутость анализируемых зависимостей и имеющие важную экономическую интерпретацию.

В частности, в силу предпосылки о строгой глобальной ненасыщаемости потребления, если функция полезности является дифференцируемой, то предельная полезность как изменение общей полезности при увеличении объемов потребления одного из

товаров на бесконечно малую величину должна быть положительной (1.20):

$$MU_1 = \frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_1} > 0, MU_2 = \frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2} > 0.$$

Первый из активно используемых в теории потребительского выбора законов Госсена утверждает, что потребление каждой дополнительной единицы блага (как в единичный момент потребления, так и при последовательных его актах) должно приносить все меньший прирост полезности для экономического агента. По-другому это утверждение называется законом убывающей предельной полезности (1.21):

$$\frac{\partial^2 U(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} < 0, \frac{\partial^2 U(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} < 0.$$

В основу принципа убывающей предельной полезности исходно был положен психофизиологический закон Вебера–Фехнера, который гласит, что «по мере увеличения силы действия раздражителя ее изменения должны нарастать при условии, что вызываемые ими приросты интенсивности реакции организма сохраняются на заданном уровне» [4]. Из данного закона следует, что при постоянной силе действия раздражителя его приросты будут приводить к снижению интенсивности ответной реакции организма. Это утверждение можно рассматривать в качестве психофизиологического основания закона убывающей предельной полезности потребления какого-либо блага.

Отметим, что по закону Вебера-Фехнера в сильной форме, “изменения интенсивности ответной реакции организма должны быть пропорциональны относительным приростам силы действия раздражителя”, другими словами, $d\gamma = \frac{kd\beta}{\beta}$, где $\beta > 0$ – сила действия раздражителя, а γ – сила ответной реакции организма. Решая данное дифференциальное уравнение, получаем, что $\gamma = k \ln \beta + c$, где константу $c = -k \ln b$ можно определить по начальному условию $\gamma(b) = 0$. Здесь b – это такое действие раздражителя γ, которое не вызывает никакой ответной реакции организма. Таким образом, $\gamma = k(\ln \beta - \ln b)$, т.е. в соответствии с законом Вебера–Фехнера в сильной форме ответная реакция организма линейно зависит от логарифма силы действия раздражителя [5].

Неоклассическим предпосылкам (1.20) – (1.22) соответствует, например, функция потребительских предпочтений Стоуна–Джери [6]:

$$U(x_1, x_2) = (x_1 - a)^c (x_2 - b)^d, x_1 \geq a, x_2 \geq b, (1.25)$$

где $a > 0, b > 0, c > 0$ и $d > 0$ – некоторые постоянные коэффициенты.

Предпочтения Стоуна-Джери (1.25), предполагающие наличие прожиточный минимума (a, b), представляют собой обобщение функции полезности Кобба-Дугласа [7], для которой $a = b = 0$:

$$U(x) = x_1^c x_2^d. (1.26)$$

По определению полный дифференциал полезности, рассчитанный вдоль кривой безразличия, равен нулю:

$$dU(x_1, x_2) = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0.$$

Следовательно, предельная норма замещения (MRS_{12}), представляющая собой отношение изменения потребляемого количества одного товара к бесконечно малому изменению количества другого при постоянном уровне полезности, т.е. отношение дифференциалов объемов потребления товаров, рассчитанных вдоль кривой безразличия, взятое со знаком минус, равна обратному отношению предельных полезностей:

$$MRS_{12} \equiv \frac{-dx_2}{dx_1}\Big|_{U=const} = \frac{MU_1}{MU_2}. (1.27)$$

Она положительна, поскольку первые частные производные функции полезности в силу предположения о строгой глобальной ненасыщаемости потребления положительны. Поэтому линии уровня функции полезности убывают на R_{+^2}. Кроме того, учитывая свойства (1.21) – (1.22), примененные к функции полезности, получаем выражение для второй производной объема потребления второго блага по количеству первого вдоль кривой безразличия:

$$\frac{d}{dx_1}\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)\Big|_{U=const} = \frac{-\frac{\partial U}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \bullet \frac{dx_2}{dx_1}\right) - \frac{\partial U}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \bullet \frac{dx_2}{dx_1}\right)}{\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^2} = \frac{-\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}}{\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^3} > 0.$$

Данное соотношение вместе с убыванием кривых безразличия обеспечивает строгую квазивогнутость функции полезности.

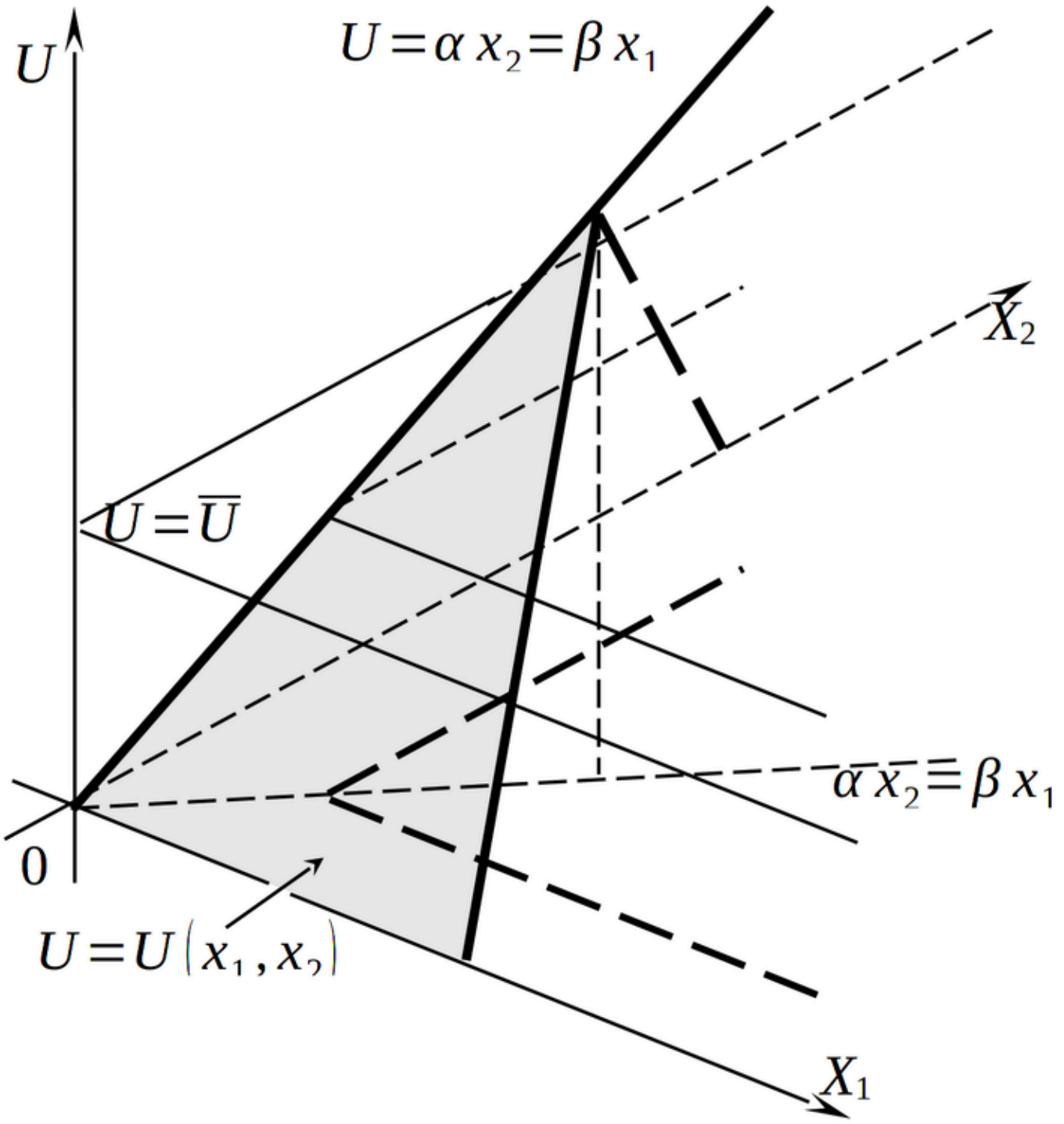
Пример 1.3. Недифференцируемость функции полезности и технологии производства

Если функция полезности не является дважды непрерывно дифференцируемой, а принадлежит лишь классу непрерывных функций $\left(U \in C^0\right)$, то ее графиком может служить, например, трехмерный угол, образованный двумя плоскостями (рис. 1.9). Аналитический вид подобной, леонтьевской функции полезности, описывающей потребление совершенно комплементарных товаров, которые не могут быть использованы порознь и дополняют друг друга с точки зрения данного потребителя, таков:

$$U = \min\left\{\frac{x_1}{\alpha}, \frac{x_2}{\beta}\right\} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{\alpha}, если \frac{x_1}{\alpha} \leqslant \frac{x_2}{\beta}; \\ \frac{x_2}{\beta}, если \frac{x_2}{\beta} < \frac{x_1}{\alpha}; \end{bmatrix} (1.28)$$

где α, β – произвольные вещественные константы.

Рисунок 1.9. Непрерывная, но недифференцируемая леонтьевская функция полезности

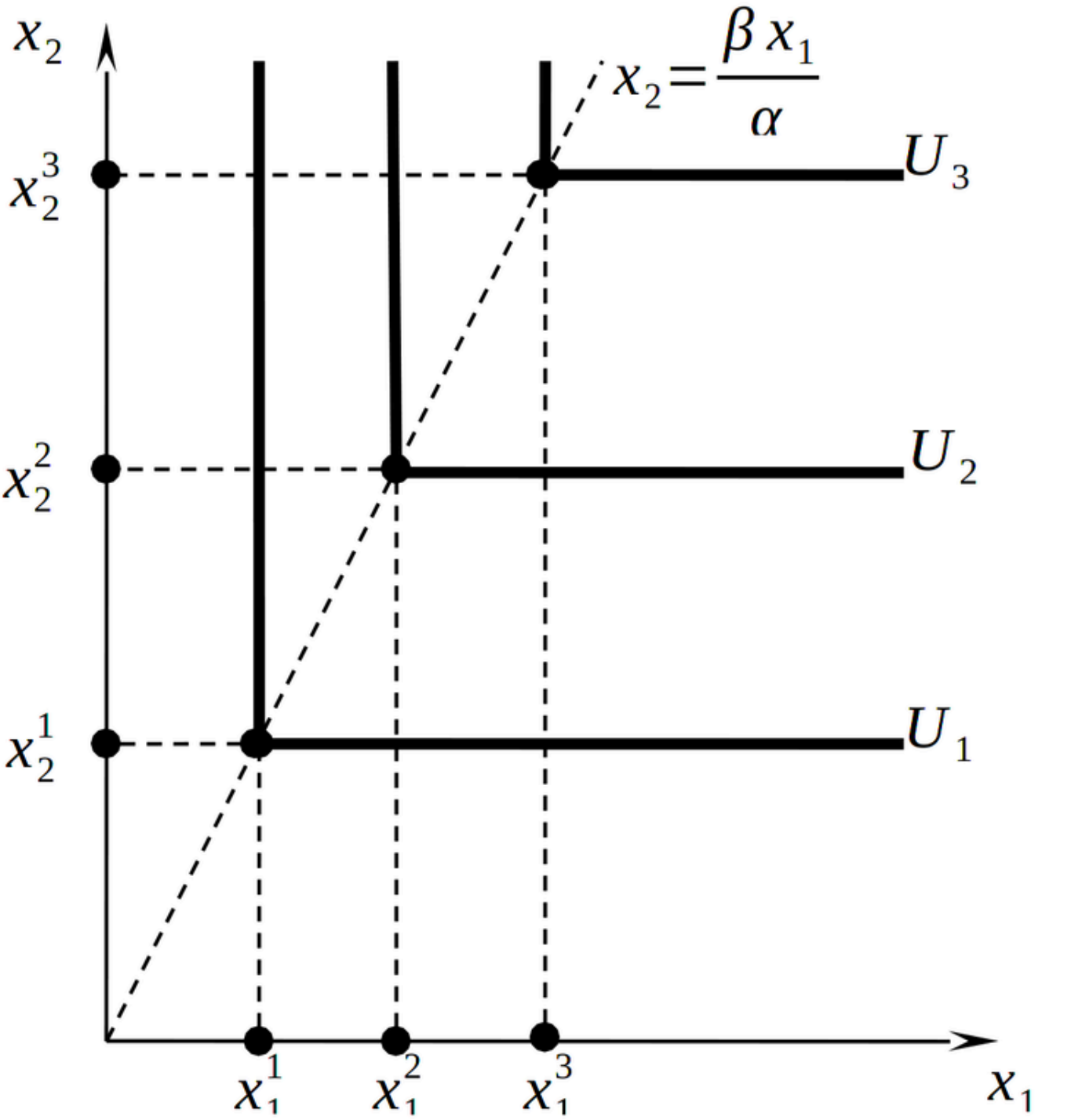


Линии безразличия для совершенных комплементов имеют вид прямых углов (рис. 1.9, 1.10) с вершинами в точках, характеризующихся равенством $\frac{x_1}{\alpha} = \frac{x_2}{\beta}$, или:

$$x_2 = \frac{\beta x_1}{\alpha}. \quad (1.29)$$

Леонтьевская функция полезность является недифференцируемой вдоль луча (1.29). Отметим, что свойство ненасыщаемости потребления здесь выполняется, и чем дальше линия безразличия расположена от начала координат, тем более высокому уровню полезности она соответствует ($U_3 > U_2 > U_1$ на рис. 1.10).

Рисунок 1.10. Карта безразличия для совершенных комплементов



Аналогично, примером недифференцируемой производственной функции может служить леонтьевская технология, описывающая использование совершенно комплементарных ресурсов, которые не могут применяться порознь и дополняют друг друга в рамках данного производственного процесса:

$$Q = \min\left\{\frac{x_1}{\alpha}, \frac{x_2}{\beta}\right\}, (1.30)$$

где коэффициенты α и β – произвольные вещественные константы – характеризуют пропорции использования факторов производства в технологическом процессе. Подобная функция принадлежит лишь классу непрерывных функций $\left(Q \in C^0\right)$. График двухфакторной леонтьевской производственной функции – это замкнутый выпуклый трехгранный конус в неотрицательном ортанте R_{+^3} с вершиной в начале координат, натянутый на координатные орты и некоторый вектор на прямой $\frac{x_1}{\alpha} = \frac{x_2}{\beta}$ (ср. рис. 1.9).

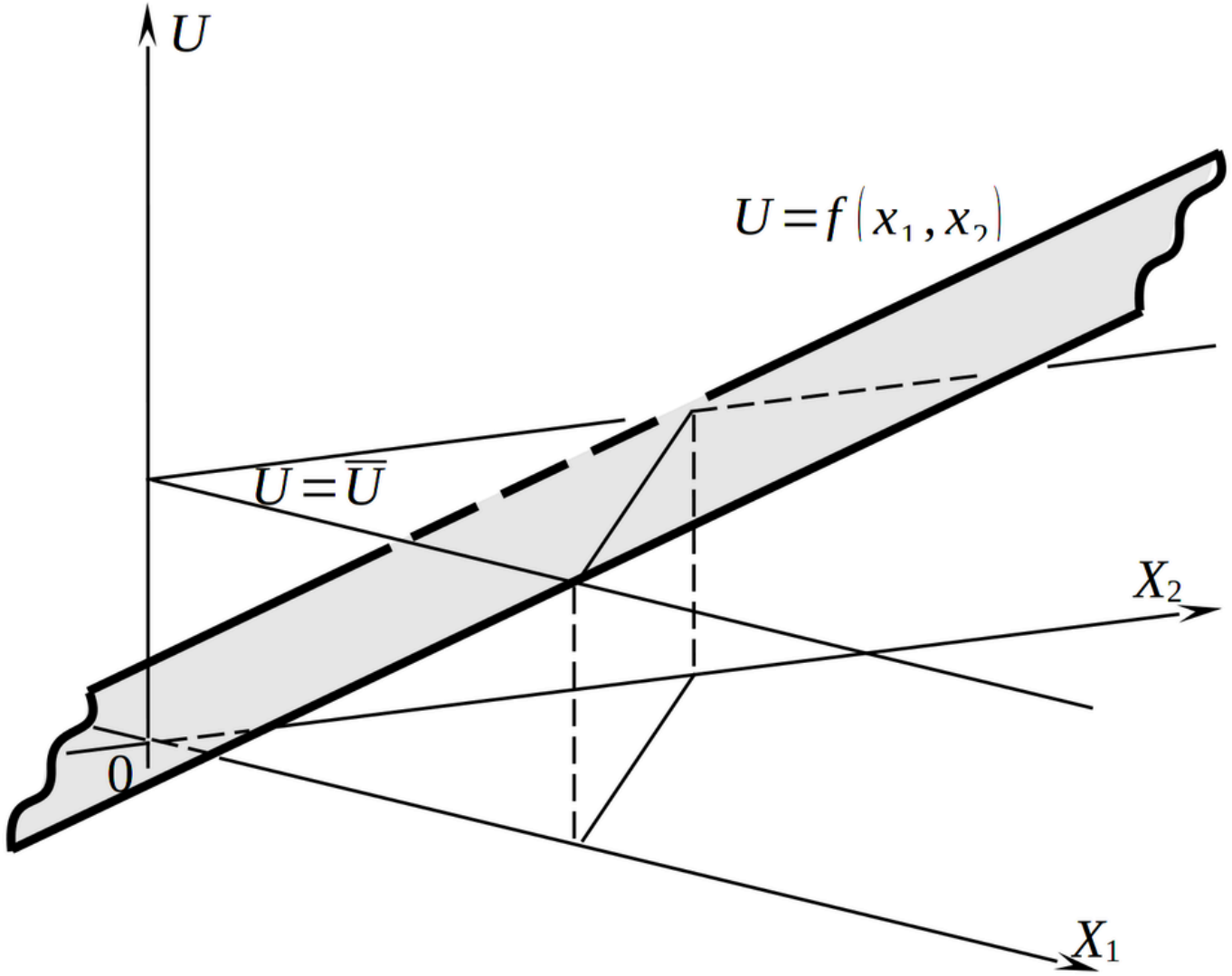
Пример 1.4. Функция полезности с постоянной предельной полезностью товаров

Для некоторых функций полезности могут не выполняться и другие предпосылки из перечисленных выше. В частности, в случае линейной функции полезности:

$$U = \alpha x_1 + \beta x_2, (1.31)$$

где α, β – произвольные вещественные константы (рис. 1.11), не действует первый закон Госсена (1.7).

Рисунок 1.11. Линейная функция полезности

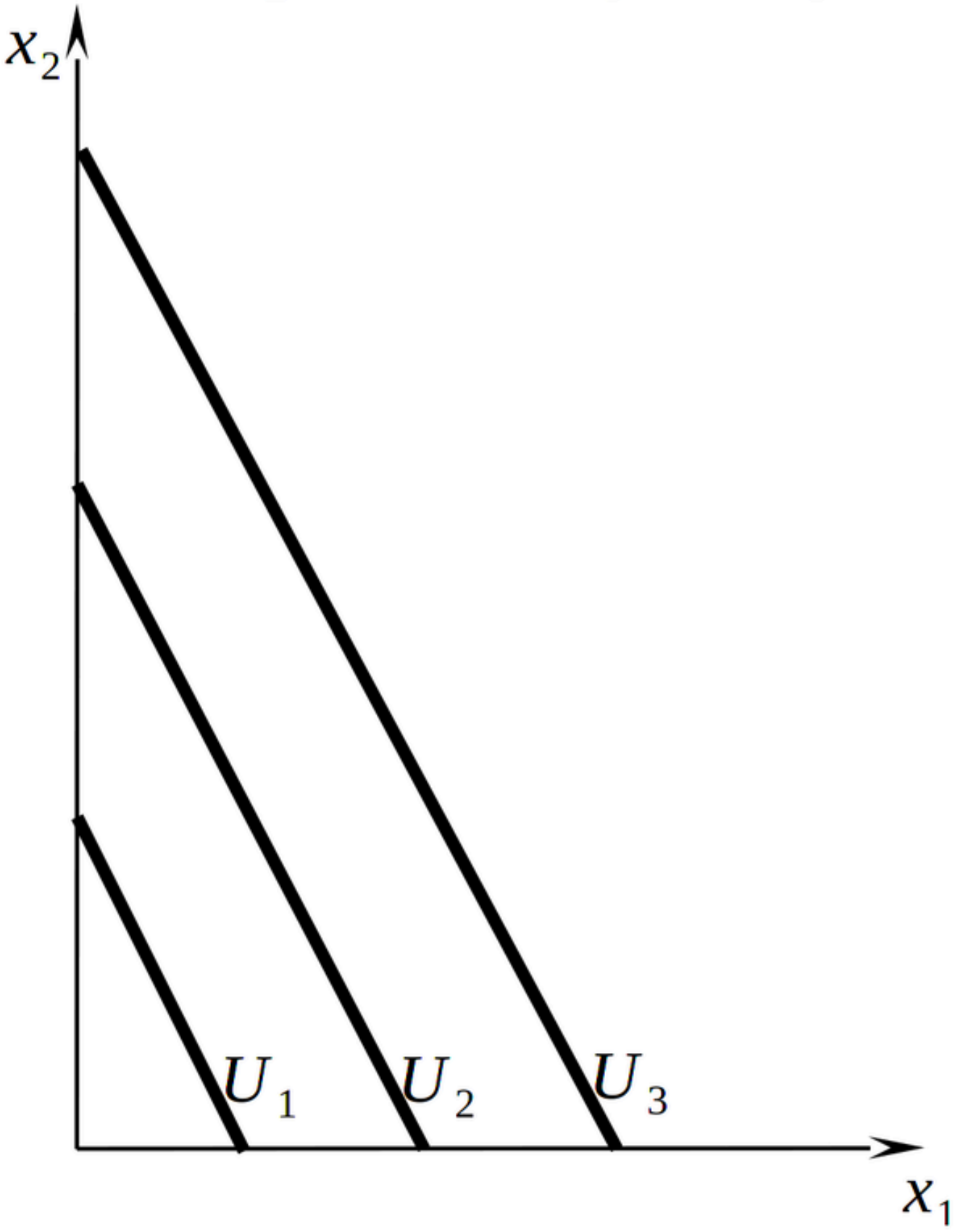


Линии безразличия в случае совершенных субститутов являются прямыми, угловой коэффициент которых (предельная норма замещения) в каждой точке представляет собой постоянную величину (рис. 1.12):

$$MRS_{12} = \frac{-dx_2}{dx_1}\Big|_{U=const} = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (1.32)$$

При этом действует свойство ненасыщаемости потребления, поэтому линия безразличия, более удаленная от начала координат, соответствует более высокому уровню полезности ($U_3 > U_2 > U_1$ на рис. 1.12).

Рисунок 1.12. Карта безразличия для совершенных субститутов

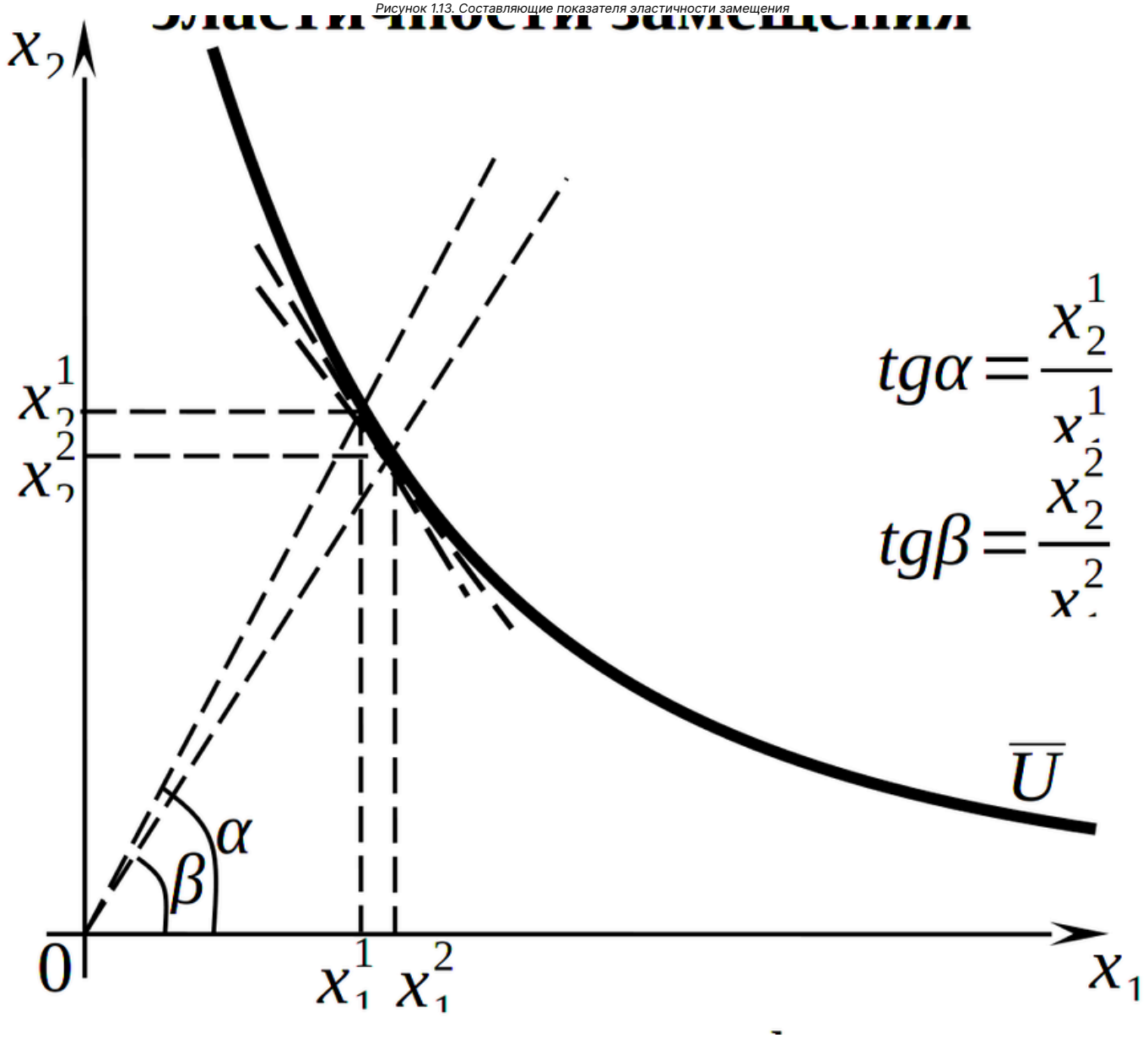


Важной характеристикой потребительских предпочтений является эластичность замещения между продуктами, которая показывает, насколько в процентном выражении изменяется соотношения между объемами их потребления при изменении предельной нормы замещения на один процент:

$$\delta = \frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{dMRS_{12}} \frac{MRS_{12}}{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}.$$

Графически соотношение между объемами потребляемых продуктов характеризуется тангенсом угла наклона луча, исходящего из начала координат и проведенного через данную точку пространства потребительских благ, которая будет располагаться на некоторой кривой безразличия. Соответственно, эластичности замещения показывает, насколько в относительном, процентном выражении должен измениться угловой коэффициент данного луча при его повороте, вызванном перемещением в новую точку на той же кривой безразличия, соответствующей единичному относительному, процентному изменению предельной нормы замещения, т.е. тангенса угла наклона касательной к данной кривой безразличия (рис. 1.13).

Рисунок 1.13. Составляющие показателя эластичности замещения



Важную роль в микроэкономическом анализе играет функция полезности с постоянной эластичностью замещения между продуктами (CES [8]). Постоянство эластичности замещения задает дифференциальное уравнение:

$$\frac{d(x_2/x_1)}{(x_2/x_1)}\frac{(dx_2/dx_1)}{d(dx_2/dx_1)} = \frac{d\ln|x_2/x_1|}{d\ln|dx_2/dx_1|} = \delta,$$

или

$$d\ln\left|\frac{x_2}{x_1}\right| = \delta d\ln\left|\frac{dx_2}{dx_1}\right|.$$

Интегрируя его: $\int d\ln\left|\frac{x_2}{x_1}\right| = \delta\int d\ln\left|\frac{dx_2}{dx_1}\right| + \delta\ln c$, или $\ln\left|\frac{x_2}{x_1}\right| = \delta\ln\left|\frac{dx_2}{dx_1}\right| + \delta\ln c$, получаем новое уравнение [9] $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1/\delta} = c\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)$. Разделяем в нем переменные: $\frac{dx_1}{dx_1^{1/\delta}} = c\left(\frac{dx_2}{x_2^{1/\delta}}\right)$, или $dx_1^{(\delta-1)/\delta} = cdx_2^{(\delta-1)/\delta}$. Интегрируя, получаем выражение кривой безразличия:

$$x_1^{\frac{\delta-1}{\delta}} = cx_2^{\frac{\delta-1}{\delta}} + c_1. \quad (1.33)$$

Полагая $c = \frac{-\beta}{\alpha}$, $c_1 = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{U}{a}\right)^{1/\nu}$, $\nu = \frac{\gamma}{\rho}$, $\varphi = \frac{\delta-1}{\delta}$, приходим к функции полезности CES:

$$U(x_1, x_2) = a\left(\alpha x_1^{\varphi} + \beta x_2^{\varphi}\right)^{\frac{\gamma}{\varphi}}, \varphi \leq 1, \varphi \neq 0. \quad (1.34)$$

Здесь $\gamma > 0$ – это степень однородности функции [10]. Очевидно, что эластичность замещения между продуктами для данной функции полезности составит: $\delta = \frac{1}{1-\varphi}$.

Пронормируем коэффициенты α и β таким образом, чтобы они в сумме давали единицу, т.е. $\beta = 1 - \alpha$. Покажем, что функция полезности CES является обобщением функций Кобба–Дугласа и Леонтьева, которые представляют собой ее предельные случаи. Для этого прологарифмируем функцию CES:

$$\ln U(x_1, x_2) = \ln a + \frac{\gamma}{\varphi} \ln \left(\alpha x_1^{\varphi} + (1-\alpha) x_2^{\varphi} \right). \quad (1.35)$$

Устремив φ к нулю, при раскрытии возникающей неопределенности вида $0/0$ применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{\varphi \to 0} \ln U\left(x_1, x_2\right) = \ln a + \lim_{\varphi \to 0} \frac{\gamma\left(\alpha x_1^{\varphi} \ln x_1 + (1-\alpha) x_2^{\varphi} \ln x_2\right)}{\left(\alpha x_1^{\varphi} + (1-\alpha) x_2^{\varphi}\right)} = \ln a + \gamma\left(\alpha \ln x_1 + (1-\alpha) \ln x_2\right).$$

Потенцируя полученное соотношение, получаем функцию полезности Кобба–Дугласа:

$$U(x_1, x_2) = a x_1^{\gamma\alpha} x_2^{\gamma(1-\alpha)}.$$

Допустим теперь, что $x_1 = \min(x_1, x_2)$, и устремим φ в выражении (1.35) к $-\infty$. При раскрытии возникающей неопределенности вида ∞/∞ вновь воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{\varphi \to -\infty} \ln U\left(x_1, x_2\right) = \ln a + \lim_{\varphi \to -\infty} \frac{\gamma\left(\alpha x_1^{\varphi} \ln x_1 + (1-\alpha) x_2^{\varphi} \ln x_2\right)}{\left(\alpha x_1^{\varphi} + (1-\alpha) x_2^{\varphi}\right)} = \ln a + \lim_{\varphi \to -\infty} \frac{\gamma\left(\alpha \ln x_1 + (1-\alpha)\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\varphi} \ln x_2\right)}{\left(\alpha + (1-\alpha)\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\varphi}\right)} = \ln a + \gamma \ln x_1.$$

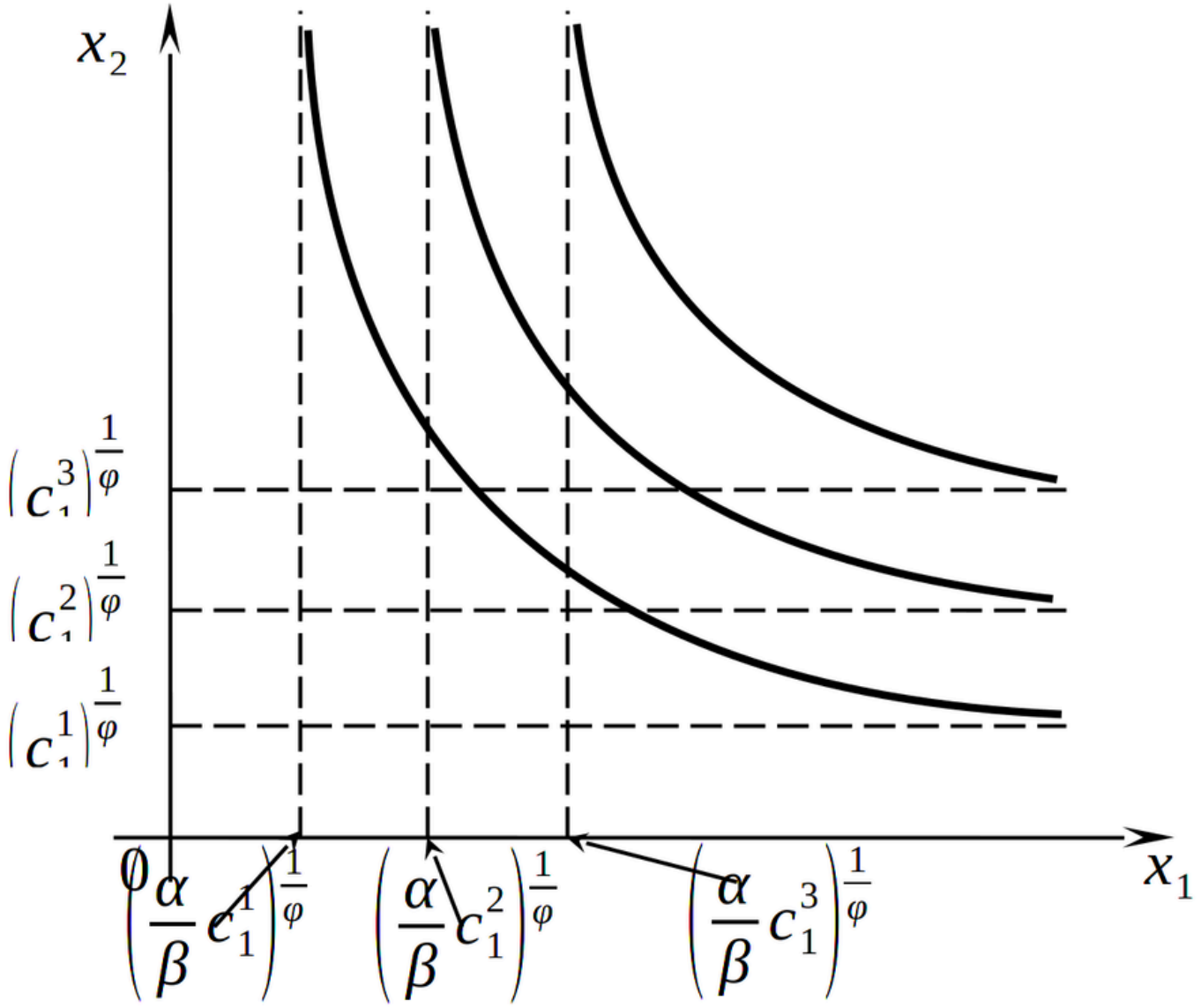
Потенцируя полученное выражение, при $\gamma = 1$ приходим к леонтьевским предпочтениям, отражающим потребление совершенно комплементарных благ:

$$U(x_1, x_2) = a \bullet \min\left(x_1, x_2\right).$$

Обратим внимание на то, что при $\varphi = \gamma = 1$ функция CES (1.34) превращается в линейную функцию полезности (1.8), характеризующую потребление совершенных субститутов.

Из выражения кривой безразличия (1.33) видно, что, поскольку $x_1 = \left(\frac{-\beta}{\alpha} x_2^{\varphi} + c_1\right)^{1/\varphi}$, $x_2 = \left(\frac{-\beta}{\alpha} x_1^{\varphi} + \frac{\alpha}{\beta} c_1\right)^{1/\varphi}$, при $\rho > 0$ кривые безразличия имеют асимптоты: $\lim\limits_{x_2 \to +\infty} x_1 = c_1^{1/\varphi}$, $\lim\limits_{x_1 \to +\infty} x_2 = \left(\frac{\alpha}{\beta} c_1\right)^{1/\varphi}$ (рис. 1.14).

Рисунок 1.14. Карта безразличия функции полезности CES



Аналогично теории потребления, важным показателем технологии является эластичность замещения факторов производства ▤ процентное изменение фондовооруженности труда, т.е. объема капитала (основных фондов) в расчете на одного работника (человеко-час отработанного времени), возникающее при изменении предельной нормы технологического замещения труда капиталом на один процент:

$$\delta = \frac{d(\frac{K}{L})}{dMRTS_{KL}} \frac{MRTS_{KL}}{(\frac{K}{L})}.$$

В микроэкономическом анализе широко используется производственная функция с постоянной эластичностью замещения факторов (CES) [11], аналогичная той, которая была выведена при анализе потребительских предпочтений (1.34): $Y(K,L) = a(\alpha L^{-\rho} + \beta K^{-\rho})^{\frac{-\gamma}{\rho}}, \rho \geqslant -1, \rho \neq 0$, где $\gamma > 0$ – степень однородности функции, которая отражает эффект масштаба хозяйственной деятельности. Аналогично выкладкам, проведенным при анализе потребительских предпочтений выше, можно показать, что производственная функция CES является обобщением функций Кобба–Дугласа и Леонтьева, которые представляют собой ее предельные случаи, а также линейной технологии.

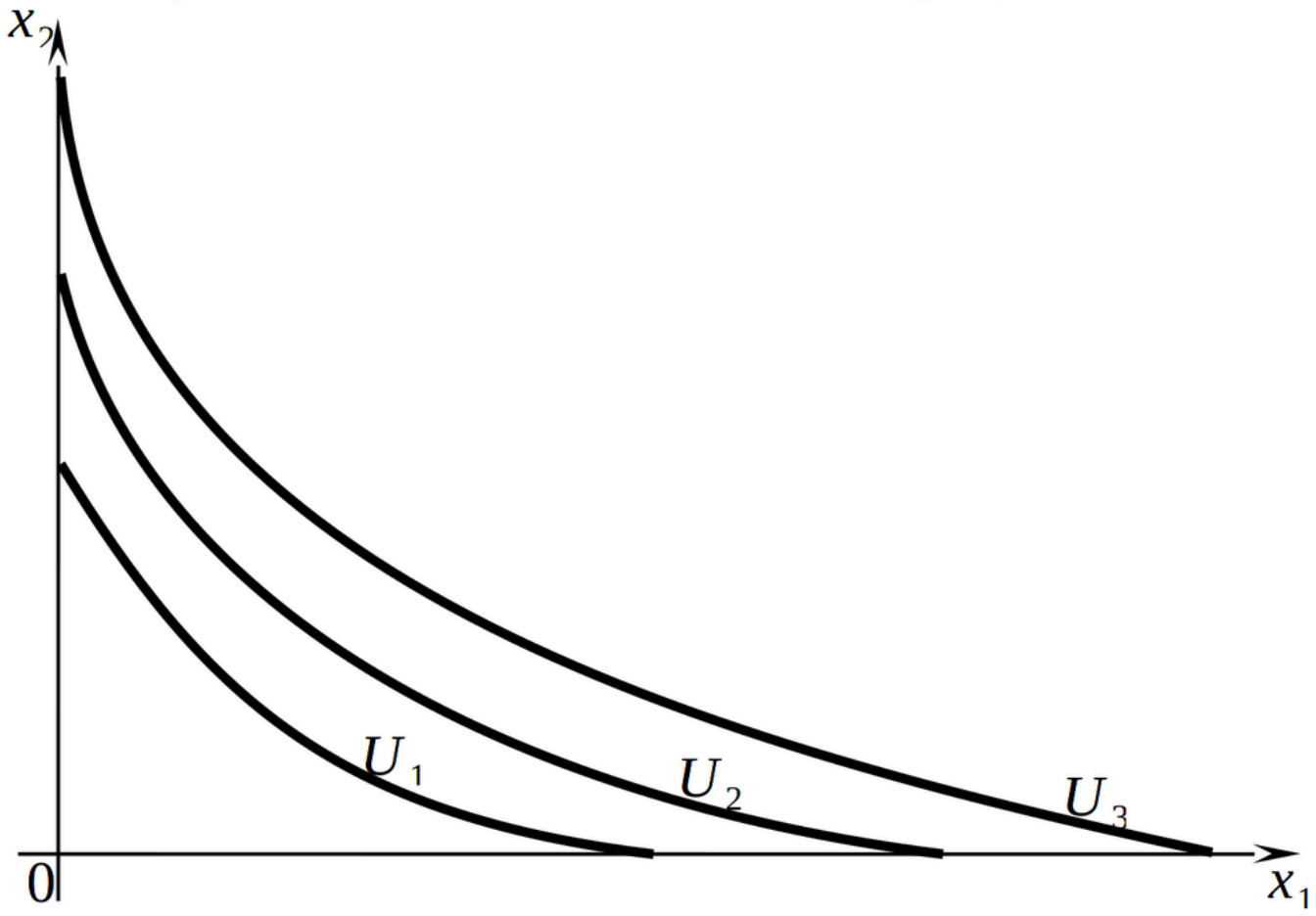
Часто в экономической теории используется квазилинейная функция полезности:

$$U = f(x_1) + kx_2, f^{'}(x_1) > 0, f^{''}(x_1) < 0; (1.36)$$

карта кривых безразличия для которой представлена на рис. 1.15. В силу ненасыщаемости потребления кривые безразличия, расположенные дальше от начала координат здесь соответствуют более высокому уровню полезности ($U_3 > U_2 > U_1$).

Линейная зависимость полезности (1.36) от объема потребления второго блага позволяет интерпретировать его как некоторое композитное благо – расходы на все остальные товары, за исключением данного, первого блага. Поэтому квазилинейные предпочтения позволяют достаточно просто и наглядно описать выбор между одним из товаров и всеми остальными благами в потребительской корзине. Кроме того, как будет показано ниже, квазилинейные предпочтения имеют важные особенности с точки зрения различных подходов к оценке благосостояния потребителей, что обусловливает широкие возможности их использования при анализе контрактного процесса.

Рисунок 1.15. Квазилинейные предпочтения



1. Зорич В.А. Математический анализ. – 2-е изд. – М.: ФАЗИС, 1997, ч.1. ↩
2. Отметим, что функция f является квазивогнутой, если противоположная по знаку к ней функция $-f$ является квазивыпуклой. ↩
3. Изокванта (кривая безразличия) представляет собой пересечение нижнего и верхнего лебеговских множеств производственной функции (функции полезности). ↩
4. Fechner G.Th. Elemente der Psychophysik. – Leipzig: Breitkopf und Härtel, 1860. T.1. ↩
5. Fechner G.Th. Elemente der Psychophysik. – Leipzig: Breitkopf und Härtel, 1860. T.1. ↩
6. Geary R.C. A note on «a constant-utility index of the cost of living» // Review of economic studies. 1949-1950. Vol. 18. Part 1. № 45; Stone R. Linear expenditure systems and demand analysis // Economic journal. 1954. Vol. 64. № 255; Stone R. Quantity and price indexes in national accounts. – Paris: OEEC, 1956. ↩
7. Cobb C.W., Douglas P.H. A theory of production // American economic review. 1928. Vol. 18. № 3. ↩
8. Аббревиатура английского словосочетания *constant elasticity of substitution*. ↩
9. Допуская нулевое и отрицательные значения константы c, избавляемся от модуля и возвращаем утерянное ранее при делении на x_2/x_1 и dx_2/dx_1 решение. ↩
10. Определение функции однородной степени γ приводится в приложении 1. ↩
11. Arrow K.J., Chenery H.B., Minhas B.S., Solow R.M. Capital-labor substitution and economic efficiency // Review of economics and statistics. 1961. Vol. 43. № 3. ↩

1.5. Эффект масштаба хозяйственной деятельности

Характеристики вогнутости и квазивогнутости производственных функций и функций полезности имеют важную экономическую интерпретацию, связанную с эффектами масштаба хозяйственной деятельности. Рассмотрим ее с точки зрения производственных процессов, протекающих на предприятии. Тип отдачи от масштаба производства является фундаментальной характеристикой его технологии.

Положительный эффект масштаба имеет место, когда одинаковое увеличение количества всех используемых факторов производства (в $\alpha \in R, \alpha > 1$, раз) дает рост объема производства в большей пропорции по сравнению с затратами ресурсов (больше, чем в α раз), то есть, если выполняется неравенство:

$$f(\alpha x) > \alpha f(x), \alpha \in R, \alpha > 1, x \in R_{+}{}^{l}. (1.37)$$

Если при увеличении объемов затрачиваемых ресурсов в $\alpha \in R, \alpha > 1$, раз производство возрастет меньше, чем в α раз, то такая производственная функция характеризуется убывающей отдачей от масштаба:

$$f(\alpha x) < \alpha f(x), \alpha \in R, \alpha > 1, x \in R_{+}{}^{l}. (1.38)$$

Если соответствующие неравенства нестрогие, то наблюдается неотрицательный

$$f(\alpha x) \geqslant \alpha f(x), \alpha \in R, \alpha > 1, x \in R_{+}{}^{l} (1.39)$$

либо, наоборот, неположительный

$$f(\alpha x) \leqslant \alpha f(x), \alpha \in R, \alpha > 1, x \in R_{+}{}^{l} (1.40)$$

эффект масштаба хозяйственной деятельности.

Для производственной функции свойственна постоянная отдача от масштаба, если увеличение затрат факторов производства в какое-то число раз $\alpha \in R, \alpha > 1$, приведет к росту объема производства в такое же число раз α:

$$f(\alpha x) = \alpha f(x), \alpha \in R, \alpha > 1, x \in R_{+}{}^{l}. (1.41)$$

Коэффициент α в определении отдачи от масштаба – это интенсивность применения данного производственного процесса [1]. В частности, если предположить постоянную интенсивность, применения технологического процесса, то для характеристики отдачи от масштаба можно использовать широкий класс однородных производственных функций.

Функция называется однородной степени γ, если для нее выполняется равенство:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^{\gamma} f(x_1, x_2), (1.42)$$

где λ, γ – положительные вещественные константы [2].

Для однородной функции (1.42) будет характерна возрастающая отдача от масштаба при $\gamma > 1$, убывающая отдача – при $\gamma < 1$ и постоянная – при $\gamma = 1$.

Зачастую положительный эффект масштаба трактуется в расширительном смысле:

$$f(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_{k-1}, x_k, \alpha x_{k+1}, \ldots, \alpha x_l) = \alpha f(x_1, \ldots, x_l), \alpha \in R, \alpha > 1, x \in R_{+}{}^{l}. (1.43)$$

Здесь подразумевается, в частности, что наличие постоянного фактора производства может способствовать увеличению его эффективности при увеличении масштаба, поскольку данный, фиксированный фактор хозяйственных затрат будет распределяться на возрастающий объем продукции. Поскольку, в силу предпосылки об эффективности производства

$$f(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_{k-1}, \alpha x_k, \alpha x_{k+1}, \ldots, \alpha x_l) > f(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_{k-1}, x_k, \alpha x_{k+1}, \ldots, \alpha x_l)$$

из расширительной трактовки (1.43) вытекает возрастающая отдача от масштаба, определенная выше (1.37). Таким образом, расширительная трактовка эффекта масштаба является более сильным требованием в отношении производственной функции, чем базовое определение (1.37).

Экономия на масштабе производства, реализуемая в процессах концентрации и централизации, является одним из важнейших факторов его интенсивного развития за счет повышения эффективности хозяйственной деятельности, более рационального использования ее факторов, совершенствования качественных характеристик ресурсов и технологии предприятия [3]. Источниками положительного эффекта масштаба в рамках предприятия могут служить [4]:

- экономия на серийности производства, поскольку изготовление крупных партий изделий оказывается дешевле в силу использования более производительного оборудования, снижения удельных инженерно-конструкторских и управленческих затрат, уменьшения торговых расходов за счет оптовых операций, совершенствования трудовых навыков работников и т.д.;
- снижение объемов вспомогательных операций, связанных с основным производством при росте производственных мощностей: по закону больших чисел количество отказов оборудования становится более точно прогнозируемым и появляется возможность эффективнее спланировать его обслуживание;
- уменьшение логистических затрат: в частности, оптимальное управление складскими запасами предполагает, что их величина должна быть пропорциональной квадратному корню от количества используемого на производстве ресурса [5];
- инженерно-экономические свойства различных объемных конструкций в силу того, что затраты на их возведение, как правило, увеличиваются пропорционально площади поверхности сооружения – квадратичным темпом, в то время как отдача от них зачастую зависит от объема, нарастая кубическим темпом; а также целый комплекс других факторов, которые будут рассмотрены ниже.

Трансакционный сектор так же, как и производственный, подвержен экономии от масштаба [6]. В частности, каждая фирма нуждается в привлечении капитала и финансовых оценках, а значит, в посредниках и консультантах. Экономика в целом выигрывает, если эти функции передаются небольшому числу специализированных институтов [7]. Чем больший объем трансакций

они будут обслуживать, тем ниже окажутся соответствующие средние трансакционные издержки для экономической системы, что служит фактором положительной эффективности масштабов хозяйственной деятельности.

На микроэкономическом уровне экономия от масштабов операций заключается не только в технологическом потенциале предприятия, но и в сокращении накладных расходов по мере его развития (1.43). С ростом масштаба постоянные, не зависящие от объема производства компоненты координационных и мотивационных издержек [8] распределяются на все больший объем выпуска, и их средняя величина убывает, что является фактором экономического роста даже в отсутствие технологического прогресса.

Экономия на масштабе в трансакционном секторе, связанная с наличием постоянного фактора в издержках, имеет противоположную направленность по отношению к их вектору. При этом трансакционные издержки, рассматриваемые как обособленная категория, сами по себе могут считаться экстерналиями. Следовательно, перед нами компенсирующее действие положительной экстерналии, которой является эффект от масштаба, и отрицательной экстерналии – трансакционных издержек. Результирующий эффект зависит не только от внешних факторов, но и от соотношения силы синергетического эффекта как показателя эффективности организации и сил "трения", связанных с взаимодействием членов трудового коллектива друг с другом, а также с контрагентами данного предприятия. На окончательное направление действия внешнего эффекта оказывают влияние производственные отношения, а также качественные особенности спецификации и структуры прав собственности в контексте реализации коллективного потенциала данной организации.

Возрастающая отдача от масштаба – это свойство технологии предприятия напрямую связанное с действием синергетического эффекта, то есть превышением результативности хозяйственной системы – в данной случае фирмы – над суммарной отдачей множества ее составных частей, производственных факторов: ведь увеличение использования всех их вместе дает больший прирост эффективности производства в целом, нежели повышение объемов затрат каждого из них в отдельности (1.37). Поэтому возрастающая отдача от масштаба производства может рассматриваться как проявление некоего дополнительного, неосязаемого фактора производства, представляющего собой своеобразное общественное благо, принадлежащее хозяйственной организации как единому целому. Он воплощает в себе значительную часть нематериальных активов корпорации и приводит к существенному превышению рыночной ценности фирмы над располагаемыми ею материальными ресурсами в стоимостном выражении.

Положительный эффект масштаба можно рассматривать как своего рода внешний эффект по отношению к каждому из внутренних ресурсов, используемых на предприятии. Он достигается за счет того, что производительность "команды" факторов производства, действующих на фирме как единое целое, превышает отдачу от суммы тех же ресурсов, взятых по отдельности. В данной ситуации наблюдается положительная технологическая внутренняя экстерналия, ведь объектом действия данного эффекта являются его эмитенты и он возникает в определенной мере независимо, параллельно по отношению к влиянию внешних для персонала данного предприятия сил, например, отраслевой либо народнохозяйственной конъюнктуры, которые могут являться источниками как внешних затрат, так и внешней экономичности [9].

Специализация и сопутствующая ей координация являются важнейшими системообразующими принципами любой организации – внутри-, меж- и надфирменной; как корпоративных, так и рыночных, и народнохозяйственных структур. "На деле организация всегда возникает в результате выделения отдельных видов работ и передачи их особым специализированным единицам", – обоснованно отмечают М. Месарович, Д. Мако и И. Такахара [10]. Как справедливо пишет Л. фон Мизес, "общество представляет собой согласованную деятельность, сотрудничество ... общество суть разделение и соединение труда" [11]. Формы реализации этих процессов многообразны. Процессы специализации сопровождаются дифференциацией социальных функций и ролей индивидуумов [12]. В частности, фундаментальным для процессов воспроизводства человеческого потенциала является гендерное разделение труда [13].

Один из фундаментальных постулатов А. Смита гласит, что разделение труда и специализация производственной деятельности являются глубинными движущими силами прогресса экономики. Специализация приводит к росту объема производства Q при имеющемся количестве ресурсов, или к увеличению выпуска продукции в большей пропорции, по отношению к приросту количества используемых ресурсов [14], или к положительному эффекту масштабов хозяйственной деятельности (1.37). По-другому этот тезис можно сформулировать следующим образом: специализация производства ведет к повышению производительности труда и капиталоотдачи.

Производительность труда в натуральном выражении – это средний продукт труда (x_L), т.е. объем выпуска в расчете на единицу затраченного труда $AP_L = \frac{Q}{x_L}$. Капиталоотдача в натуральном выражении – это средний продукт капитала (x_K), или объем выпуска в расчете на единицу основных фондов $AP_K = \frac{Q}{x_K}$, где $Q=f(x_K,x_L)$ – объем производства, достигаемый с помощью данных затрат его факторов.

Действительно, если предположить, что прирост фондо- и трудозатрат происходит в одной и той же пропорции: αx_K и αx_L соответственно, $\alpha \in R, \alpha > 1$, то, поскольку для увеличения значений AP_K и AP_L необходимо, чтобы прирост выпуска превышал увеличение затрат факторов, справедливы следующие неравенства:

$$\frac{f(\alpha x_K,\alpha x_L)}{\alpha x_K} > \frac{f(x_K,x_L)}{x_K}, \frac{f(\alpha x_K,\alpha x_L)}{\alpha x_L} > \frac{f(x_K,x_L)}{x_L}.$$

а значит, справедливо соотношение (1.37), определяющее положительный эффект масштаба.

Таким образом, специализация производства вызывает синергетический эффект, когда совместное использование разных факторов производства дает дополнительный выигрыш по сравнению с раздельной эксплуатацией.

С положительной отдачей от масштабов воспроизводственной деятельности неразрывно связано другое ее свойство: несовершенная делимость хозяйственных операций. Характеристика несовершенной делимости производственных процессов отражает невозможность уменьшения объемов использования высокопродуктивных ресурсов на произвольную величину без потери эффективности:

$$f(\lambda x) < \lambda f(x), \lambda \in R, \lambda \in (0,1), x \in R_{+}. \quad (1.44)$$

Совершенная делимость процессов производства будет наблюдаться в противоположной ситуации:

$$f(\lambda x) > \lambda f(x), \lambda \in R, \lambda \in (0,1), x \in R_{+}. \quad (1.45)$$

Пограничную ситуацию между совершенной и несовершенной делимостью

$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \lambda \in R, \lambda \in (0,1), x \in R_{+}{}^{l}. (1.46)$$

будем называть пропорциональной делимостью хозяйственных операций [15].

Несовершенная делимость здесь понимается не в физическом, а в экономическом смысле. Блага, с физической точки зрения, могут быть делимыми, но сокращение количеств данных продуктов либо ресурсов приводит к более существенному понижению экономической эффективности их использования (1.44). В противоположность этому при совершенной делимости отдача от хозяйственных благ падает медленнее объемов их потребления (1.45). В пограничной ситуации между совершенной и несовершенной делимостью производственных процессов наблюдается пропорциональное изменение объемов затрачиваемых ресурсов и выпускаемой с их помощью продукции (1.46).

Из определения (1.44) прямо следует, что несовершенная делимость эквивалентна возрастающей отдаче от масштаба производственной функции [16] (1.37). Для того, чтобы это показать, положим $\alpha = \frac{1}{\lambda}$. Тогда условие несовершенной делимости (1.44) можно переписать следующим образом: $f\left(\frac{x}{\alpha}\right) < \frac{f(x)}{\alpha}$, или $\alpha f\left(\frac{x}{\alpha}\right) < f(x)$. Перейдем теперь от аргумента *x* к новой переменной $\chi = \frac{x}{\alpha}$. Учитывая, что $\lambda = \frac{1}{\alpha}$ и $x = \alpha\chi$, получаем неравенство $\alpha f(\chi) < f(\alpha\chi)$, $\alpha > 1$, характеризующее возрастающую отдачу от масштаба производства (1.37).

Итак, свойство несовершенной делимости означает “обратимость” усиливающего воздействия эффекта масштаба, который должен сохранять силу не только при расширении, но и сокращении производственной деятельности [17]. В противоположность несовершенной делимости хозяйственных процессов, совершенная (1.45) – эквивалентна убывающей (1.38), а пропорциональная (1.46) – постоянной отдаче от их масштаба [18] (1.41).

Подытоживая проведенный выше анализ, можно сделать вывод, что проявлениями положительных синергетических эффектов служат такие эквивалентные понятия, как возрастающая отдача от масштаба воспроизводства (1.37) и несовершенная делимость производственных процессов.

Аналогично, эквивалентны противоположные понятия, как проявления отрицательных синергетических эффектов – убывающая отдача от масштабов воспроизводственных процессов (1.38) и совершенная делимость производственных операций.

Пограничную ситуацию нулевых синергетических эффектов отражают такие эквивалентные понятия, как постоянная отдача от масштаба воспроизводства (1.41) и пропорциональная делимость производственных процессов (1.46).

Еще одно эквивалентное понятие наряду с отдачей от масштаба и делимостью производства – поведение средних издержек как функции объема производства – будет проанализировано ниже, в праграфе 4.2.

Вогнутые функции не обладают свойством возрастающей отдачи от масштаба производства. Рассмотрим двухфакторную производственную функцию, обозначив ее через *Q*(*K*,*L*) и взяв в качестве ее аргументов такие факторы производства, как труд и капитал.Если положить в силу предпосылки об отсутствии «рога изобилия» $K_2 = L_2 = 0$ в (1.12), то получается: $Q(\lambda K_1, \lambda L_1) \geqslant \lambda Q(K_1, L_1), \lambda \in R, \lambda \in [0,1]$. Это означает, что из вогнутости производственной функции следует совершенная или пропорциональная делимость хозяйственных процессов (1.45)-(1.46), а значит, невозрастающая отдача от масштаба: $Q(\alpha K, \alpha L) \leqslant \alpha Q(K, L), \alpha \in R, \alpha \geqslant 1$; т.е. увеличение затрат факторов производства в α раз не может давать увеличение объема производимой продукции больше, чем в α раз. Положительный эффект масштаба (1.37), при отсутствии “рога изобилия”, исключает вогнутость производственной функции (1.12).

Если положить в (1.13) $x_2 = 0$, тогда, в силу отсутствия “рога изобилия”, $f(x_2) = 0$, и становится очевидным, что из строгой вогнутости производственной функции следует совершенная делимость хозяйственных процессов (1.45), а значит, убывающая отдача от масштаба (1.38).

При этом характеристика строгой вогнутости – которая заключается в том, что на соответствующем диапазоне значений аргумента график функции лежит выше любого отрезка, соединяющего некоторую точку на графике (*A*) с началом координат – принимает форму убывающей отдачи от масштаба (1.38): график функции правее любой своей точки *A* лежит ниже произвольной прямой, проходящей через начало координат и данную точку (*A*) на графике функции (рис. 1.4). Ведь, если последнее утверждение не выполняется, и существует такая комбинация ресурсов (x_1), лежащая на проекции данного луча на множество затрат факторов хозяйственной деятельности дальше от начала координат, по отношению к проекции точки *A*, при которой график функции лежит ниже луча 0*A*, то функция не является строго вогнутой:

$$f(x) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), где x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda \in R, \lambda \in (0,1). (1.47)$$

Здесь *x* – это точка *A*, x_2 – начало координат. А значит, данная функция не характеризуется убывающей отдачей от масштаба воспроизводства.

При удалении от нуля используемой комбинации факторов хозяйственной деятельности $(\lambda x, x, \alpha x, 0 < \lambda < 1, \alpha > 1, \alpha, \lambda \in R)$ вдоль луча, исходящего из начала координат и лежащего в множестве доступных для экономического агента комбинаций факторов хозяйственной деятельности (*X*), тангенс угла наклона соответствующего ему луча, с которым пересекается график строго вогнутой функции ($\angle B0D$, $\angle A0D$, $\angle C0D$ на рис. 1.4), монотонно убывает [19]:

$$\frac{f(\alpha x)}{\| \alpha x \|} < \frac{\alpha f(x)}{\alpha \| x \|} = \frac{f(x)}{\| x \|} < \frac{f(\lambda x)}{\|\lambda x\|}, \alpha > 1, 0 < \lambda < 1, \alpha, \lambda \in R.$$

График строго вогнутой функции становится все более и более “пологим” в смысле угловых коэффициентов всевозможных его секущих прямых линий ($tg\angle A0D$, $tg\angle CAE$ на рис. 1.4):

$$\frac{f(\alpha x) - f(x)}{\| \alpha x - x \|} < \frac{\alpha f(x) - f(x)}{\| \alpha x - x \|} = \frac{(\alpha - 1) f(x)}{(\alpha - 1) \| x \|} = \frac{f(x)}{\| x \|}, \alpha > 1, \alpha \in R. (1.48)$$

Строго вогнутая функция растет более низким темпом, нежели однородная (первой степени) функция, для которой характерна постоянная отдача от масштаба:

$$\frac{f(\alpha x)}{f(x)} < \alpha, \alpha > 1, \alpha \in R.$$

То же самое можно сказать и о темпах прироста:

$$\frac{f(\alpha x)-f(x)}{f(x)} < \alpha - 1, \alpha > 1, \alpha \in R.$$

График функции с постоянной отдачей от масштаба представляет собой коническую поверхность или плоскость (рис. 1.3, 1.9, 1.10), образующими которой являются лучи, исходящие из начала координат и, по экономическому смыслу, лежащие в неотрицательном вещественном ортанте R_{+^3}.

В ситуации возрастающей отдачи от масштаба хозяйственных операций и их несовершенной делимости наблюдается противоположная картина по отношению к функциям, обладающей отрицательным эффектом масштаба и совершенной делимостью производственных процессов. В отличие от отрицательного эффекта масштаба, характеристика возрастающей отдачи (1.37) состоит в том, что график функции правее любой своей точки (*A*) проходит над произвольным лучом, исходящим из начала координат и содержащим точку *A* (рис. 1.6). Если зафиксировать точку $(\alpha f(x), \alpha x)$ на луче, проведенном из начала координат и проходящем через точку $(f(x), x)$, то, в силу определения возрастающей отдачи от масштаба (1.37), точка $(f(\alpha x), \alpha x)$ будет расположена выше точки $(\alpha f(x), \alpha x)$.

Возрастание отдачи от масштаба (1.37) может быть представлено альтернативным, эквивалентным образом. Оно подразумевает, что график производственной функции лежит всюду ниже внутренних точек отрезка, исходящего из начала координат и оканчивающегося на самом графике. Это гарантирует строгую выпуклость производственной функции вдоль каждого луча, содержащего данные отрезки.

Данными характеристиками обладают как строго выпуклые технологии, обязательно обладающие при отсутствии “рога изобилия” возрастающей отдачей от масштаба; так и строго квазивогнутые функции, которым так же может быть присущ положительный эффект масштаба производства.

Квазивогнутость функции означает ее выпуклость вдоль любого луча, исходящего из начала координат, а также в гиперплоскости, параллельной координатной – образованной всеми зависимыми переменными (x_j, j=1,..,l). Одновременно возможна – это будет случай убывающей предельной производительности факторов – вогнутость в гиперплоскостях, ортогональных какой-то одной, произвольной, j-й оси аргумента (x_j), то есть квазивогнутым функциям может быть присуща убывающая отдача от каждого фактора производства в отдельности. Но, несмотря на убывающую отдачу от отдельных факторов хозяйственной деятельности, их синергия в рамках хозяйственной системы как единого целого способна порождать положительную отдачу от масштаба производства в целом. Примером графика квазивогнутой функции с возрастающей отдачей от масштаба в случае двумерного аргумента [20] может служить колоколообразная зависимость с седловой точкой в нуле (рис. 1.6).

Поскольку возрастающая отдача от масштаба производства обязательно предполагает, что луч, проведенный из начала координат, при удалении от нуля до точки пересечения лежит выше него, а после точки пересечения – ниже него, постольку наиболее показательными случаями технологий с глобальным положительным эффектом масштаба могут служить выпуклые функции и строго квазивогнутые зависимости как с убывающей, так и с возрастающей предельной производительностью факторов. Другие виды технологий производства могут обладать характеристикой возрастающей отдачи от масштаба лишь локально и поэтому в такой ситуации могут быть представлены как один из данных трех характерных случаев.

Строго квазивогнутая производственная функция должна быть строго вогнута в любом своем горизонтальном сечении. Другими словами, ее линия уровня должна представлять собой строго выпуклой зависимостью между используемыми факторами производства, например, между количеством задействованных рабочих мест и отработанных человеко-часов труда (рис. 1.3-1.6). Строгая выпуклость гиперповерхностей уровня производственной функции отражает экономический эффект дополнительности факторов производства [21], который состоит в том, что комбинирование специализированных ресурсов будет давать больший прирост выпуска продукции, по сравнению с использованием специализированных, но не кооперированных факторов производства [22]. Кооперация производителей, использующих специализированные ресурсы, позволяет добиться выигрыша в эффективности хозяйствования. Именно кооперативные взаимодействия носителей специализированного человеческого потенциала порождают и опосредуют данный эффект дополнительности факторов производства.

У выпуклой функции, изображенной на рис. 1.2, отсутствует свойство квазивогнутости, потому что не является выпуклой область на плоскости X_K0X_L, для которой объем выпуска превышает уровень, зафиксированный конкретной изоквантой [23] либо равен ему $\{x \in X | f(x) \geq q, q \in R\}$. При этом соответствующие случаю кооперации специализированных производств внутренние точки произвольного отрезка, соединяющего любые две точки, например, ($f(x_1)$,x_1) и ($f(x_2)$,x_2) (рис. 1.2), на поверхности выпуклой функции, лежат выше графика функции. Поэтому кооперация оказывается невыгодной. В отличие от квазивогнутой, выпуклая функция не обеспечивает возможность кооперации специализированных производителей, поскольку варианты организации хозяйственной деятельности, соответствующие комбинированному использованию специализированных ресурсов – внутренние точки отрезка, соединяющего точки $(f(x_1), x_1)$ и $(f(x_2), x_2)$ – лежат выше ее графика и не достижимы в рамках данной технологии.

Так же, как и квазивогнутые, вогнутые функциональные зависимости допускают возможность кооперирования факторов производства. Однако только квазивогнутые функционалы отражают феномен кооперации специализированных факторов как источник прогресса, поступательного интенсивного, а не затухающего (1.38), свойственного случаю вогнутости, развития субъектов производственных отношений и всего народного хозяйства, когда вовлечение в хозяйственный оборот дополнительных ресурсов дает гораздо больший относительный прирост результативности их использования, эффективности производства в целом (1.37).

Технологическое множество (1.8) квазивогнутой производственной функции, обладающей положительным эффектом масштаба, охватывает то же множество аналогичной вогнутой зависимости, для которой свойственна убывающая отдача от масштаба производства. Последнее является подмножеством, лежит внутри первого. Квазивогнутые отображения являются обобщением вогнутых функций не только в математическом, но и в экономическом смысле, поскольку они допускают возможность не только убывания, но и возрастания отдачи от масштаба производства и потребления.

Пример 1.5. Квазивогнутость производственной функции и эффект масштаба [24]

Покажем, что функция $y = (x_K x_L)^{\frac{3}{4}}$ является строго квазивогнутой при $x_K > 0$, $x_L > 0$, но при этом не является вогнутой.

Выпишем окаймленную матрицу Гессе для данной технологии:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4}x_K^{\frac{-1}{4}}x_L^{\frac{3}{4}} & \frac{3}{4}x_K^{\frac{3}{4}}x_L^{\frac{-1}{4}} \\ \frac{3}{4}x_K^{\frac{-1}{4}}x_L^{\frac{3}{4}} & \frac{-3}{16}x_K^{\frac{-5}{4}}x_L^{\frac{3}{4}} & \frac{9}{16}x_K^{\frac{-1}{4}}x_L^{\frac{-1}{4}} \\ \frac{3}{4}x_K^{\frac{3}{4}}x_L^{\frac{-1}{4}} & \frac{9}{16}x_K^{\frac{-1}{4}}x_L^{\frac{-1}{4}} & \frac{-3}{16}x_K^{\frac{3}{4}}x_L^{\frac{-5}{4}} \end{pmatrix}.$$

Ее определитель положителен:

$$\frac{3}{16}x_K^{\frac{-5}{4}}x_L^{\frac{3}{4}}\left(\frac{3}{4}x_K^{\frac{3}{4}}x_L^{\frac{-1}{4}}\right)^2 + 2\frac{9}{16}x_K^{\frac{-1}{4}}x_L^{\frac{-1}{4}}\frac{3}{4}x_K^{\frac{-1}{4}}x_L^{\frac{3}{4}}\frac{3}{4}x_K^{\frac{3}{4}}x_L^{\frac{-1}{4}} + \frac{3}{16}x_K^{\frac{3}{4}}x_L^{\frac{-5}{4}}\left(\frac{3}{4}x_K^{\frac{-1}{4}}x_L^{\frac{3}{4}}\right)^2 > 0.$$

Следовательно, функция $y = (x_K x_L)^{\frac{3}{4}}$ является строго квазивогнутой при $x_K > 0, x_L > 0$.

Доказать невогнутость функции $y = (x_K x_L)^{\frac{3}{4}}$ можно, рассчитав определитель ее матрицы Гессе

$$\begin{pmatrix} \frac{-3}{16}x_K^{\frac{-5}{4}}x_L^{\frac{3}{4}} & \frac{9}{16}x_K^{\frac{-1}{4}}x_L^{\frac{-1}{4}} \\ \frac{9}{16}x_K^{\frac{-1}{4}}x_L^{\frac{-1}{4}} & \frac{-3}{16}x_K^{\frac{3}{4}}x_L^{\frac{-5}{4}} \end{pmatrix}:$$

$$\left(\frac{-3}{16}x_K^{\frac{-5}{4}}x_L^{\frac{3}{4}}\right)\left(\frac{-3}{16}x_K^{\frac{3}{4}}x_L^{\frac{-5}{4}}\right) - \left(\frac{9}{16}x_K^{\frac{-1}{4}}x_L^{\frac{-1}{4}}\right)^2 = \frac{-9}{32}\sqrt{x_K x_L} < 0,$$

знак которого свидетельствует о том, что данная матрица не является отрицательно полуопределенной.

Тот факт, что функция $y = (x_K x_L)^{\frac{3}{4}}$ – не вогнутая, можно доказать и по-другому, рассуждая «от противного». Предположим, обратное – что данная функция является вогнутой. Тогда, поскольку для нее выполняется условие отсутствия «рога изобилия» ($y = f(x_K, x_L) = 0$ при $x = (x_K, x_L) = 0$), постольку такая технология должна характеризоваться невозрастающей отдачей от масштаба. Однако в нашем случае функция обладает свойством возрастающей отдачи от масштаба:

$$f(\alpha x_K, \alpha x_L) = (\alpha x_K \alpha x_L)^{\frac{3}{4}} = \alpha^{\frac{3}{2}}(x_K x_L)^{\frac{3}{4}} > \alpha(x_K x_L)^{\frac{3}{4}} = f(x_K, x_L), \alpha \in R, \alpha > 1.$$

Следовательно, предположение – не верное, и функция $y = (x_K x_L)^{\frac{3}{4}}$ не является вогнутой.

---

1. Черемных Ю.Н. Математические модели развития народного хозяйства. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. ↩

2. Для однородных дифференцируемых функций справедлива формула Л. Эйлера:
$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}x_2 = \gamma f(x_1,x_2). (i)$
Равенство (i) легко установить дифференцированием по λ левой и правой частей определения однородной степени γ функции (1.42), где роль аргумента играет переменная $\chi = (\chi_1, \chi_2)$:
$\frac{df(\lambda\chi_1,\lambda\chi_2)}{d\lambda} = \frac{\partial f(\lambda\chi_1,\lambda\chi_2)}{\partial\lambda\chi_1}\frac{d\lambda\chi_1}{d\lambda} + \frac{\partial f(\lambda\chi_1,\lambda\chi_2)}{\partial\lambda\chi_2}\frac{d\lambda\chi_2}{d\lambda} = \frac{\partial f(\lambda\chi_1,\lambda\chi_2)}{\partial\lambda\chi_1}\chi_1 + \frac{\partial f(\lambda\chi_1,\lambda\chi_2)}{\partial\lambda\chi_2}\chi_2 = \gamma\lambda^{\gamma-1}f(\chi_1,\chi_2),$
последующим домножением полученного равенства на λ, применением к его правой части формулы (1.42) и переходом к новой независимой переменной $x = (x_1, x_2) = (\lambda\chi_1, \lambda\chi_2) = \lambda\chi$. ↩

3. А. Маршалл хорошо понимал, что факторам убывающей отдачи противодействует мощная тенденция, сформулированная им в виде “закона возрастающей отдачи”, который гласит: “Увеличение объема затрат труда и капитала обычно ведет к усовершенствованию организации производства, что повышает эффективность использования труда и капитала.” Важен комментарий, которым классик сопровождает формулировку этого закона: “Вот почему в тех отраслях, которые заняты не в производстве сырого продукта, увеличение объема затрат труда и капитала обычно дает пропорционально более высокую отдачу; кроме того, указанное усовершенствование организации производства ведет к ослаблению или даже преодолению всякого возрастающего сопротивления, которое природа может оказать увеличению количества добываемого сырья [Маршалл А. Принципы политической экономии. – М.: Прогресс, 1983. Т.1, с.404-405].” ↩

4. Хэй Д., Моррис Д. Теория организации промышленности. В 2-х т. – СПб.: Экономическая школа, 1999; Haldi J., Whitcomb D. Economies of scale in industrial plants // Journal of political economy. 1967. Vol.75. Part 1. №4. ↩

5. Баумоль У. Экономическая теория и исследование операций. – М.: Прогресс, 1965. ↩

6. Патинкин Д. Деньги, процент и цены. – М.: Экономика, 2004. ↩

7. Хэй Д., Моррис Д. Теория организации промышленности. – СПб.: Экономическая школа, 1999. Т.2. ↩

8. Трансакции, как различные типы воспроизводственного взаимодействия между людьми, не сводимы лишь к операциям обмена, к непосредственному отчуждению и присвоению прав собственности. В частности, Дж.Р. Коммонс выделяет три типа трансакций: сделка, посредством которой богатство не создается, а только меняет владельца; управление, с помощью которого осуществляется производство и создается богатство; рационирование, то есть размещение прав среди экономических агентов, например, посредством решений суда [Commons J.R. Institutional economics // American economic review. 1931. Vol.21. №4]. В реальной экономической действительности трансакции всегда выступают в смешанном виде, например, трансакции управления должны быть дополнены трансакциями сделки.
В свете классификации видов трансакций по Дж.Р. Коммонсу, можно выделить рыночные трансакционные издержки по спецификации, отчуждению и присвоению, а также защите прав собственности, возникающие во взаимосвязи между экономическими агентами и внешним для них рынком, с одной стороны, и административно-командные трансакционные издержки, возникающие внутри иерархической структуры управления и не опосредованые товарно-денежными отношениями – с другой. В традиционном понимании к трансакционным издержкам относятся: информационные затраты – по поиску, сбору, обработке исходных данных, в том числе, по измерению – квантификации информации; получению и анализу выходных данных; хранению, накоплению, передаче, распределению и обмену информацией; кроме того, юридические издержки – по спецификации, отчуждению и присвоению, а также защите прав собственности – возникающие в процессе взаимодействия экономических агентов с внешним для них рынком; и, наконец, административные затраты по управлению и контролю внутри организаций, в частности, по “парированию” альтернативного, или “оппортунистического”, поведения. В перечисленных видах трансакционных издержек можно выделить координационные, сопряженные с детерминирующими характеристиками трансакций, осуществляемых как при помощи рыночного механизма, так и в рамках иерархических структур управления; и мотивационные, связанные с неполнотой и асимметрией информации, а также недостоверностью обязательств – составляющие [Милгром П., Робертс Дж. Экономика, организация и менеджмент. – СПб.: Экономическая школа, 1999. Т.1].
Хотя затраты и по координации, и по мотивации могут возникать внутри структурных единиц либо в рамках всей совокупности производственных отношений, с точки зрения и отдельных их субъектов, и механизмов воспроизводства народного хозяйства, функционирования социально-экономической системы в целом, трансакционные издержки, в собственном смысле, как особая категория, по сути являются внешними эффектами, не учитываемыми в стоимостных показателях, опосредующих товарно-денежные отношения. Ведь, если затраты, связанные с социально-экономическими отношениями, заложены в механизме ценообразования, то они перестают быть трансакционными издержками как таковыми, а становятся просто одним из видов издержек производства или обращения [Чемберлин Э. Теория монополистической конкуренции. – М.: Экономика, 1996]. Аналогом данного рода внешним по отношению к хозяйствующим субъектам явлениям можно считать трение, возникающее между физическими объектами [Корнаи Я. Дефицит. – М.: Наука, 1990; Коуз Р. Фирма, рынок и право. – М.: Дело, 1993]. ↩

9. Вехи экономической мысли: в 5-ти т. – СПб.: Экономическая школа, 2000-2003; Маршалл А. Принципы экономической науки: в 3-х т. – М.: Прогресс-Универс, 1993; Стиглиц Дж.Ю. Экономика государственного сектора. – М.: Изд-во Моск. ун-та, Инфра-М, 1997. ↩

10. Месарович М., Мако Д., Такахара И. Теория иерархических многоуровневых систем. – М.: Мир, 1973. С.40. ↩

11. Фон Мизес Л. Человеческая деятельность. – М.: Экономика, 2000. С.135. ↩

12. Дюркгейм Э. О разделении общественного труда. Метод социологии. – М.: Наука, 1991. ↩

13. Беккер Г.С. Человеческое поведение. – М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 2003. ↩

14. Хэй Д., Моррис Д. Теория организации промышленности. – СПб.: Экономическая школа, 1999. Т.1. ↩

15. Если функция является однородной степени γ (iv), то при $0 < \alpha < 1$ и $\gamma > 1$ для нее характерна несовершенная делимость производства (1.44); $\gamma = 1$ при $0 < \alpha < 1$ дает пропорциональную делимость (1.46); а в случае $\gamma < 1, 0 < \alpha < 1$ наблюдается совершенная делимость хозяйственных операций (1.45). ↩

16. Одним из первых на связь между несовершенной делимостью и увеличением эффективности с ростом масштаба производства обратил внимание Ф.Х. Найт. Справедливо отмечая, что “существуют минимальные пределы делимости важнейших элементов издержек производства” [Knight F.H. The ethics of competition and other essays. – New York; London: Harper \& Brothers, 1935, с.209-210], автор высказал мнение, что если бы количества всех элементов в комбинации факторов производства были безгранично изменчивыми, а продукт – непрерывно делимым, то произвольная комбинация, независимо от размера, была бы эквивалентна по результативности любой другой [Найт Ф.Х. Риск, неопределенность и прибыль. – М.: Дело, 2003]. Связь между несовершенной делимостью производственных процессов и возрастающей отдачей от их масштабов подробно обсуждается в дискуссии вокруг статьи Э.Х. Чемберлина “Пропорциональность, делимость и экономия от масштаба”, в которой приняли участие А.Н. Маклеод и Ф.Х. Хан [Вехи экономической мысли. – СПб.: Экономическая школа, 2000-2003, т.2]. ↩

17. Феномен несовершенной делимости факторов производства, а значит, и возрастающей отдачи от его масштаба, порождает целое теоретическое направление, занимающееся анализом экономических институтов – совокупности сложившихся норм, правил поведения и взаимодействия экономических агентов, лежащих в основе устоявшихся типов хозяйственной организации – фирм, рынков, гибридных, сетевых образований, которые формируют своеобразную дискретно-атомарную структуру современной экономики. Здесь можно привести справедливое замечание Э.Х. Чемберлина: "Из отсутствия экономии и потерь прямо вытекает (при допущении чистой конкуренции) экономика без фирм. Причина в том, что когда эффективность одинакова при любом объеме производства, размеры фирмы, как и их количество, неопределимы, так что сама идея фирмы теряет какое-либо значение [Вехи экономической мысли. – СПб.: Экономическая школа, 2000-2003, т.2, с.243]." ↩

18. Традиционно под несовершенной и совершенной делимостью производства понимаются аналогичные (1.44) и (1.45) нестрогие неравенства – соответственно $f(\lambda x) \leqslant \lambda f(x)$ и $f(\lambda x) \geqslant \lambda f(x)$, где $\lambda \in R$, $\lambda \in (0,1)$, $x \in R_{+}$. Очевидно, что они будут эквивалентны понятиям неубывающей (1.39) и невозрастающей (1.40) отдачи от масштабов производства. ↩

19. В метрическом пространстве, в частности, действительных чисел норма вектора, заданного координатами точки *x* – это его длина, то есть расстояние от данной точки до начала координат: $\| x \| = \rho(x, 0)$. ↩

20. Вехи экономической мысли. – СПб.: Экономическая школа, 2000-2003, т.4. ↩

21. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. – М.: Мир, 1972. ↩

22. Как справедливо пишет Ю.М. Лотман, "целостная структура ориентирована на усредненность и выживание" [Лотман Ю.М. Семиосфера. – СПб.: Искусство-СПБ, 2000, с.144]. ↩

23. Эта область на рис. 1.2 заштрихована. Она невыпукла, поскольку отрезок, соединяющий, например, точки x_1 и x_2 этой области, не принадлежит ей целиком. ↩

24. Антипина О.Н., Вереникин А.О. Микроэкономика продвинутого уровня: учебное пособие. – М.: Экономический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2019. М.: Проспект, 2020. ↩

1.6. Производственные функции и технологический прогресс

Будем анализировать динамические двухфакторные производственные функции $Y = F(K, L, t)$, где t – индикатор времени, или изменений в технологии производства; полагая их дважды непрерывно дифференцируемыми $\left(Y \in C^2\right)$. Будем предполагать, что производственная функция в каждый данный момент времени является однородной первой степени. Для такой стационарной во времени функции в определении (1.42) $\gamma = 1$:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L). \, (1.49)$$

В динамике для такой функции, полагая $\lambda = \frac{1}{L}$ и обозначая коэффициент фондовооруженности труда K/L через *k*, а его производительности Y/L – через *y*, можно сделать преобразование

$$y(t) = \frac{Y}{L} = f\left(\frac{K}{L}, 1, t\right) = f\left(k, t\right). \, (1.50)$$

Если определить также показатели фондоотдачи $z = \frac{Y}{K}$ и обратной фондовооруженности труда, или «трудообеспеченности капитала», $l = \frac{L}{K} = \frac{1}{k}$, то аналогично (1.50) в силу однородности первой степени относительно затрат факторов производственной функции (1.49), справедливо следующее представление показателя фондоотдачи:

$$z(t) = \frac{Y}{K} = g\left(\frac{L}{K}, 1, t\right) = g\left(l, t\right). \, (1.51)$$

Поскольку в соответствии с (1.50) $Y = Lf\left(\frac{K}{L}\right)$, производная объема производства по трудозатратам будет выглядеть так:

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = f\left(\frac{K}{L}\right) + L\frac{\partial f\left(\frac{K}{L}\right)}{\partial L} = f\left(\frac{K}{L}\right) + L\frac{\partial f\left(\frac{K}{L}\right)}{\partial\left(\frac{K}{L}\right)}\frac{\partial\left(\frac{K}{L}\right)}{\partial L} = \frac{Y}{L} - \frac{\partial f\left(\frac{K}{L}\right)}{\partial\left(\frac{K}{L}\right)}\frac{K}{L}. \, (1.52)$$

Следовательно, $\frac{\partial f(K/L)}{\partial(K/L)} = \frac{Y}{K} - \frac{\partial Y}{\partial L}\left(\frac{L}{K}\right)$. В силу однородности первой степени производственной функции (1.49) по теореме Эйлера (i) имеем $Y = \frac{\partial Y}{\partial L}L + \frac{\partial Y}{\partial K}K$, следовательно, в силу предпоследнего равенства:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{Y}{K} - \frac{\partial Y}{\partial L}\left(\frac{L}{K}\right) = g(l, t) - \frac{\partial Y}{\partial L}l = \frac{\partial f(k,t)}{\partial k}. \, (1.53)$$

Аналогично (1.52) – (1.53), в силу (1.51)

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = g\left(\frac{L}{K}\right) + K\frac{\partial g(L/K)}{\partial K} = g\left(\frac{L}{K}\right) + K\frac{\partial g(L/K)}{\partial(L/K)}\frac{\partial(L/K)}{\partial K} = \frac{Y}{K} - \frac{\partial g(L/K)}{\partial(L/K)}\frac{L}{K};$$

а значит,

$$\frac{\partial g(l,t)}{\partial l} = \frac{Y}{L} - \frac{\partial Y}{\partial K}\left(\frac{K}{L}\right) = f(k, t) - \frac{\partial Y}{\partial K}k = \frac{\partial Y}{\partial L}. \, (1.54)$$

Нейтральные по Дж.Р. Хиксу технологические изменения могут быть представлены в виде факторизации производственной функции:

$$Y = A(t)F\left(K, L\right). \, (1.55)$$

Данный вид технологических сдвигов имеет место в случае, если предельная норма замещения между трудом и капиталом как функция обратной фондовооруженности труда, является стационарной во времени [1]: $MRTS_{KL}(l, t) = \overline{MRTS}_{KL}(l)$, т.е. $\frac{\partial}{\partial t}\left(MRTS_{KL}\left(l, t\right)\right) = 0$. Нейтральность по Хиксу можно сформулировать и по-другому: она наблюдается, если предельная норма замещения не зависит от технологического прогресса $A(t)$.

Рассчитаем предельную норму замещения между факторами производства, используя соотношения (1.53) – (1.54):

$$MRTS_{KL}(l, t) = \frac{MP_K}{MP_L} = \frac{\partial Y/\partial K}{\partial Y/\partial L} = \frac{g - \frac{dg}{dl}l}{dg/dl} = \frac{g}{dg/dl} - l.$$

С учетом стационарности предельной нормы замещения между факторами производства получаем дифференциальное уравнение $\frac{g}{dg/dl} - l = \overline{MRTS}_{KL}(l)$, или $g = \left(\overline{MRTS}_{KL}(l) + l\right)\frac{dg}{dl}$. Решаем его, разделяя переменные: $\frac{dl}{\overline{MRTS}_{KL}(l)+l} = d\ln|g|$. Интегрируем: $\int d\ln|g(l,t)| = \ln|g(l,t)| = \int\frac{dl}{\overline{MRTS}_{KL}(l)+l} + \ln A(t)$ и далее потенцируем полученное выражение, снимая модуль и учитывая упущенное при разделении переменных решение $g = 0$ соответствующим подбором константы *A*: $g(l,t) = A(t)e^{\int\frac{dl}{\overline{MRTS}_{KL}(l)+l}}$. Полагая $e^{\int\frac{dl}{\overline{MRTS}_{KL}(l)+l}} = g(l)$, получаем $z = g(l,t) = A(t)g(l)$, или $\frac{Y}{K} = A(t)g\left(\frac{L}{K}\right)$, откуда следует факторизация нейтральной по Хиксу производственной функции (1.55).

Следуя логике Р.М. Солоу на основе нейтральной по Хиксу производственной функции (1.55) проанализируем вклад различных факторов в повышение объема производства [2]. Для этого рассчитаем производную выпуска по времени:

$$\frac{dY}{dt} = f\left(K, L\right)\frac{dA}{dt} + A\frac{df(K,L)}{dt} = \\ f\left(K, L\right)\frac{dA}{dt} + A\left(\frac{\partial f}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{\partial f}{\partial L}\frac{dL}{dt}\right) = \\ f\left(K, L\right)\frac{dA}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial L}\frac{dL}{dt}.$$

Учитывая (1.55), поделим левую часть данной производной на Y, а выражение в правой части – на $Af(K, L)$. Одновременно домножим и разделим в правой части второе слагаемое на K, а третье – на L:

$$\frac{dY/dt}{Y} = \frac{dA/dt}{A} + \frac{\partial Y}{\partial K}\frac{K}{Y}\frac{dK/dt}{K} + \frac{\partial Y}{\partial L}\frac{L}{Y}\frac{dL/dt}{L}. \, (1.56)$$

Заметим, что в правой части равенства (1.56) во втором и третьем слагаемых присутствуют показатели эластичности валового выпуска по капиталу $\left(\epsilon_K^Y = \frac{\partial Y}{\partial K}\frac{K}{Y}\right)$ и труду $\left(\epsilon_L^Y = \frac{\partial Y}{\partial L}\frac{L}{Y}\right)$ соответственно. Поэтому темп прироста выпуска [3] $\dot{Y}/Y$ можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + \epsilon_K^Y \frac{\dot{K}}{K} + \epsilon_L^Y \frac{\dot{L}}{L}.$$

Первая составляющая $(A(t))$ нейтральной по Хиксу производственной функции (1.55) собственно представляет собой функцию технологических сдвигов и генерирует «остаток Солоу» $\dot{A}/A$, который характеризует совокупный эффект изменения производительности факторов, не сводимый к сумме темпов прироста фондоотдачи $\dot{K}/K$ и производительности труда $\dot{L}/L$.

Наряду с нейтральным по Хиксу можно выделить ряд других видов нейтрального технического прогресса. Нейтральный по Солоу, трудоинтенсивный, или фондосберегающий, технический прогресс:

$$Y = F\left(L, E(t)K\right), (1.57)$$

где $E(t)$ – коэффициент, отражающий технический прогресс, который имеет результатом повышение эффективности, или производительности, капитала, возникает в случае постоянной во времени предельной производительности труда: $MP_L(f,t) = \overline{MP}_L(f)$. Другими словами, предельная производительность труда зависит только от средней.

Используя (1.53) – (1.54), можно записать: $\frac{\partial g(l,t)}{\partial l} = f(k,t) - \frac{\partial f(k,t)}{\partial k}k = \frac{\partial Y}{\partial L}$. Отсюда в силу стационарности предельного продукта труда получаем дифференциальное уравнение $f - \frac{df}{dk}k = \overline{MP}_L(f)$. Разделяем переменные $\frac{dk}{k} = \frac{df}{f - \overline{MP}_L(f)}$ и интегрируем, учитывая, что $\frac{dk}{k} = dln|k|$: $\int d\ln|k| + \ln E(t) = \ln|k| + \ln E(t) = \int \frac{df}{f - \overline{MP}_L(f)}$. Потенцируя полученное равенство, снимаем модуль с k и включаем упущенное при разделении переменных решение $k = 0$ соответствующим подбором константы E: $E(t)k = e^{\int \frac{df}{f - \overline{MP}_L(f)}}$. Полагая $e^{\int \frac{df}{f - \overline{MP}_L(f)}} = f^{-1}(y)$, получаем соотношение $E(t)k = f^{-1}(y)$, или $\frac{Y}{L} = f\left(E(t)\frac{K}{L}\right)$, откуда приходим к выражению производственной функции с нейтральным по Солоу техническим прогрессом (1.57).

Нейтральный по Харроду, капиталоинтенсивный, или трудосберегающий, технический прогресс может быть описан производственной функцией:

$$Y = F\left(K, E(t)L\right), (1.58)$$

где $E(t)$ – коэффициент, отражающий технический прогресс, который имеет результатом повышение эффективности, или производительности, труда. Такой технический прогресс имеет место при стационарной предельной фондоотдаче: $MP_K(g,t) = \overline{MP}_K(g)$. Другими словами, предельная производительность капитала зависит только от средней.

Используя (1.53) – (1.54), можно записать:

$$\frac{\partial f(k,t)}{\partial k} = g(l,t) - \frac{\partial g(l,t)}{\partial l}l = \frac{\partial Y}{\partial K}.$$

Отсюда в силу стационарности предельной производительности капитала получаем дифференциальное уравнение $g - \frac{dg}{dl}l = \overline{MP}_K(g)$. Разделяем переменные $\frac{dl}{l} = \frac{dg}{g - \overline{MP}_K(g)}$ и интегрируем, учитывая, что $\frac{dl}{l} = dln|l|$: $\int d\ln|l| + \ln E(t) = \ln|l| + \ln E(t) = \int \frac{dg}{g - \overline{MP}_K(g)}$. Потенцируя полученное равенство, допускаем нулевое и отрицательные значения $E(t)$: $E(t)l = e^{\int \frac{dg}{g - \overline{MP}_K(g)}}$. Полагая $e^{\int \frac{dg}{g - \overline{MP}_K(g)}} = g^{-1}(z)$, получаем соотношение $E(t)l = g^{-1}(z)$, или $\frac{Y}{K} = g\left(E(t)\frac{L}{K}\right)$, откуда приходим к выражению производственной функции с нейтральным по Харроду техническим прогрессом (1.58).

---

1. Uzawa H. Neutral inventions and the stability of growth equilibrium // Review of economic studies. 1961. Vol. 28. № 2; Sato R., Beckmann M.J. Neutral inventions and production functions // Review of economic studies. 1968. Vol. 35. № 1. ↩

2. Solow R.M. Technical change and the aggregate production function // Review of economics and statistics. 1957. Vol. 39. № 3. ↩

3. Здесь и далее переменная с точкой вверху $\dot{x}$ обозначает соответствующую производную по времени. ↩

Глава 2. Оптимизация производства и потребления в статике

2.1. Максимизация полезности при ограничении по доходу потребителя
2.2. Потребительский выбор: минимизация расходов при заданной полезности
2.3. Задачи связанной максимизации объема производства и минимизации его издержек
2.4. Максимизация прибыли и предложение продукции конкурентной фирмой

2.1. Максимизация полезности при ограничении по доходу потребителя

Допустим, что каждый из l товаров покупается данным потребителем по цене p_h. На протяжении большей части нашего анализа будем полагать, что цена h-го товара едина для всех потребителей, т.е. не будем принимать во внимание, если обратное не оговорено специально, возможность ценовой дискриминации, когда разным покупателям, располагающим различным уровнем дохода, продается одинаковые блага по разным ценам, что не связано с различиями в качестве товаров и затратами на их производство. Для нас здесь существенно, что разные цены устанавливаются именно на качественно различные блага.

Пока абстрагируемся от свободных благ и будем рассматривать только экономические товары и услуги. Итак, будем считать, что ни одна из товарных цен не равна нулю, и следовательно, все координаты любого возможного вектора цен $p = \{p_h\}_{h=1}^{l}$ положительны $(p_h > 0, h = 1, \ldots, l)$. Другими словами, множество P векторов цен p является подмножеством $R_l^{+\{0\}:}$ $P = \left\{p = \{p_h\}_{h=1}^{l} | p_h > 0\right\}$. Будем использовать даже еще более сильное предположение о том, что у множества ценовых векторов P существует положительная нижняя граница – так называемая «цена спичек» $\underline{p}$. Все компоненты любого вектора из множества цен P должны быть по крайней мере не меньше $\underline{p}$:

$$\exists \underline{p} \in R_{+:\forall \{p_h\}_{h=1}^{l}, p_h > 0, p_h \geq \underline{p}, h=1,\ldots,l.} (2.1)$$

Итак, ценовое множество P – это произвольное множество из R_l^+, отделенное от нуля $\left(\overline{P} \in \operatorname{int} R_l^+, \text{где} P = \left(p \in R_l^+\right)\right)$.

Кроме физических ограничений, на множество потребительских корзин X накладывается экономическое, или бюджетное, ограничение. Оно заключается в том, что потребитель не может израсходовать на покупки количество денег, превышающее его доход $M \in R_+$. Будем предполагать, что доход предоставляется потребителю изначально и бесплатно, например, в качестве наследства. Итак, стоимость покупаемых товаров должна быть не больше дохода потребителя, т.е. должно выполняться нестрогое неравенство:

$$\sum_{j=1}^{l} p_j x_j \leq M. (2.2)$$

Обозначим через E выражение расходов покупателя:

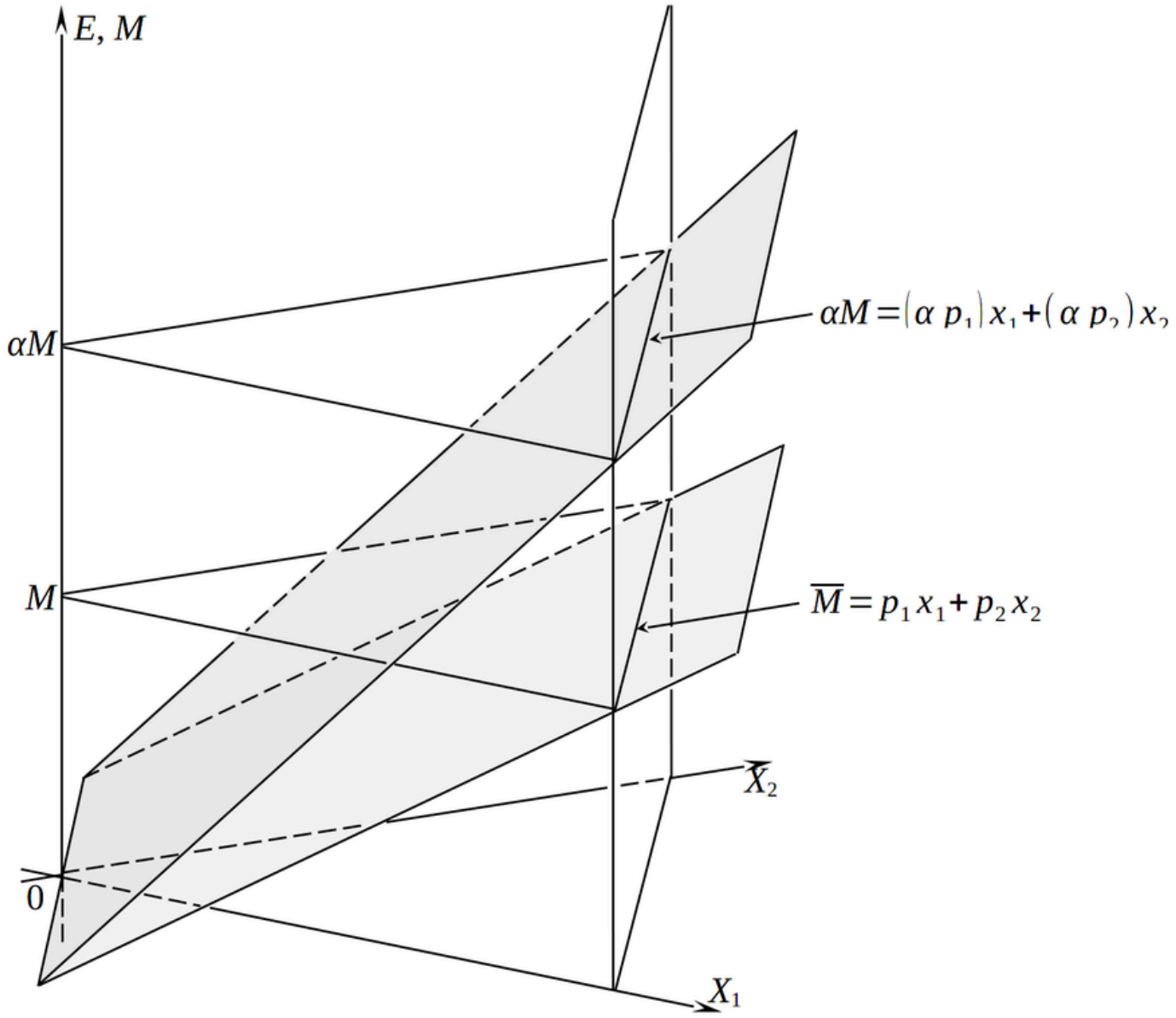
$$E \equiv \sum_{j=1}^{l} p_j x_j. (2.3)$$

Граница финансового условия (2.2), на которой расходы покупателя совпадают с его доходом:

$$\sum_{j=1}^{l} p_j x_j = M, (2.4)$$

в трехмерном пространстве, т.е. в случае двухпродуктовых корзин товаров $(l = 2)$, представляет собой вертикальную плоскость (рис. 2.1).

Рисунок 2.1. Бюджетное ограничение потребителя



Действительно, выражение (2.4) в трехмерном пространстве означает пересечение плоскости расходов (2.3) и горизонтальной плоскости фиксированного дохода $E = M$. Расходы покупателя (2.3) являются однородными первой степени (1.42) по ценам потребляемых продуктов. При увеличении цен в α раз плоскость расходов поворачивается вверх вокруг прямой, проходящей через начало координат. При этом для каждой данной комбинации потребляемых благ в α раз возрастает величина расходов по отношению к их первоначальной величине, равной доходу M:

$$\sum_{j=1}^{l=2} (\alpha p_j) x_j = \alpha \sum_{j=1}^{l=2} p_j x_j = \alpha E(p_1, p_2) = \alpha M. \quad (2.5)$$

Это значит, что теперь граница финансового условия (2.4) будет соответствовать пересечению новой плоскости расходов с горизонтальной плоскостью, проведенной на уровне αM. Очевидно, что прямая, по которой пересекутся эти плоскости, будет соответствовать тому же множеству товарных наборов, что и предыдущая линия пересечения плоскости расходов (2.3) и горизонтальной плоскости фиксированного дохода M. Обе эти прямые проецируются на одну и ту же линию на горизонтальной координатной плоскости $X_1 0 X_2$, т.е. лежат в одной и той же вертикальной плоскости. Варьируя масштабирующий множитель $\alpha \in R_+$ в соотношении (2.5), получим бесконечное множество линий пересечения плоскостей расходов с произвольным наклоном и горизонтальных плоскостей дохода αM, которое образует вертикальную плоскость – границу бюджетного ограничения (2.2) в трехмерном пространстве (рис. 2.1).

Покажем, что множество физически и экономически доступных для потребителя корзин товаров, которое мы обозначим через $S \equiv$, является замкнутым и ограниченным, следовательно, компактным. Потребительское множество X представляет собой неотрицательный ортант R_l^+. Следовательно, оно замкнуто. Ограничение по доходу (2.2) представляет собой полупространство, включающее границу – гиперплоскость (2.4). Поэтому оно является замкнутым множеством. Поскольку S является пересечением замкнутого множества физически доступных для потребителя корзин товаров X и замкнутого экономического, или бюджетного, ограничения (2.2), постольку допустимое потребительское множество S само является замкнутым.

Покажем ограниченность множества S. Каждый вектор x из S должен удовлетворять бюджетному ограничению (2.2). Выделим из всей потребительской корзины товар под номером h. Тогда неравенство (2.2) переписывается в следующем виде:

$p_h x_h \leq M - \sum\limits_{k=1,k\neq h}^{l} p_k x_k$. Его можно ослабить: поскольку $x_k \geq 0$, постольку можно заменить все x_k нулями: $p_h x_h \leq M$, или $x_h \leq \frac{M}{p_h}$. Деление здесь на p_h было возможным, и при этом сохранился знак неравенства, поскольку мы исключаем из рассмотрения свободные блага (2.1).

Ценовое множество P, по предположению, является ограниченным снизу (2.1). Заменим в последнем неравенстве p_h на его нижнюю границу $\underline{p}$: $x_h \leq \frac{M}{\underline{p}}$.

Число $\frac{M}{\underline{p}}$ является верхней границей множества X для данного потребителя, поскольку любой его элемент по крайней мере не больше, чем $\frac{M}{\underline{p}}$. Кроме того, $x_h \geqslant 0$. В итоге получаем двойное неравенство $0 \leq x_h \leq \frac{M}{\underline{p}}$, в котором M и $\underline{p}$ – это абсолютные, не зависящие от h константы. Выбор элемента x_h был произвольным, и полученное неравенство справедливо для любого h. Итак, множество S ограничено: для него существуют нижняя и верхняя границы.

Таким образом, допустимое потребительское множество S замкнуто и ограничено, а значит, компактно.

Кроме того, допустимое для потребителя множество S является выпуклым. Некоторое множество называется выпуклым, если любой вектор x, лежащий на отрезке, соединяющем произвольные векторы x_1 и x_2 из этого множества, $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, $\alpha \in [0,1]$, также принадлежит данному множеству. Потребительское множество X является выпуклым как неотрицательный ортант действительных чисел.

Действительно, если взять два товарных набора $\widehat{x} \geq 0$, $\check{x} \geq 0$, т.е. векторы с неотрицательными координатами $\widehat{x}_h \geq 0$, $\check{x}_h \geq 0$, $h = 1, \ldots, l$, то любая корзина товаров, расположенная на соединяющем их отрезке, также будет иметь неотрицательные координаты: $x_h = \lambda\widehat{x}_h + (1-\lambda)\check{x}_h \geq 0$, $h = 1, \ldots, l$, ведь $\lambda \geq 0$ и $1 - \lambda \geq 0$.

Бюджетное ограничение (2.2) является полупространством, ограниченным гиперплоскостью $\sum\limits_{h=1}^{l} p_h x_h = M$, а значит, оно также выпуклое множество. Действительно, если взять два товарных набора $\check{x}$ и $\widehat{x}$, удовлетворяющих бюджетному ограничению: $\sum\limits_{h=1}^{l} p_h \check{x}_h \leq M$, $\sum\limits_{h=1}^{l} p_h \widehat{x}_h \leq M$, то любая корзина товаров, расположенная на соединяющем их отрезке: $x = \lambda\check{x} + (1-\lambda)\widehat{x}$, что подразумевает выполнение покоординатных равенств $x_h = \lambda\check{x}_h + (1-\lambda)\widehat{x}_h$, $h = 1, \ldots, l$, будет принадлежать бюджетному полупространству

$$\sum_{h=1}^{l} p_h x_h = \sum_{h=1}^{l} p_h \left(\lambda\check{x}_h + (1-\lambda)\widehat{x}_h\right) = \lambda\sum_{h=1}^{l} p_h\check{x}_h + (1-\lambda)\sum_{h=1}^{l} p_h\widehat{x}_h \leqslant \lambda M + (1-\lambda)M = M.$$

Таким образом, множество S как пересечение выпуклых множеств – бюджетного ограничения (2.2) и потребительского множества X – само является выпуклым.

Потребительский выбор представляет собой максимизацию полезности в условиях ограниченных денежных ресурсов:

$$\begin{gathered} \max_{x_1,x_2} U(x_1,x_2): \\ p_1x_1 + p_2x_2 \leq M, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Докажем, что в силу непрерывности функции полезности и компактности допустимого по физическим и экономическим соображениям для потребителя множества S решение данной задачи связанной максимизации полезности – оптимальный потребительский набор x – существует. По доказанному, допустимое множество S в данной задаче потребительского выбора – компакт. Поэтому по теореме Вейерштрасса [1] непрерывная (по предположению) функция полезности $U: x \longmapsto U(x)$, $x \in S$ достигает максимума на допустимом множестве S. Таким образом, задача связанной максимизации полезности имеет решение, т.е. оптимальный потребительский набор x существует.

Рис. 2.2 и 2.3 иллюстрируют соответственно в пространстве и на плоскости решение задачи потребительского выбора (I.1). *E* – это точка в трехмерном пространстве, соответствующая максимальному уровню полезности при выполнении бюджетного ограничения, который достигается при выборе оптимальной корзины товаров (x_1, x_2). E_x – это проекция точки *E* на плоскость $X_1 0 X_2$.

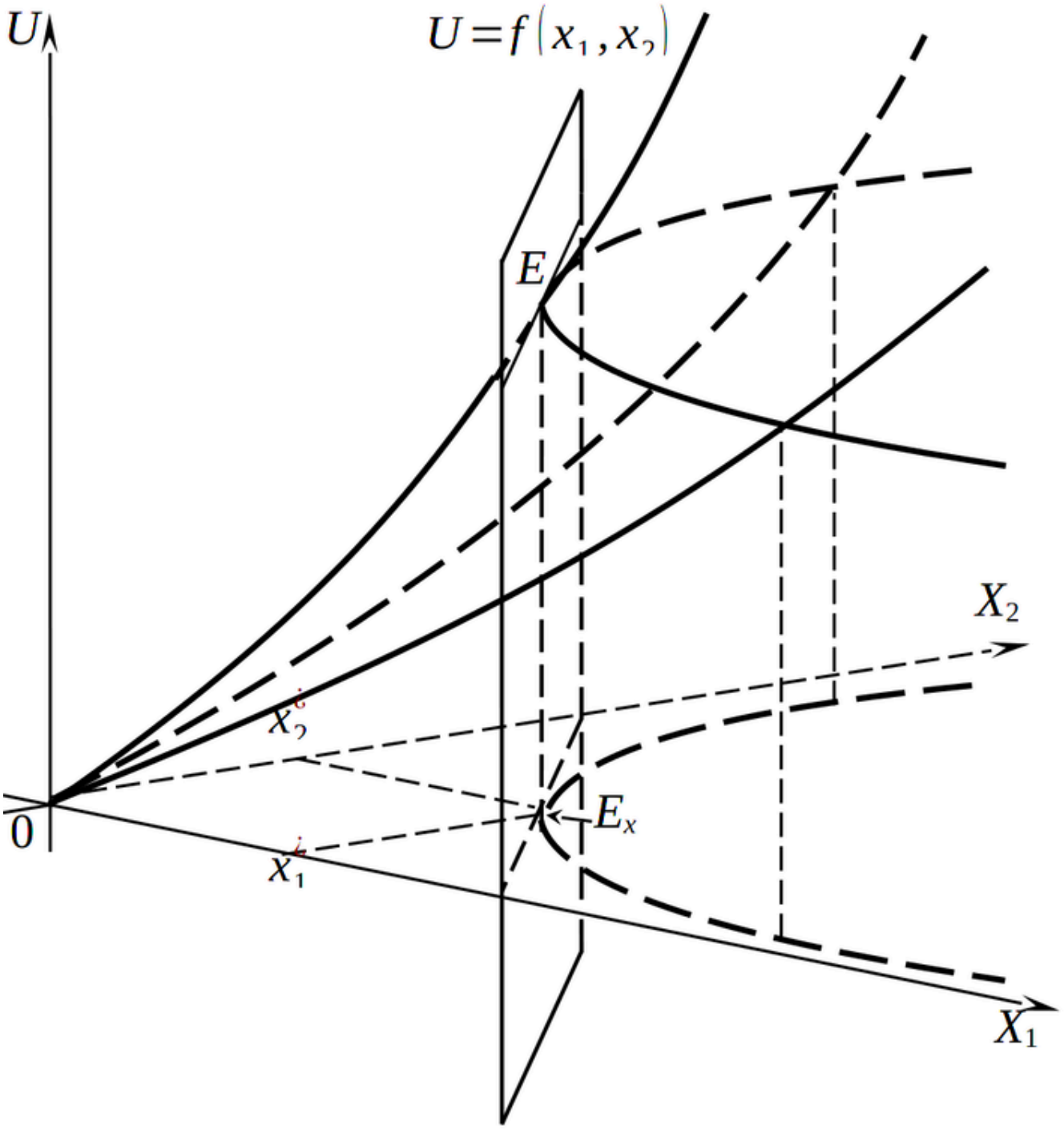


Рисунок 2.2. Пространственная иллюстрация решения задачи максимизации полезности

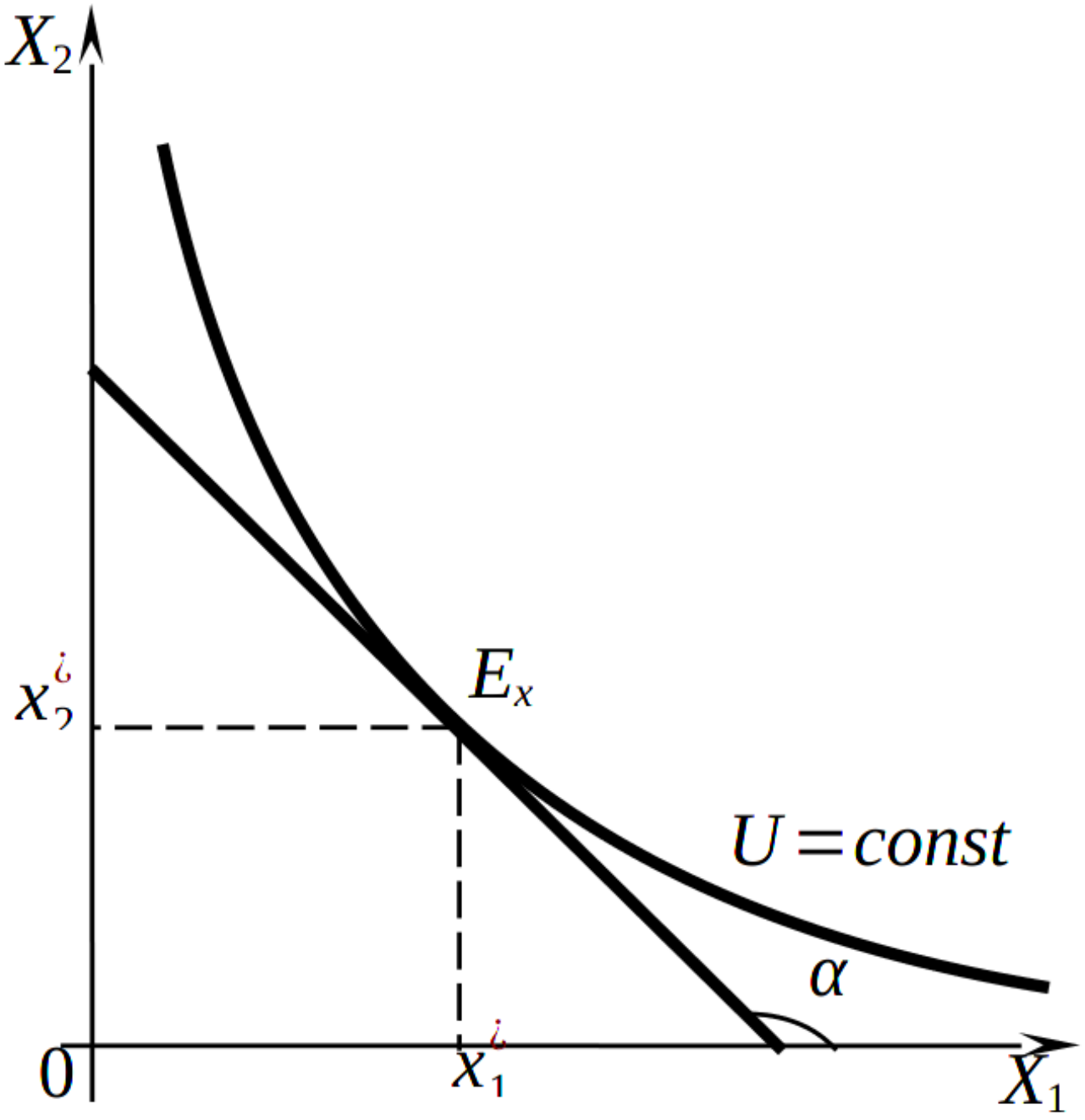


Рисунок 2.3. Оптимальная корзина товаров на плоскости

Решение задачи связанной максимизации полезности – оптимальный потребительский набор $x = \{x_h\}_{h=1}^{l}$ – обладает таким свойством, что бюджетное ограничение на нем выполняется в виде равенства (2.4): $\sum_{h=1}^{l} p_h x_h = M$.

Покажем это, пользуясь методом доказательства от противного. Предположим, что данное утверждение неверно: $\sum_{h=1}^{l} p_h x_h < M$. Поскольку вся совокупность потребительских корзин совпадает с множеством неотрицательных действительных чисел, она не ограничена сверху, т.е. для каждого индивидуума потенциально физически доступны произвольно большие объемы потребительских товаров; в этом случае найдется потребительский вектор $\widetilde{x} = \{\widetilde{x}_h\}_{h=1}^{l}$, такой, что $\widetilde{x}_h = x_h, h = \{1, \ldots, l\}, h \neq k; \widetilde{x}_k = x_k + \varepsilon, \varepsilon > 0, k \in \{1, \ldots, l\}$ и $\sum_{h=1}^{l} p_h \widetilde{x}_h \leq M$, поскольку линейная функция, в данном случае $\sum_{h=1}^{l} p_h x_h$, является непрерывной [2]. В теории традиционно предполагается, что потребление индивидуума обладает

свойством ненасыщаемости. Другими словами, вектор $\widetilde{x}$, содержащий каждого товара не меньше, а *k*-го товара – больше, чем набор x, должен быть более предпочтителен для потребителя: $U(\widetilde{x}) > U(x)$. Значит, потребительский набор x, лежащий во внутренности бюджетного ограничения, не является оптимальным. Полученное противоречие показывает, что выдвинутая гипотеза неверна, и бюджетное ограничение при решении задачи связанной максимизации полезности выполняется как равенство (2.4).

Жесткость бюджетного ограничения можно доказать также, используя аппарат маржинального анализа.

В случае дифференцируемости функции полезности для решения задачи (2.6) следует составить функцию Лагранжа:

$$L = \lambda_0 U(x_1, x_2) - \lambda_1 (p_1 x_1 + p_2 x_2 - M), (2.7)$$

где (λ_0, λ_1) – вектор множителей Лагранжа [3]. Здесь мы предполагаем существование внутреннего оптимума, т.е. нежесткость ограничений по неотрицательности объемов потребляемых благ: $x_1 > 0, x_2 > 0$.

Необходимыми для достижения экстремума являются условия:

стационарности данной функции по объемам потребления товаров:

$$\begin{cases} \lambda_0 MU_1 = \lambda_1 p_1, \\ \lambda_0 MU_2 = \lambda_1 p_2; \end{cases}$$

дополняющей нежесткости:

$$\lambda_1 (p_1 x_1 + p_2 x_2 - M) = 0, p_1 x_1 + p_2 x_2 \le M;$$

а также неотрицательности множителей Лагранжа:

$$\lambda_0 \ge 0, \lambda_1 \ge 0.$$

При этом вектор множителей Лагранжа должен быть ненулевым.

С одной стороны, предположив, что $\lambda_1 = 0$, при предпосылке о ненасыщаемости потребления (1.2) из условий стационарности функции Лагранжа по количествам товаров в силу того, что предметом анализа выступают экономические блага $(p_i > 0)$, получаем, что и $\lambda_0 = 0$, чего во внутреннем оптимуме не может быть, поскольку по необходимому условию экстремума вектор множителей Лагранжа является ненулевым. Тогда из условия дополняющей нежесткости следует, что бюджетное ограничение в точке оптимума выполняется в виде равенства (2.4), т.е. является активным [4].

С другой стороны, из условий стационарности функции Лагранжа по объемам экономических $(p_i > 0)$ благ с учетом ненасыщаемости потребления (1.2) при $\lambda_0 = 0$ оказывается и $\lambda_1 = 0$, чего во внутреннем оптимуме не может быть, поскольку по необходимому условию экстремума вектор множителей Лагранжа является ненулевым. Таким образом, $\lambda_0 \neq 0$, и без ограничения общности его можно положить равным единице, или, что эквивалентно, поделить на него функцию (2.7), пронормировав тем самым вектор множителей Лагранжа [5]:

$$L = U(x_1, x_2) - \lambda (p_1 x_1 + p_2 x_2 - M), (2.8)$$

где $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$, причем, по доказанному, $\lambda > 0$.

Тогда необходимыми для максимизации полезности с учетом жесткого бюджетного ограничения (2.4) будут являться следующие условия стационарности функции Лагранжа по объемам потребления благ:

$$\begin{cases} MU_1 = \lambda p_1, \\ MU_2 = \lambda p_2. \end{cases} (2.9)$$

Разделив в системе (2.9) первое равенство на второе, получаем, что потребитель оптимизирует свое поведение, когда отношение предельных полезностей товаров равняется отношению цен. Таким образом, с учетом выражения для предельной нормы замещения товаров (1.6) можно выписать обобщающее условие максимизации индивидуальной полезности [6]:

$$MRS_{12} = \frac{-dx_2}{dx_1}\Big|_{U=const} = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{p_1}{p_2}. (2.10)$$

Абсолютное значение углового коэффициента бюджетного ограничения – отношение цен (p_1/p_2) – характеризует предельную норму замещения благ в обмене. Тангенс угла наклона касательной к кривой безразличия по модулю – это предельная норма замещения благ в потреблении. Она равна отношению предельных полезностей благ (1.6). Равенство предельных норм замещения в потреблении и обмене, когда отношения предельных полезностей товаров равняется отношению их цен (2.10), с учетом жесткого бюджетного ограничения (2.4) означает касание бюджетного ограничения и кривой безразличия в точке оптимума потребителя (рис. 2.3).

Если предположить строгую квазивогнутость функции полезности, то решение задачи условной максимизации полезности, т.е. оптимальный потребительский набор x, является единственным. Будем доказывать единственность оптимального потребительского набора от противного. Пусть найдется другой, не равный полученной нами потребительской корзине x набор благ x', который также является решением данной задачи. По доказанному, допустимое множество S является выпуклым. Поэтому весь интервал, соединяющий точки x и x' и состоящий из точек вида $\alpha x + (1-\alpha)x'$, $\alpha \in (0,1)$, содержится в S. Поскольку функция полезности является строго квазивогнутой, постольку $U\left(\alpha x + (1-\alpha)x^{'}\right) > U(x) = U(x^{'})$. Но данное неравенство противоречит условию, гласящему, что x и x' – решения задачи связанной максимизации полезности, т.е. оптимальные потребительские наборы. Полученное противоречие показывает, что гипотеза о неединственности оптимального потребительского набора является ложной. Следовательно, оптимальный потребительский набор x является единственным решением данной задачи.

Итак, доказав единственность оптимального потребительского набора, мы показали, что локальный максимум в задаче связанной максимизации полезности совпадает с глобальным.

Если функция полезности не является строго квазивогнутой, то возможна неединственность оптимального потребительского набора. На линии уровня нестрого квазивогнутой функции полезности могут существовать прямые участки. Касание бюджетного ограничения с таким участком будет давать множественность оптимального потребительского набора товаров (рис. 2.4).

Решение задачи потребительского выбора может быть неединственным также в случае невыпуклости бюджетного ограничения, в частности, в случае снижения цены при достижении определенного, порогового уровня продаж (рис. 2.5).

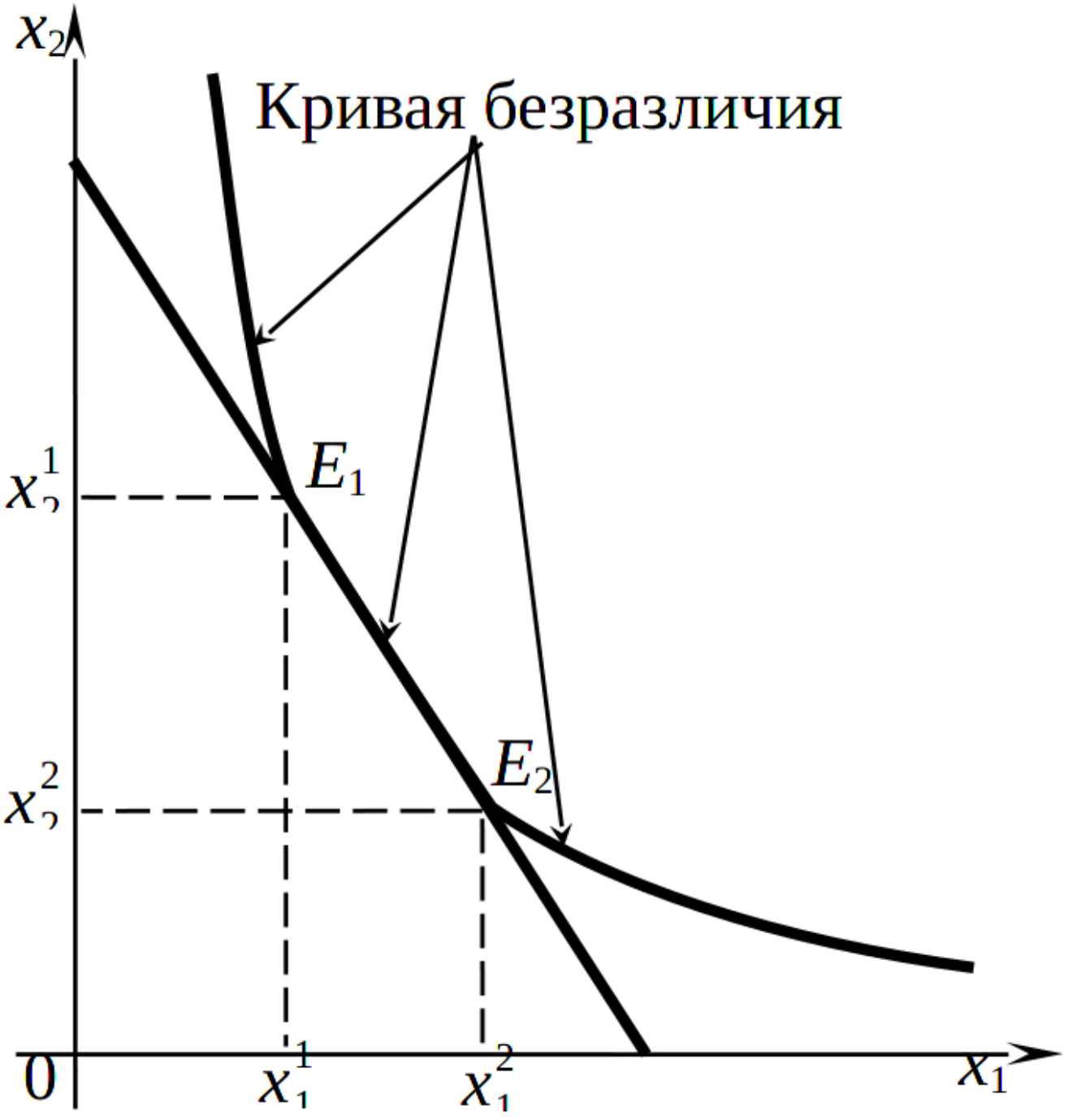


Рисунок 2.4. Неединственность оптимальной потребительской корзины товаров при нестрогой выпуклости кривых безразличия

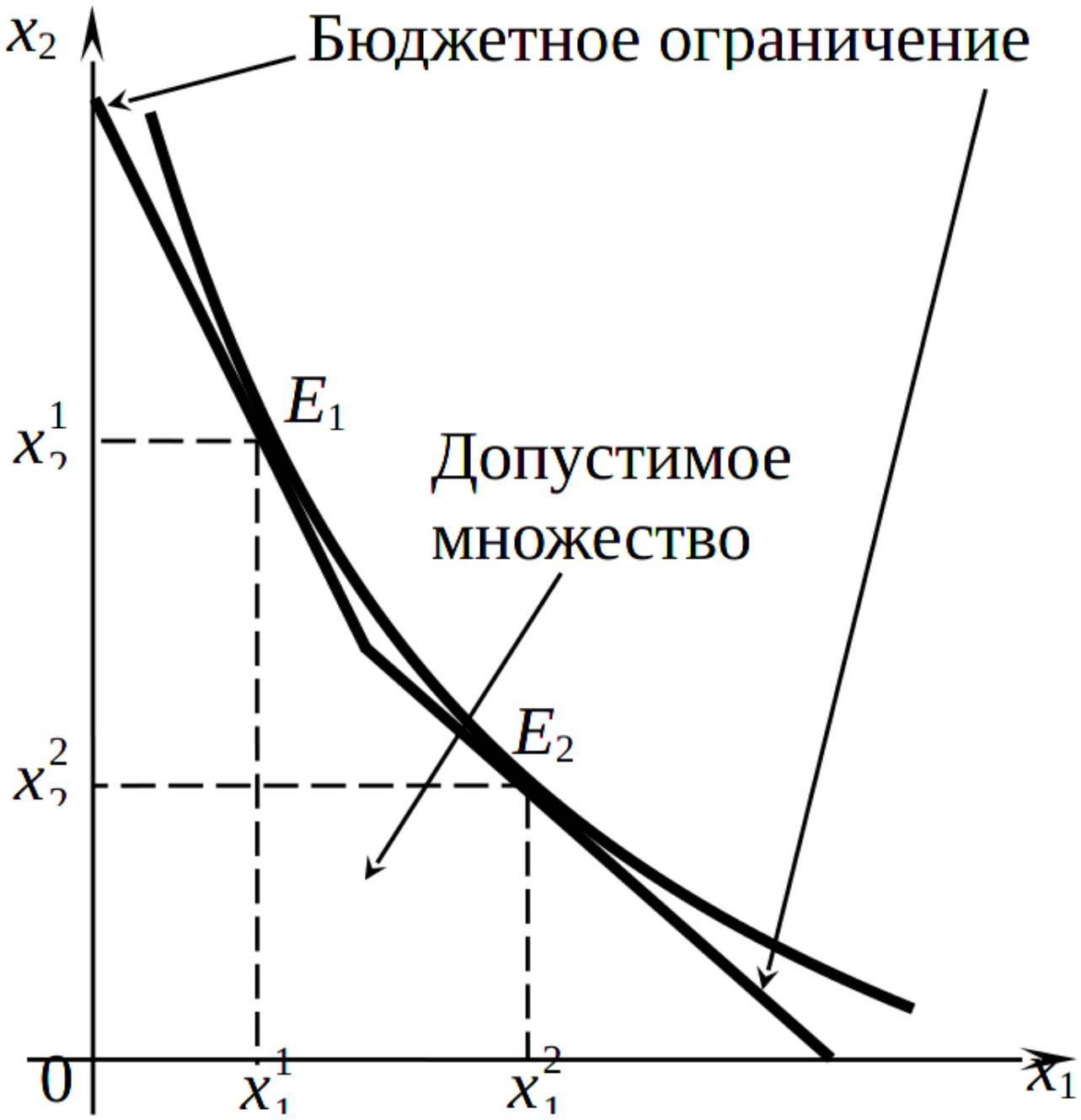


Рисунок 2.5. Неединственность оптимальной потребительской корзины товаров при невыпуклости допустимого множества

Пример неединственности оптимальной корзины товаров при нестрогой квазивогнутости функции полезности дает потребительский выбор между товарами-субститутами, когда индивидуальные предпочтения имеют вид (1.31). Для линейной функции полезности угловой коэффициент касательной к кривой безразличия по модулю равен отношению констант α и β (1.32). Возможны три случая, в каждом из которых будет свой объем спроса на продукты.

Случай 1. Если $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_1}{p_2}$, или же, другими словами, $\frac{p_2}{\beta} < \frac{p_1}{\alpha}$, то угловой коэффициент кривой безразличия по абсолютному значению меньше углового коэффициента бюджетного ограничения, поэтому наблюдается угловое равновесие. В этом случае $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{M}{p_2}$ (рис. 2.6).

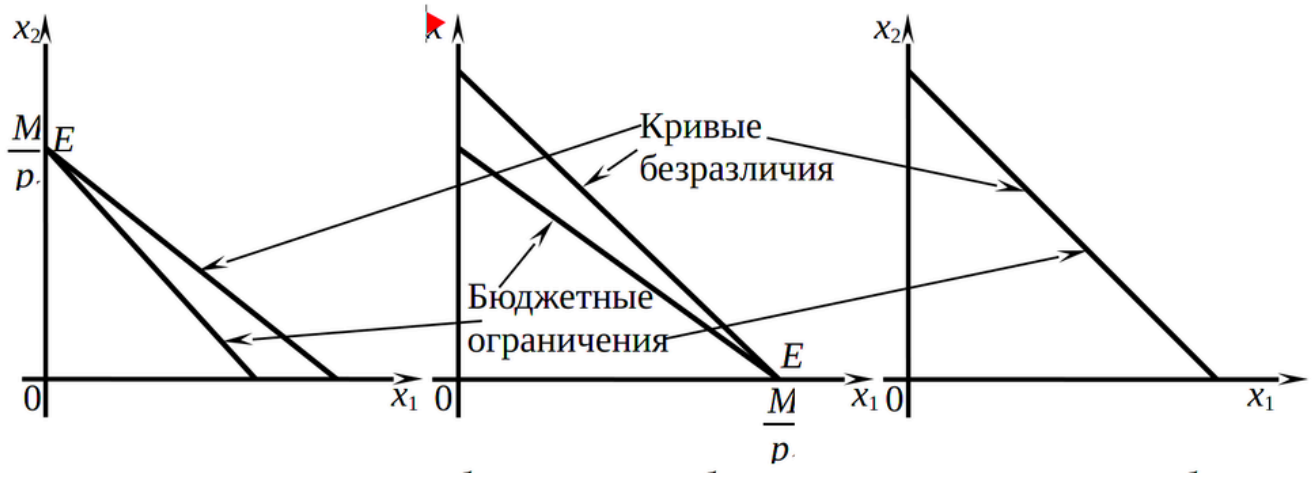
Случай 2. При $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{p_1}{p_2}$, т.е. $\frac{p_2}{\beta} > \frac{p_1}{\alpha}$, угловой коэффициент кривой безразличия по абсолютному значению больше углового коэффициента бюджетного ограничения, поэтому также наблюдается угловое равновесие. При этом $x_1 = \frac{M}{p_1}$, $x_2 = 0$ (рис. 2.7).

Случай 3. Если $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p_1}{p_2}$, или же, в другой записи, $\frac{p_2}{\beta} = \frac{p_1}{\alpha}$, то угловой коэффициент кривой безразличия совпадает по абсолютному значению с угловым коэффициентом бюджетного ограничения, поэтому наблюдается неединственность равновесия (рис. 2.8), когда точки оптимума «заметают» все бюджетное ограничение.

Рисунок 2.6. Линейные предпочтения: краевой оптимум (случай 1)

Рисунок 2.7. Линейные предпочтения: краевой оптимум (случай 2)

Рисунок 2.8. Линейные предпочтения: множественный оптимум (случай 3)



Очевидно, что при анализе потребительского выбора между совершенными субститутами предпосылка о наличии внутреннего оптимума в общем случае является нерелевантной. Поэтому оптимизационная задача (2.6), соответствующая взаимозаменяемым благам

$$\begin{array}{l}\max_{x_1,x_2} U = \max_{x_1,x_2} (\alpha x_1 + \beta x_2) : \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \le M, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.\end{array} \quad (2.11)$$

требует отдельного, более детального анализа [7].

Перепишем задачи в канонической постановке, когда целевая функция минимизируется:

$$\begin{array}{l}\min_{x_1,x_2} (-U) = \min_{x_1,x_2} (-\alpha x_1 - \beta x_2) : \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \le M, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.\end{array} \quad (2.12)$$

Функция Лагранжа будет выглядеть так:

$$L = -\lambda_0(\alpha x_1 + \beta x_2) + \lambda_1(p_1 x_1 + p_2 x_2 - M) - \lambda_2 x_1 - \lambda_3 x_2. \quad (2.13)$$

Необходимые условия связанного минимума в задаче (2.12), или условного максимума полезности (2.11), включают:

– стационарность функции Лагранжа (2.13) по искомым переменным – объемам потребления товаров:

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x_1} = -\lambda_0 \alpha + \lambda_1 p_1 - \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -\lambda_0 \beta + \lambda_1 p_2 - \lambda_3 = 0;\end{cases} \quad (2.14)$$

– условия дополняющей нежесткости:

$$\begin{cases}\lambda_1(p_1 x_1 + p_2 x_2 - M) = 0, \\ \lambda_2 x_1 = 0, \\ \lambda_3 x_2 = 0;\end{cases} \quad (2.15)$$

– неотрицательность множителей Лагранжа: $\lambda_i \ge 0, i = 0, 1, 2, 3$; причем вектор множителей Лагранжа должен быть ненулевым: $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \ne 0$.

Пусть $\lambda_0 = 0$, тогда в силу (2.14):

$$\begin{cases}\lambda_1 p_1 = \lambda_2, \\ \lambda_1 p_2 = \lambda_3;\end{cases}$$

а значит, по условиям дополняющей нежесткости (2.15):

$$\begin{cases}\lambda_1(p_1 x_1 + p_2 x_2 - M) = 0, \\ \lambda_1 p_1 x_1 = 0, \\ \lambda_1 p_2 x_2 = 0;\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}\lambda_1(p_1 x_1 + p_2 x_2 - M) = 0, \\ \lambda_1(p_1 x_1 + p_2 x_2) = 0.\end{cases}$$

Если $\lambda_1 = 0$, то и $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0 = 0$, чего не может.

Если же

$$\begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 - M = 0, \\ p_1x_1 + p_2x_2 = 0, \end{cases}$$

то $M = 0$, чего также не может быть $(M = 0)$.

Следовательно, $\lambda_0 \neq 0$, и без ограничения общности можно положить $\lambda_0 = 1$. Тогда (2.14) принимает вид:

$$\begin{cases} -\alpha + \lambda_1 p_1 - \lambda_2 = 0, \\ -\beta + \lambda_1 p_2 - \lambda_3 = 0. \end{cases} (2.16)$$

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$; тогда $\alpha = \beta = 0$, что невозможно по условиям задачи. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 > 0$, то $x_2 = 0$ и $\alpha = 0$, чего не может быть. При $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 > 0$, оказывается, что $x_1 = 0$ и $\beta = 0$, что также исключается. В случае $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$, система (2.16) вырождается:

$$\begin{cases} \lambda_2 = -\alpha, \\ \lambda_3 = -\beta. \end{cases}$$

Но это подразумевает $\lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_3 \geq 0$, что противоречит гипотезе, высказанной выше. Таким образом, рассуждения, проделанные выше, показывают, что $\lambda_1 > 0$.

Случай положительности всех множителей Лагранжа ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$) приводит к противоречию:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 0, \\ p_1x_1 + p_2x_2 = M; \end{cases}$$

и тем самым исключается.

Предположим, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Тогда:

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{p_1}{p_2}, \\ p_1x_1 + p_2x_2 = M, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Следовательно, если угловые коэффициенты линии безразличия и бюджетного ограничения совпадают по абсолютному значению, например, при $p_2 = p_2^1$, как показано на рис. 2.8, то наблюдается неединственность равновесия. В этом случае величины спроса на x_1 и x_2 задаются уравнением бюджетного ограничения. При этом x_2 может принимать любые значения между 0 и $\frac{M}{p_2^1}$, тогда как $x_1 = \frac{M}{p_1} - \frac{p_2^1}{p_1}x_2$ (случай 3).

В случае, когда $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 > 0$, из условий дополняющей нежесткости (2.15) следует $x_2 = 0$ и выполнение в виде равенства бюджетного ограничения, а значит, $x_1 = \frac{M}{p_1}$ (случай 2). Возникает краевой оптимум, когда угловой коэффициент линии безразличия по абсолютному значению больше тангенса угла наклона бюджетного ограничения $\left(\frac{\alpha}{\beta} > \frac{p_1}{p_2}\right.$, или $\left.\frac{p_2}{\beta} > \frac{p_1}{\alpha}\right)$. Например, при $p_2 = p_2^2$ это будет точка E_1 (рис. 2.7).

Если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 = 0$, то из условий дополняющей нежесткости (2.15) получается, что $x_1 = 0$, и, поскольку в данном случае бюджетное ограничение становится равенством, $x_2 = \frac{M}{p_2}$ (случай 1). Наблюдается краевой оптимум, когда угловой коэффициент линии безразличия по абсолютному значению меньше тангенса угла наклона бюджетного ограничения $\left(\frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_1}{p_2}\right.$, или $\left.\frac{p_2}{\beta} < \frac{p_1}{\alpha}\right)$. Например, при $p_2 = p_2^3$ это будет точка E_2 (рис. 2.6).

Вариациями решения задачи (2.6) потребительского выбора по параметрам цен и дохода являются функции спроса на товары по Маршаллу:

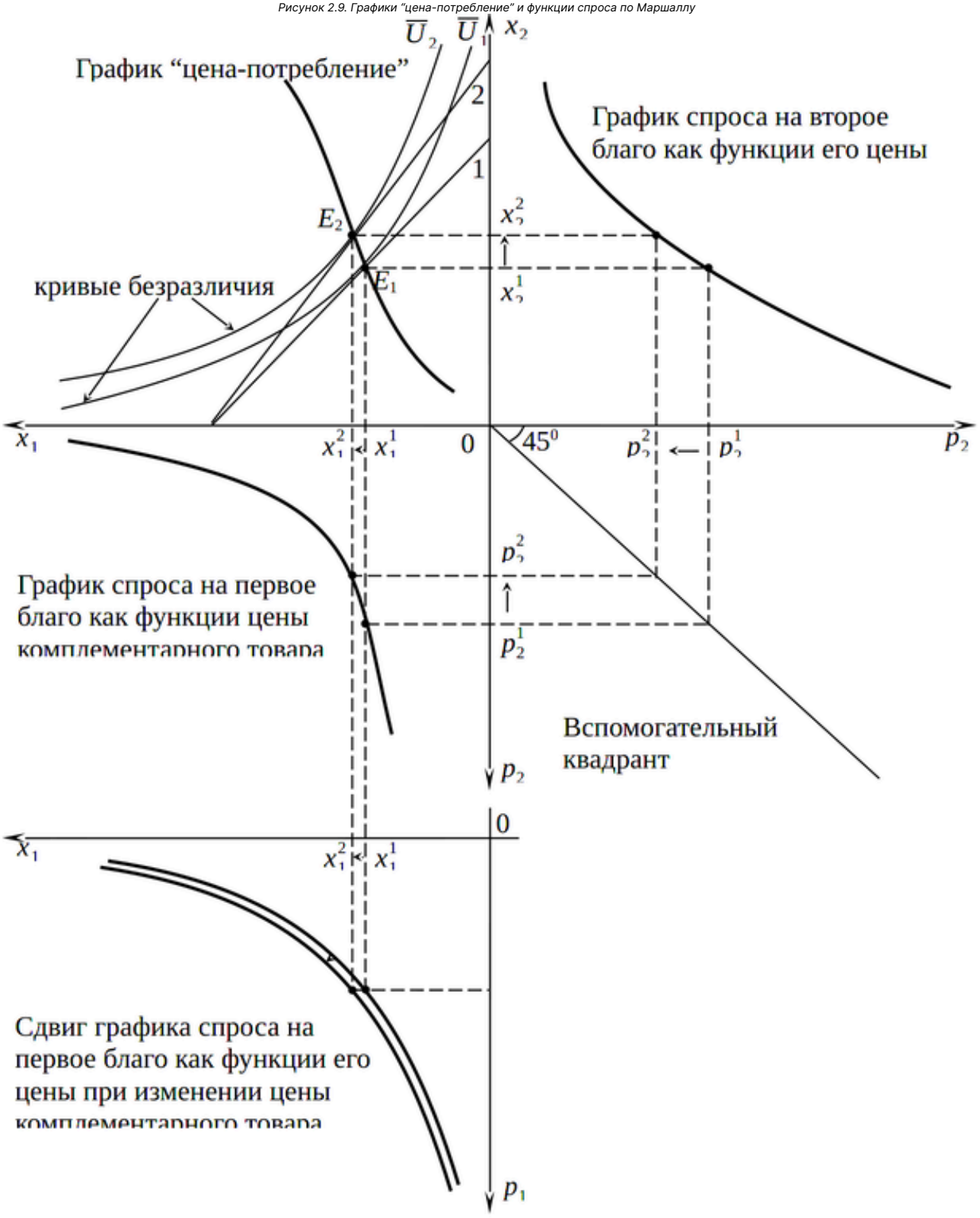
$$x_j^m = x_j\,(p_1, p_2, M), j = 1, 2. (2.17)$$

Получение функций спроса (в узком смысле) и Энгеля как зависимостей оптимальной корзины товаров соответственно от цен и дохода покупателя может быть проиллюстрировано с помощью графиков «цена–потребление» (рис. 2.9) и «доход–потребление» (рис. 2.10).

Рис. 2.9 объединяет иллюстрации выведения функции спроса на некоторое благо (в данном случае – №2) и построение зависимости спроса на другой товар (в данном случае – №1) как функции дополняющего блага. Здесь для удобства иллюстрации зависимости индивидуального спроса на оба блага одновременно от цены второго товара (как и на рис. 2.10) график потребительского выбора симметрично отражен относительно вертикальной оси (второго блага), т.е. объемы потребления первого товара возрастают влево от начала координат. При снижении цены второго товара бюджетное ограничение поворачивается против часовой стрелки на рис. 1.25 из положения 1 в положение 2 вокруг точки пересечения с осью первого блага. Вариация цены приводит к перемещению оптимальной потребительской корзины товаров из точки E_1 в точку E_2. Совокупность всех таких оптимальных наборов в координатах потребляемых благ (x_1 и x_2), соответствующих всевозможным уровням цены второго блага при фиксированной цене первого задает линию «цена–потребление». В координатах цены p_2 и объема потребления товара x_2 с ней сопряжен график функции спроса на второе благо, который образуют всевозможные сочетания между величиной спроса, зафиксированной кривой «цена-потребление», и соответствующим ей уровнем рыночной цены на данный товар. Построенная таким образом на смежном, по отношению к линии «цена-потребление», графике кривая индивидуального маршаллианского спроса, как правило, отражает действие т.н. «закона спроса» – убывающую зависимость объема потребление товара от уровня рыночной цены, когда потребитель покупает большее количество товара по низкой цене и меньшее количество товара по высокой цене при прочих равных условиях.

Биссектриса вспомогательного правого нижнего квадранта в верхней части рис. 2.9 призвана показать, что одно и то же изменение цены второго блага служит аргументом в функции спроса и на данный, и на другой товар. При снижении цены второго товара спрос и на данное благо, и на первый товар снижается, т.е. эти блага являются взаимодополняющими в потреблении. Если рассматривать спрос на первый товар как зависимость от его цены, то в координатах «p_1–x_1» цена второго блага является фактором сдвига графика спроса на первый товар. При неизменной цене первого блага объемы его потребления растут со снижением цены товара-комплемента, а значит, график спроса сдвигается дальше от начала координат. На рис. 2.9 система координат «p–x_1», в которой отображается спрос на первый товар, транспонирована, т.е. ось цены направлена вниз, а ось количества товара – влево, а значит, соответствующий сдвиг линии спроса происходит в направлении влево-вниз.

Рисунок 2.9. Графики "цена-потребление" и функции спроса по Маршаллу

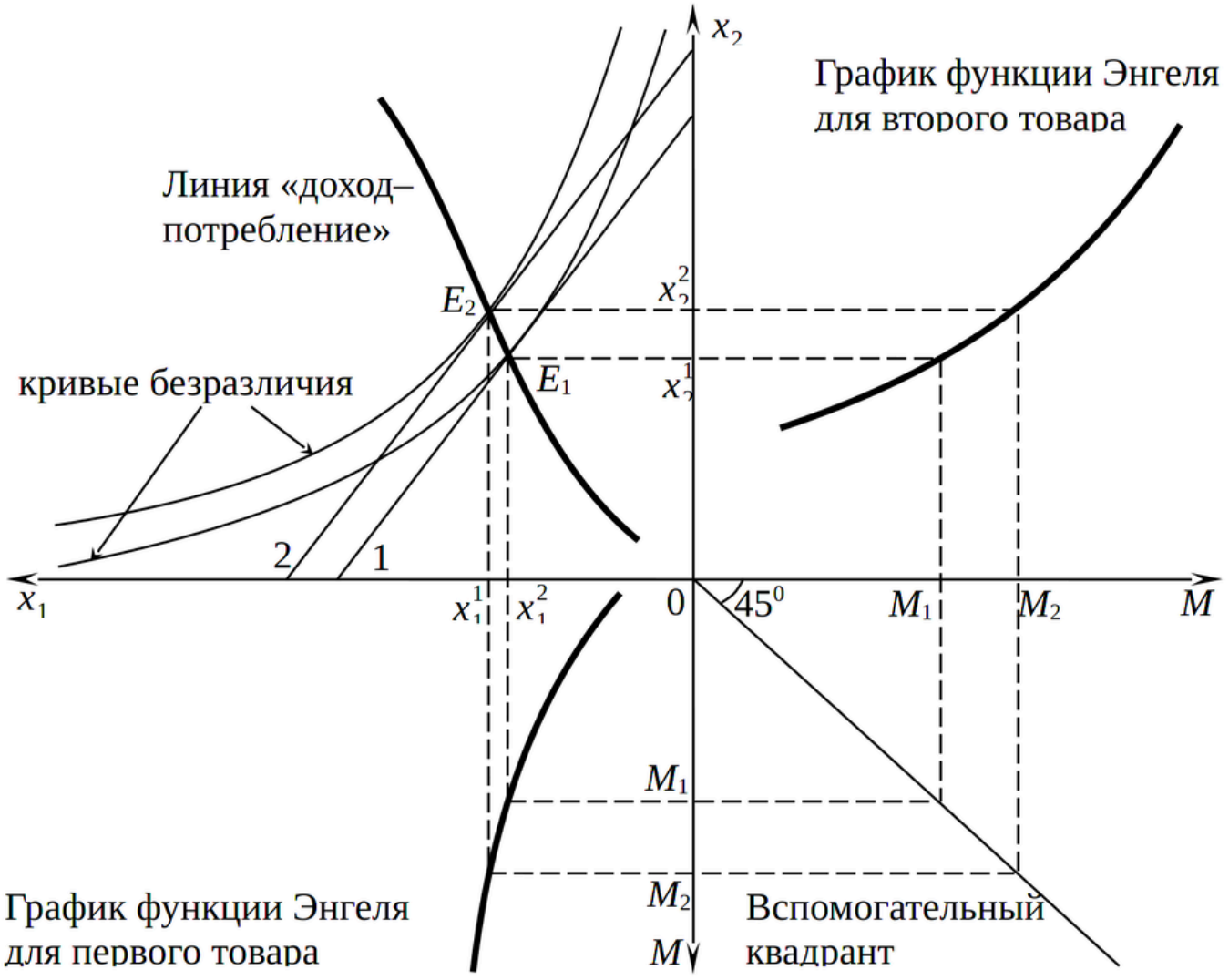


Вариация, в частности увеличение, дохода потребителя, или пропорциональное изменение цен всех товаров, отражается на графике в виде параллельного сдвига бюджетного ограничения. Например, чем больше доход потребителя, тем выше и правее

располагается его бюджетная линия. При увеличении дохода потребителя она сдвигается в положение 2 и занимает положение, параллельное первоначальному (под номером 1 на рис. 2.10). Это приводит к изменению оптимальной потребительской корзины товаров (из точки E_1 в точку E_2). Множество соответствующих оптимальных наборов в координатах потребляемых благ (x_1 и x_2) задает линию «доход–потребление». В координатах дохода M и объема потребления товара ей соответствует график функции Энгеля.

Вид кривой «доход-потребление» позволяет сделать важные выводы относительно категории товаров, входящих в потребительский набор. Если потребитель считает товар нормальным, то с ростом дохода будет увеличиваться величина его индивидуального спроса на этот товар. Поэтому линия "доход-потребление" при наличии двух нормальных товаров в потребительской корзине представляет собой возрастающую зависимость между объемами потребления данных благ (рис. 2.10). Для удобства иллюстрации зависимости индивидуального спроса от дохода для обоих благ одновременно на рис. 2.10 график потребительского выбора симметрично отражен относительно вертикальной оси (второго товара), т.е. объемы потребления первого блага возрастают влево от начала координат. Линия, проведенная под углом в 45° в правом-нижнем, вспомогательном квадранте на рис. 2.10, позволяет использовать одну и ту же вариацию дохода в качестве аргумента функций Энгеля двух товаров. Функции Энгеля отражают возрастающую зависимость спроса от дохода, если товары являются нормальными.

Рисунок 2.10. Графики «доход–потребление» и функции Энгеля



Возможна классификация товаров на нормальные и худшие в зависимости от того, возрастает или убывает на них спрос с увеличением дохода потребителя. Товар называется нормальным, если спрос на него растет с увеличением доходов покупателей. Товар называется инфериорным, или худшим, если спрос на него снижается с ростом доходов потребителей.

В частности, линия «доход–потребление» направлена вверх-вправо, если оба товара являются нормальными. Если один из товаров в потребительской корзине является инфериорным (второй при этом обязательно должен быть нормальным), то линия "доход-потребление" будет отражать убывающую зависимость оптимального количества худшего блага от нормального при изменении дохода покупателя. При этом функция Энгеля для инфериорного товара представляет собой убывающую зависимость спроса на данное благо от дохода потребителя

Функции условного спроса по Маршаллу являются однородными нулевой степени по ценам и доходу потребителя:

$$x_j(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha M) = x_j(p_1, p_2, M) = x_j^m, j = \{1, 2\}. \quad (2.18)$$

Действительно, в силу однородности первой степени расходов потребителя (2.5), изменение цен на товары в одной и той же пропорции (в α раз) вызывает равнопропорциональное изменение расходов, а значит, и дохода потребителя, оставляя, тем

самым, его бюджетное ограничение без изменения. Следовательно, и решение задачи максимизации полезности, т.е. значение функции условного спроса по Маршаллу, сохранится неизменным.

Доказав единственность решения задачи потребительского выбора (2.6) при строгой квазивогнутости функции полезности, мы, тем самым, обосновали существование функции спроса по Маршаллу, поскольку в результате решения задачи условной оптимизации (2.6) каждому значению параметров – цен и располагаемого дохода (p_1, p_2, M) – ставится в соответствие своя, особая корзина товаров (x_1, x_2).

Примеры функций маршаллианского спроса дают неоклассические предпочтения. Например, задача потребительского выбора (2.6) при функции полезности Стоуна-Джери (1.25) будет выглядеть так [8]:

$$\max_{x_1,x_2}\left((x_1-a)^c(x_2-b)^d\right):$$
$$p_1x_1+p_2x_2=M.$$

Выпишем функцию Лагранжа для данной задачи:

$$L=(x_1-a)^c(x_2-b)^d-\lambda\left(p_1x_1+p_2x_2-M\right).$$

Условия равенства нулю частных производных лагранжиана по переменным x_1, x_2 с учетом выражения для функции полезности (1.25) можно записать так:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=c(x_1-a)^{c-1}\bullet(x_2-b)^d-\lambda p_1=\frac{c(x_1-a)^c\bullet(x_2-b)^d}{x_1-a}-\lambda p_1=\frac{cU(x_1,x_2)}{x_1-a}-\lambda p_1=0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=d(x_1-a)^c\bullet(x_2-b)^{d-1}-\lambda p_2=\frac{d(x_1-a)^c\bullet(x_2-b)^d}{x_2-b}-\lambda p_2=\frac{dU(x_1,x_2)}{x_2-b}-\lambda p_2=0.$$

Получаем следующие выражения для оптимальных объемов потребления товаров:

$$x_1=a+\frac{cU(x_1,x_2)}{\lambda p_1}, x_2=b+\frac{dU(x_1,x_2)}{\lambda p_2}.$$

Домножим левые и правые части последних двух равенств на цены, соответственно, первого и второго товаров и сложим почленно полученные соотношения:

$$M=p_1x_1+p_2x_2=p_1a+p_2b+\frac{(c+d)U(x_1,x_2)}{\lambda}.$$

Выражая отношение $U\left(x_1,x_2\right)/\lambda$ и подставляя его в предпоследние два равенства, приходим к искомым функциям спроса по Маршаллу для предпочтений Стоуна – Джери:

$$x_1^m=a+\frac{c(M-p_1a-p_2b)}{(c+d)p_1}, x_2^m=b+\frac{d(M-p_1a-p_2b)}{(c+d)p_2}. \quad (2.19)$$

Доход и цена комплементарного товара здесь представляют собой неценовые факторы спроса.

Частным случаем функций спроса (2.19) при $a=b=0$ являются зависимости, соответствующие предпочтениям Кобба – Дугласа (1.26):

$$x_1^m=\frac{cM}{(c+d)p_1}, x_2^m=\frac{dM}{(c+d)p_2}. \quad (2.20)$$

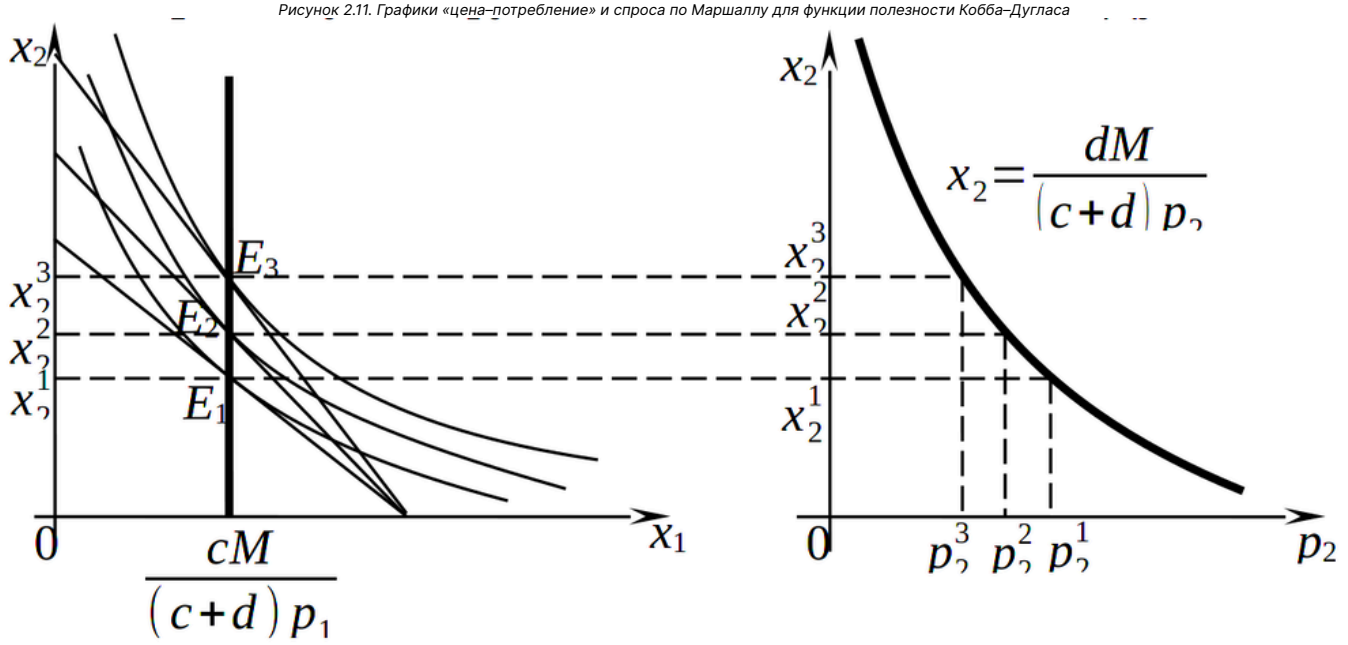
В частности, для функции полезности $U=\sqrt{x_1x_2}$ функции маршаллианского спроса будут иметь вид:

$$x_1^m=\frac{M}{2p_1}, x_2^m=\frac{M}{2p_2}. \quad (2.21)$$

Можно отметить, что реализация механизма потребительского выбора применительно к предпочтениям Кобба-Дугласа имеет своим результатом фиксированные доли расходов на каждое из благ: $p_1x_1=\frac{c}{(c+d)}M, p_2x_2=\frac{d}{(c+d)}M$, что позволяет адекватно охарактеризовать потребление агрегированных групп товаров (продуктов питания, одежды, жилья, бытовой техники и т.д.).

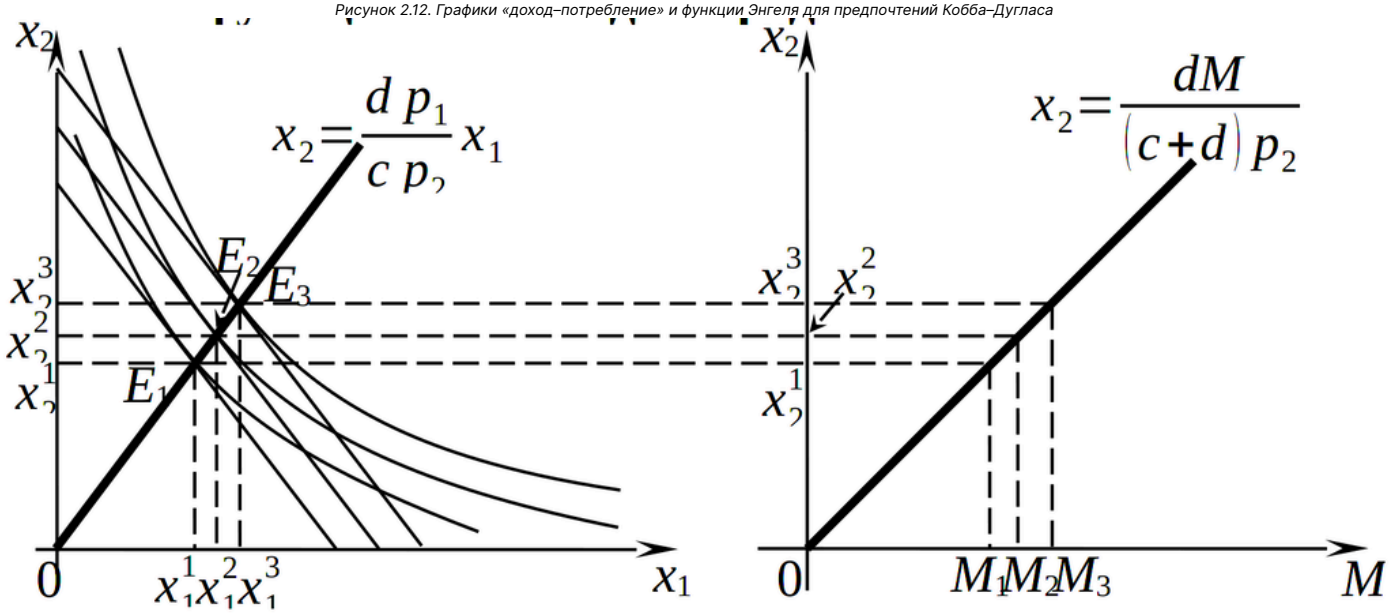
Обратим внимание на то, что в функциях спроса на каждое из данных благ отсутствует зависимость от цены другого товара. Таким образом, предпочтения Кобба-Дугласа (1.26) описывают потребление так называемых «независимых» товаров. Линия “цена-потребление” на первый и второй товар при функции полезности Кобба-Дугласа в координатах X_20X_1 будет представлять собой, соответственно, горизонтальную либо вертикальную прямую линию, проведенную на уровне потребления другого блага (рис. 2.11).

Рисунок 2.11. Графики «цена–потребление» и спроса по Маршаллу для функции полезности Кобба–Дугласа



Линия «доход-потребление» выводится лишь на основе эквимаржинального условия без привлечения бюджетного ограничения, поскольку вдоль данной линии доход потребителя является произвольной величиной: $x_2 = \frac{dp_1}{cp_2}x_1$. Функции Энгеля, как зависимости объемов потребления товаров от дохода потребителя, заложены в функциях маршаллианского спроса (2.20). При предпочтениях Кобба-Дугласа (1.26), характеризующих потребление нормальных благ, объемы товаров – это линейные возрастающие функции дохода потребителя. Очевидно, что графики функций Энгеля в данном случае представляют собой прямые линии, исходящие из начала координат (рис. 2.12).

Рисунок 2.12. Графики «доход–потребление» и функции Энгеля для предпочтений Кобба–Дугласа



Как было показано выше, предпочтения Кобба-Дугласа являются частным случаем функции полезности CES (1.13), которая дает еще один пример широко используемых в экономической науке функций маршаллианского спроса. Выведем для данных предпочтений (1.13) при $a = b = \gamma = 1$. Задача максимизации полезности данного типа при бюджетном ограничении (2.6) будет иметь вид:

$$\max_{x_1,x_2}\left(x_1^{\varphi} + x_2^{\varphi}\right)^{\frac{1}{\varphi}}:$$
$$p_1x_1 + p_2x_2 = M.$$

Выпишем функцию Лагранжа для данной задачи [9]:

$$L = \left(x_1^{\varphi} + x_2^{\varphi}\right)^{\frac{1}{\varphi}} + \lambda\left(M - p_1x_1 - p_2x_2\right).$$

Необходимые условия максимизации данной функции полезности при бюджетном ограничении (2.9) имеют вид:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{1}{\varphi}\left(x_1^{\varphi} + x_2^{\varphi}\right)^{\frac{1-\varphi}{\varphi}} \bullet \varphi x_1^{\varphi-1} - \lambda p_1 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{1}{\varphi}\left(x_1^{\varphi} + x_2^{\varphi}\right)^{\frac{1-\varphi}{\varphi}} \bullet \varphi x_2^{\varphi-1} - \lambda p_2 = 0;$$

или

$$\left(x_1^{\varphi} + x_2^{\varphi}\right)^{\frac{1-\varphi}{\varphi}} x_1^{\varphi-1} = \lambda p_1,$$
$$\left(x_1^{\varphi} + x_2^{\varphi}\right)^{\frac{1-\varphi}{\varphi}} x_2^{\varphi-1} = \lambda p_2.$$

С учетом выражения функции полезности условия оптимальности по x_1 и x_2 можно переписать так:

$$x_1 = (\lambda p_1)^{\frac{1}{\varphi-1}}\left(x_1^{\varphi} + x_2^{\varphi}\right)^{\frac{1}{\varphi}} = U \bullet \lambda^{\frac{1}{\varphi-1}} p_1^{\frac{1}{\varphi-1}},$$
$$x_2 = (\lambda p_2)^{\frac{1}{\varphi-1}}\left(x_1^{\varphi} + x_2^{\varphi}\right)^{\frac{1}{\varphi}} = U \bullet \lambda^{\frac{1}{\varphi-1}} p_2^{\frac{1}{\varphi-1}}.$$

Домножая на цену и суммируя по всем товарам, с учетом жесткости бюджетного ограничения (2.4) получаем выражение:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = U \bullet \lambda^{\frac{1}{\varphi-1}}\left(p_1^{\frac{\varphi}{\varphi-1}} + p_2^{\frac{\varphi}{\varphi-1}}\right) = M,$$

т.е.

$$U \bullet \lambda^{\frac{1}{\varphi-1}} = \frac{M}{\left(p_1^{\frac{\varphi}{\varphi-1}} + p_2^{\frac{\varphi}{\varphi-1}}\right)}.$$

Подставляя в условия оптимальности по x_1 и x_2, получаем функции спроса по Маршаллу:

$$x_1^m = \frac{M}{p_1^{\frac{1}{1-\varphi}}\left(p_1^{\frac{\varphi}{\varphi-1}} + p_2^{\frac{\varphi}{\varphi-1}}\right)}, x_2^m = \frac{M}{p_2^{\frac{1}{1-\varphi}}\left(p_1^{\frac{\varphi}{\varphi-1}} + p_2^{\frac{\varphi}{\varphi-1}}\right)}. \quad (2.22)$$

Данную функцию маршаллианского спроса можно переписать, используя показатель эластичности замещения между продуктами $\delta = \frac{1}{1-\varphi}$:

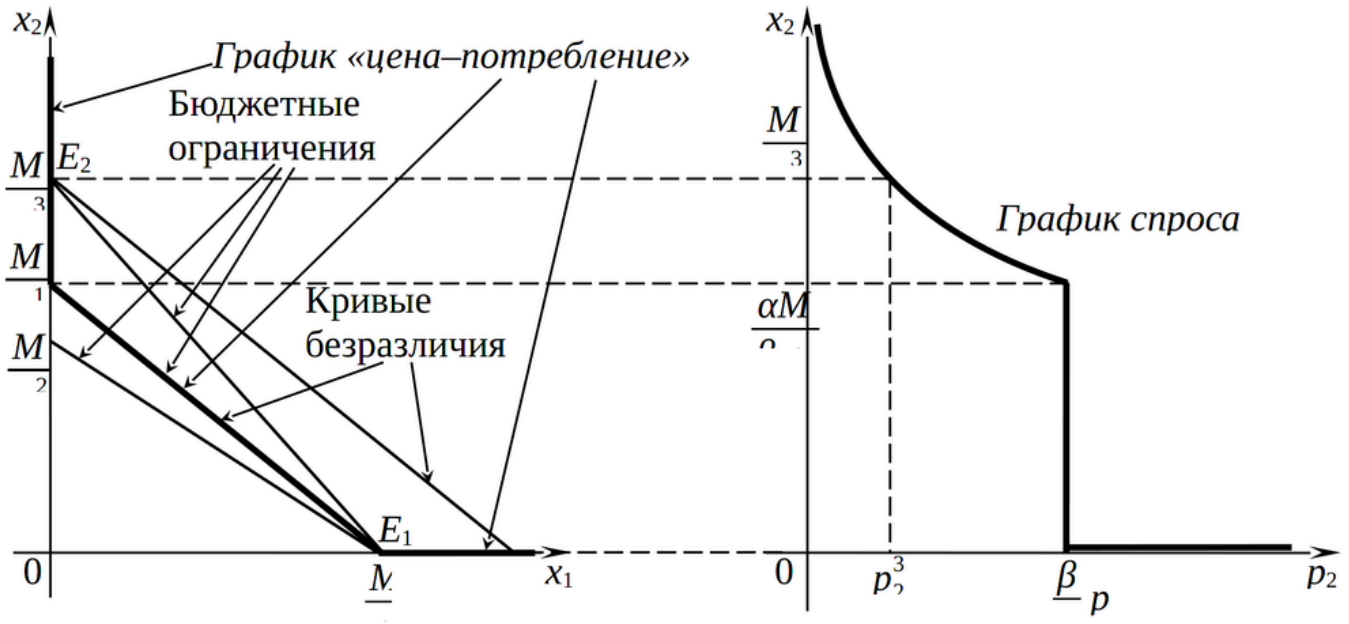
$$x_1^m = \frac{M}{p_1^{\delta}\left(p_1^{1-\delta} + p_2^{1-\delta}\right)}, x_2^m = \frac{M}{p_2^{\delta}\left(p_1^{1-\delta} + p_2^{1-\delta}\right)}.$$

Как было показано выше, в случае выбора между товарами – совершенными субститутами (1.31), когда предпочтения являются нестрого квазивогнутыми, возможна неединственность решения задачи связанной максимизации полезности, а значит, спрос по Маршаллу не будет представлять собой функциональную зависимость. Обратимся к трем случаям потребительского оптимума для совершенных субститутов. В первом случае, при $\frac{p_2}{\beta} < \frac{p_1}{\alpha}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{M}{p_2}$ (рис. 2.6). Во втором случае, при $\frac{p_2}{\beta} > \frac{p_1}{\alpha}$, $x_1 = \frac{M}{p_1}$, $x_2 = 0$ (рис. 2.7). Наконец, в третьем случае, при $\frac{p_2}{\beta} = \frac{p_1}{\alpha}$, величины спроса на x_1 и x_2 задаются уравнением бюджетного ограничения (1.16). x_1 может принимать любые значения между 0 и $\frac{M}{p_1}$, тогда как $x_2 = \frac{M}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1$.

Итак, для линейной функции полезности наблюдается не функция, а отношение, или точечно-множественное отображение спроса по Маршаллу (рис. 2.13):

$$x_1^m = t\frac{M}{p_1}, x_2^m = (1-t)\frac{M}{p_2}, \text{где} \begin{cases} t = 1 при \frac{p_2}{\beta} > \frac{p_1}{\alpha}, \\ t = 0 при \frac{p_1}{\alpha} > \frac{p_2}{\beta}, \\ t \in [0,1] при \frac{p_2}{\beta} = \frac{p_1}{\alpha}. \end{cases} \quad (2.23)$$

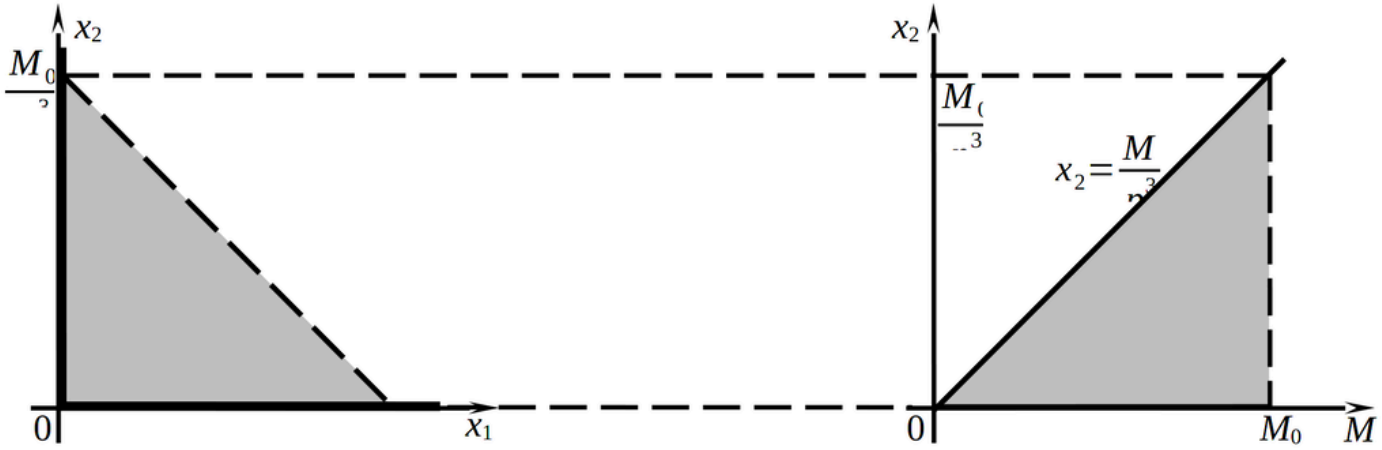
Рисунок 2.13. График «цена–потребление» и спрос для совершенных субститутов



Каждому из трех случаев оптимума для совершенных субститутов будет соответствовать свой график «доход – потребление». Если $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_1}{p_2}$ (например, при $p_2 = p_2^3$ на рис. 2.14), то линия «доход – потребление» совпадает с осью $0x_2$. Если $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{p_1}{p_2}$ (например, при $p_2 = p_2^2$), то линия «доход – потребление» – это ось $0x_1$. Если же $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p_1}{p_2}$ (например, при $p_2 = p_2^1$), то, поскольку x_1 и x_2 могут быть любыми числами от 0 соответственно до $\frac{M}{p_1}$ и $\frac{M}{p_2}$, линия «доход – потребление» «заметает» весь неотрицательный ортант $x_1 0 x_2$.

На основе зависимостей «доход – потребление» получим графики Энгеля, в частности, для второго из товаров – совершенных субститутов. Если $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_1}{p_2}$ (например, при $p_2 = p_2^3$ на рис. 2.14), линия Энгеля для второго товара представляет собой исходящий из начала координат луч $x_2 = \frac{M}{p_2}$. Если $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{p_1}{p_2}$ (например, при $p_2 = p_2^2$), то линия Энгеля – это горизонтальная ось $0M$. Если же $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p_1}{p_2}$ (например, при $p_2 = p_2^1$), то, поскольку x_2 – это произвольное число от 0 до $\frac{M}{p_2}$, график Энгеля – это сегмент положительного ортанта, ограниченный лучом $x_2 = \frac{M}{p_2}$ и координатной осью $0M$.

Рисунок 2.14. Графики «доход–потребление» и функции Энгеля для совершенных субститутов



Нефункциональный характер спроса по Маршаллу может возникать также по причине жесткости ограничений по неотрицательности объемов потребления товаров. Примером здесь могут служить квазилинейные предпочтения (1.15). Рассчитаем предельную норму замещения между товарами:

$$MRS_{12} = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{f'(x_1)}{k} = \varphi(x_1) = \frac{p_1}{p_2}. \quad (2.24)$$

В данной ситуации оптимальный объем потребления первого товара при наличии внутреннего оптимума может быть определен без учета величины дохода, только лишь на основе выражения для предельной нормы замещения:

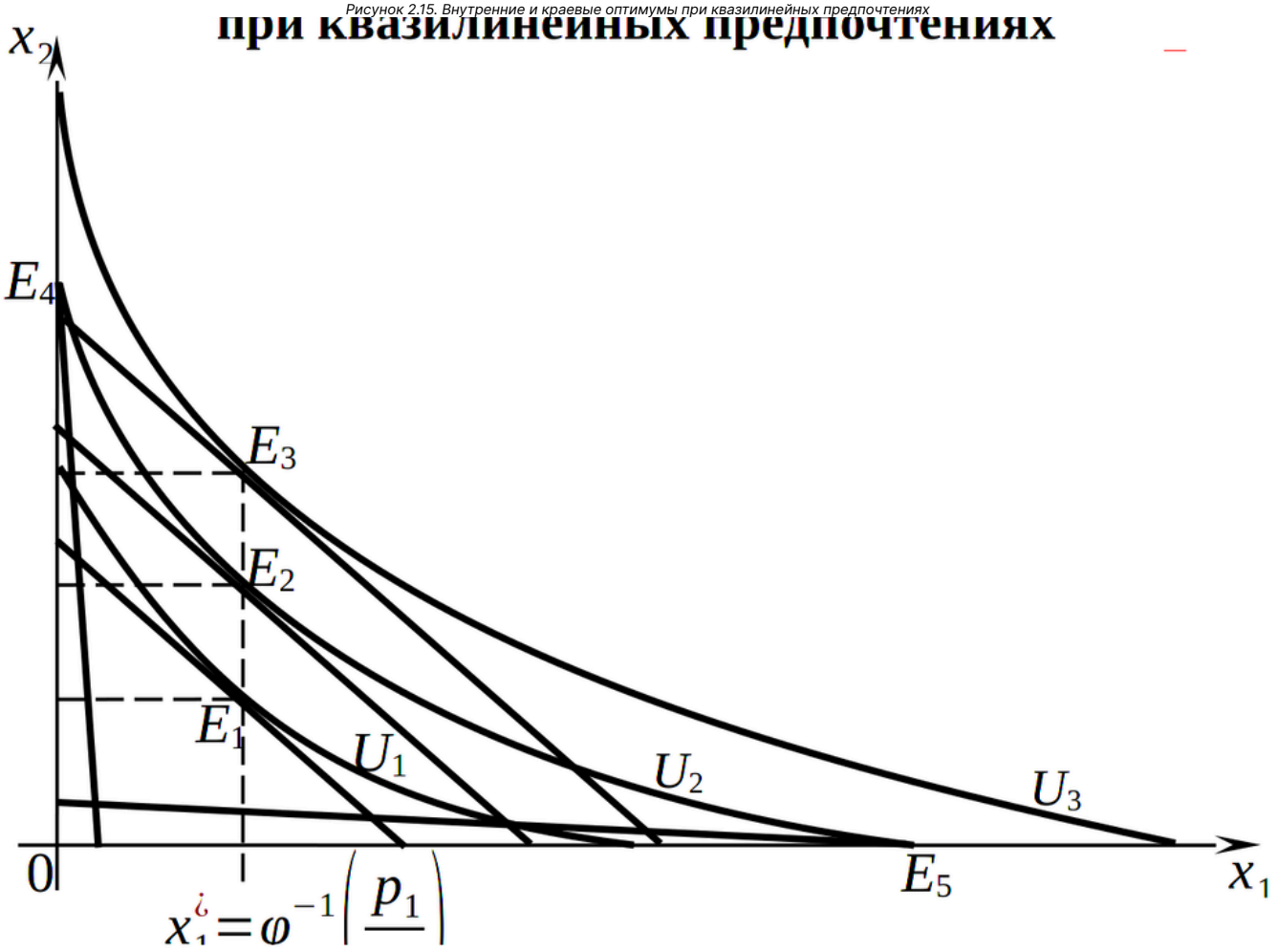
$$x_1 = \varphi^{-1}\left(\frac{p_1}{p_2}\right). \quad (2.25)$$

Рис. 2.15 иллюстрирует оптимальный объем первого товара, соответствующий точкам E_1, E_2, E_3 и не зависящий от уровня дохода индивидуума. Величина дохода при этом имеет значение при определении объема потребления второго блага:

$$x_2 = \frac{M}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1 = \frac{M}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} \varphi^{-1}\left(\frac{p_1}{p_2}\right). \quad (2.26)$$

При квазилинейных предпочтениях возможно также существование краевых оптимумов. Если $MRS_{12} = \varphi(x_1) < \frac{p_1}{p_2}$, то $x_1 = 0$, и весь доход потребителя расходуется только на потребление второго товара (точка E_4 на рис. 2.15). Наоборот, в ситуации, когда $MRS_{12} = \varphi(x_1) > \frac{p_1}{p_2}$, или, что эквивалентно, $\varphi^{-1}\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \geq \frac{M}{p_1}$, индивидуум полностью откажется от потребления второго блага $(x_2 = 0)$ и направит весь свой доход на покупку первого товара: $x_1 = \frac{M}{p_1}$ (точка E_5 на рис. 2.15).

Рисунок 2.15. Внутренние и краевые оптимумы при квазилинейных предпочтениях



Таким образом, спрос по Маршаллу при квазилинейных предпочтениях (1.15) имеет вид (рис. 2.16-2.17):

$$x_1^m = \begin{cases} 0 при \varphi(x_1) < \frac{p_1}{p_2}, \\ \varphi^{-1}\left(\frac{p_1}{p_2}\right), \\ \frac{M}{p_1} при \varphi(x_1) > \frac{p_1}{p_2}; \end{cases} \quad x_2^m = \begin{cases} \frac{M}{p_2} при \varphi(x_1) < \frac{p_1}{p_2}, \\ \frac{M}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}\varphi^{-1}\left(\frac{p_1}{p_2}\right), \\ 0 при \varphi(x_1) > \frac{p_1}{p_2}. \end{cases} \quad (2.27)$$

Рисунок 2.16. Графики «цена-потребление» и спроса на первый товар при квазилинейных предпочтениях

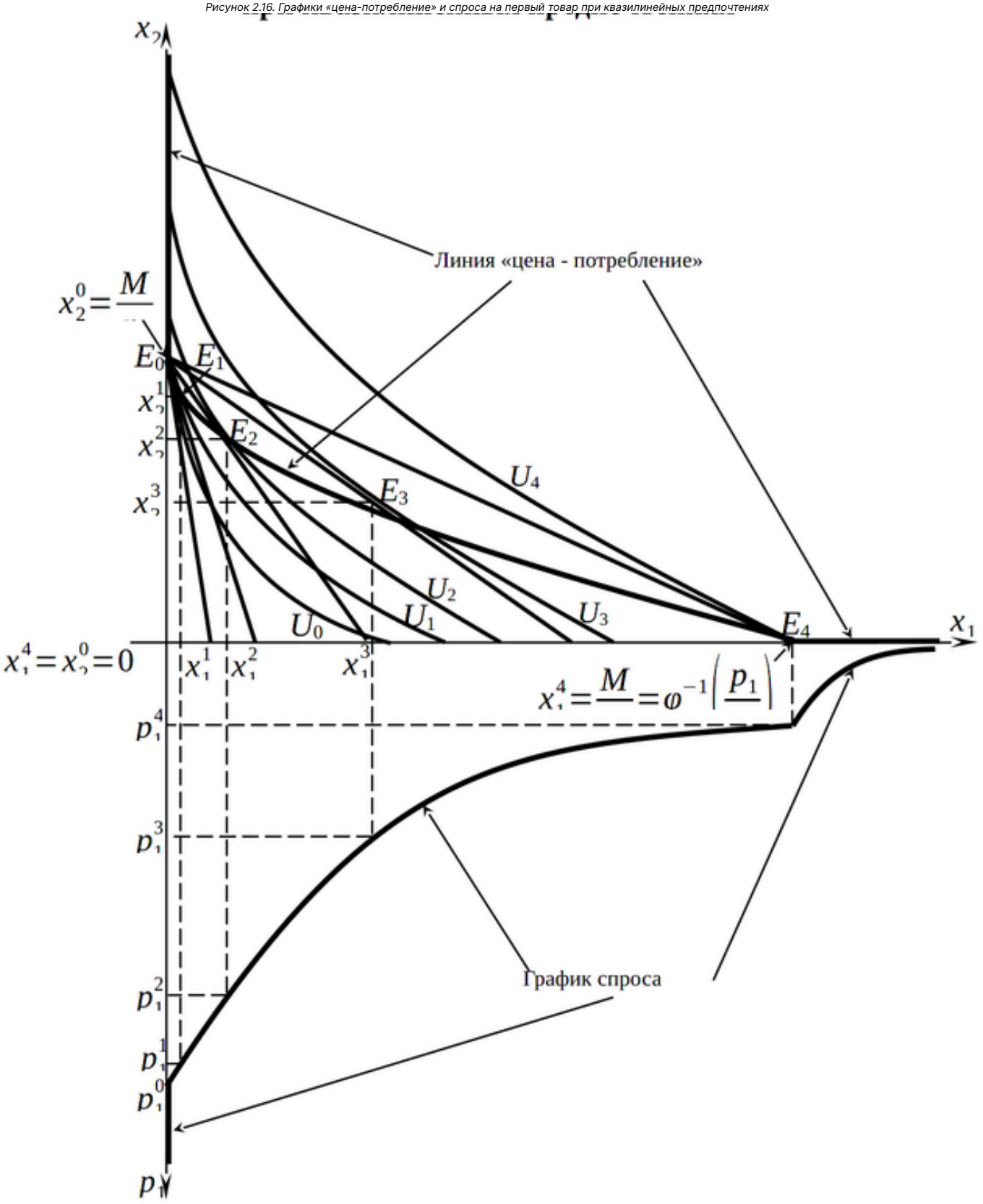
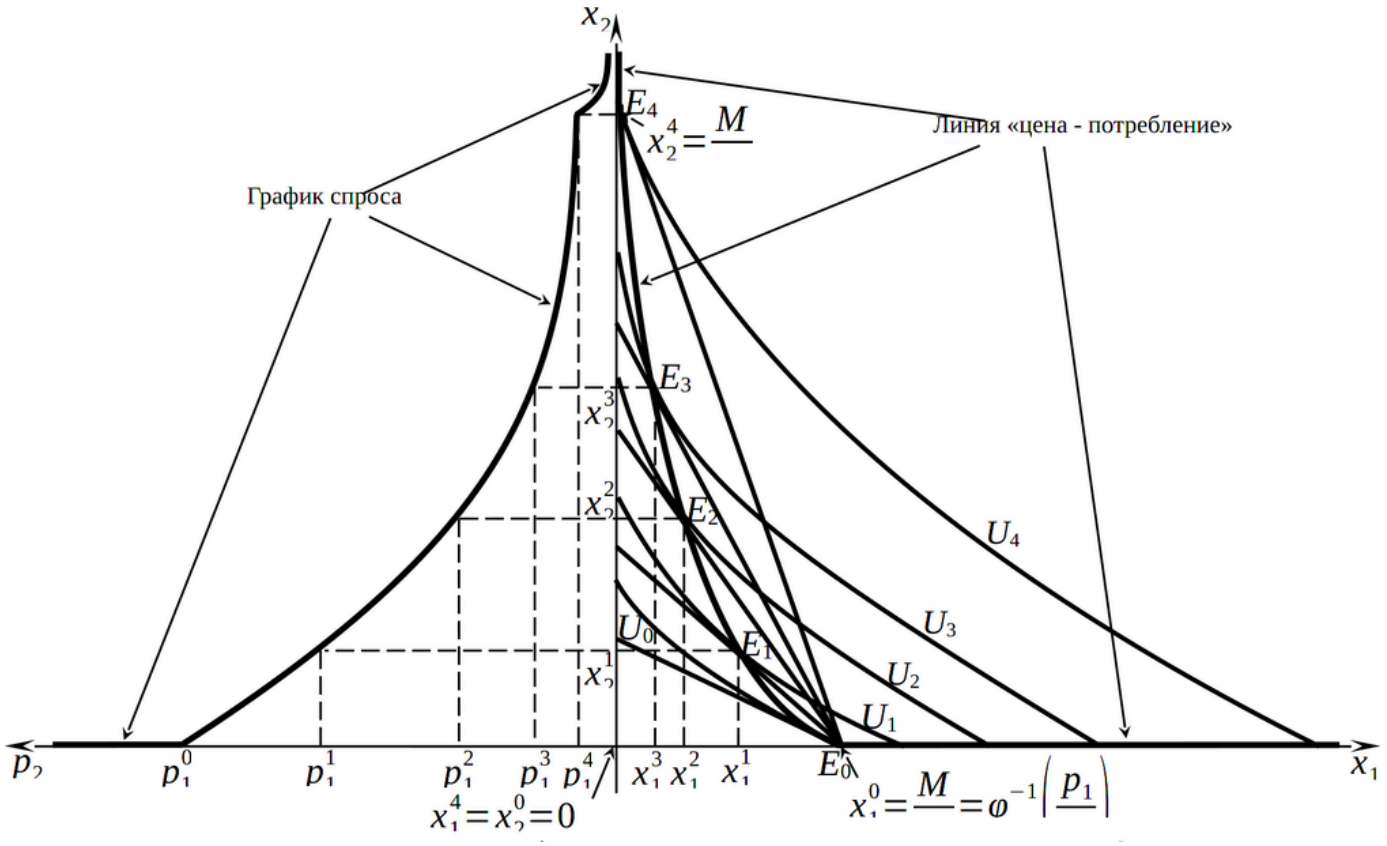


Рисунок 2.17. Графики «цена-потребление» и спроса на второй товар при квазилинейных предпочтениях



Например, если предпочтения потребителя описываются квазилинейной функцией полезности: $U = \sqrt{x_1} + x_2$, то эквимаржинальное условие (2.24) будет выглядеть так:

$$MRS_{12} = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} = \frac{p_1}{p_2},$$

т.е.

$$x_1 = \left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2.$$

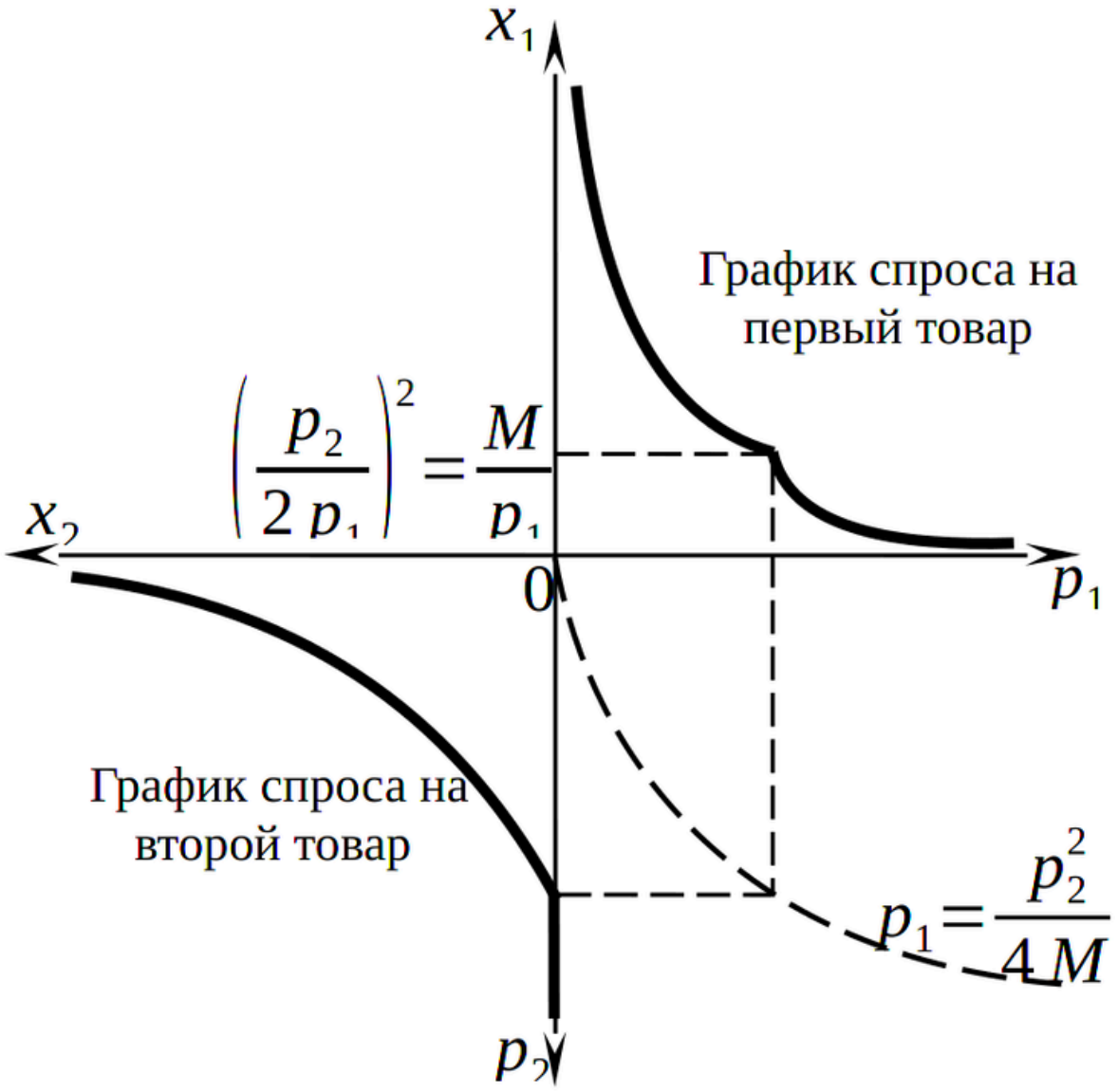
Следовательно, $\lim\limits_{p_1 \to \infty} x_1 = 0$, а значит, для данной функции полезности в выражениях функций спроса (2.27) возможны только случаи $\varphi(x_1) \geq \frac{p_1}{p_2}$.

Очевидно, что при $\varphi(x_1) = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} = \frac{p_1}{p_2}$, когда потребитель будет покупать некоторое количество второго блага, т.е. в соответствии с (2.26) $x_2 = \frac{M}{p_2} - \frac{p_2}{4p_1} > 0$, выполняется неравенство $p_1 > \frac{p_2^2}{4M}$. В противном случае, при $p_2 \geq 2\sqrt{Mp_1}$, потребитель отказывается от покупок второго товара $(x_2 = 0)$, и весь доход будет израсходован на покупку первого товара: $x_1 = \frac{M}{p_1}$.

Таким образом, функции спроса по Маршаллу (2.27) для данной квазилинейной функции полезности принимают вид (рис. 2.18):

$$x_1^m = \begin{cases} \left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2 при p_1 > \frac{p_2^2}{4M}, \\ \frac{M}{p_1} при p_1 \leq \frac{p_2^2}{4M}; \end{cases} x_2^m = \begin{cases} \frac{M}{p_2} - \frac{p_2}{4p_1} при p_2 < 2\sqrt{Mp_1}, \\ 0 при p_2 \geq 2\sqrt{Mp_1}. \end{cases} \quad (2.28)$$

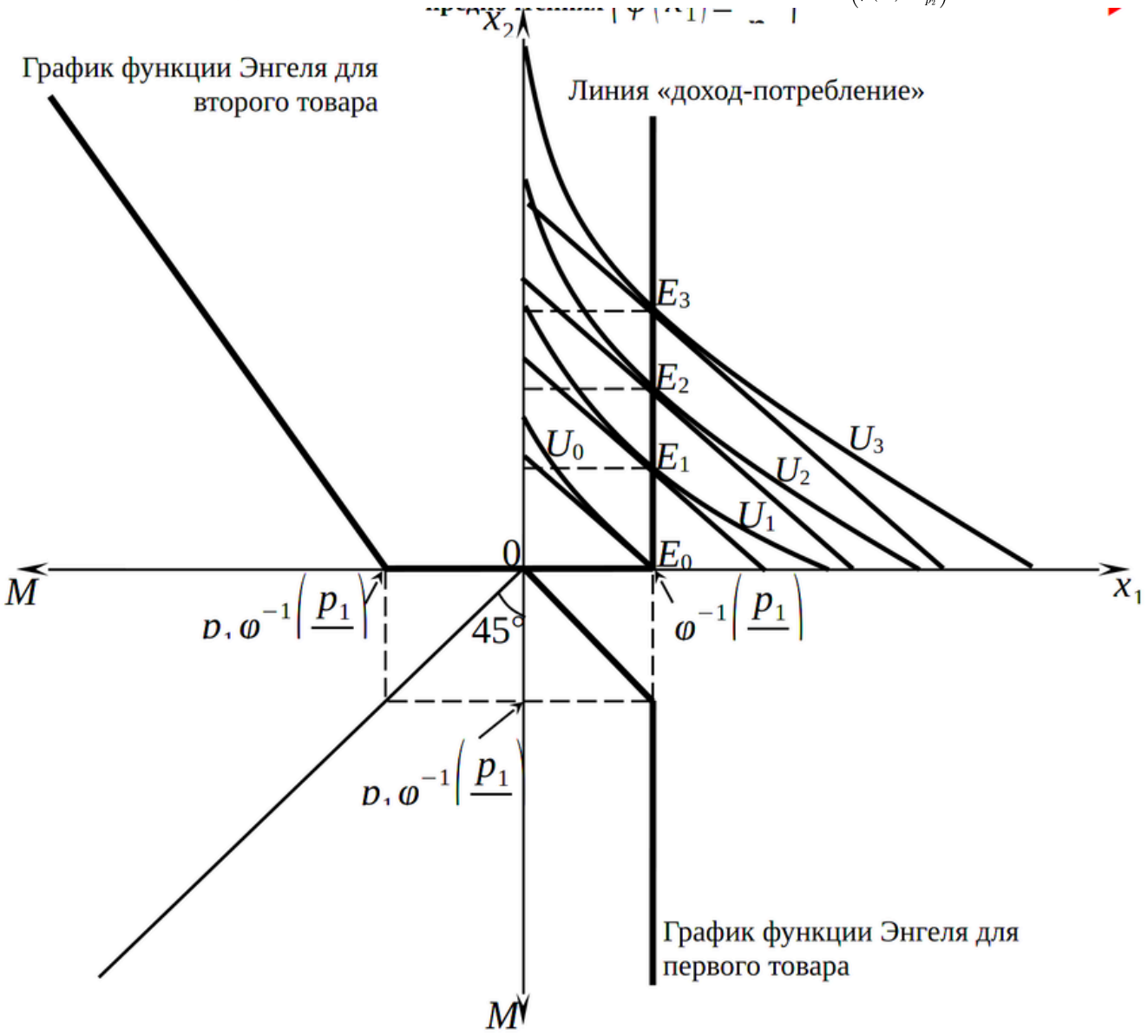
Рисунок 2.18. Графики маршаллианского спроса для квазилинейных предпочтений: пример



Поскольку в ситуации внутреннего оптимума функция спроса на первый товар может быть получена без учета бюджетного ограничения, только лишь на основе выражения для предельной нормы замещения (2.24), а значит, доход *M* не будет присутствовать в числе параметров соответствующей функции спроса по Маршаллу (2.25), постольку данное благо является нейтральным. При этом график «доход-потребление» и график функции Энгеля для первого блага будут представлять собой вертикальные прямые линии (рис. 2.19). В такой ситуации в силу (1.31) второе благо будет нормальным, а график соответствующей функции Энгеля будет прямолинейным.

Рис. 2.19, построенный для случая $\varphi(x_1) \geq \frac{p_1}{p_2}$, демонстрирует возможное наличие краевого оптимума при $M \leq p_1 \varphi^{-1}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$. Например, если предпочтения потребителя описываются квазилинейной функцией полезности $U = \sqrt{x_1} + x_2$, то функции спроса по Маршаллу имеют вид (2.28), и краевой оптимум будет иметь место при $M \leq \frac{p_2^2}{4p_1}$.

Рисунок 2.19. Графики «доход-потребление» и функций Энгеля при квазилинейных предпочтениях $\left(\varphi(x_1) \geq \frac{p_1}{p_2}\right)$



Строгая квазивогнутость – это достаточное условие единственности оптимальной потребительской корзины и непрерывности функции спроса по Маршаллу, но это свойство не является необходимым условием данных свойств решения задачи потребительского выбора (2.6). Иллюстрацией этого может служить случай оптимального набора товаров-комплементов, когда линии безразличия представляют собой прямые углы, что соответствует нестого квазивогнутой функции полезности с фиксированными пропорциями (1.28). В силу недифференцируемости леонтьевских предпочтений вдоль луча, по которому пересекаются плоскости, образующие поверхность полезности (рис. 1.8), для комплементарных товаров эквимаржинальный принцип (2.10) оказывается неприменимым. В данном случае оптимальная корзина товаров всегда соответствует вершине угла линии безразличия: $x_2 = \frac{\beta x_1}{\alpha}$. Данный луч – это график «цена–потребление» и одновременно «доход–потребление».

Значит, $M = \frac{x_1(\alpha p_1 + \beta p_2)}{\alpha}$, откуда получаем искомые функции спроса по Маршаллу на первый и второй товары:

$$x_1^m = \frac{\alpha M}{\alpha p_1 + \beta p_2}, x_2^m = \frac{\beta M}{\alpha p_1 + \beta p_2}. (2.29)$$

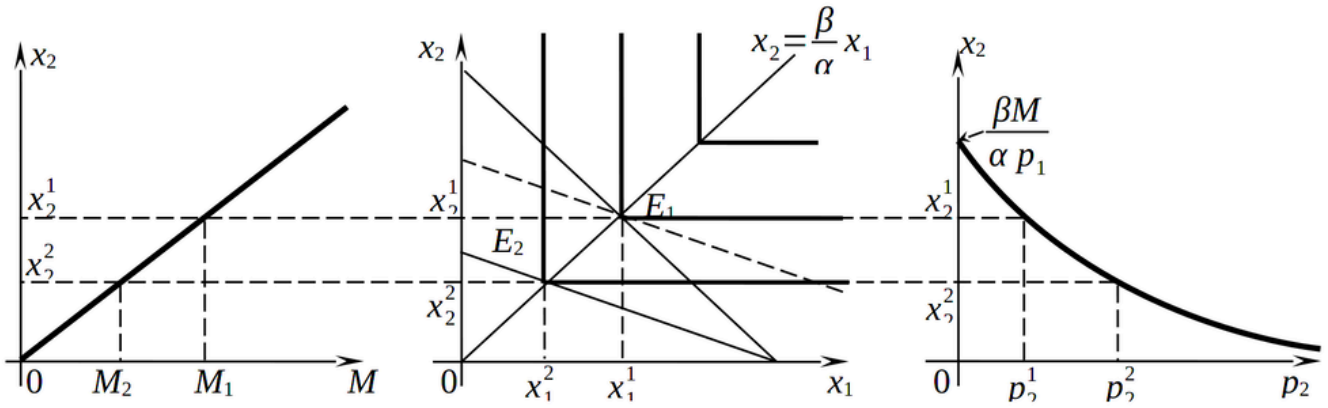
График функции Энгеля для каждого из комплементарных товаров будет лучом, исходящим из начала координат (рис. 2.20).

Рисунок 2.20. Графики «цена–потребление», «доход–потребление», функций маршаллианского спроса и Энгеля для совершенно комплементарных благ

График функции Энгеля

График «цена–потребление» и «доход–потребление»

График функции маршаллианского спроса



Важной характеристикой функции (маршаллианского) спроса является его (прямая) ценовая эластичность – показатель интенсивности реакции величины спроса на данное благо в ответ на изменение его цены, который может быть посчитан, в том числе, как отношение дифференциала логарифма объема спроса $\left(d\ln x_i = \frac{dx_i}{x_i}\right)$ к дифференциалу логарифма цены $\left(d\ln p_i = \frac{dp_i}{p_i}\right)$:

$$E_{p_i}^{d_i} = \frac{dx_i}{dp_i}\frac{p_i}{x_i} = \frac{dx_i}{x_i} / \frac{dp_i}{p_i} = \frac{d\ln x_i}{d\ln p_i}.$$

Наряду с ценой, существуют и другие факторы, влияющие на спрос потребителя на то или иное благо. Важное значение при этом имеет эластичность спроса по доходу – показатель, характеризующий процентное изменение величины спроса на некоторое благо по отношению к изменению величины дохода потребителя, измеренному в процентах:

$$E_M^{d_i} = \frac{dx_i}{dM} \bullet \frac{M}{x_i}.$$

Соотношение между эластичностями спроса по доходу для различных товаров, входящих в потребительскую корзину отражено в законе Энгеля. Сформулируем и докажем этот закон, предварительно проведя некоторые формальные преобразования бюджетного ограничения потребителя. Прежде всего отметим, что полный дифференциал дохода и расходов потребителя имеет вид: $dM = p_1 dx_1 + p_2 dx_2$.

Полная производная бюджетного ограничения по величине дохода будет единичной:

$$\frac{dM}{dM} = p_1\frac{dx_1}{dM} + p_2\frac{dx_2}{dM} = 1.$$

Разделив и домножив каждое слагаемое в середине данного равенства на объем потребления соответствующего товара, а также на величину дохода индивида:

$$\frac{p_1 x_1}{M}\frac{M dx_1}{x_1 dM} + \frac{p_2 x_2}{M}\frac{M dx_2}{x_2 dM} = 1,$$

получаем закон Энгеля, который утверждает, что сумма по всем товарам эластичностей спроса по доходу потребителя, взвешенных по долям расходов $\left(\rho_i = \frac{p_i x_i}{M}\right)$ на соответствующий товар $(i = 1, 2)$, равна единице:

$$\rho_1 E_M^{d_1} + \rho_2 E_M^{d_2} = 1.$$

Для нормальных благ эластичность спроса по доходу является величиной положительной, а для инферирных – отрицательной. Из закона Энгеля вытекает, что если один из товаров в потребительской корзине является инферирным, то другой обязательно представляет собой нормальное благо.

Закон Энгеля легко распространяется на случай произвольного количества (n) товаров в потребительской корзине:

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i E_M^{d_i} = 1.$$

Из бюджетного ограничения потребителя вытекает важное соотношение между прямыми и перекрестными ценовыми эластичностями спроса, которое носит название закона Курно [10]. Рассчитав производную бюджетного ограничения по цене одного из благ:

$$x_i + p_i\frac{dx_i}{dp_i} + p_j\frac{dx_j}{dp_i} = \frac{dM}{dp_i} = 0; i, j = 1, 2; j \neq i;$$

затем умножив данное выражение почленно на дробь $\frac{p_i}{M}$ и, кроме того, домножив и разделив второе слагаемое в левой части на x_i, а третье слагаемое – на x_j:

$$\frac{x_i p_i}{M} + \frac{p_i x_i}{M}\frac{dx_i}{dp_i}\frac{p_i}{x_i} + \frac{p_j x_j}{M}\frac{dx_j}{dp_i}\frac{p_i}{x_j} = 0; i, j = 1, 2; j \neq i;$$

получаем закон Курно [11]:

$$\rho_i E_{p_i}^{d_i} + \rho_j E_{p_i}^{d_j} = -\rho_i; i, j = 1, 2; j \neq i;$$

где $E_{p_i}^{d_i} = \frac{dx_i}{dp_i}\frac{p_i}{x_i}$ – прямая эластичность спроса на *i*-е благо по его цене, $E_{p_i}^{d_j} = \frac{dx_j}{dp_i}\frac{p_i}{x_j}$ – перекрестная эластичность спроса на *j*-е благо по цене *i*-го товара, ρ_i и ρ_j – доли соответственно *i*-го и *j*-го блага в структуре расходов потребителя при изменившихся ценах.

При произвольном количестве (n) товаров, являющихся предметом потребительского выбора, закон Курно утверждает, что сумма произведений доли i-го блага в расходах покупателя на эластичность спроса на это благо по его цене и долей остальных товаров на перекрестные эластичности спроса на них по цене i-го блага равна доле данного, i-го блага, взятой со знаком минус:

$$\rho_i E_{p_i}^{d_i} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \rho_j E_{p_i}^{d_j} = -\rho_i.$$

Также можно сформулировать соотношение, связывающее между собой показатели эластичности спроса – по цене (прямой и перекрестной) и по доходу потребителя.

В силу однородности нулевой степени (1.41) к спросу по Маршаллу применима теорема Эйлера об однородных функциях [12]:

$$\frac{\partial x_i^m(p_1,p_2,M)}{\partial p_1}p_1 + \frac{\partial x_i^m(p_1,p_2,M)}{\partial p_2}p_2 + \frac{\partial x_i^m(p_1,p_2,M)}{\partial M}M = 0, i = 1,2.$$

Поделив данное выражение почленно на x_i, получаем, что сумма всех эластичностей спроса на данный, *i*-й товар – по цене (прямой и перекрестной), а также по доходу – равна нулю:

$$E_{p_i}^{d_i} + E_{p_j}^{d_i} + E_M^{d_i} = 0; i, j = 1,2, i \neq j.$$

Данное утверждение легко распространяется на случай произвольного количества (n) товаров в потребительской корзине:

$$E_M^{d_i} + \sum_{j=1}^{n} E_{p_j}^{d_i} = 0, i = 1, \ldots, n.$$

Если функция полезности является непрерывной и строго квазивогнутой, то функция спроса $x^m = x(p, M)$, дающая оптимальный набор x при различных уровнях цен p и дохода потребителя M, непрерывна по векторному аргументу p и по скалярному аргументу M. Пусть $x = x(p, M)$ – оптимальный потребительский набор. Для доказательства устойчивости решения задачи (2.6) потребительского выбора, рассмотрим последовательность $x_t = x(p_t, M_t)$, соответствующую последовательности векторов p_t, сходящейся к p при $t \to \infty$, и последовательности скаляров M_t, сходящейся к M при $t \to \infty$. Сходимость векторов p_t в пределе $\lim\limits_{t\to\infty} p_t = p$ покоординатная: $p_t = \{p_{th}\}_{h=1}^{l}$, $p = \{p_h\}_{h=1}^{l}$; т.е. $\lim\limits_{t\to\infty} p_{th} = p_h$, $h = 1, \ldots, l$. Предел $\lim\limits_{t\to\infty} M_t = M$ – скалярный.

Важно, что последовательность x_t ограничена. Покажем это. Рассмотрим предел последовательности разностей $p_t x_t - M_t$ при $t \to \infty$. В силу сделанных выше предположений о существовании соответствующих пределов, справедливо соотношение:

$$\lim_{t\to\infty}(p_t x_t - M_t) = \lim_{t\to\infty}(p_t x_t) - \lim_{t\to\infty} M_t = \lim_{t\to\infty}\left(\sum_{h=1}^{l} p_{th}x_{th}\right) - M = \sum_{h=1}^{l}\lim_{t\to\infty}(p_{th}x_{th}) - M = \sum_{h=1}^{l}\left(\lim_{t\to\infty} p_{th}\right)\left(\lim_{t\to\infty} x_{th}\right) - M =$$

Итак, вектор x_t в пределе должен удовлетворять бюджетному ограничению, которое в покоординатном виде записывается как неравенство:

$$\sum_{h=1}^{l}\left(p_h \lim_{t\to\infty} x_{th}\right) \leq M.$$

Выделим из всей потребительской корзины товар под номером h:

$$p_h \lim_{t\to\infty} x_{th} \leq M - \sum_{k\neq h} p_k \lim_{t\to\infty} x_{tk}.$$

Данное неравенство можно ослабить. Все $x_{tk} \geq 0$, значит, также неотрицательны их пределы, которые, как будет видно из дальнейшего конечны: $\lim\limits_{t\to\infty} x_{tk} \geq 0$. Поэтому $\lim\limits_{t\to\infty} x_{tk}$ в последнем неравенстве можно заменить нулями. Тогда справедливо неравенство $p_h \lim\limits_{t\to\infty} x_{th} \leq M$, из которого получаем:

$$\lim_{t\to\infty} x_{th} \leq \frac{M}{p_h}.$$

Деление на p_h здесь было возможным и при этом сохранился знак неравенства, поскольку p_h, как цена экономического блага, является положительным числом.

Поскольку ценовое множество P, по предположению, является ограниченным снизу, у него найдется нижняя граница $\underline{p}$. Заменим в последнем неравенстве p_h на $\underline{p}$. Тогда это неравенство принимает следующий вид: $\lim\limits_{t\to\infty} x_{th} \leq \frac{M}{\underline{p}}$. Кроме того, $x_{th} \geq 0$. Поэтому так же неотрицателен его предел, который, как будет видно из дальнейшего, конечен: $\lim\limits_{t\to\infty} x_{th} \geq 0$. Получаем двойное неравенство:

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} x_{th} \leq \frac{M}{\underline{p}},$$

в котором M и $\underline{p}$ – это абсолютные, не зависящие от *t* и h константы. Выбор элемента x_{th} был произвольным, и данное неравенство справедливо для любого h. Поэтому последовательность x_t ограничена.

По теореме Больцано–Вейерштрасса [13], из каждой ограниченной последовательности действительных чисел можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Следовательно, последовательность x_t содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x_{t_k}\}$, $k \in N$, где каждый член последовательности x_{t_k} является вектором.

Обозначим множество частичных пределов, или точек сгущения, последовательности x_t через z, т.е. $z = \{z_k\}$, где $z_k = \lim\limits_{t\to\infty} x_{t_k}$, $k \in N$; причем z_k – это покоординатный предел: $\lim\limits_{t\to\infty} x_{t_k} = \left\{\lim\limits_{t\to\infty} x_{t_k h}\right\}_{h=1}^{l}$.

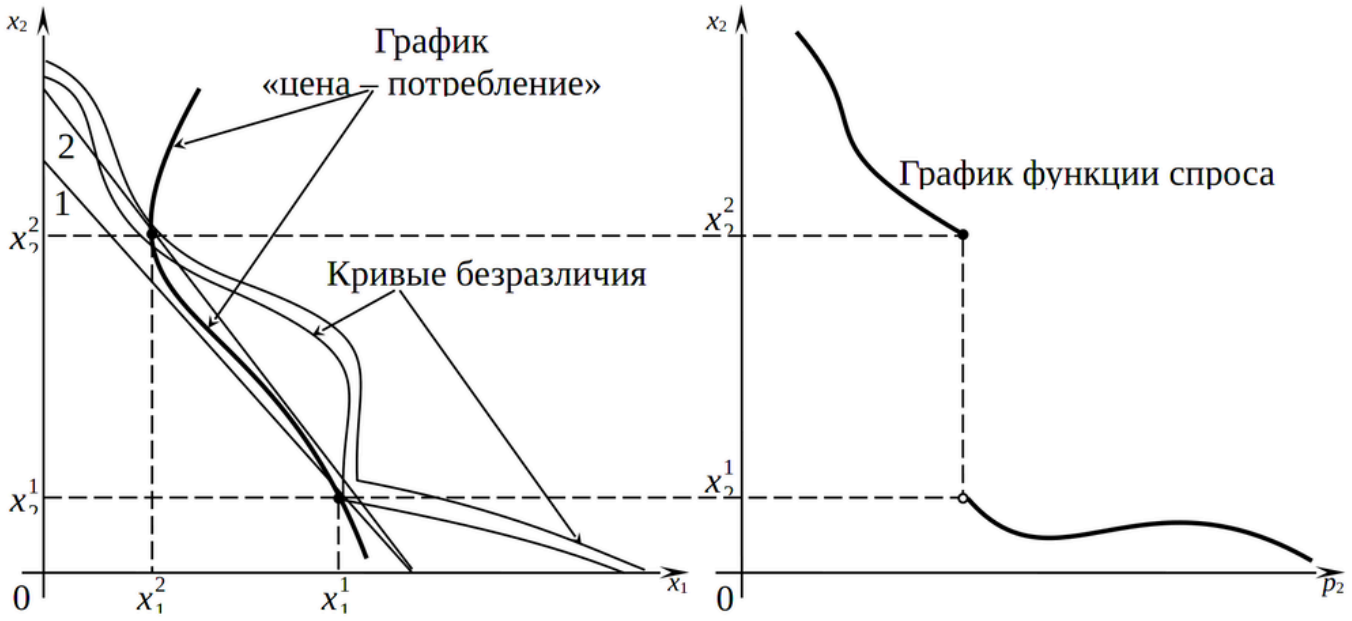
Покажем, что любой вектор z_k из z совпадает с x. Рассмотрим предел разности между скалярным произведением $p_{t_k} x_{t_k}$ и членами соответствующей последовательности M_{t_k}. Используя свойства предела, в силу предположений о сходимости последовательностей цен и дохода можно провести следующую цепочку преобразований:

$$\lim_{t_k\to\infty}(p_{t_k}x_{t_k} - M_{t_k}) = \sum_{h=1}^{l}\lim_{t_k\to\infty}(p_{t_k h}x_{t_k h}) - M = \sum_{h=1}^{l}\left(\lim_{t_k\to\infty} p_{t_k h}\right)\left(\lim_{t_k\to\infty} x_{t_k h}\right) - M = \sum_{h=1}^{l}\left(p_h \lim_{t_k\to\infty} x_{t_k h}\right) - M = \sum_{h=1}^{l} p_h z_{kh} -$$

Таким образом, векторы x и z_k принадлежат одному и тому же множеству S: $\sum\limits_{h=1}^{l} p_h x_h \le M$, $x_h \in R$ и $\sum\limits_{h=1}^{l} p_h z_{kh} \le M$, $z_{kh} \in R$. В соответствии с утверждением о единственности оптимального потребительского набора получаем равенство векторов: $x = z_k$. Поскольку все частичные пределы z_k последовательности x_t совпадают с x, вся последовательность x_t сходится к x. Это обеспечивает непрерывность функции спроса по Маршаллу, т.е. непрерывную зависимость оптимального набора товаров от параметров задачи (2.6) .

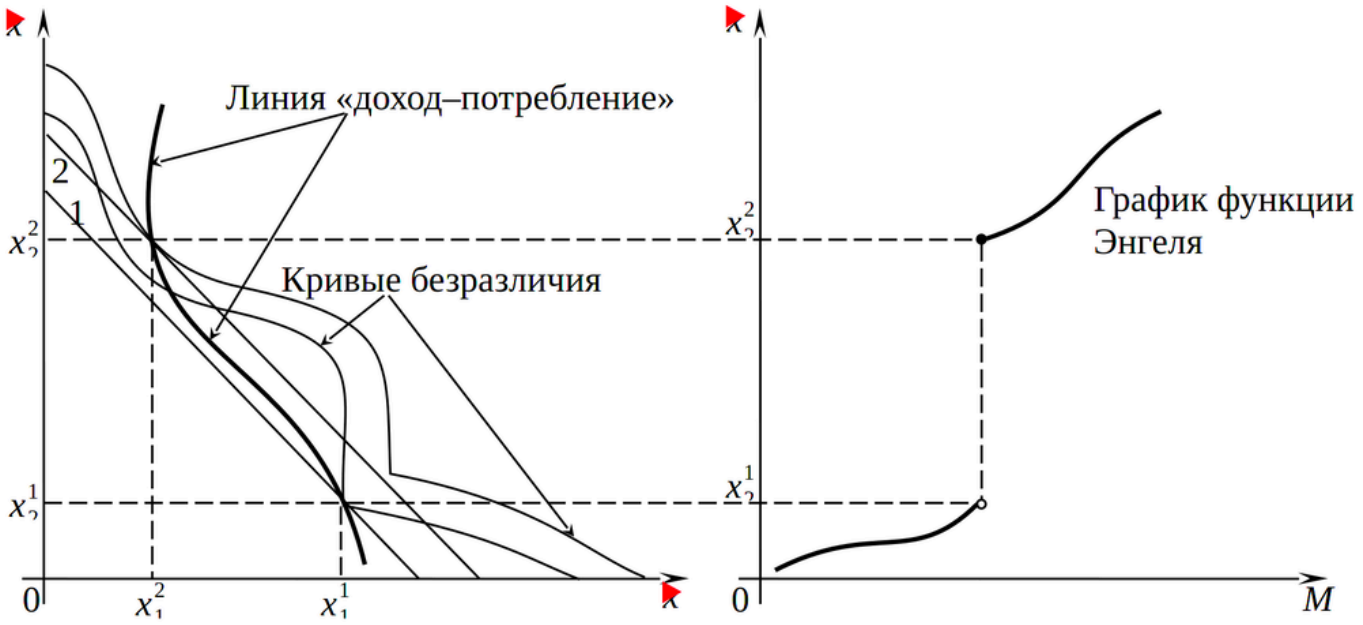
Приведем иллюстрацию разрывности функции спроса в случае, если функция полезности $U: R_{+^2\to R_+}$ не является квазивогнутой. В таком случае при бесконечно малом изменении цены товара (в частности снижении p_2), что отразится на графике поворотом бюджетного ограничения вокруг точки пересечения с осью координат, соответствующей данному благу (из положения 1 в положение 2), точка касания бюджетного ограничения и кривой безразличия может измениться скачком (от $\left(x_1^1, x_2^1\right)$ до $\left(x_1^2, x_2^2\right)$), поскольку множество $\{x \in X \,|U(x) \ge t, t \in R\}$ не является выпуклым (рис. 2.21).

Рисунок 2.21. Разрывность функции спроса в случае, если функция полезности не является квазивогнутой



Такой же скачок может наблюдаться и при малых вариациях дохода потребителя M, что графически будет выглядеть как параллельный сдвиг бюджетной прямой (рис. 2.22). Следовательно, функция спроса по Маршаллу будет иметь разрыв. Она не будет принадлежать классу C^0 непрерывных функций, что требуется при доказательстве существования общего экономического равновесия.

Рисунок 2.22. Разрывность функции Энгеля в случае, если функция полезности не является квазивогнутой



Примером разрывности функций спроса (в узком смысле) и Энгеля при отсутствии квазивогнутости функции полезности могут служить предпочтения следующего вида [14]:

$$U = \sqrt{x_1} + x_2^{\frac{3}{2}}, (2.30)$$

для которых нарушается предпосылка (2.6) об убывании предельной полезности второго блага, а первое благо в определенном диапазоне соотношения цен и дохода потребителя является инферионым.

Рассмотрим вид соответствующих кривых безразличия (рис. 2.23):

$$x_2 = (U - \sqrt{x_1})^{2/3}.$$

Они представляют собой убывающие зависимости между объемами потребления второго и первого товаров $x_2\,(x_1)$:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-1}{3\sqrt{x_1}\sqrt[3]{U-\sqrt{x_1}}} < 0.$$

Отметим, что $\lim\limits_{x_1 \to 0} \frac{dx_2}{dx_1} = -\infty.$

Кроме того, учитывая, что $U - \sqrt{x_1} = x_2^{3/2}$, можно сделать вывод:

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = \frac{1}{6x_1^{\frac{3}{2}}(U-\sqrt{x_1})^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{18x_1(U-\sqrt{x_1})^{\frac{4}{3}}} = \frac{U-4\sqrt{x_1}}{18x_1^{\frac{3}{2}}(U-\sqrt{x_1})^{\frac{4}{3}}} \leq 0 при x_2 \leq \sqrt[3]{\frac{x_1}{9}} (2.31)$$

и, наоборот,

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} > 0 при x_2 > \sqrt[3]{\frac{x_1}{9}}. (2.32)$$

Таким образом, анализирумая функция полезности описывает невыпуклые предпочтения: линия $x_2 = \sqrt[3]{\frac{x_1}{9}}$ представляет собой геометрическое место точек перегиба кривых безразличия (рис. 2.23).

Из эквимаржинального принципа следует

$$\frac{MU_1}{MU_2} = \frac{1}{3\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{p_1}{p_2},$$

$$m.e.\ x_2 = \frac{p_2^2}{9p_1^2 x_1}.$$

Подставляя данное соотношение в бюджетное ограничение $M = p_1 x_1 + \frac{p_2^3}{9p_1^2 x_1} > 0$ и решая соответствующее квадратное уравнение $p_1 x_1^2 - M x_1 + \frac{p_2^3}{9p_1^2} = 0$, получаем, что, при условии

$$\frac{M^2}{4} \geq \frac{p_2^3}{9p_1}, или \frac{3M}{2} \geq \sqrt{\frac{p_2^3}{p_1}}, (2.33)$$

объемы потребления товаров могут составлять:

$$x_1^1 = \frac{M}{2p_1} - \sqrt{\frac{M^2}{4p_1^2} - \frac{p_2^3}{9p_1^3}}, x_2^1 = \frac{M}{2p_2} + \sqrt{\frac{M^2}{4p_2^2} - \frac{p_2}{9p_1}}$$

(точка E_1 на рис. 2.23) либо:

$$x_1^2 = \frac{M}{2p_1} + \sqrt{\frac{M^2}{4p_1^2} - \frac{p_2^3}{9p_1^3}}, x_2^2 = \frac{M}{2p_2} - \sqrt{\frac{M^2}{4p_2^2} - \frac{p_2}{9p_1}}$$

(точка E_2 на рис. 2.23).

В точке E_1 выполняется неравенство (2.32):

$$x_1 < 9x_2^3 = 9\left(\frac{p_2^2}{9p_1^2x_1}\right)^3 = \frac{p_2^6}{81p_1^6x_1^3}, \text{или} x_1^4 < \frac{1}{81}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^6,$$

т.е.

$$x_1 = \frac{M}{2p_1} - \sqrt{\frac{M^2}{4p_1^2} - \frac{p_2^3}{9p_1^3}} < \frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^3}.$$

Справедливость неравенства $\frac{M}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{p_2^3}{p_1}} < \sqrt{\frac{M^2}{4} - \frac{p_2^3}{9p_1}}$, эквивалентного предыдущему, устанавливается возведением его левой и правой частей в квадрат и применением неравенства (2.33).

В точке E_2 выполняется неравенство (2.31) $x_1 > 9x_2^3 = 9\left(\frac{p_2^2}{9p_1^2x_1}\right)^3 = \frac{p_2^6}{81p_1^6x_1^3}$, или $x_1 = \frac{M}{2p_1} + \sqrt{\frac{M^2}{4p_1^2} - \frac{p_2^3}{9p_1^3}} > \frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^3}$,

которое справедливо, поскольку, в силу неравенства (2.33), $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{p_2^3}{p_1}} - \frac{M}{2} < 0 < \sqrt{\frac{M^2}{4} - \frac{p_2^3}{9p_1}}$.

Таким образом, точка E_1 соответствует выпуклому, а E_2 – вогнутому сегменту кривой безразличия, а значит, точкой максимума полезности является лишь E_1. Кривая безразличия, проходящая через точку E_2, будет соответствовать более низкому уровню полезности (рис. 2.23):

$$U_1 = \left(\frac{M}{2p_1} - \sqrt{\frac{M^2}{4p_1^2} - \frac{p_2^3}{9p_1^3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{M}{2p_2} + \sqrt{\frac{M^2}{4p_2^2} - \frac{p_2}{9p_1}}\right)^{\frac{3}{2}} > \left(\frac{M}{2p_1} + \sqrt{\frac{M^2}{4p_1^2} - \frac{p_2^3}{9p_1^3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{M}{2p_2} - \sqrt{\frac{M^2}{4p_2^2} - \frac{p_2}{9p_1}}\right)^{\frac{3}{2}} = U_2,$$

или

$$\sqrt{\frac{p_2^3}{p_1}}\left(\sqrt{\frac{M}{2} + \sqrt{\frac{M^2}{4} - \frac{p_2^3}{9p_1}}} - \sqrt{\frac{M}{2} - \sqrt{\frac{M^2}{4} - \frac{p_2^3}{9p_1}}}\right) \le \left(\frac{M}{2} + \sqrt{\frac{M^2}{4} - \frac{p_2^3}{9p_1}}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{M}{2} - \sqrt{\frac{M^2}{4} - \frac{p_2^3}{9p_1}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Действительно, домножая левую и правую части последнего соотношения на $\sqrt{\frac{M}{2} - \sqrt{\frac{M^2}{4} - \frac{p_2^3}{9p_1}}}$, можно привести его к неравенству:

$$\left(\frac{M}{2} - \sqrt{\frac{M^2}{4} - \frac{p_2^3}{9p_1}}\right)\left(\frac{M}{2} - \sqrt{\frac{p_2^3}{p_1}} - \sqrt{\frac{M^2}{4} - \frac{p_2^3}{9p_1}}\right) \le \frac{1}{3}\sqrt{\frac{p_2^3}{p_1}}\left(\frac{M}{2} - \sqrt{\frac{p_2^3}{p_1}} + \sqrt{\frac{M^2}{4} - \frac{p_2^3}{9p_1}}\right).$$

Очевидно, что второй сомножитель в левой части неравенства меньше выражения в скобках в правой части. Чтобы установить справедливость данного неравенства, остается убедиться в том, что

$$\frac{M}{2} - \sqrt{\frac{M^2}{4} - \frac{p_2^3}{9p_1}} \le \frac{1}{3}\sqrt{\frac{p_2^3}{p_1}}, m.e.\ \frac{M}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{p_2^3}{p_1}} \le \sqrt{\frac{M^2}{4} - \frac{p_2^3}{9p_1}}.$$

Это легко сделать, возводя в квадрат левую и правую части последнего неравенства и после элементарных преобразований применяя соотношение (2.33).

Если бюджетное ограничение станет достаточно пологим, то может возникнуть краевое решение E_3, когда потребитель откажется от второго товара (рис. 2.23). В этом случае весь доход будет потрачен на потребление первого товара $\left(x_1^3 = \frac{M}{p_1}\right)$, и возникнет неравенство относительно соответствующих значений функции полезности

$$U_3 = \sqrt{\frac{M}{p_1}} > \left(\frac{M}{2p_1} - \sqrt{\frac{M^2}{4p_1^2} - \frac{p_2^3}{9p_1^3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{M}{2p_2} + \sqrt{\frac{M^2}{4p_2^2} - \frac{p_2}{9p_1}}\right)^{\frac{3}{2}} = U_1,$$

которое эквивалентно следующему, полученному домножением его левой и правой частей на $\sqrt{p_1}\sqrt{\frac{M}{2} + \sqrt{\frac{M^2}{4} - \frac{p_2^3}{9p_1}}}$:

$$\sqrt{\frac{M^2}{2} + M\sqrt{\frac{M^2}{4} - \frac{p_2^3}{9p_1}}} > \frac{1}{3}\sqrt{\frac{p_2^3}{p_1}} + \sqrt{\frac{p_1}{p_2^3}}\left(\frac{M}{2} + \sqrt{\frac{M^2}{4} - \frac{p_2^3}{9p_1}}\right)^2 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{p_2^3}{p_1}} + \sqrt{\frac{p_1}{p_2^3}}\left(\frac{M^2}{2} + M\sqrt{\frac{M^2}{4} - \frac{p_2^3}{9p_1}} - \frac{p_2^3}{9p_1}\right) = \sqrt{\frac{p_1}{p_2^3}}\left(\frac{M}{2}\right.$$

т.е.

$$\left(\frac{M^2}{2} + M\sqrt{\frac{M^2}{4} - \frac{p_2^3}{9p_1}}\right) - \sqrt{\frac{p_2^3}{p_1}}\sqrt{\frac{M^2}{2} + M\sqrt{\frac{M^2}{4} - \frac{p_2^3}{9p_1}}} + \frac{2}{9}\frac{p_2^3}{p_1} < 0.$$

Выделяя полный квадрат

$$\left(\sqrt{\frac{M^2}{2}+M\sqrt{\frac{M^2}{4}-\frac{p_2^3}{9p_1}}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_2^3}{p_1}}\right)^2<\frac{1}{36}\frac{p_2^3}{p_1},$$

извлекая корень из левой и правой частей неравенства, после очевидных преобразований получаем:
$\sqrt{\frac{M^2}{2}+M\sqrt{\frac{M^2}{4}-\frac{p_2^3}{9p_1}}}<\frac{2}{3}\sqrt{\frac{p_2^3}{p_1}}$, а значит,

$$\sqrt{\frac{M^2}{4}-\frac{p_2^3}{9p_1}}<\frac{4}{9}\frac{p_2^3}{Mp_1}-\frac{M}{2}.$$

Возводя в квадрат левую и правую части $\frac{M^2}{4}-\frac{p_2^3}{9p_1}<\frac{16p_2^6}{81M^2p_1^2}-\frac{4p_2^3}{9p_1}+\frac{M^2}{4}$, приходим к неравенству $M^2<\frac{16}{27}\frac{p_2^3}{p_1}$, которое эквивалентно ограничению на уровень цены $p_1<\frac{16}{27}\frac{p_2^3}{M^2}$.

Таким образом, анализируемая функция полезности генерирует разрывные функции спроса:

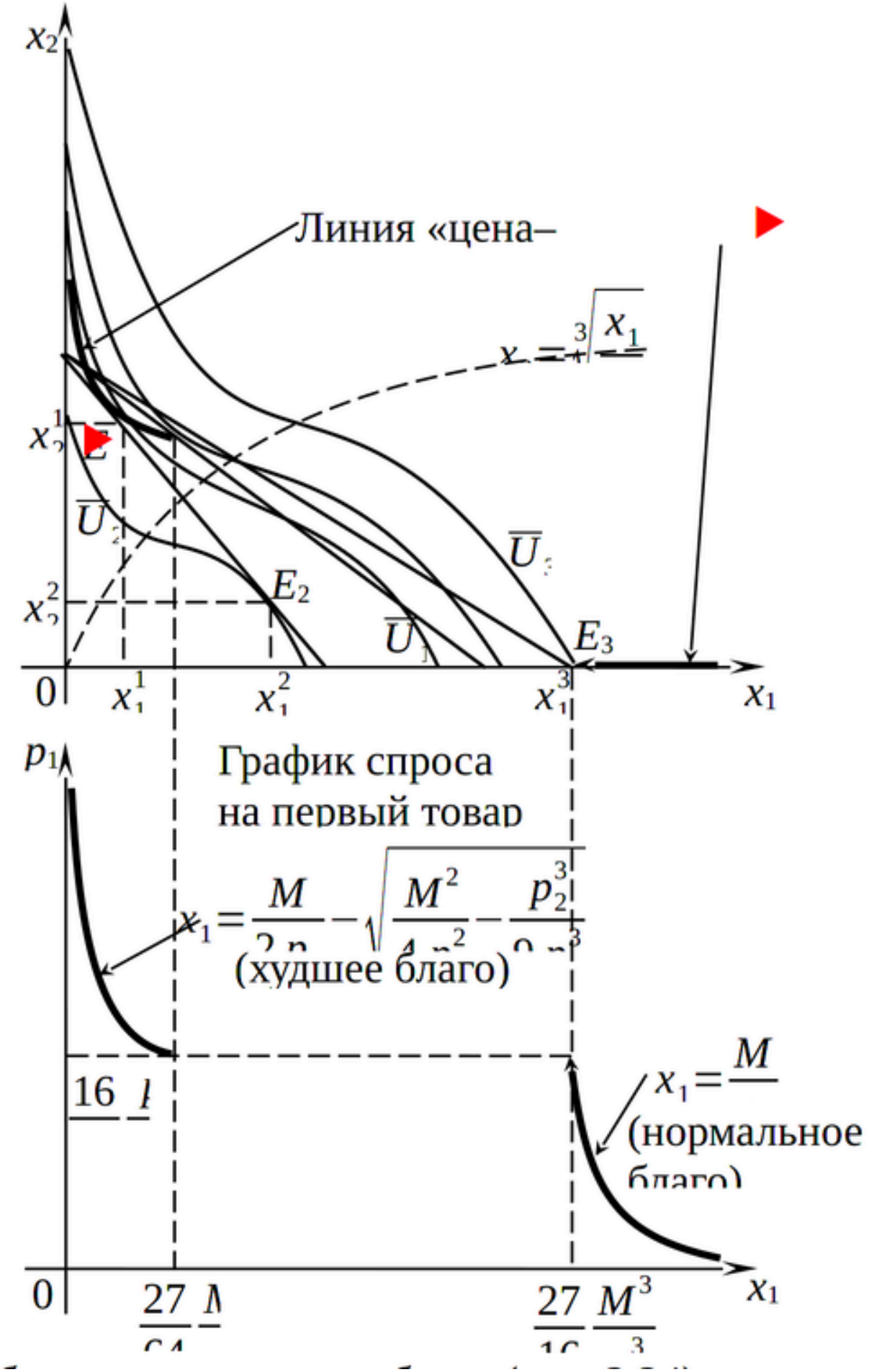
$$x_1=\begin{cases}\frac{M}{p_1}\,при\,p_1<\frac{16}{27}\frac{p_2^3}{M^2},\\ \frac{M}{2p_1}-\sqrt{\frac{M^2}{4p_1^2}-\frac{p_2^3}{9p_1^3}}\,при\,p_1\geq\frac{16}{27}\frac{p_2^3}{M^2};\end{cases}$$

$$x_2=\begin{cases}\frac{M}{2p_2}+\sqrt{\frac{M^2}{4p_2^2}-\frac{p_2}{9p_1}}\,при\,p_2\leq 3\sqrt[3]{\frac{p_1M^2}{16}},\\ 0при\,p_2>3\sqrt[3]{\frac{p_1M^2}{16}}.\end{cases}$$

Данные функции спроса на первый и второй товары терпят разрыв на границе двух своих участков – соответственно при $p_1=\frac{16}{27}\frac{p_2^3}{M^2}$ и $p_2=3\sqrt[3]{\frac{p_1M^2}{16}}$. А именно, $x_1=\frac{27}{64}\frac{M^3}{p_2^3}$ при $p_1=\frac{16}{27}\frac{p_2^3}{M^2}$, в то время как $\lim\limits_{p_1\to\frac{16}{27}\frac{p_2^3}{M^2}-x_1=\frac{27}{16}\frac{M^3}{p_2^3}}$.

Из двух соответствующих сегментов будет состоять и график «цена – потребление» для первого товара [15]: он будет представлять собой участок многочлена третьей степени $x_1=\frac{9M^2x_2}{p_2^2}-\frac{18Mx_2^2}{p_2}+9x_2^3=9x_2\left(x_2-\frac{M}{p_2}\right)^2$ при $x_1\leq\frac{27}{64}\frac{M^3}{p_2^3}$ и горизонтальную прямую $x_2=0$ при $x_1>\frac{27}{16}\frac{M^3}{p_2^3}$ (рис. 2.23).

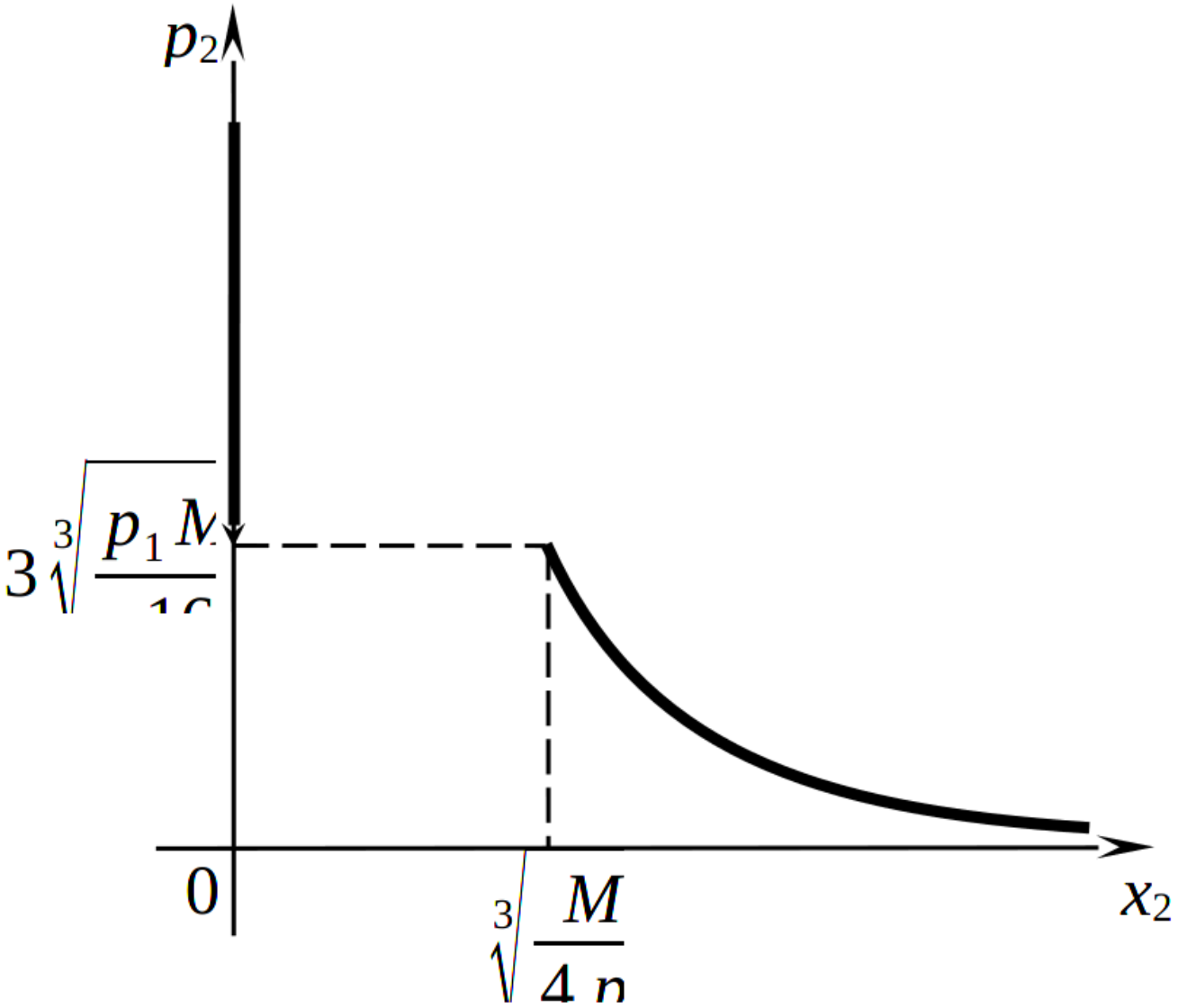
Рисунок 2.23. Графики «цена – потребление» и спроса на худшее благо: пример


Линия «цена–
$x_1 = \sqrt[3]{x_1}$
E_2
E_3
0
x_1
График спроса
на первый товар
(худшее благо)
$x_1 = \frac{M}{2p_1} - \sqrt{\frac{M^2}{4p_1^2} - \frac{p_2^3}{9p_1^3}}$
$x_1 = \frac{M}{$
(нормальное
благо)
0
x_1

Аналогично ведет себя и спрос на второе благо (рис. 2.24):

$x_2 = \sqrt[3]{\frac{M}{4p_1}}$ при $p_2 = 3\sqrt[3]{\frac{p_1 M^2}{16}}$; тогда как $\lim\limits_{p_2 \to 3\sqrt[3]{\frac{p_1 M^2}{16}} - x_2 = 0.}$

Рисунок 2.24. График спроса на второе, нормальное благо: пример

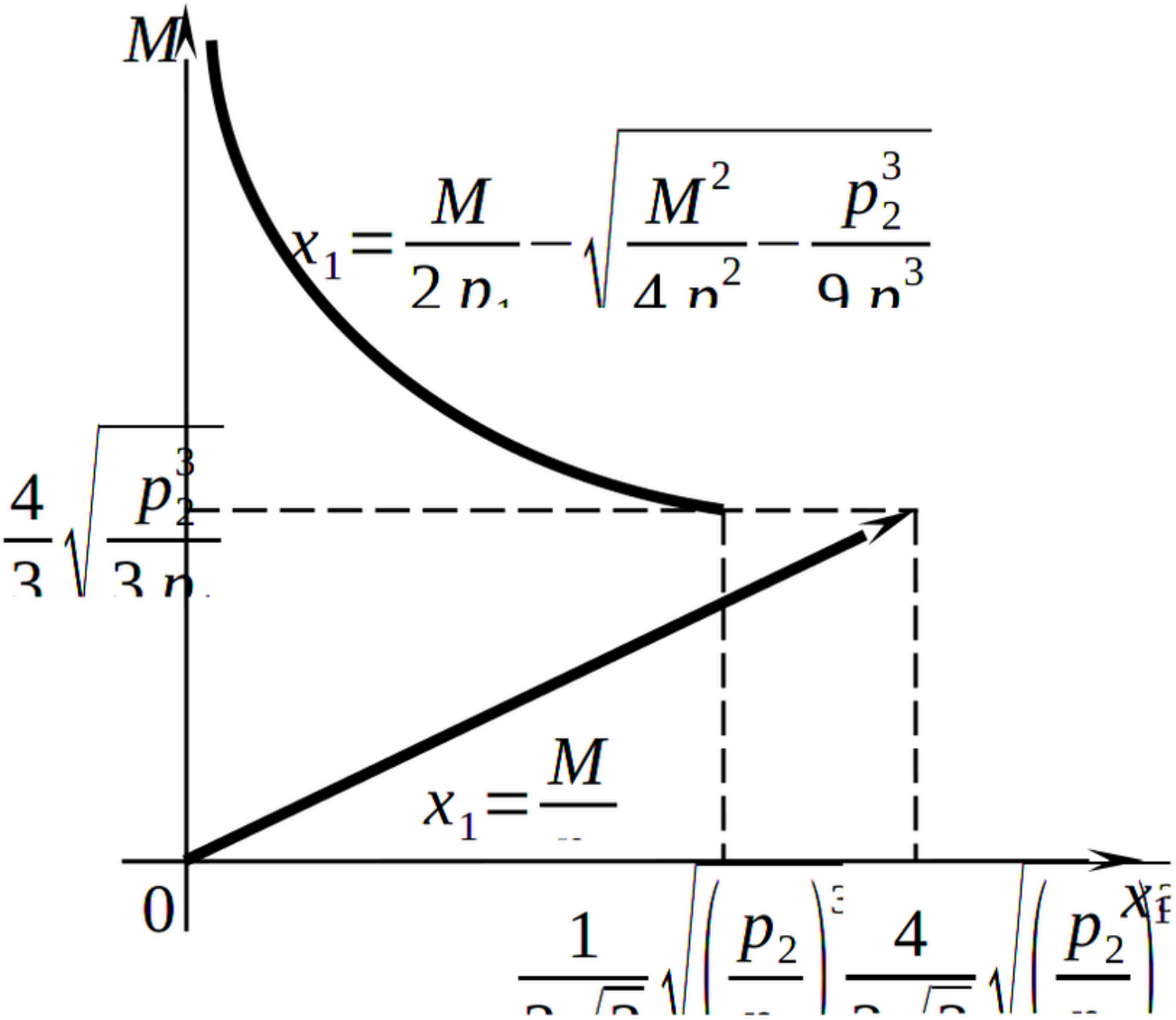


Разрывной будет и функция Энгеля, в частности, на первое благо, характеризуемая той же зависимостью, что и функция спроса.

Действительно, $x_1 = \frac{1}{3\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^3}$ при $M = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{p_2^3}{3p_1}}$, в то время как

$$\lim_{M \to \frac{4}{3}\sqrt{\frac{p_2^3}{3p_1}} - x_1 = \frac{4}{3\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^3}}.$$

Рисунок 2.25. Кривая Энгеля для худшего блага: пример



Поскольку $\sqrt{\frac{M^2}{4}-\frac{p_2^3}{9p_1}}<\frac{M}{2}$, постольку на втором из участков спроса первый товар будет худшим (рис. 2.25):

$$\frac{\partial x_1}{\partial M}=\frac{1}{2p_1}-\frac{M}{4p_1\sqrt{\frac{M^2}{4}-\frac{p_2^3}{9p_1}}}<0,$$

но не товаром Гиффена:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}=\frac{\frac{M^2}{2}-\frac{p_2^3}{3p_1}-M\sqrt{\frac{M^2}{4}-\frac{p_2^3}{9p_1}}}{2p_1^2\sqrt{\frac{M^2}{4}-\frac{p_2^3}{9p_1}}}<0.$$

Действительно, если предположить обратное, а именно $\frac{M^2}{2}-\frac{p_2^3}{3p_1}>M\sqrt{\frac{M^2}{4}-\frac{p_2^3}{9p_1}}$, что, в свою очередь, будет означать $\frac{M^2}{2}>\frac{p_2^3}{3p_1}$, то возведение первого неравенства в квадрат после приведения подобных членов даст неравенство $\frac{M^2}{2}<\frac{p_2^3}{4p_1}$, которое противоречит второму.

Строгая выпуклость кривой Энгеля на анализируемом участке (рис. 2.25) легко проверяется расчетом второй производной

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial M^2}=\frac{-4\left(\frac{M^2}{4}-\frac{p_2^3}{9p_1}\right)-M^2}{p_1\left(\frac{M^2}{4}-\frac{p_2^3}{9p_1}\right)\sqrt{\frac{M^2}{4}-\frac{p_2^3}{9p_1}}}>0.$$

Используя правило Лопиталя, убеждаемся в том, что:

$$\lim_{M\to\infty} x_1 = \lim_{M\to\infty} \frac{M}{2p_1}\left(1-\sqrt{1-\frac{4p_2^3}{9M^2p_1}}\right) = -\lim_{M\to\infty}\left(\frac{2p_2^3}{M^3p_1^2\sqrt{1-\frac{4p_2^3}{9M^2p_1}}}\right) = 0.$$

Подстановка в целевую функцию полезности функций маршаллианского спроса, выведенных в результате решения прямой задачи потребительского выбора, позволяет получить так называемую неявную (или косвенную) функцию полезности [16] – функциональную зависимость максимального значения полезности от цен товаров и дохода потребителя:

$$V(p_1,p_2,M) = U\left(x_1^m(p_1,p_2,M), x_2^m(p_1,p_2,M)\right). \quad (2.34)$$

Приведем примеры косвенных функций полезности. Для предпочтений Стоуна-Джери (1.25), когда спрос по Маршаллу представлен выражениями (2.19), неявная функция полезности будет иметь вид:

$$V(p_1,p_2,M) = \left(\frac{M-p_1a-p_2b}{c+d}\right)^{c+d}\left(\frac{c}{p_1}\right)^c\left(\frac{d}{p_2}\right)^d. \quad (2.35)$$

Ее частным случаем, относящимся к предпочтениям Кобба – Дугласа (1.26) и соответствующему маршаллианскому спросу (2.20), будет косвенная функций полезности вида [17]:

$$V(p_1,p_2,M) = \left(\frac{M}{c+d}\right)^{c+d}\left(\frac{c}{p_1}\right)^c\left(\frac{d}{p_2}\right)^d. \quad (2.36)$$

Например, для функции полезности $U=\sqrt{x_1x_2}$ она принимает вид:

$$V(p_1,p_2,M) = \frac{M}{2\sqrt{p_1p_2}}. \quad (2.37)$$

Для линейной функции полезности, характеризующей выбор между товарами субститутами (1.31), спрос по Маршаллу характеризуется выражением (2.23), а значит, косвенная полезность будет такой:

$$V(p_1,p_2,M) = \alpha t\frac{M}{p_1} + \beta(1-t)\frac{M}{p_2} = M\left(t\frac{\alpha}{p_1} + (1-t)\frac{\beta}{p_2}\right), \text{где} \begin{cases} t=1 при \frac{p_2}{\beta} > \frac{p_1}{\alpha}, \\ t=0 при \frac{p_1}{\alpha} > \frac{p_2}{\beta}, \\ t\in[0,1] при \frac{p_2}{\beta} = \frac{p_1}{\alpha}; \end{cases}$$

или

$$V(p_1,p_2,M) = \begin{cases} M\frac{\alpha}{p_1}, если \frac{\alpha}{p_1} > \frac{\beta}{p_2}, \\ M\frac{\beta}{p_2}, если \frac{\beta}{p_2} > \frac{\alpha}{p_1}, \\ M\frac{\alpha}{p_1} = M\frac{\beta}{p_2}, если \frac{\alpha}{p_1} = \frac{\beta}{p_2}. \end{cases} \quad (2.38)$$

Данную совокупность соотношений можно записать в компактной форме:

$$V(p_1,p_2,M) = M \bullet \max\left\{\frac{\alpha}{p_1}, \frac{\beta}{p_2}\right\}. \quad (2.39)$$

При наличии совершенно комплементарных благ, задающих леонтьевские предпочтения (1.28) и соответствующие функции маршаллианского спроса (2.29), неявная функция полезности принимает следующий вид:

$$V(p_1,p_2,M) = \frac{M}{\alpha p_1+\beta p_2}. \quad (2.40)$$

Для функции полезности CES (1.13) функции спроса по Маршаллу (2.22) генерируют следующую косвенную функцию полезности:

$$V(p_1,p_2,M) = \frac{M\left(p_1^{\frac{\varphi}{\varphi-1}}+p_2^{\frac{\varphi}{\varphi-1}}\right)^{\frac{1}{\varphi}}}{\left(p_1^{\frac{\varphi}{\varphi-1}}+p_2^{\frac{\varphi}{\varphi-1}}\right)} = M\left(p_1^{\frac{\varphi}{\varphi-1}}+p_2^{\frac{\varphi}{\varphi-1}}\right)^{\frac{1-\varphi}{\varphi}}. \quad (2.41)$$

Для того, чтобы сформулировать экономический смысл множителя Лагранжа в задаче максимизации полезности при бюджетном ограничении потребителя (2.6), воспользуемся теоремой об огибающей [18], которая утверждает в данном случае, что полная производная (неявной) функции полезности по величине дохода, рассчитанная на оптимальной корзине товаров $(x_1,x_2) = (x_1^m(p_1,p_2,M), x_2^m(p_1,p_2,M))$, равна частной производной по доходу функции Лагранжа (2.8):

$$\frac{dU(x_1^m(p_1,p_2,M),x_2^m(p_1,p_2,M))}{dM} = \frac{\partial V(p_1,p_2,M)}{\partial M} = \frac{\partial L}{\partial M} = \lambda.$$

Таким образом, по экономическому смыслу множитель Лагранжа в задаче максимизации полезности при ограничении по доходу (2.6) представляет собой предельную полезность денег:

$$\lambda = \frac{\partial V}{\partial M}. \quad (2.42)$$

Исходя из определения косвенной функции полезности и опираясь на экономический смысл множителя Лагранжа (2.42) в задаче связанной максимизации полезности (2.6), можно сделать вывод о том, что при локальной ненасыщаемости потребления (1.2), когда $\lambda > 0$, неявная полезность является возрастающей функцией дохода: $\frac{\partial V}{\partial M} > 0$ (рис. 1.57). Если же предпосылка о локальной ненасыщаемости не выполняется, то $\lambda = 0$, и значение косвенной функции полезности не зависит от дохода: $\frac{\partial V}{\partial M} = 0$. В общем случае можно сказать, что неявная полезности является неубывающей функцией дохода: $\frac{\partial V(p_1,p_2,M)}{\partial M} \geq 0$.

Неявная функция полезности является однородной нулевой степени по ценам и доходу. Действительно, по построению косвенной полезности (2.34), учитывая однородность нулевой степени функций маршаллианского спроса (2.18), для любого $\alpha > 0$ имеем:

$$V(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha M) = U(x_1^m(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha M), x_2^m(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha M)) = U(x_1^m(p_1, p_2, M), x_2^m(p_1, p_2, M)) = V(p_1, p_2, M).$$

Для функций спроса по Маршаллу (2.17) и соответствующей косвенной функции полезности (2.34) справедливо тождество Роя:

$$x_i^m(p_1, p_2, M) = \frac{-\frac{\partial V(p_1, p_2, M)}{\partial p_i}}{\frac{\partial V(p_1, p_2, M)}{\partial M}}, i = 1, 2. (2.43)$$

При выводе тождества Роя вновь воспользуемся теоремой об огибающей, утверждающей в данном случае, что полная производная функции полезности по цене каждого из товаров, рассчитанная на оптимальной корзине товаров $(x_1, x_2) = (x_1^m(p_1, p_2, M), x_2^m(p_1, p_2, M))$, равна частной производной по данной цене функции Лагранжа (2.8):

$$\frac{dU(x_1^m(p_1, p_2, M), x_2^m(p_1, p_2, M))}{dp_i} = \frac{\partial V(p_1, p_2, M)}{\partial p_i} = \frac{\partial L}{\partial p_i} = -\lambda x_i^m(p_1, p_2, M), i = 1, 2. (2.44)$$

Учитывая экономический смысл множителя Лагранжа, который в задаче связанной максимизации полезности (2.6) представляет собой предельную полезность денег (2.42), приходим к тождеству Роя (2.43).

Зная косвенную функцию полезности (2.34), с помощью тождества Роя (2.43) можно восстановить обычную функцию полезности потребителя (1.1).

Выпишем в качестве примера тождество Роя для функции полезности Кобба–Дугласа $U = \sqrt{x_1 x_2}$, когда функции маршаллианского спроса имеют вид (2.21). При этом косвенная функция полезности будет выглядеть так:

$$V = \frac{M}{2\sqrt{p_1 p_2}}.$$

Вычисление величины множителя Лагранжа

$$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{p_1 p_2}}$$

подтверждает тождество Роя для первого товара:

$$\frac{\partial V}{\partial p_1} = \frac{-M}{4\sqrt{p_1^3 p_2}} = -x_1 \frac{\partial V}{\partial M}.$$

И наоборот, используя тождество Роя (2.43) для данной косвенной полезности, можно получить функции маршаллианского спроса соответственно на первое и второе благо:

$$x_1^m(p_1, p_2, M) = \frac{-\frac{dV}{dp_1}}{\frac{dV}{dM}} = \frac{\frac{1}{4} p_1^{\frac{-3}{2}} p_2^{\frac{-1}{2}} M}{\frac{1}{2\sqrt{p_1 p_2}}} = \frac{M}{2p_1}.$$

$$x_2^m(p_1, p_2, M) = \frac{-\frac{dV}{dp_2}}{\frac{dV}{dM}} = \frac{\frac{1}{4} p_1^{\frac{-1}{2}} p_2^{\frac{-3}{2}} M}{\frac{1}{2\sqrt{p_1 p_2}}} = \frac{M}{2p_2}.$$

Преобразуя косвенную функцию полезности и учитывая спрос по Маршаллу на первое и второе благо, можно восстановить исходную функцию полезности:

$$V = \frac{M}{2\sqrt{p_1 p_2}} = \left(\frac{M}{2p_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{M}{2p_2}\right)^{\frac{1}{2}} = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} = U.$$

Поскольку множитель Лагранжа является неотрицательной величиной, и значение маршаллианской функции спроса – оптимальный объем потребления блага – так же больше либо равно нулю, постольку на основании соотношения (2.44) можно утверждать, что неявная функция полезности – это невозрастающая зависимость от цен товаров:

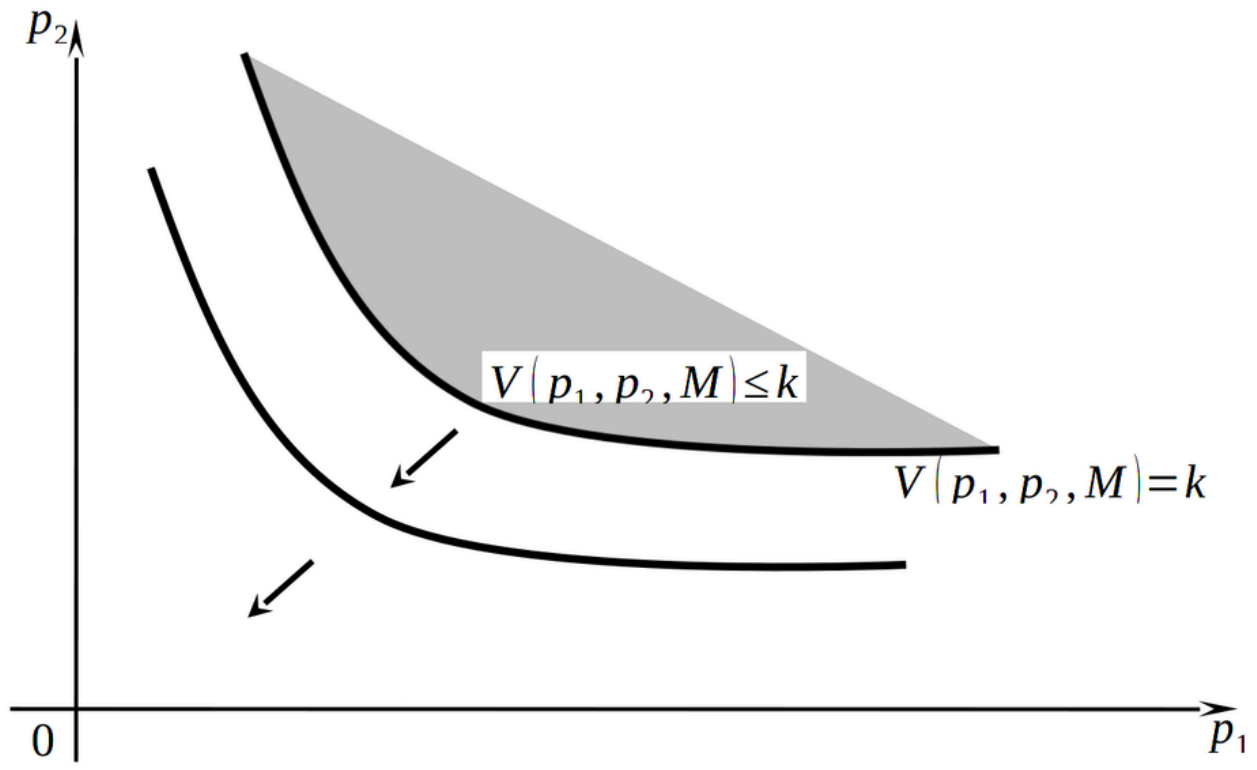
$$\frac{\partial V(p_1, p_2, M)}{\partial p_i} \leq 0, i = 1, 2. (2.45)$$

При этом в ситуации внутреннего оптимума $(x_i^m(p_1, p_2, M) > 0)$ при ненасыщаемости потребления косвенная полезность представляет собой убывающую функцию цен:

$$\frac{\partial V(p_1, p_2, M)}{\partial p_i} < 0, i = 1, 2. (2.46)$$

Графически неявная функция полезности может быть представлена с помощью ценовых кривых безразличия, каждая из которых показывает все комбинации цен при $V(p_1, p_2, M) = const$. При этом, чем ближе к началу координат располагается ценовая кривая безразличия, тем большему значению неявной функции полезности она соответствует (рис. 2.26).

Рисунок 2.26. Неявная функция полезности: ценовые кривые безразличия



1. Зорич В.А. Математический анализ. – 2-е изд. – М.: ФАЗИС, 1997, ч.1. ↩

2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 6-е изд. – М.: Наука, 1989. ↩

3. С формальной точки зрения здесь следует ввести дополнительно множитель Лагранжа λ_0 при целевой функции полезности, чтобы учесть возможность ее незначимости, а значит, отсутствия решения задачи (2.6), когда λ_0 оказывается нулевым (см. по этому поводу, в частности: Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. 2-е изд. – М.: МЦНМО, 2006). ↩

4. В качестве обобщения модели потребительского выбора (2.6) может служить задача условной оптимизации некоторой целевой функции векторного аргумента $x = \{x_l\}_{l=1}^{h}$ в условии жестких ограничений при наличии вектора параметров $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{m}$:
$\min_x f(x, \alpha)$:
$g_i(x(\alpha), \alpha) = 0, i = 1, \ldots, n. (ii)$
Решая ее, составляем функцию Лагранжа:
$L = f(x, \alpha) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i (x(\alpha), \alpha). (iii)$
Здесь множитель Лагранжа λ_0 при целевой функции полагается равным единице. Равенство нулю ее частных производных
$\frac{\partial f}{\partial x_l} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_l} = 0 (iv)$
будет представлять собой необходимое условие экстремума в задаче (ii). В задаче типа (2.6) ищется максимум целевой функции полезности $f(x) = U(x)$, т.е. минимизируется данная функция с обратным знаком; ограничением является равенство расходов фиксированному доходу потребителя $g(x(\alpha), \alpha) = \sum_{j=1}^{l} p_j x_j - M = 0$, соответственно вектор параметров состоит из цен и дохода $\alpha = \left(\{p_j\}_{j=1}^{l}, M\right)$. Поэтому необходимые условия максимума (iv) принимают вид: $MU_j = \lambda p_j$, откуда получаем второй закон Госсена, обобщенный на случай произвольного количества товаров $(j = 1, \ldots, l)$:
$\frac{MU_j}{p_j} = \lambda.$ ↩

5. В задачах потребительского выбора (в частности, в задаче связанной максимизации полезности (2.6)) градиенты целевой функции (полезности – вектор предельных полезностей) и ограничения (в данном случае – бюджетного – вектор цен) являются линейно зависимыми. Множитель Лагранжа λ при этом выступает коэффициентом пропрциональности. ↩

6. Наряду с проблемами, связанными с измеримостью категории полезности, аргументом в пользу перехода от кардиналистской к ординалисткой концепции полезности является инвариантность решения задачи потребительского выбора относительно возрастающей трансформации функции полезности. ↩

7. См.: Антипина О.Н., Вереникин А.О. Микроэкономика продвинутого уровня. Учебное пособие. 2-е изд. М.: Кнорус, 2021. С. 36-39. ↩

8. Рассмотрим функцию полезности Стоуна–Джери в случае потребительской корзины, состоящей из *n* товаров:
$U(x) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{\alpha_i}. (vi)$
Частным случаем предпочтений Стоуна–Джери является функция полезности Кобба–Дугласа, когда все a_j равны нулю:
$U(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}. (vii)$

Выведем функции спроса по Маршаллу, соответствующие данным функциям потребительских предпочтений (ср.: Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – 3-е изд. – М.: Дело и Сервис, 2001; Samuelson P.A. The collected scientific papers: in 2 vol. – 6th pr. – Cambridge (Mass.); L.: MIT press, 1985.).
Задача максимизации функции полезности Стоуна-Джери (vi) при бюджетном ограничении будет иметь вид:
$\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^{\alpha_i}\to\max:$

$$\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\le M.$$

Выпишем функцию Лагранжа для данной задачи:
$L=\lambda_0\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^{\alpha_i}+\lambda_1\left(M-\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right).$
Необходимые условия максимизации полезности при бюджетном ограничении с учетом неотрицательности множителя Лагранжа λ_0 имеют вид:
$\frac{\partial L}{\partial x_i}=\lambda_0\alpha_i(x_i-a_i)^{\alpha_j-1}\prod_{j=1,j\ne i}^{n}(x_j-a_j)^{\alpha_j}-\lambda_1p_i=\frac{\lambda_0\alpha_i\prod_{j=1}^{n}(x_j-a_j)^{\alpha_j}}{x_i-a_i}-\lambda_1p_i=0,i=1,\dots,n;$
$\lambda_1\left(M-\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right)=0,\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\le M,\lambda_1\ge0.$
Если $\lambda_1=0$, то из условия оптимальности по x_i и $\lambda_0=0$, чего не может быть.
Следовательно, $\lambda_1\ne0$, и бюджетное ограничение – жесткое: $\sum_{i=1}^{n}p_ix_i=M.$
Если $\lambda_0=0$, то $\lambda_1=0$, чего не может быть. Пусть $\lambda_0=1.$
Тогда условия равенства нулю частных производных функции Лагранжа по переменным $x_i,i=1,\dots,n,$ (2.9) при данной функции полезности (vi) принимают вид:
$\frac{\alpha_i\prod_{j=1}^{n}(x_j-a_j)^{\alpha_j}}{x_i-a_i}-\lambda_1p_i=\frac{\alpha_iU}{x_i-a_i}-\lambda_1p_i=0,i=1,\dots,n.$
Получаем следующее выражение для оптимальных объемов потребления товаров:
$x_i=a_i+\frac{\alpha_iU}{\lambda_1p_i},i=1,\dots,n.$
Домножим левую и правую части данного выражения на p_i и просуммируем по *i*, учитывая, что в точке оптимума бюджетное ограничение выполняется в виде равенства:
$\sum_{i=1}^{n}p_ix_i=\sum_{i=1}^{n}p_ia_i+\frac{U}{\lambda_1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=M.$
Выражая отсюда отношение U/λ_1 и подставляя его в предыдущее соотношение, задающее оптимальный объем потребления i-го блага, приходим к искомым функциям спроса по Маршаллу для функции полезности Стоуна–Джери:
$x_i^m=a_i+\frac{\alpha_i}{p_i}\frac{\left(M-\sum_{j=1}^{n}p_ja_j\right)}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j},i=1,\dots,n.\ (viii)$
Частным случаем функций спроса (viii) является спрос по Маршаллу для функции полезности Кобба–Дугласа (vii):
$x_i^m=\frac{\alpha_iM}{p_j\sum_{j=1}^{n}\alpha_j},i=1,\dots,n.\ (ix)$
Полученные зависимости являются очевидным обобщением маршаллианских функций спроса (2.19)-(2.20), выведенных применительно к случаю двухпродукторых потребительских корзин. ↩

9. В силу неоклассического характера функции полезности сразу полагаем здесь множитель Лагранжа при целевой функции равным единице. ↩
10. Антуан Огюстен Курно (1801-1877) – французский экономист. ↩
11. Nicholson W. Microeconomic theory: basic principles and extensions. – Mason: South-Western, 2005. ↩
12. См. сноску выше. ↩
13. Зорич В.А. Математический анализ. – 2-е изд. – М.: ФАЗИС, 1997, ч.1. ↩
14. Еще одной иллюстрацией разрывности функции спроса по Маршаллу при отсутствии квазивогнутости предпочтений может служить пример спроса на товар Гиффена как вариации решения задачи связанной максимизации полезности (2.6), приводимый в главе 3 ниже. ↩
15. Линия «цена – потребление» для первого товара получается исключением его цены с помощью эквимаржинального условия $p_1=\frac{p_2}{3\sqrt{x_1x_2}}$ из бюджетного ограничения: $M=p_2\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+x_2\right).$ ↩
16. Автор идеи – французский экономист Рене Франсуа Жозеф Рой (1894-1977). См.: Roy R. De l'utilité: Contribution à la théorie des choix. – Paris: Hermann, 1942. ↩
17. Подставляя функции спроса по Маршаллу (viii) в функцию полезности Стоуна-Джери при *n*-продуктовой потребительской корзине (vi), получаем косвенную функцию полезности:
$V(p_1,\dots,p_n,M)=\prod_{i=1}^{n}(x_i^m-a_i)^{\alpha_i}=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\frac{\left(M-\sum_{j=1}^{n}p_ja_j\right)}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j}\right)^{\alpha_i}=\left(\frac{\left(M-\sum_{j=1}^{n}p_ja_j\right)}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j}\right)^{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\alpha_i}.\ (x)$
Соответственно, функция косвенной полезности для случая предпочтений Кобба-Дугласа (vii) будет иметь вид:
$V(p_1,\dots,p_n,M)=\left(\frac{M}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j}\right)^{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\alpha_i}.\ (xi)$ ↩
18. Теорема об огибающей (ср.: Gravelle H., Rees R. Microeconomics. – 2nd ed. – L., N.Y.: Longman, 1992) применительно к общей задаче условной оптимизации (ii) утверждает, что в оптимальной точке (x,λ) полная производная целевой функции по параметру α_k равна частной производной соответствующей функции Лагранжа (iii):
$\frac{df}{d\alpha_k}=\frac{\partial L}{\partial\alpha_k}=\frac{\partial f}{\partial\alpha_k}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial\alpha_k}.\ (xii)$
Действительно, выпишем полную производную по параметру α_k целевой функции и ограничений задачи (ii):
$\frac{df(x,\alpha)}{d\alpha_k}=\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha_k}+\sum_{l=1}^{h}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial x_l}\frac{dx_l}{d\alpha_k},\ (xiii)$

$\frac{dg_i(x,\alpha)}{d\alpha_k} = \frac{\partial g_i(x,\alpha)}{\partial \alpha_k} + \sum_{l=1}^{h} \frac{\partial g_i(x,\alpha)}{\partial x_l} \frac{dx_l}{d\alpha_k} = 0, i = 1, \ldots, n.$

Умножая последнее равенство при каждом *i* на λ_i и складывая их по всем $i = 1, \ldots, n$, получаем нулевую сумму:

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial g_i(x,\alpha)}{\partial \alpha_k} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{l=1}^{h} \frac{\partial g_i(x,\alpha)}{\partial x_l} \frac{dx_l}{d\alpha_k} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial g_i(x,\alpha)}{\partial \alpha_k} + \sum_{l=1}^{h} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial g_i(x,\alpha)}{\partial x_l} \frac{dx_l}{d\alpha_k} = 0.$

Прибавляя к правой части (xiii) предыдущее равенство:

$\frac{df(x,\alpha)}{d\alpha_k} = \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha_k} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial g_i(x,\alpha)}{\partial \alpha_k} + \sum_{l=1}^{h} \left(\frac{\partial f}{\partial x_l} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_l} \right) \frac{dx_l}{d\alpha_k}$

и учитывая, что в силу (iv) в точке оптимума (x, λ) выражение в скобках равно нулю, получаем теорему об огибающей (xii). ↩

2.2. Потребительский выбор: минимизация расходов при заданной полезности

Симметричным по отношению к задаче максимизации полезности при ограничении по бюджету (2.6) является поведение потребителя, ориентирующегося на минимизацию расходов при условии обеспечения заданного уровня полезности:

$$\begin{matrix} \min_{x_1,x_2}\left(p_1x_1+p_2x_2\right): \\ U\left(x_1,x_2\right)\geq \overline{U}, x_1\geq 0, x_2\geq 0. \end{matrix} \quad (2.47)$$

Покажем, что в задаче связанной минимизации расходов (2.47), как и в задаче условной максимизации полезности (2.6), решение следует искать на границе допустимого множества наборов хозяйственных благ – на кривой безразличия $IC=\left\{x\in X|U(x)=\overline{U},\overline{U}\in R,\overline{U}>0\right\}$.

Будем рассуждать от противного. Предположим, что решением задачи (2.47) является товарный набор $x=(x_1,x_2)$, лежащий во внутренности верхнего лебеговского множества задачи – такой, для которого неравенство, присутствующее в ограничении, является строгим: $U(x)>\overline{U}$. Поскольку функция полезности является непрерывной по объемам потребления благ, постольку можно сократить объем потребления одного из товаров на небольшую величину ε, немного понизив, тем самым, уровень полезности, которая является строго возрастающей на R_{+^2}, и при этом получить новую корзину товаров $\left(\widehat{x}\right)$, все еще удовлетворяющую ограничению $U\left(\widehat{x}\right)\geq\overline{U}$. В силу строгой монотонности линейной функции расходов, их величина, соответствующая новым объемам потребления благ, сократится по отношению к их первоначальному уровню: $\sum_{j=1}^{2}p_j\widehat{x}_j<\sum_{j=1}^{2}p_jx_j$. Получаем противоречие с предположением о том, что набор x дает наименьшие расходы при заданном уровне полезности. Данное противоречие возникло из-за ложной гипотезы о нежесткости ограничения на оптимальной корзине благ. Таким образом, решение задачи условной минимизации расходов (2.47) неизбежно обращает нестрогое неравенство, присутствующее в ограничении, в равенство.

Докажем теперь разрешимость задачи (2.47). В случае отрицательного эффекта масштаба хозяйственной деятельности для того, чтобы исключить возможность пустого допустимого множества $X=\left\{x=(x_1,x_2)|U(x)\geq\overline{U},\overline{U}\in R,\overline{U}>0\right\}$ в задаче условной минимизации расходов (2.47), нужно ввести допущение о невозможности “бесконечно убывающей” отдачи от масштаба, или асимптотической (на бесконечности) однородности нулевой степени[1]: $\lim\limits_{x\to\infty}U(\alpha x)\neq\lim\limits_{x\to\infty}U(x),\alpha>1,\alpha\in R$, где обозначение $x\to\infty$ следует понимать покоординатно, т.е. $\forall R\in R\exists x=\{x_j\}_{j=1}^{2}:x_j>R$.

Данное предположение[2] будет гарантировать отсутствие горизонтальной асимптоты у монотонно возрастающей функции полезности. Действительно, из данного предположения вытекает, что: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[U(\alpha x)-U(x)\right]\neq 0,\alpha>1,\alpha\in R$. Если существует $\lim\limits_{x\to\infty}U(x)$, то $\lim\limits_{x\to\infty}U(x)=\lim\limits_{x\to\infty}U(\alpha x),\alpha>1,\alpha\in R$. Действительно, допустим, что $\lim\limits_{x\to\infty}U(x)=A$. Это означает, что $\forall\varepsilon>0$ $\exists h(\varepsilon)\in R$: $\forall x=\{x_j\}_{j=1}^{2}$, $x_j>h(\varepsilon)$, $|U(x)-A|<\varepsilon$. Тогда $\forall\varepsilon>0$ $\exists h_1(\varepsilon)\in R$ и $h(\varepsilon)=\frac{h_1(\varepsilon)}{\alpha}$, $\alpha>1,\alpha\in R$: $\forall\chi=\{\chi_j\}_{j=1}^{2}$, $\chi_j>h_1(\varepsilon)$, а значит, $\forall x=\frac{\chi}{\alpha}=\left\{\frac{\chi_j}{\alpha}\right\}_{j=1}^{2}$, $\frac{\chi_j}{\alpha}>h(\varepsilon)$, $|U(\chi)-A|<\varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}U(x)=\lim\limits_{x\to\infty}U(\alpha x),\alpha>1,\alpha\in R$.

Итак, по нашему предположению, $\lim\limits_{x\to\infty}U(x)$ отсутствует. Следовательно, $U(x)$ не ограничена сверху. Для того, чтобы показать это, предположим обратное. Допустим, что существует такое положительное действительное число $\overline{U}$, для которого $U(x)\leqslant\overline{U}$ $\forall x\in R_{+^2}$. По принципу Вейерштрасса полноты поля действительных чисел R, у любого непустого ограниченного сверху подмножества R существует точная верхняя грань $(\overline{a})$ такая, что, во-первых, $f(x)\leqslant\overline{a}$ и, во-вторых, $\forall\varepsilon\in R$ $\exists x_0:\overline{a}-\varepsilon<U(x_0)\leqslant\overline{a}$. Так как $U(x)$ является строго возрастающей на R_{+^2}, для $x>x_0$ справедливо неравенство $\overline{a}-\varepsilon<f(x)\leqslant\overline{a}$, то есть существует[3] $\lim\limits_{x\to+\infty}U(x)=\overline{a}$, что противоречит доказанному выше.

Таким образом, при предположении об отсутствии асимптотической однородности нулевой степени функции полезности, в силу строгой монотонности $U(x)$ на R_{+^2} с увеличением объемов потребления продуктов значение функции полезности неограниченно растет. При этом для любой положительной вещественной константы $\overline{U}$ допустимое множество в задаче условной минимизации расходов затрат (2.47) не пусто.

Выше было доказано, что величина издержек минимальна на кривой безразличия $IC=\left\{x\in X|U(x)=\overline{U},\overline{U}\in R,\overline{U}>0\right\}$, ограничивающей снизу допустимое множество в данной задаче условной оптимизации (2.47). Поэтому сразу сузим анализируемую область доступных, с точки зрения минимизации расходов, комбинаций продуктов заданной кривой безразличия. Выберем на ней произвольную комбинацию товаров и зафиксируем соответствующий ей уровень расходов $\overline{E}$. Обозначим через E множество возможных значений параметра $\overline{E}$:

$$E=\left\{\overline{E}\in R,\overline{E}>0\middle|\exists\widetilde{x}=\left\{\widetilde{x}_j\right\}_{j=1}^{2}\in IC:\sum_{j=1}^{2}p_j\widetilde{x}_j=\overline{E}\right\}.$$

По смыслу поставленной оптимизационной задачи, необходимо исследовать ту часть кривой безразличия $IC=\left\{x\in X|U(x)=\overline{U},\overline{U}\in R,\overline{U}>0\right\}$, на которой лежат комбинации товаров, удовлетворяющие условию $\sum_{j=1}^{2}p_jx_j\leqslant\overline{E}$:

$$T=\left\{x\in IC|\sum_{j=1}^{2}p_jx_j\leqslant\overline{E},\overline{E}\in E\right\}.$$

По аналогии с задачей максимизации полезности при ограничении по бюджету (2.6) докажем ограниченность приемлемого множества благ *T* в задаче (2.47). Для этого выделим из всей производственной комбинации $x \in T$ благо под номером *k*: $p_k x_k \leqslant \overline{E} - \sum_{j \neq k} p_j x_j$.

Это неравенство можно ослабить. Поскольку все x_j неотрицательны, их можно заменить нулями: $p_k x_k \leqslant \overline{E}$. Отсюда получаем: $x_k \leqslant \frac{\overline{E}}{p_k}$. Деление на p_k здесь возможно с сохранением знака неравенства, при отсутствии свободных благ, когда p_k является положительным числом.

Заменим в полученном неравенстве p_k ценой самого дешевого из товаров – минимально возможной "ценой спичек" $\underline{p}$: $x_k \leqslant \frac{\overline{E}}{\underline{p}}$. Поскольку $x_k \geqslant 0$, возникает двойное неравенство:

$$0 \leqslant x_k \leqslant \frac{\overline{E}}{\underline{p}}.$$

В данном неравенстве $\underline{p}$ и $\overline{E}$ – это константы, не зависящие от *k*. Выбор элемента x_k был произвольным, и данное неравенство справедливо для любого *k*. Следовательно, множество *T* корзин товаров, лежащих на заданной кривой безразличия IC и удовлетворяющее условию $\sum_{j=1}^{2} p_j x_j \leqslant \overline{E}$, является ограниченным.

Кроме того, пересечение замкнутых множеств – неотрицательного ортанта пространства действительных чисел R_{+^2} и гиперпространства $\sum_{j=1}^{2} p_j x_j \leqslant \overline{E}$ – замкнуто. Итак, будучи ограниченным и замкнутым, множество неотрицательных товарных наборов, удовлетворяющих условию $\sum_{j=1}^{2} p_j x_j \leqslant \overline{E}$, представляет собой компакт.

Отображение $U : X \to U(X)$ топологического пространства X в топологическое пространство $U(X)$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз $U^{-1}F$ всякого замкнутого множества F в $U(X)$ замкнут [4] в X. Точка $\overline{U} = U(x)$ – замкнутое подмножество числовой прямой $U(X)$, поскольку оно содержит все свои предельные точки, т.е. точки, в любой окрестности которых есть точка данного множества $(U(X))$. Точка $\overline{U}$ представляет собой множество всех своих предельных точек. В силу непрерывности функции полезности $U : X \to U(X)$ ее кривая безразличия $IC = \left\{ x \in X | U(x) = \overline{U}, \overline{U} \in R, \overline{U} > 0 \right\}$ как прообраз замкнутого множества – точки $\overline{U}$ – представляет собой замкнутое множество [5].

Отрезок кривой безразличия IC, принадлежащий пересечению неотрицательного ортанта пространства действительных чисел R_{+^2} и гиперпространства $\sum_{j=1}^{2} p_j x_j \leqslant \overline{E}$, сам является компактным, то есть замкнутым и ограниченным, множеством. Во-первых, он является замкнутым как пересечение замкнутых множеств – кривой безразличия IC непрерывной действительной функции $U : X \to U(X)$ и условия, накладываемого минимизируемыми расходами $\left(\sum_{j=1}^{2} p_j x_j \leqslant \overline{E} \right)$ в неотрицательном ортанте пространства действительных чисел R_{+^2}. Во-вторых, отрезок кривой безразличия IC представляет собой ограниченное множество, поскольку для всех его элементов справедливо условие $0 \leqslant x_k \leqslant \frac{\overline{E}}{\underline{p}}$.

Таким образом, минимальное значение расходов потребителя нужно искать на компактном подмножестве *T* кривой безразличия IC. Но скалярное произведение вектора цен и комбинации товаров $\left(\sum_{j=1}^{2} p_j x_j \right)$ представляет собой непрерывную функцию [6].

Следовательно, в соответствии с принципом компактности Вейерштрасса, непрерывная функция расходов обязательно достигает минимума на заданном отрезке кривой безразличия, ограничивающей снизу полезность потребителя. Итак, при непрерывности функции полезности задача условной минимизации расходов потребителя (2.47) разрешима (рис. 2.27).

Очевидно, что в проекции на плоскость $X_1 0 X_2$ (рис. 2.28) решение задачи минимизации расходов при условии достижения заданного уровня полезности (2.47) выглядит так же, как и решение задачи максимизации полезности при ограничении по доходу (2.6).

При достаточной гладкости функции полезности, в частности, принадлежности ее классу C^2 дважды непрерывно дифференцируемых функций, решение задачи минимизации расходов потребителя при условии достижения заданного уровня полезности (2.47), аналогично задаче максимизации полезности при ограничении по расходам (2.6), можно свести к исследованию на безусловный экстремум функции Лагранжа:

$$L = \lambda_0 (p_1 x_1 + p_2 x_2) - \lambda_1 \left(U(x_1, x_2) - \overline{U} \right), (2.48)$$

где (λ_0, λ_1) – вектор множителей Лагранжа. Как и ранее, будем предполагать существование внутреннего оптимума потребителя, т.е. нежесткость ограничений по неотрицательности объемов потребляемых благ: $x_1 > 0, x_2 > 0$.

Необходимыми для связанной минимизации расходов являются условия:

стационарности функции Лагранжа по объемам потребления товаров:

$$\begin{cases} \lambda_0 p_1 = \lambda_1 MU_1, \\ \lambda_0 p_2 = \lambda_1 MU_2; \end{cases}$$

дополняющей нежесткости:

$$\lambda_1\Big(U(x_1,x_2)-\overline{U}\Big)=0, U\left(x_1,x_2\right)\geq\overline{U};$$

а также неотрицательности множителей Лагранжа:

$$\lambda_0\geq 0, \lambda_1\geq 0.$$

При этом вектор множителей Лагранжа должен быть ненулевым.

Будем рассуждать аналогично анализу решения задачи условной максимизации полезности (2.6). Предполагая, что $\lambda_1=0$, при предпосылке о ненасыщаемости потребления (1.2) из условий стационарности функции Лагранжа по количествам товаров в силу того, что предметом анализа выступают экономические блага $\left(p_i>0\right)$, получаем, что и $\lambda_0=0$, чего во внутреннем оптимуме не может быть, поскольку по необходимому условию экстремума вектор множителей Лагранжа является ненулевым. Тогда из условия дополняющей нежесткости следует, что условие по достижению заданного уровня полезности в точке оптимума выполняется в виде равенства, т.е. является активным:

$$U(x_1,x_2)=\overline{U}. \left(2.49\right)$$

И наоборот, из условий стационарности функции Лагранжа по объемам продуктов с учетом ненасыщаемости потребления (1.2) при $\lambda_0=0$ оказывается и $\lambda_1=0$, чего во внутреннем оптимуме не может быть, поскольку по необходимому условию экстремума вектор множителей Лагранжа является ненулевым. Таким образом, $\lambda_0\neq 0$, и без ограничения общности его можно положить равным единице, или, что эквивалентно, поделить на него функцию (2.48), пронормировав тем самым вектор множителей Лагранжа:

$$L=p_1x_1+p_2x_2-\lambda\left(U(x_1,x_2)-\overline{U}\right), \left(2.50\right)$$

где $\lambda=\frac{\lambda_1}{\lambda_0}>0$.

Тогда необходимыми для минимизации расходов потребителя с учетом ограничения по полезности будут являться следующие условия стационарности функции Лагранжа по объемам потребления благ:

$$\begin{cases}p_1=\lambda MU_1,\\p_2=\lambda MU_2.\end{cases}\left(2.51\right)$$

Аналогично прямой задаче (2.6) и системе необходимых условий максимизации полезности при бюджетном ограничении (2.9), из данной системы (2.51) с учетом выражения для предельной нормы замещения товаров (1.6) вытекает второй закон Госсена (1.25) и эквимаржинальное условие оптимального потребительского выбора (2.10). Оптимум потребителя находится в точке касания заданной кривой безразличия $U(x_1,x_2)=\overline{U}$ и линии фиксированных расходов E_2 на рис. 2.27-2.28, что и подразумевает эквимаржинальное условие (2.10).

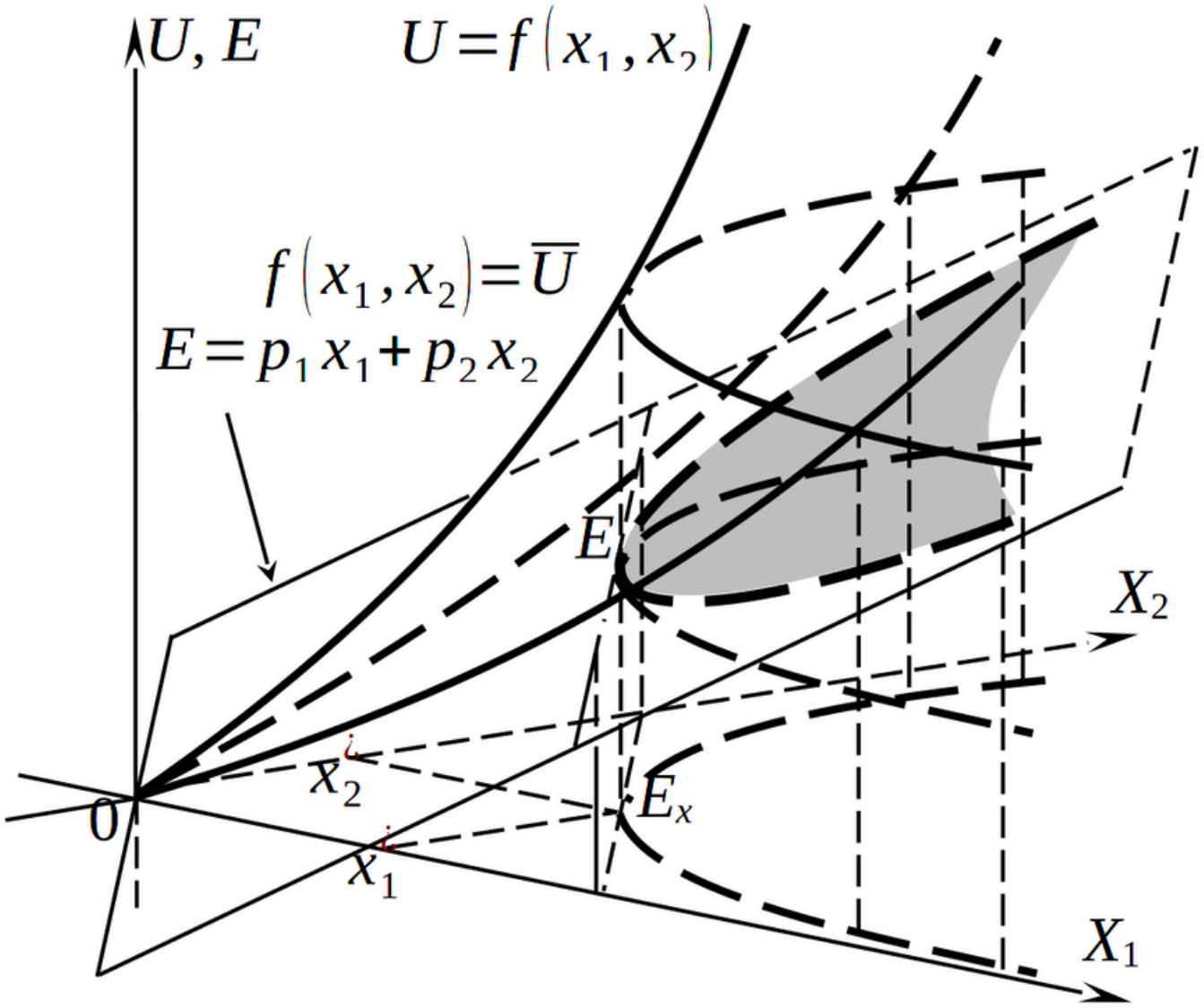


Рисунок 2.27. Пространственная иллюстрация решения задачи условной минимизации расходов

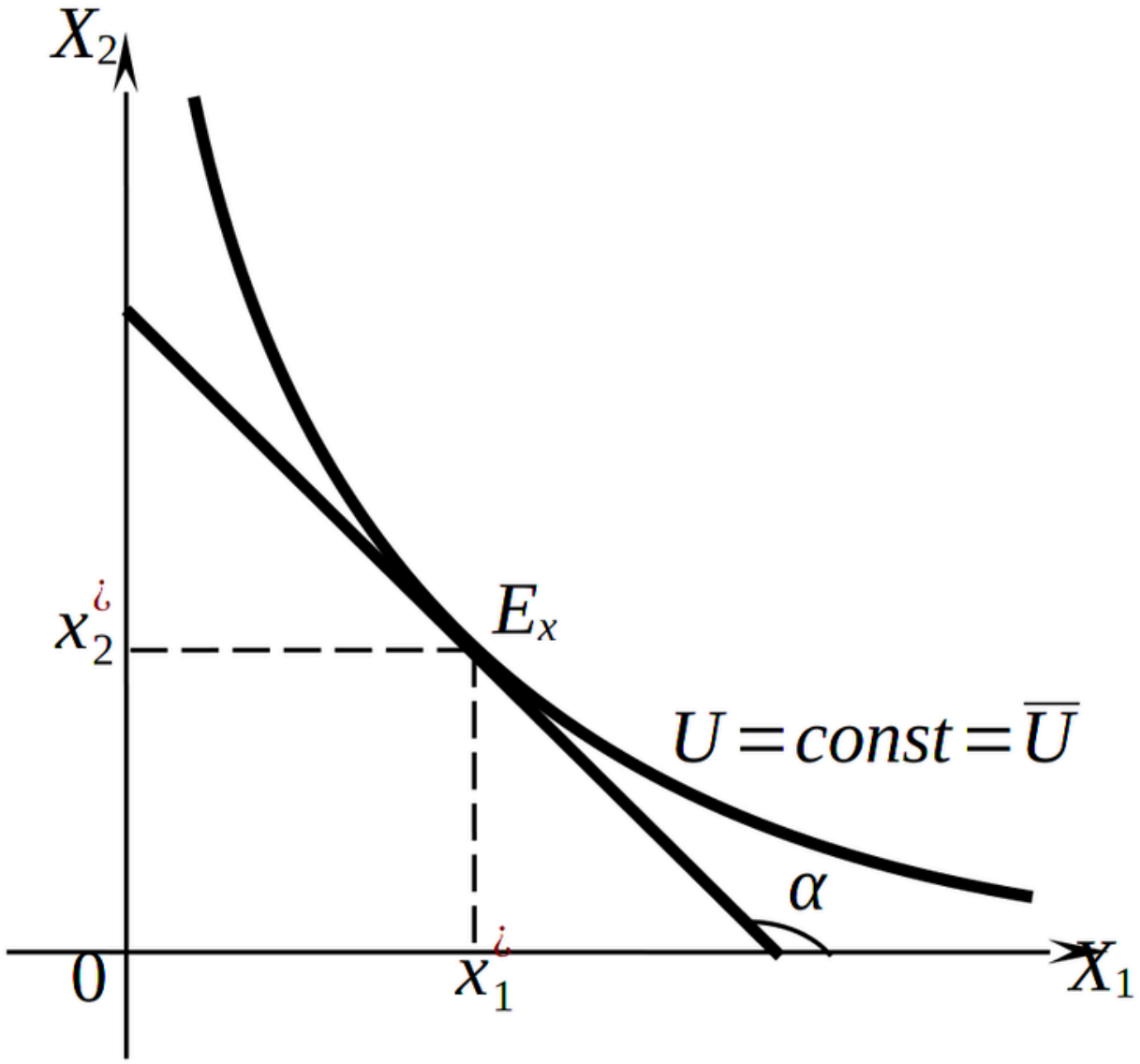


Рисунок 2.28. Оптимальная корзина товаров на плоскости

Докажем единственность решения задачи условной минимизации расходов (2.47) аналогично проанализированной выше задаче максимизации полезности при ограничении по доходу (2.6), пользуясь методом “от противного”. Допустим, решение не единственно: в добавление к оптимальному набору товаров *x* существует еще, как минимум, одна их комбинация $\widetilde{x}$, минимизирующая расходы и обеспечивающая заданный уровень полезности $\overline{U}$. Пусть оба эти набора благ обеспечивают минимальный уровень расходов, равный $\overline{E}$. Гиперплоскость расходов $\sum_{j=1}^{2} p_j x_j = \overline{E}$ проходит через эти две точки пространства R_{+^2}. В силу строгой квазивогнутости функции полезности найдутся другие комбинации ресурсов, лежащие на сегменте данной гиперплоскости между точками *x* и $\widetilde{x}$, которые будут обеспечивать более высокий уровень полезности при тех же минимальных расходах $\overline{E}$. А это значит, что для таких наборов товаров минимум расходов будет достигаться таким образом, что будет превышено минимально допустимое ограничение по уровню полезности, которое при самом низком из возможных при данной задаче потребительского выбора (2.47) уровне расходов будет иметь вид неравенства: $U(x) > \overline{U}$. Но это противоречит доказанному выше утверждению, что минимум расходов потребителя обеспечивается на нижней границе допустимого множества $\left\{x \in X | U(x) \geq \overline{U}, \overline{U} \in R, \overline{U} > 0\right\}$. Следовательно, предположение о существовании более одного решения задачи минимизации расходов (2.47) при строго квазивогнутой полезности, приводящее к противоречию, ошибочно, и решение данной задачи условной минимизации расходов (2.47) единственно.

Эквимаржинальный принцип (2.10) задает неявную функцию $\varphi\left(x_1, x_2, \frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{MU_1}{MU_2} - \frac{p_1}{p_2} = 0$. При выполнении условий теоремы об неявной функции можно получить зависимости вида $x_1 = f_1\left(x_2, \frac{p_1}{p_2}\right)$, $x_2 = f_2\left(x_1, \frac{p_1}{p_2}\right)$. Подставляя их в ограничение (2.49)

и вновь применяя теорему о неявной функции, можно получить зависимости между оптимальными количествами потребляемых товаров и их относительными ценами, а также уровнем полезности потребителя $\overline{U}$, выступающим в качестве ограничения:

$$x_i^h = x_i\left(\frac{p_1}{p_2}, \overline{U}\right), i = 1, 2; (2.52)$$

которые называются функциями условного спроса по Хиксу, или компенсированного спроса.

Таким образом, функции хиксианского (или компенсированного) спроса являются вариациями решений обратной, или двойственной, задачи потребительского выбора (2.47) по ее параметрам – ценам товаров и заданному уровню полезности: $x_1 = x_1^h\left(p_1, p_2, \overline{U}\right); x_2 = x_2^h\left(p_1, p_2, \overline{U}\right)$.

Доказав единственность решения задачи условной минимизации расходов (2.47), мы, тем самым, установили существование функции спроса по Хиксу на товары как зависимости между оптимальными количествами потребляемых благ и их ценами, а также заданным уровнем полезности $\overline{U}$, выступающим в качестве ограничения (2.52), поскольку в результате решения оптимизационной задачи (2.47) каждому вектору цен и заданному уровню полезности $\left(p_1, p_2, \overline{U}\right)$ ставится в соответствие один, единственный набор благ (x_1, x_2).

Функции хиксианского (компенсированного) спроса являются однородными нулевой степени по ценам всех товаров:

$$x_i^h\left(tp_1, tp_2, \overline{U}\right) = x_i^h\left(p_1, p_2, \overline{U}\right), i = 1, 2. (2.53)$$

Для доказательства данного утверждения рассмотрим задачу минимизации расходов (2.47) при возросших в t раз ценах:

$$\min_{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0}\left(tp_1x_1 + tp_2x_2\right):$$
$$U\left(x_1, x_2\right) \geq \overline{U}.$$

Для нее условие стационарности функции Лагранжа по объемам потребления принимает вид:

$$\begin{cases} tp_1 = \lambda MU_1, \\ tp_2 = \lambda MU_2; \end{cases} \text{или} \begin{cases} p_1 = \frac{\lambda}{t} MU_1, \\ p_2 = \frac{\lambda}{t} MU_2. \end{cases}$$

Следовательно, эквимаржинальное условие оптимального потребительского выбора (2.10) остается в силе. Объединяя его с активным ограничением по уровню полезности $U(x_1, x_2) = \overline{U}$, получаем такую же оптимальную корзину товаров, как и при решении исходной задачи (2.47). Действительно, равнопропорциональное изменение цен на товары сохраняет неизменным угловой коэффициент линии равных расходов, что при заданном ограничении по полезности означает постоянство оптимальной потребительской корзины. Таким образом, компенсированный спрос является однородным нулевой степени по ценам благ (2.53).

Продемонстрируем в качестве примера вывод хиксианского спроса для функции полезности Стоуна – Джери (1.25), когда задача минимизации расходов имеет вид [7]:

$$\min_{x_1, x_2}\left(p_1x_1 + p_2x_2\right):$$
$$(x_1 - a)^c(x_2 - b)^d = \overline{U}.$$

Выпишем соответствующую функцию Лагранжа:

$$L = p_1x_1 + p_2x_2 - \lambda\left((x_1 - a)^c(x_2 - b)^d - \overline{U}\right).$$

Условия равенства нулю частных производных функции Лагранжа по переменным x_1 и x_2 таковы:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 - \lambda\frac{c(x_1 - a)^c(x_2 - b)^d}{x_1 - a} = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 - \lambda\frac{d(x_1 - a)^c(x_2 - b)^d}{x_2 - b} = 0.$$

Получаем следующие выражения для оптимальных объемов потребления товаров:

$$x_1 - a = \frac{\lambda c(x_1 - a)^c(x_2 - b)^d}{p_1} = \frac{\lambda c\overline{U}}{p_1},$$
$$x_2 - b = \frac{\lambda d(x_1 - a)^c(x_2 - b)^d}{p_2} = \frac{\lambda d\overline{U}}{p_2}.$$

Возведем левые и правые части полученных выражений для первого и второго товара соответственно в степени c и d

$$(x_1 - a)^c = \left(\frac{\lambda c\overline{U}}{p_1}\right)^c,$$
$$(x_2 - b)^d = \left(\frac{\lambda d\overline{U}}{p_2}\right)^d,$$

и перемножим почленно полученные соотношения

$$(x_1 - a)^c(x_2 - b)^d = \lambda^{c+d}\overline{U}^{c+d}\left(\frac{c}{p_1}\right)^c\left(\frac{d}{p_2}\right)^d.$$

В точке оптимума ограничение по полезности выполняется в виде равенства, что позволяет заменить левую часть на фиксированный уровень полезности потребителя:

$$\overline{U} = \lambda^{c+d}\overline{U}^{c+d}\left(\frac{c}{p_1}\right)^c\left(\frac{d}{p_2}\right)^d.$$

Выражая множитель Лагранжа

$$\lambda = \overline{U}^{\frac{1}{c+d}-1}\left(\frac{p_1}{c}\right)^{\frac{c}{c+d}}\left(\frac{p_2}{d}\right)^{\frac{d}{c+d}}$$

и подставляя его в соотношение, характеризующее оптимальные объемы потребления товаров, приходим к искомым функциям компенсированного спроса для функции полезности Стоуна – Джери:

$$\begin{aligned} x_1^h &= a + \frac{\lambda c\overline{U}}{p_1} = a + \overline{U}^{\frac{1}{c+d}}\frac{c}{p_1}\left(\frac{p_1}{c}\right)^{\frac{c}{c+d}}\left(\frac{p_2}{d}\right)^{\frac{d}{c+d}} = a + \overline{U}^{\frac{1}{c+d}}\left(\frac{cp_2}{dp_1}\right)^{\frac{d}{c+d}}, \\ x_2^h &= b + \frac{\lambda d\overline{U}}{p_2} = b + \overline{U}^{\frac{1}{c+d}}\frac{d}{p_2}\left(\frac{p_1}{c}\right)^{\frac{c}{c+d}}\left(\frac{p_2}{d}\right)^{\frac{d}{c+d}} = b + \overline{U}^{\frac{1}{c+d}}\left(\frac{dp_1}{cp_2}\right)^{\frac{c}{c+d}}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Очевидно, что частным случаем при этом являются функции компенсированного спроса для предпочтений Кобба–Дугласа (1.26):

$$x_1^h = \overline{U}^{\frac{1}{c+d}}\left(\frac{cp_2}{dp_1}\right)^{\frac{d}{c+d}}, x_2^h = \overline{U}^{\frac{1}{c+d}}\left(\frac{dp_1}{cp_2}\right)^{\frac{c}{c+d}}. \quad (2.55)$$

Например, для функции полезности $U = \sqrt{x_1x_2}$:

$$x_1^h = \overline{U}\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}, x_2^h = \overline{U}\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}. \quad (2.56)$$

Выведем функции компенсированного спроса для совершенных субститутов. В случае линейных предпочтений (1.31) в задаче условной минимизации расходов потенциально существуют три оптимальные ситуации, рассмотренные выше. При $\frac{p_2}{\beta} > \frac{p_1}{\alpha}$, минимизируя расходы, потребители целиком отказываются от потребления второго товара (точка E_1 на рис. 2.6), а значит, уровень полезности будет пропорционален объему потребления первого: $\overline{U} = \alpha x_1$. При $\frac{p_2}{\beta} < \frac{p_1}{\alpha}$, наоборот, все расходы уйдут на второе благо: $x_1 = 0$ (точка E_2 на рис. 2.7). В пограничной ситуации $\frac{p_2}{\beta} = \frac{p_1}{\alpha}$ оптимальной будет любая точка на отрезке [E_1E_2] (рис. 2.8), следовательно, диапазон возможных объемов потребления первого товара будет ограничен значениями, полученными выше: 0 и $\overline{U}/\alpha$.

Таким образом, для линейной функции полезности поверхность спроса по Хиксу на каждый из товаров будет состоять из двух горизонтальных и одного вертикального сегментов (рис. 2.29-2.30):

$$x_1^h = t\frac{\overline{U}}{\alpha}, x_2^h = (1-t)\frac{\overline{U}}{\beta}, \text{где} \begin{cases} t = 1 при \frac{p_1}{\alpha} < \frac{p_2}{\beta}, \\ t = 0 при \frac{p_2}{\beta} < \frac{p_1}{\alpha}, \\ t \in [0,1] при \frac{p_1}{\alpha} = \frac{p_2}{\beta}. \end{cases} \quad (2.57)$$

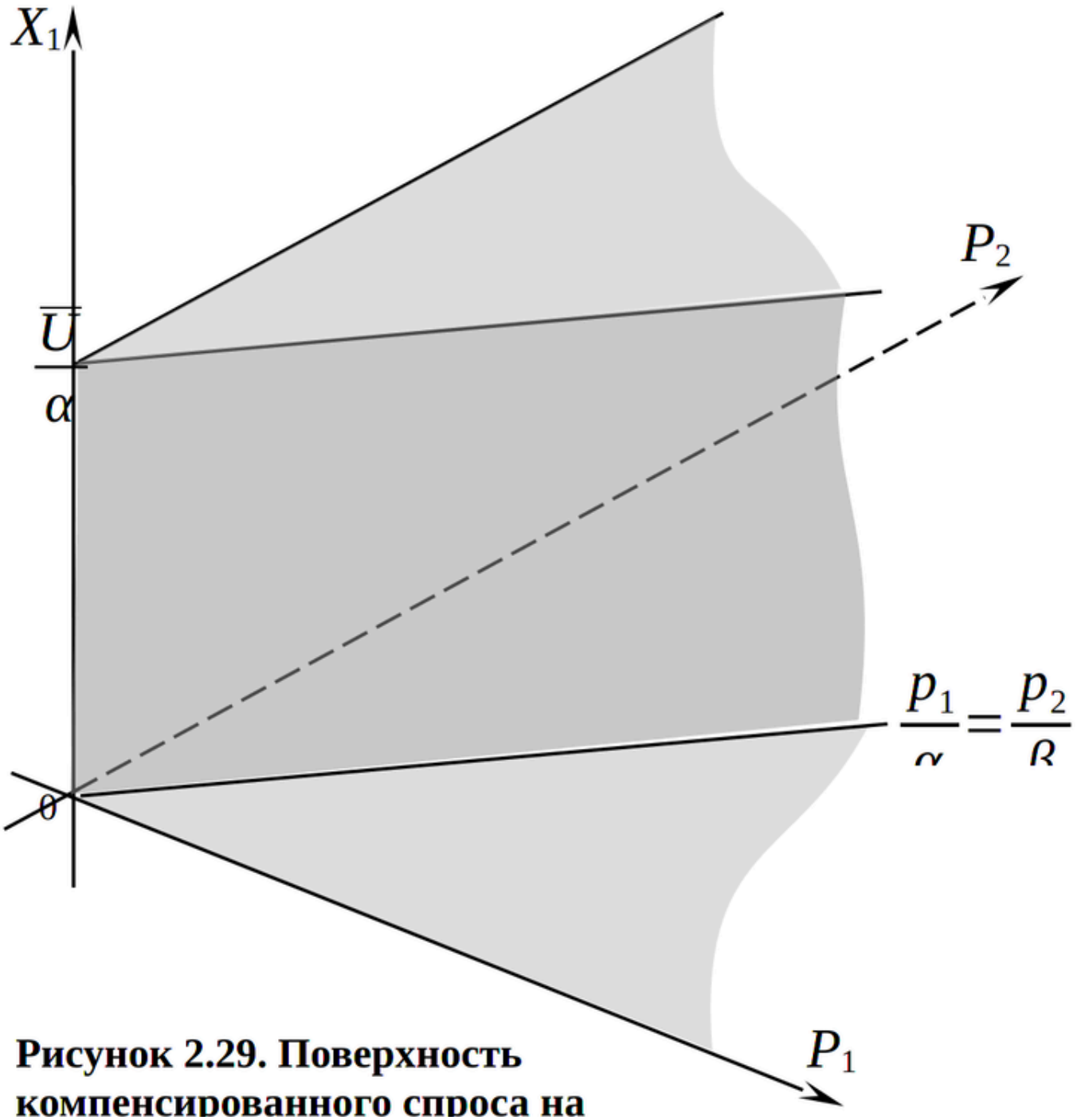


Рисунок 2.29. Поверхность компенсированного спроса на

Рисунок 2.29. Поверхность компенсированного спроса на первое благо

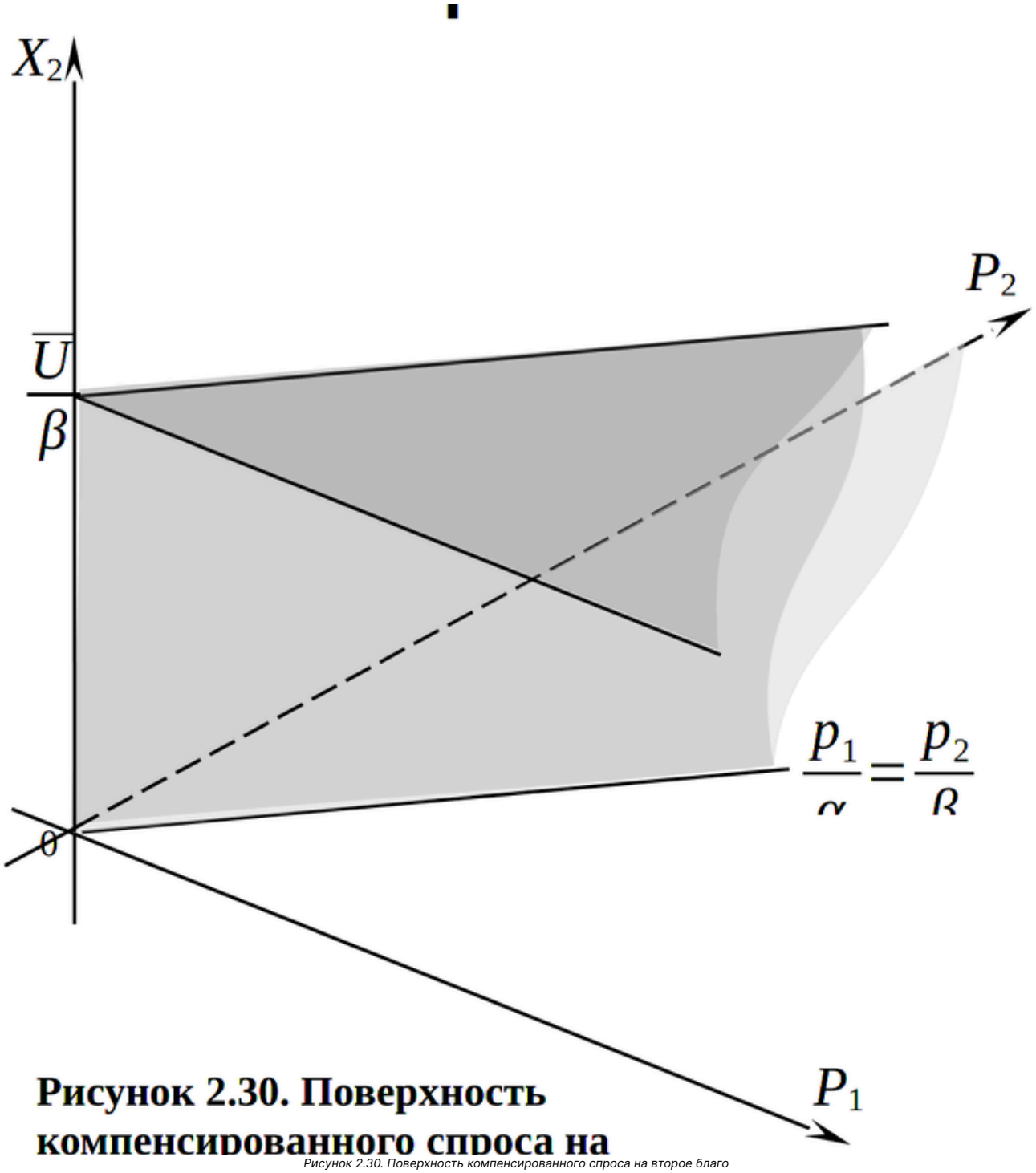


Рисунок 2.30. Поверхность компенсированного спроса на второе благо

Если блага являются совершенными комплементами (1.10), то, поскольку товары используются в строгих пропорциях, постольку между ними отсутствует эффект замещения. При леонтьевской функции полезности комбинации продуктов, минимизирующие расходы при заданном уровне полезности, будут находиться в вершинах углов, являющихся линиями безразличия данной функции полезности (1.11), т.е. справедливо равенство:

$$\overline{U} = \frac{x_1}{\alpha} = \frac{x_2}{\beta}.$$

Следовательно, функции компенсированного спроса на товары таковы:

$$x_1 = \alpha\overline{U}, x_2 = \beta\overline{U}. \quad (2.58)$$

Для вывода функций спроса по Хиксу, соответствующих функции полезности CES (1.13), рассмотрим двойственную задачу связанной минимизации расходов (2.47):

$$(p_1x_1 + p_2x_2) \to \min :$$
$$\left(x_1^{\varphi} + x_2^{\varphi}\right)^{\frac{1}{\varphi}} = \overline{U}.$$

Функция Лагранжа для данной задачи будет иметь вид:

$$L = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \lambda \left(\overline{U} - \left(x_1^{\varphi} + x_2^{\varphi} \right)^{\frac{1}{\varphi}} \right).$$

Необходимые условия минимизации расходов при ограничении по полезности предполагают равенство нулю частных производных функции Лагранжа по объемам потребляемых благ:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 - \lambda \left(x_1^{\varphi} + x_2^{\varphi} \right)^{\frac{1-\varphi}{\varphi}} x_1^{\varphi - 1} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 - \lambda \left(x_1^{\varphi} + x_2^{\varphi} \right)^{\frac{1-\varphi}{\varphi}} x_2^{\varphi - 1} = 0,$$

или

$$\lambda \left(x_1^{\varphi} + x_2^{\varphi} \right)^{\frac{1-\varphi}{\varphi}} x_1^{\varphi - 1} = p_1,$$

$$\lambda \left(x_1^{\varphi} + x_2^{\varphi} \right)^{\frac{1-\varphi}{\varphi}} x_2^{\varphi - 1} = p_2.$$

С учетом жесткости ограничения по полезности условия оптимальности по x_1 и x_2 принимают вид:

$$x_1 = \left(\frac{p_1}{\lambda} \right)^{\frac{1}{\varphi - 1}} \left(x_1^{\varphi} + x_2^{\varphi} \right)^{\frac{1}{\varphi}} = \overline{U} \left(\frac{p_1}{\lambda} \right)^{\frac{1}{\varphi - 1}},$$

$$x_2 = \left(\frac{p_2}{\lambda} \right)^{\frac{1}{\varphi - 1}} \left(x_1^{\varphi} + x_2^{\varphi} \right)^{\frac{1}{\varphi}} = \overline{U} \left(\frac{p_2}{\lambda} \right)^{\frac{1}{\varphi - 1}}.$$

Возведем левые и правые части данного равенства в степень φ, просуммируем полученные соотношения по всем товарам и далее извлечем из полученной суммы корень степени φ. Тогда с учетом жесткости ограничения по полезности приходим к равенству:

$$\left(x_1^{\varphi} + x_2^{\varphi} \right)^{\frac{1}{\varphi}} = \overline{U} \left(\left(\frac{p_1}{\lambda} \right)^{\frac{\varphi}{\varphi - 1}} + \left(\frac{p_2}{\lambda} \right)^{\frac{\varphi}{\varphi - 1}} \right)^{\frac{1}{\varphi}} = \overline{U},$$

которое позволяет выразить множитель Лагранжа:

$$\lambda^{\frac{1}{\varphi - 1}} = \left(p_1^{\frac{\varphi}{\varphi - 1}} + p_2^{\frac{\varphi}{\varphi - 1}} \right)^{\frac{1}{\varphi}}.$$

Заменяя с помощью данного соотношения множитель Лагранжа в выражениях для оптимальной корзины товаров, получаем функции спроса по Хиксу для функции полезности CES:

$$x_1^h = \frac{\overline{U}}{p_1^{\frac{1}{1-\varphi}} \left(p_1^{\frac{\varphi}{\varphi - 1}} + p_2^{\frac{\varphi}{\varphi - 1}} \right)^{\frac{1}{\varphi}}}, x_2^h = \frac{\overline{U}}{p_2^{\frac{1}{1-\varphi}} \left(p_1^{\frac{\varphi}{\varphi - 1}} + p_2^{\frac{\varphi}{\varphi - 1}} \right)^{\frac{1}{\varphi}}}. \quad (2.59)$$

Данные функции хиксианского спроса можно переписать, используя показатель эластичности замещения между продуктами $\delta = \frac{1}{1-\varphi}$:

$$x_1^h = \frac{\overline{U}}{p_1^{\delta} \left(p_1^{1-\delta} + p_2^{1-\delta} \right)^{\frac{\delta}{\delta - 1}}}, x_2^h = \frac{\overline{U}}{p_2^{\delta} \left(p_1^{1-\delta} + p_2^{1-\delta} \right)^{\frac{\delta}{\delta - 1}}}.$$

Подстановка хиксианского спроса (1.62) в целевую функцию обратной задачи позволяет получить функцию расходов, показывающую минимальные расходы, которые должен осуществить потребитель, чтобы при сложившихся ценах благ достичь заданного уровня полезности:

$$E\left(p_1, p_2, \overline{U} \right) = p_1 x_1^h \left(p_1, p_2, \overline{U} \right) + p_2 x_2^h \left(p_1, p_2, \overline{U} \right). \quad (2.60)$$

В качестве примера, выведем функцию расходов для предпочтений Стоуна-Джери (1.25), используя соответствующие функции компенсированного спроса (2.54):

$$E = p_1 x_1^h + p_2 x_2^h = a p_1 + c \overline{U}^{\frac{1}{c+d}} \left(\frac{p_1}{c} \right)^{\frac{c}{c+d}} \left(\frac{p_2}{d} \right)^{\frac{d}{c+d}} + b p_2 + d \overline{U}^{\frac{1}{c+d}} \left(\frac{p_1}{c} \right)^{\frac{c}{c+d}} \left(\frac{p_2}{d} \right)^{\frac{d}{c+d}} =$$

$$a p_1 + b p_2 + (c+d) \overline{U}^{\frac{1}{c+d}} \left(\frac{p_1}{c} \right)^{\frac{c}{c+d}} \left(\frac{p_2}{d} \right)^{\frac{d}{c+d}}. \quad (2.61)$$

В частности, для предпочтений Кобба–Дугласа (1.26) компенсированный спрос характеризуется выражениями (2.55), и в функции расходов (2.61) исчезают первые два слагаемые [8]:

$$E = (c+d) \overline{U}^{\frac{1}{c+d}} \left(\frac{p_1}{c} \right)^{\frac{c}{c+d}} \left(\frac{p_2}{d} \right)^{\frac{d}{c+d}}. \quad (2.62)$$

Например, для функции полезности вида $U = \sqrt{x_1 x_2}$, когда компенсированный спрос представлен зависимостями (2.56), функция расходов потребителя приобретает вид:

$$E\left(p_1, p_2, \overline{U} \right) = 2 \overline{U} \sqrt{p_1 p_2}. \quad (2.63)$$

Для линейных предпочтений, когда товары являются совершенными субститутами (1.31), компенсированный спрос представлен зависимостями (2.57). Домножая их на цены соответствующих благ и складывая эти произведения друг с другом, получаем следующее выражение для функции расходов:

$$E = p_1 x_1^h + p_2 x_2^h = p_1 t\frac{\overline{U}}{\alpha} + p_2 (1-t)\frac{\overline{U}}{\beta} = \overline{U}\left(t\frac{p_1}{\alpha} + (1-t)\frac{p_2}{\beta}\right), где \begin{cases} t = 1 при \frac{p_1}{\alpha} < \frac{p_2}{\beta}, \\ t = 0 при \frac{p_2}{\beta} < \frac{p_1}{\alpha}, \\ t \in [0,1] при \frac{p_1}{\alpha} = \frac{p_2}{\beta}; \end{cases}$$

или

$$E = \begin{cases} \overline{U}\frac{p_1}{\alpha}, если \frac{p_1}{\alpha} < \frac{p_2}{\beta}, \\ \overline{U}\frac{p_2}{\beta}, если \frac{p_2}{\beta} < \frac{p_1}{\alpha}, \\ \overline{U}\frac{p_1}{\alpha} = \overline{U}\frac{p_2}{\beta}, если \frac{p_1}{\alpha} = \frac{p_2}{\beta}; \end{cases} \quad (2.64)$$

которое можно привести к следующему виду:

$$E = \overline{U} \bullet \min\left\{\frac{p_1}{\alpha}, \frac{p_2}{\beta}\right\}. \quad (2.65)$$

Для функции полезности леонтьевского типа, характеризующей потребление взаимодополняющих благ (1.10), используя выражения спроса по Хиксу (2.58), получаем линейную функцию расходов:

$$E = \overline{U}(\alpha p_1 + \beta p_2). \quad (2.66)$$

Подставляя функции спроса по Хиксу, соответствующие функции полезности CES, (2.59) в выражение расходов потребителя, выводим функцию расходов для предпочтений с постоянной эластичностью замещения между товарами (1.13):

$$E\left(p_1, p_2, \overline{U}\right) = \frac{\overline{U}\left(p_1^{\frac{\varphi}{\varphi-1}} + p_2^{\frac{\varphi}{\varphi-1}}\right)}{\left(p_1^{\frac{\varphi}{\varphi-1}} + p_2^{\frac{\varphi}{\varphi-1}}\right)^{\frac{1}{\varphi}}} = \overline{U}\left(p_1^{\frac{\varphi}{\varphi-1}} + p_2^{\frac{\varphi}{\varphi-1}}\right)^{\frac{\varphi-1}{\varphi}}. \quad (2.67)$$

В силу однородности нулевой степени хиксианского спроса (2.53), функция расходов является однородной первой степени по ценам товаров:

$$E\left(tp_1, tp_2, \overline{U}\right) = tp_1 x_1^h\left(tp_1, tp_2, \overline{U}\right) + tp_2 x_2^h\left(tp_1, tp_2, \overline{U}\right) = tp_1 x_1^h\left(p_1, p_2, \overline{U}\right) + tp_2 x_2^h\left(p_1, p_2, \overline{U}\right) = tE\left(p_1, p_2, \overline{U}\right), t > 0. (2.6$$

Для функций спроса по Хиксу равнопропорциональное изменение цен при неизменном уровне полезности приводит к соответствующему изменению расходов. Изменение покупательной способности должно быть нейтрализовано противоположной по направлению вариацией располагаемого дохода с тем, чтобы благосостояние индивида оставалось на прежнем уровне. Отражением этого является и само название данных функций как «компенсированного» спроса.

К задаче условной минимизации расходов (2.47) можно применить теорему об огибающей (xii), приравняв значения полной производной функции расходов по величине полезности и соответствующей частной производной функции Лагранжа (2.50), рассчитанные на оптимальной корзине товаров $(x_1, x_2) = \left(x_1^h\left(p_1, p_2, \overline{U}\right), x_2^h\left(p_1, p_2, \overline{U}\right)\right)$:

$$\frac{dE\left(x_1^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right), x_2^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)\right)}{d\overline{U}} = \frac{\partial E\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial \overline{U}} = \frac{\partial L}{\partial \overline{U}} = \lambda.$$

Это позволяет прояснить экономический смысл и рассчитать величину множителя Лагранжа в задаче связанной минимизации расходов (2.47), который представляет собой предельные расходы потребителя, необходимые для увеличения его полезности на бесконечно малую величину:

$$\lambda = \frac{\partial E\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial \overline{U}}. \quad (2.69)$$

Функции хиксианского (компенсированного) спроса на товар могут быть получены путем дифференцирования функции расходов (при достаточной ее гладкости) по цене соответствующего товара. Этот факт известен как лемма Шепарда [9]:

$$x_i^h\left(p_1, p_2, \overline{U}\right) = \frac{\partial E\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_i}, i = 1, 2. (2.70)$$

Для доказательства этого утверждения вновь воспользовались теоремой об огибающей (xii), в соответствии с которой полная производная функции расходов по цене каждого из товаров и соответствующая частная производная функции Лагранжа (2.50), рассчитанные на оптимальной для задачи (2.47) корзине товаров $(x_1, x_2) = \left(x_1^h\left(p_1, p_2, \overline{U}\right), x_2^h\left(p_1, p_2, \overline{U}\right)\right)$, равны между собой:

$$\frac{dE\left(x_1^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right), x_2^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)\right)}{dp_i} = \frac{\partial E\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_i} = \frac{\partial L}{\partial p_i} = x_i^h\left(p_1, p_2, \overline{U}\right), i = 1, 2.$$

Проиллюстрируем лемму Шепарда на примере функции полезности Кобба–Дугласа $U = \sqrt{x_1 x_2}$. Для данных предпочтений построим функцию расходов потребителя: $E\left(p_1, p_2, \overline{U}\right) = 2\overline{U}\sqrt{p_1 p_2}$. Ее производная по цене, например, первого товара равна соответствующей функции условного спроса: $\frac{\partial E}{\partial p_1} = \overline{U}\sqrt{\frac{p_2}{p_1}} = x_1^h$, что и утверждает лемма Шепарда.

Функция расходов является вогнутой по ценам товаров. Для доказательства этого утверждения будем анализировать функцию расходов $E = E\left(p_1, p_2, \overline{U}\right)$, соответствующую некоторой функции полезности $U = U(x_1, x_2)$. Рассмотрим произвольные

векторы цен $p = (p_1, p_2)$ и $p^{'} = \left(p_1^{'}, p_2^{'}\right)$, а также некоторый вектор цен $p^{''} = \left(p_1^{''}, p_2^{''}\right)$, представляющий собой линейную комбинацию указанных векторов: $p^{''} = \left(p_1^{''}, p_2^{''}\right) = \left(\alpha p_1 + (1-\alpha)p_1^{'}, \alpha p_2 + (1-\alpha)p_2^{'}\right)$, где $\alpha \in [0,1]$.

Зафиксируем полезность на уровне $U(x_1, x_2) = \overline{U}$ и рассмотрим при данном ограничении задачи минимизации расходов потребителя при ценах p, $p^{'}$ и $p^{''}$. Пусть $x = (x_1, x_2)$, $x^{'} = \left(x_1^{'}, x_2^{'}\right)$ и $x^{''} = \left(x_1^{''}, x_2^{''}\right)$ – оптимальные корзины товаров в данных задачах минимизации расходов потребителя соответственно при ценах p, $p^{'}$ и $p^{''}$. Данным решениям оптимизационных задач будут соответствовать определенные значения функции расходов: $E\left(p_1, p_2, \overline{U}\right) = p_1 x_1 + p_2 x_2$, $E\left(p_1^{'}, p_2^{'}, \overline{U}\right) = p_1^{'} x_1^{'} + p_2^{'} x_2^{'}$ и $E\left(p_1^{''}, p_2^{''}, \overline{U}\right) = p_1^{''} x_1^{''} + p_2^{''} x_2^{''} = \alpha p_1 x_1^{''} + (1-\alpha) p_1^{'} x_1^{''} + \alpha p_2 x_2^{''} + (1-\alpha) p_2^{'} x_2^{''} = \alpha(p_1 x_1^{''} + p_2 x_2^{''}) + (1-\alpha)(p_1^{'} x_1^{''} + p_2^{'} x_2^{''})$.

Тогда
$E\left(p_1^{''}, p_2^{''}, \overline{U}\right) = p_1^{''} x_1^{''} + p_2^{''} x_2^{''} = \alpha p_1 x_1^{''} + (1-\alpha) p_1^{'} x_1^{''} + \alpha p_2 x_2^{''} + (1-\alpha) p_2^{'} x_2^{''} = \alpha(p_1 x_1^{''} + p_2 x_2^{''}) + (1-\alpha)(p_1^{'} x_1^{''} + p_2^{'} x_2^{''}) \geq \alpha E$
.

Обратим внимание на то, что по определению функции расходов, которая показывает минимальную их величину при заданном уровне полезности и ценах на продукты, справедливы следующие неравенства: $p_1 x_1^{''} + p_2 x_2^{''} \geq E\left(p_1, p_2, \overline{U}\right)$ и $p_1^{'} x_1^{''} + p_2^{'} x_2^{''} \geq E(p_1^{'}, p_2^{'}, \overline{U})$.

Действительно, значения функции расходов $E\left(p_1, p_2, \overline{U}\right)$ и $E(p_1^{'}, p_2^{'}, \overline{U})$ будут соответствовать не набору $x^{''} = \left(x_1^{''}, x_2^{''}\right)$, а другим оптимальным корзинам товаров – $x = (x_1, x_2)$ и $x^{'} = \left(x_1^{'}, x_2^{'}\right)$.

Таким образом, для функции расходов будет справедливо неравенство Йенсена:

$$E\left(p_1^{''}, p_2^{''}, \overline{U}\right) = E\left(\alpha p_1 + (1-\alpha)p_1^{'}, \alpha p_2 + (1-\alpha)p_2^{'}, \overline{U}\right) \geq \alpha E\left(p_1, p_2, \overline{U}\right) + (1-\alpha) E\left(p_1^{'}, p_2^{'}, \overline{U}\right),$$

характеризующее ее вогнутость по ценам на товары.

Как показано на рис. 2.31, при снижении цены первого товара $\left(p_1^2 < p_1^1\right)$ и росте его покупаемого количества $\left(x_1^1 > x_1^2\right)$ угловой коэффициент касательной к графику функции расходов увеличивается: $tg\beta > tg\alpha$, поскольку по лемме Шепарда (2.70) $tg\alpha = \frac{\partial E}{\partial p_1}\left(p_1^1\right) = x_1^1$, $tg\beta = \frac{\partial E}{\partial p_2}\left(p_1^2\right) = x_1^2$.

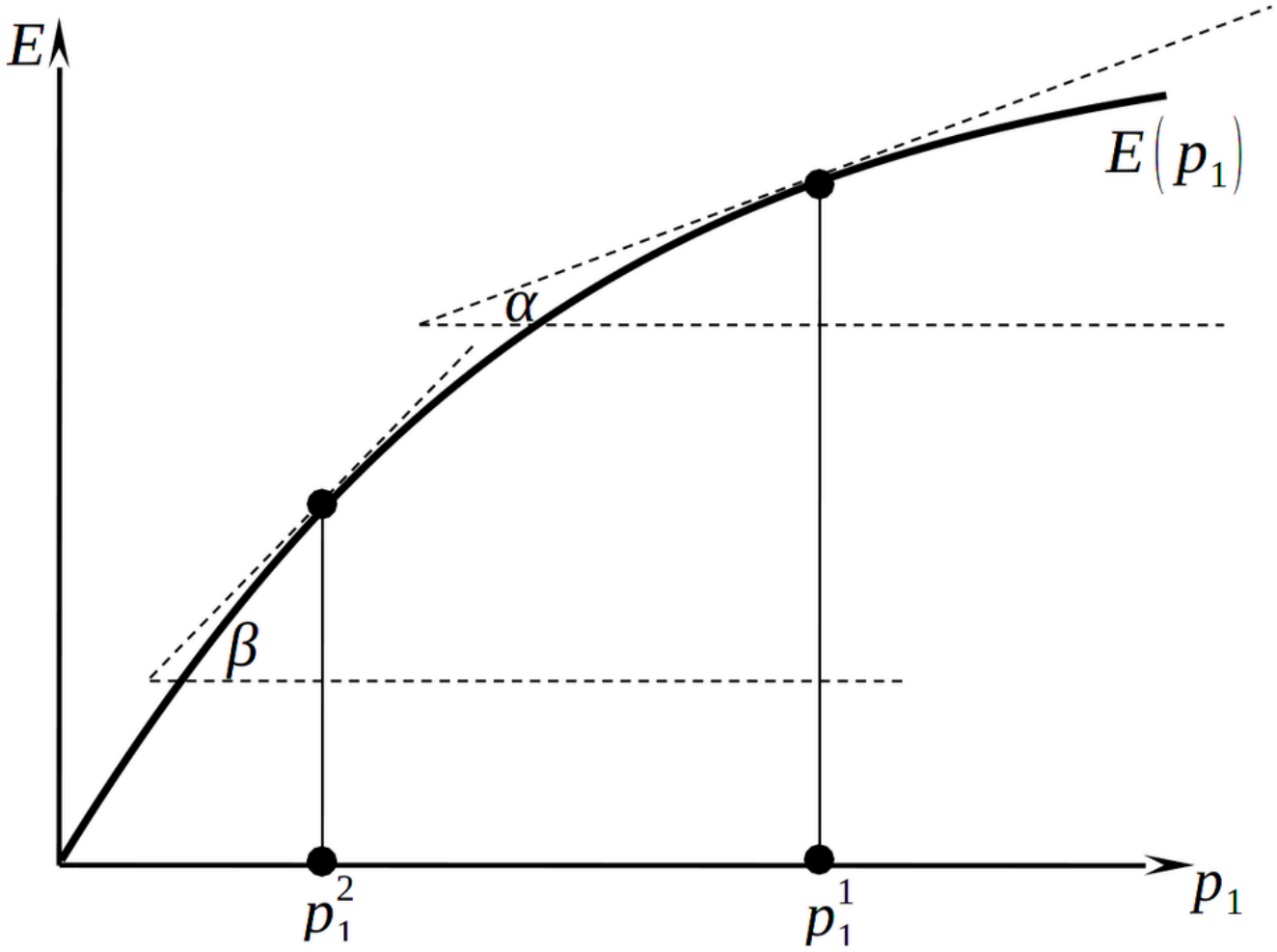


Рисунок 2.31. Вогнутость функции расходов по ценам благ

Обратим внимание на то, что в случае единственности оптимальной корзины товаров, находящейся в внутренности потребительского множества X (т.е. при отсутствии краевых решений), которая будет иметь место при строгой выпуклости кривых безразличия к началу координат, неравенства выше, в том числе, и неравенство Йенсена, будут строгими, а значит, будет иметь место строгая вогнутость функции расходов по ценам на товары.

Если выше однородность первой степени функции расходов по ценам благ (2.68) была выведена из однородности нулевой степени хиксианского спроса (2.53), то лемма Шепарда (2.70) позволяет, наоборот, доказать однородность нулевой степени функций компенсированного спроса, исходя из однородности первой степени функции расходов. Действительно, дифференцируя по цене любого из товаров выражение, характеризующее однородность первой степени функции расходов по ценам (2.68) и применяя лемму Шепарда (2.70):

$$\frac{\partial E\left(tp_1,tp_2,\overline{U}\right)}{\partial p_i} = \frac{\partial E\left(tp_1,tp_2,\overline{U}\right)}{\partial (tp_i)} \bullet \frac{\partial (tp_i)}{\partial p_i} = tx_i^h\left(tp_1,tp_2,\overline{U}\right) =$$

$$t\frac{\partial E\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_i} = tx_i^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right), i=1,2,$$

приходим к однородности нулевой степени функций спроса по Хиксу (2.53).

Располагая информацией о функции расходов потребителя (2.60), можно восстановить его функцию полезности (1.1). Действительно, применяя лемму Шепарда (2.70), можно получить функции компенсированного спроса на потребительские блага, которые можно записать в следующем виде, пользуясь их однородностью нулевой степени по ценам и беря в качестве коэффициента пропорциональности в соотношении (2.53) цену одного из товаров, например, p_2:

$$x_i^h = x_i^h\left(\frac{p_1}{p_2},\overline{U}\right), i=1,2.$$

Применяя к записанному таким образом хиксианскому спросу теорему об обратной функции, можно выразить относительные цены через объемы потребления товаров и уровень полезности:

$$\frac{p_1}{p_2} = {x_1^h}^{-1}\left(x_1,\overline{U}\right) = {x_2^h}^{-1}\left(x_2,\overline{U}\right).$$

Применяя теперь к последнему равенству теорему о неявной функции, можно получить функцию полезности потребителя (1.1).

Допустим, например, что функция расходов потребителя имеет вид (2.62). Восстановим его функцию полезности.

Применяя лемму Шепарда к заданной функции расходов, можно получить функцию компенсированного спроса на первое благо:

$$\frac{\partial E}{\partial p_1} = \left(\frac{cp_2}{dp_1}\right)^{\frac{d}{c+d}} U^{\frac{1}{c+d}} = x_1,$$

из которой после очевидных преобразований $\left(\frac{cp_2}{dp_1}\right)^d = \frac{x_1^{c+d}}{U}$, $\frac{cp_2}{dp_1} = \left(\frac{x_1^{c+d}}{U}\right)^{\frac{1}{d}}$ можно получить выражение относительных цен через уровень полезности и объем потребления данного блага: $\frac{dp_1}{cp_2} = \left(\frac{U}{x_1^{c+d}}\right)^{\frac{1}{d}}$.

Применяя лемму Шепарда для второго блага и используя полученное выше выражение:

$$\frac{\partial E}{\partial p_2} = \left(\frac{dp_1}{cp_2}\right)^{\frac{c}{c+d}} U^{\frac{1}{c+d}} = x_2 = \left(\frac{U}{x_1^{c+d}}\right)^{\frac{c}{d(c+d)}} U^{\frac{1}{c+d}} = \left(\frac{U}{x_1^c}\right)^{\frac{1}{d}},$$

приходим к функции полезности Кобба-Дугласа (1.26).

В частности, если функцию расходов потребителя $E = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} p_1^{\frac{2}{3}} p_2^{\frac{1}{3}} U^{\frac{4}{3}}$, то, применяя к ней лемму Шепарда, можно получить функции компенсированного спроса соответственно на первое и второе благо:

$$\frac{\partial E}{\partial p_1} = \left(\frac{2p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{3}} U^{\frac{4}{3}} = x_1, \frac{\partial E}{\partial p_2} = \left(\frac{p_1}{2p_2}\right)^{\frac{2}{3}} U^{\frac{4}{3}} = x_2.$$

Из спроса по Хиксу на первый товар следует, что $\frac{p_1}{2p_2} = \frac{U^4}{x_1^3}$, а значит, компенсированный спрос на второе благо можно преобразовать к виду $x_2 = \left(\frac{U}{\frac{3}{x_1^4}}\right)^{\frac{8}{3}} U^{\frac{4}{3}} = \frac{U^4}{x_1^2}$, что позволяет получить искомую функцию полезности: $U = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{4}}$.

Функциям хиксианского (компенсированного) спроса присущ ряд примечательных свойств.

Для функций хиксианского спроса характерна неположительность собственных коэффициентов замещения:

$$\frac{\partial x_i^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_i} \le 0, i = 1, 2.$$

Действительно, если функция расходов является дважды дифференцируемой, то ее «чистые» частные производные второго порядка, которые по лемме Шепарда (2.70) представляют собой функции спроса по Хиксу, будут неположительными, ведь в силу вогнутости функции расходов по ценам ее матрица Гессе должна быть отрицательно полуопределенной:

$$\frac{\partial^2 E\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_i^2} = \frac{\partial x_i^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_i} \le 0, i = 1, 2.$$

Во внутренних оптимумах при строгой квазивогнутости полезности, когда функция расходов строго вогнута по ценам, а значит, ее матрица Гессе является отрицательно определенной, собственные коэффициенты замещения будут отрицательными:

$$\frac{\partial x_i^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_i} < 0, i = 1, 2. (2.71)$$

Наконец, следует отметить, что, если функция расходов является дважды непрерывно дифференцируемой, то смешанные частные производные функции хиксианского (компенсированного) спроса равны между собой:

$$\frac{\partial x_1^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_2} = \frac{\partial x_2^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_1}. (2.72)$$

Это свойство функции хиксианского спроса известно как теорема о симметричности коэффициентов замещения.

Действительно, по лемме Шепарда (2.70)

$$\frac{\partial^2 E\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_1 \partial p_2} = \frac{\partial x_1^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_2}, \frac{\partial^2 E\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_2 \partial p_1} = \frac{\partial x_2^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_1}.$$

При этом по теореме Шварца, если вторые частные производные функции расходов непрерывны, то они равны между собой, т.е. значения непрерывных вторых частных производных не зависят от порядка дифференцирования:

$$\frac{\partial^2 E\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_1 \partial p_2} = \frac{\partial^2 E\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_2 \partial p_1},$$

что в свою очередь подразумевает симметричность коэффициентов замещения.

Проверим, например, симметричность коэффициентов замещения для предпочтений Стоуна-Джери, когда функции хиксианского спроса имеют вид (2.54):

$$\frac{\partial x_1^h}{\partial p_2} = \frac{cd\overline{U}^{\frac{1}{c+d}}}{(c+d)p_1 p_2} \left(\frac{p_1}{c}\right)^{\frac{c}{c+d}} \left(\frac{p_2}{d}\right)^{\frac{d}{c+d}} = \frac{\overline{U}^{\frac{1}{c+d}}}{(c+d)} \left(\frac{c}{p_1}\right)^{\frac{d}{c+d}} \left(\frac{d}{p_2}\right)^{\frac{c}{c+d}} = \frac{\partial x_2^h}{\partial p_1}.$$

Отметим, что, если увеличить размерность задачи потребительского выбора, допустив наличие двух и более товаров в корзине товаров, то в зависимости от знака коэффициента замещения можно классифицировать товары на чистые субституты и комплементы.

Если $\frac{\partial x_i^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_j} > 0, i \neq j$, то во внутренних оптимумах при строгой выпуклости кривых безразличия к началу координат, поскольку собственные коэффициенты замещения представляют собой отрицательные величины (2.71), постольку объемы компенсированного спроса на данные два блага будут двигаться в противоположном направлении относительно друг друга при изменении цены одного из них. Следовательно, одно из благ будет замещать другое в потребительских наборах, расположенных на одной и той же кривой безразличия, т.е. данные товары являются чистыми субститутами.

Если $\frac{\partial x_i^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_j} < 0, i \neq j$, то во внутренних оптимумах при строгой выпуклости поверхностей безразличия к началу координат, поскольку собственные коэффициенты замещения представляют собой отрицательные величины (2.71), постольку объемы компенсированного спроса на данные два блага будут двигаться, наоборот, сонаправленно относительно друг друга при изменении цены одного из них. Следовательно, данные товары дополняют друг друга в потребительских наборах, расположенных на одной и той же поверхности безразличия, т.е. являются чистыми комплементами.

Очевидно, что в случае двухпродуктовой потребительской корзины при изменении внутреннего оптимума, отражающегося в движении вдоль строго выпуклой к началу координат кривой безразличия, увеличение одного товара в наборе предполагает

сокращение другого, т.е. блага будут являться чистыми субститутами.

---

1. То есть предполагается, что при $x \to \infty$ $f(x)$ не может асимптотически приближаться к однородной нулевой степени функции (при $\gamma = 0$ в определении (1.42)). ↩

2. Очевидно, что в случае положительного эффекта масштаба (1.37) данное предположение выполняется автоматически. ↩

3. Камынин Л.И. Курс математического анализа: в 2-х т. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1993-1995, т.1. ↩

4. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977. ↩

5. Александров П.С. Введение в общую теорию множеств и функций. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. ↩

6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 6-е изд. – М.: Наука, 1989. ↩

7. Для вывода функций спроса по Хиксу, соответствующих функции полезности Стоуна–Джери при *n*-продуктовой потребительской корзине (vi), рассмотрим двойственную задачу связанной минимизации расходов (2.47):
$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \min :$
$\prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{\alpha_i} \geq \overline{U}.$
Функция Лагранжа для данной задачи будет иметь вид:
$L = \lambda_0 \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + \lambda_1 \left(\overline{U} - \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{\alpha_i} \right).$
Необходимые условия минимизации расходов при ограничении по полезности с учетом неотрицательности множителя Лагранжа λ_0 имеют вид:
$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \lambda_0 p_i - \lambda_1 \alpha_i (x_i - a_i)^{\alpha_j - 1} \prod_{j=1, j \neq i}^{n} (x_j - a_j)^{\alpha_j} = \lambda_0 p_i - \frac{\lambda_1 \alpha_i \prod_{j=1}^{n} (x_j - a_j)^{\alpha_j}}{x_i - a_i} = \lambda_0 p_i - \frac{\lambda_1 \alpha_i U}{x_i - a_i} = 0, i = 1, \ldots, n;$
$\lambda_1 \left(\overline{U} - \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{\alpha_i} \right) = 0, \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{\alpha_i} \geq \overline{U}, \lambda_1 \geq 0.$
Если $\lambda_1 = 0$, то из условия оптимальности по x_i и $\lambda_0 = 0$, чего не может быть.
Следовательно, $\lambda_1 \neq 0$, и ограничение по полезности является жестким: $\prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{\alpha_i} = \overline{U}.$
Если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda_1 = 0$, чего не может быть. Пусть $\lambda_0 = 1$.
Тогда условия равенства нулю частных производных функции Лагранжа по переменным $x_i, i = 1, \ldots, n$, с учетом жесткости ограничения по полезности принимают вид:
$p_i - \lambda_1 \alpha_i (x_i - a_i)^{\alpha_j - 1} \prod_{j=1, j \neq i}^{n} (x_j - a_j)^{\alpha_j} = p_i - \frac{\lambda_1 \alpha_i \prod_{j=1}^{n} (x_j - a_j)^{\alpha_j}}{x_i - a_i} = p_i - \frac{\lambda_1 \alpha_i \overline{U}}{x_i - a_i} = 0,$
т.е.
$x_i = a_i + \frac{\lambda_1 \alpha_i \overline{U}}{p_i}, i = 1, \ldots, n; (xiv)$
или
$x_i - a_i = \lambda_1 \overline{U} \frac{\alpha_i}{p_i}, i = 1, \ldots, n.$
Возводя левую и правую часть данного соотношения в степень α_j и перемножая равенства, соответствующие каждому из товаров, с учетом жесткости ограничения по полезности приходим к следующему выражению:
$\prod_{j=1}^{n} (x_j - a_j)^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^{n} \left(\lambda_1 \overline{U} \frac{\alpha_j}{p_j} \right)^{\alpha_j} = \left(\lambda_1 \overline{U} \right)^{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha_j}{p_j} \right)^{\alpha_j} = \overline{U},$
из которого вытекает, что $\lambda_1 \overline{U} = \overline{U}^{\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j}} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{p_j}{\alpha_j} \right)^{\frac{\alpha_j}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j}}$. Заменяя выражением, стоящим в правой части данного равенства, произведение $\lambda_1 \overline{U}$ в условии оптимальности (xiv), получаем функции спроса по Хиксу для предпочтений Стоуна-Джери:
$x_i^h = a_i + \frac{\alpha_i}{p_i} \overline{U}^{\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j}} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{p_j}{\alpha_j} \right)^{\frac{\alpha_j}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j}} = a_i + \overline{U}^{\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j}} \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right)^{\frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j}} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{p_j}{\alpha_j} \right)^{\frac{\alpha_j}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j}}$
$a_i + \overline{U}^{\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j}} \prod_{j=1, j \neq i}^{n} \left(\frac{\alpha_i p_j}{\alpha_j p_i} \right)^{\frac{\alpha_j}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j}}, i = 1, \ldots, n. (xv)$
Очевидно, что предпочтениям Кобба-Дугласа будут соответствовать такие функции хиксианского спроса:
$x_i^h = \overline{U}^{\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j}} \prod_{j=1, j \neq i}^{n} \left(\frac{\alpha_i p_j}{\alpha_j p_i} \right)^{\frac{\alpha_j}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j}}, i = 1, \ldots, n. (xvi)$
Полученные зависимости являются очевидным обобщением хиксианских функций спроса (2.54)-(2.55), выведенных ранее применительно к случаю двухпродукторых потребительских корзин. ↩

8. Подставляя функции спроса по Хиксу (xv) и (xvi) при *n*-продуктовых потребительских корзинах в выражение расходов потребителя, выводим функции расходов, соответствующие предпочтениям Стоуна-Джери
$E\left(p_1, \ldots, p_n, \overline{U}\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^h = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i + \left(\overline{U} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{p_j}{\alpha_j} \right)^{\alpha_j} \right)^{\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (xvii)$
и Кобба-Дугласа
$E\left(p_1, \ldots, p_n, \overline{U}\right) = \left(\overline{U} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{p_j}{\alpha_j} \right)^{\alpha_j} \right)^{\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i. (xviii)$
↩

9. Рональд Шепард (1912-1982) – американский экономист-математик. См.: Shepard R.W. Theory of cost and production functions. – Princeton: Princeton University Press, 1953. ↩

2.3. Задачи связанной максимизации объема производства и минимизации его издержек

Перейдем теперь к рассмотрению задач оптимизации деятельности производителей в статике. В качестве производителей могут выступать отдельные фирмы и их объединения, или предприятия. Допустим, что каждый из *h* ресурсов покупается производителем по цене $p_h \in R_+$. Заметим, что цена *h*-го товара едина для всех производителей. Здесь не будет приниматься во внимание возможность ценовой дискриминации производителей. Трансформация ресурсов в готовую продукцию на предприятии описывается производственной функцией, ставящей в соответствие затратам факторов производства – труда (L) и капитала (K) – максимальный объем продукции $Q(K, L)$, который может быть выпущен с их помощью за данный промежуток времени.

Каждая фирма стремится к достижению определенных хозяйственных целей, принимая во внимание существующие ограничения как экономического, так и технологического характера. Максимизация прибыли является одной из первостепенных, но отнюдь не единственной, главенствующей целью в деятельности фирмы. Среди других важнейших типов хозяйственного целеполагания можно, например, отметить стремление к расширению рыночной доли, увеличению валовой выручки, оптимизации производственных затрат, совершенствованию производственных и сбытовых систем, внедрению новых продуктов, улучшению условий труда и общественного имиджа компании, росту активов и рыночной капитализации компании и т.д.

Итак, одной из важных целей деятельности фирмы является максимизация выручки от реализации продукции. В условиях совершенной конкуренции на продуктовом рынке, когда цены выступают для отдельных хозяйствующих субъектов в качестве экзогенных параметров, такое поведение предприятия сводится максимизации объема выпускаемой продукции при условии ограничения по финансовым средствам предприятия (TC):

$$\begin{gathered} \max_{K,L} Q\left(K, L\right): \\ p_K K + p_L L \leqslant TC, K \geqslant 0, L \geqslant 0. \end{gathered} \tag{2.73}$$

Решение данной задачи (K, L), аналогично теории потребления, обладает таким свойством, что ограничение по издержкам для него выполняется в форме равенства, следовательно, эту задачу для случая внутреннего оптимума $(K > 0, L > 0)$ можно переписать в более простом виде:

$$\begin{gathered} \max_{K,L} Q\left(K, L\right): \\ p_K K + p_L L = TC. \end{gathered}$$

Часто для облегчения экономического анализа и получения практически значимых результатов в добавление к перечисленным выше предпосылкам производственной функции, как и в теории потребления, требуют степень гладкости C^2. Тогда, решая задачу (2.73) на условный экстремум, можно воспользоваться его необходимым условием – равенством нулю дифференциала функции Лагранжа, которая имеет вид:

$$L = Q(K, L) - \lambda \left(p_K K + p_L L - TC\right). \tag{2.74}$$

Имеем:

$$dL = \tfrac{\partial L}{\partial K} dK + \tfrac{\partial L}{\partial L} dL + \tfrac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda = \left(\tfrac{\partial Q}{\partial K} - \lambda p_K\right) dK + \left(\tfrac{\partial Q}{\partial L} - \lambda p_L\right) dL - \left(p_K K + p_L L - TC\right) d\lambda = 0.$$

Из необходимого условия экстремума вытекает система:

$$\begin{cases} \tfrac{\partial Q}{\partial K} = \lambda p_K, \\ \tfrac{\partial Q}{\partial L} = \lambda p_L, \\ p_K K + p_L L = TC. \end{cases} \tag{2.75}$$

Ее следствием аналогично задачам условной максимизации полезности (2.6) и минимизации расходов (2.47) является эквимаржинальный принцип:

$$MRTS_{KL} \equiv \tfrac{-dK}{dL}\Big|_{Q=const} = \tfrac{MP_L}{MP_K} = \tfrac{p_L}{p_K}. \tag{2.76}$$

На рис. 2.32 *E* – точка в трехмерном технологическом пространстве, соответствующая максимальному объему выпуска при ограничении по издержкам производства, который достигается при выборе оптимального набора ресурсов (K, L). На рис. 2.33 E_x – это проекция точки *E* на плоскость *K*0*L*.

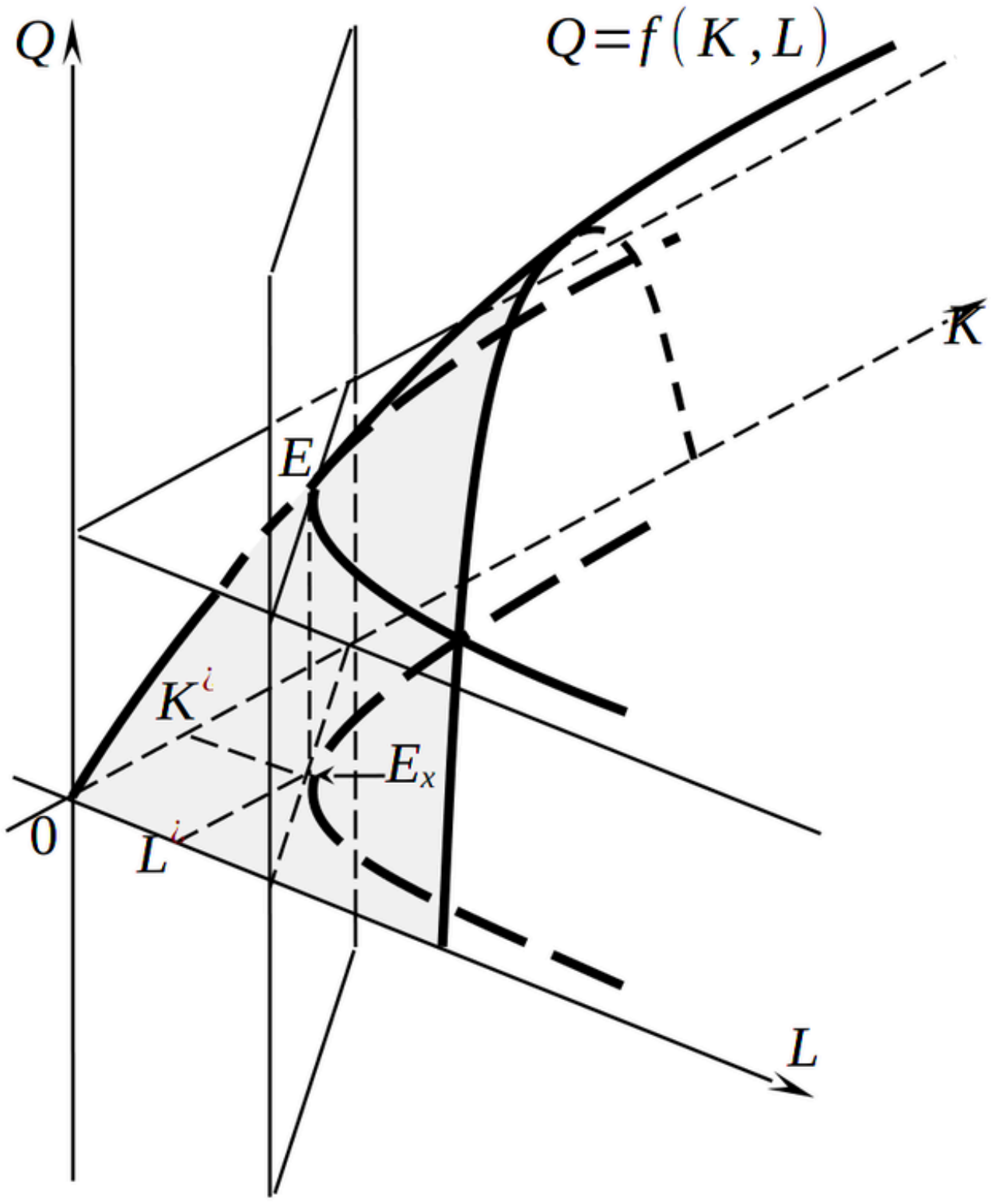


Рисунок 2.32. Пространственная иллюстрация решения задачи максимизации объема производства при ограничении по издержкам

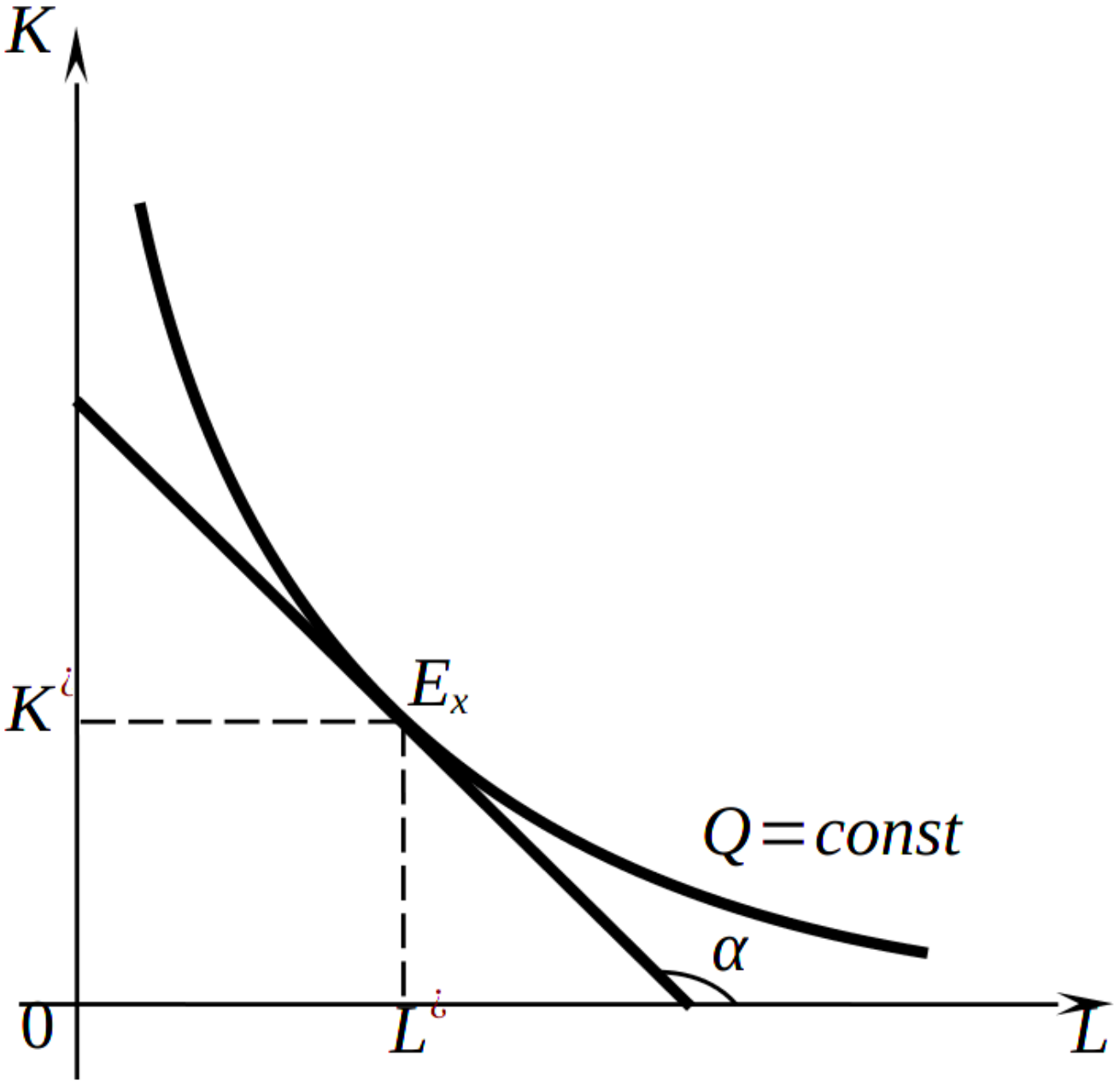


Рисунок 2.33. Оптимальная корзина товаров на плоскости

Экономический смысл множителя Лагранжа λ в задаче условной максимизации объема выпуска (2.73) можно установить аналогично тому, как это было сделано в теории потребительского выбора (2.18), применяя теорему об огибающей к задаче условной максимизации объема производства (2.73) и соответствующей функции Лагранжа (2.74). Множитель Лагранжа в задаче оптимизации производства (2.73) по экономическому смыслу представляет величину, обратную предельным издержкам предприятия:

$$\lambda = \frac{\partial Q(p_K, p_L, TC)}{\partial TC} = \frac{1}{MC}. \quad (2.77)$$

Варьируя параметры *p* и *TC* в задаче (2.73), можно вывести зависимость оптимальной комбинации факторов производства (K, L) от их цен $p = (p_K, p_L)$ и издержек производства *TC*. Эта зависимость называется функцией условного спроса по Маршаллу производителя на ресурсы $x^m = x(p, TC)$. Если производственная функция является дифференцируемой, то функции условного спроса фирмы на ресурсы по Маршаллу $(p_K, p_L, TC) \to (K, L)$ можно вывести из необходимого условия связанной максимизации объема выпуска (2.75).

Для теории производства, аналогично теории потребления, справедливы соотношения

$$\frac{\partial Q(p_K, p_L, TC)}{\partial p_K} = -\lambda K(p_K, p_L, TC), \frac{\partial Q(p_K, p_L, TC)}{\partial p_L} = -\lambda L(p_K, p_L, TC),$$

которые вытекают из теоремы об огибающей, если в качестве параметра задачи связанной максимизации выпуска взять цены факторов производства.

Учитывая в данных соотношениях экономический смысл множителя Лагранжа (2.77), получаем, что для функций условного спроса по Маршаллу, как вариаций решения задачи оптимизации производства по ценам, справедливо векторное тождество Роя:

$$K(p_K, p_L, TC) = \frac{-\partial Q/\partial p_K}{\partial Q/\partial TC}, L(p_K, p_L, TC) = \frac{-\partial Q/\partial p_L}{\partial Q/\partial TC}.$$

Симметричной, или взаимной, по отношению к задаче максимизации объема производства при ограничении по издержкам (2.73) является деятельность предприятия, ориентирующегося на минимизацию расходов при условии выхода на запланированные мощности:

$$\begin{matrix} \min_{K,L} \left(p_K K + p_L L\right): \\ Q\left(K, L\right) \geq \overline{Q}. \end{matrix} \quad (2.78)$$

Здесь, как и ранее, предполагается, что оптимум будет являться внутренним: $K > 0$, $L > 0$.

При достаточной гладкости технологии производства, в частности, принадлежности ее классу C^2 дважды непрерывно дифференцируемых функций, аналогично теории потребительского выбора, решение задачи условной оптимизации (2.78) можно свести к исследованию на безусловный экстремум функции Лагранжа:

$$L = \lambda_0(p_K K + p_L L) - \lambda_1 \left(Q(K, L) - \overline{Q}\right), \quad (2.79)$$

где (λ_0, λ_1) – вектор множителей Лагранжа. Как и ранее, будем предполагать существование внутреннего оптимума, т.е. нежесткость ограничений по неотрицательности объемов используемых ресурсов: $K > 0, L > 0$.

Необходимыми для связанной минимизации издержек производства являются условия:

стационарности функции Лагранжа по объемам используемых факторов:

$$\begin{cases} \lambda_0 p_K = \lambda_1 MP_K, \\ \lambda_0 p_L = \lambda_1 MP_L; \end{cases}$$

дополняющей нежесткости:

$$\lambda_1 \left(Q(K, L) - \overline{Q}\right) = 0, Q\left(K, L\right) \geq \overline{Q};$$

а также неотрицательности множителей Лагранжа:

$$\lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0.$$

При этом вектор множителей Лагранжа должен быть ненулевым.

Будем рассуждать аналогично анализу решения задачи связанной минимизации расходов потребителя (2.47). Предполагая, что $\lambda_1 = 0$, при предпосылке об эффективности производства (2.1) из условий стационарности функции Лагранжа по объемам факторов в силу того, что предметом анализа выступают экономические ресурсы $(p_K > 0, p_L > 0)$, получаем, что и $\lambda_0 = 0$, во внутреннем оптимуме не может быть, поскольку по необходимому условию экстремума вектор множителей Лагранжа является ненулевым. Тогда из условия дополняющей нежесткости следует, что условие по достижению запланированного объема производства в точке оптимума выполняется в виде равенства $Q(K, L) = \overline{Q}$, т.е. является активным.

И наоборот, из условий стационарности функции Лагранжа по объемам экономических $(p_K > 0, p_L > 0)$ ресурсов с учетом эффективности производства (1.20) при $\lambda_0 = 0$ оказывается и $\lambda_1 = 0$, чего во внутреннем оптимуме не может быть, поскольку по необходимому условию экстремума вектор множителей Лагранжа является ненулевым. Таким образом, $\lambda_0 \neq 0$, и без ограничения общности его можно положить равным единице, или, что эквивалентно, поделить на него функцию (2.79), пронормировав тем самым вектор множителей Лагранжа:

$$L = p_K K + p_L L - \lambda \left(Q(K, L) - \overline{Q}\right), \quad (2.80)$$

где $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} > 0$.

Тогда необходимыми для минимизации издержек заданного объема производства будут являться следующие условия стационарности функции Лагранжа по объемам используемых факторов:

$$\begin{cases} p_K = \lambda MP_K, \\ p_L = \lambda MP_L; \end{cases} \quad (2.81)$$

или

$$\frac{MP_K}{p_K} = \frac{MP_L}{p_L} = \frac{1}{\lambda}. \quad (2.82)$$

Аналогично теории потребительского выбора (2.10), из системы (2.81) с учетом выражения для предельной нормы технологического замещения (2.3) вытекает эквимаржинальное условие, характеризующее оптимальное использование факторов производства:

$$MRTS_{KL} = \frac{-dK}{dL} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{p_L}{p_K}. \quad (2.83)$$

Минимизируя издержки, производитель переходит на изокосту – т.е. линию, объединяющую все комбинации факторов производства, которые соответствуют фиксированному значению издержек производства – расположенную как можно ближе к началу координат, но имеет при этом общую точку с изоквантой, соответствующей заданному объему выпуска $Q(K, L) = \overline{Q}$.

Эквимаржинальное условие утверждает, что комбинация факторов, соответствующая минимальным издержкам при выпуске определенного объема продукции, находится в точке касания данной изокванты и самой низкой из допустимых изокост (рис. 2.34-2.35).

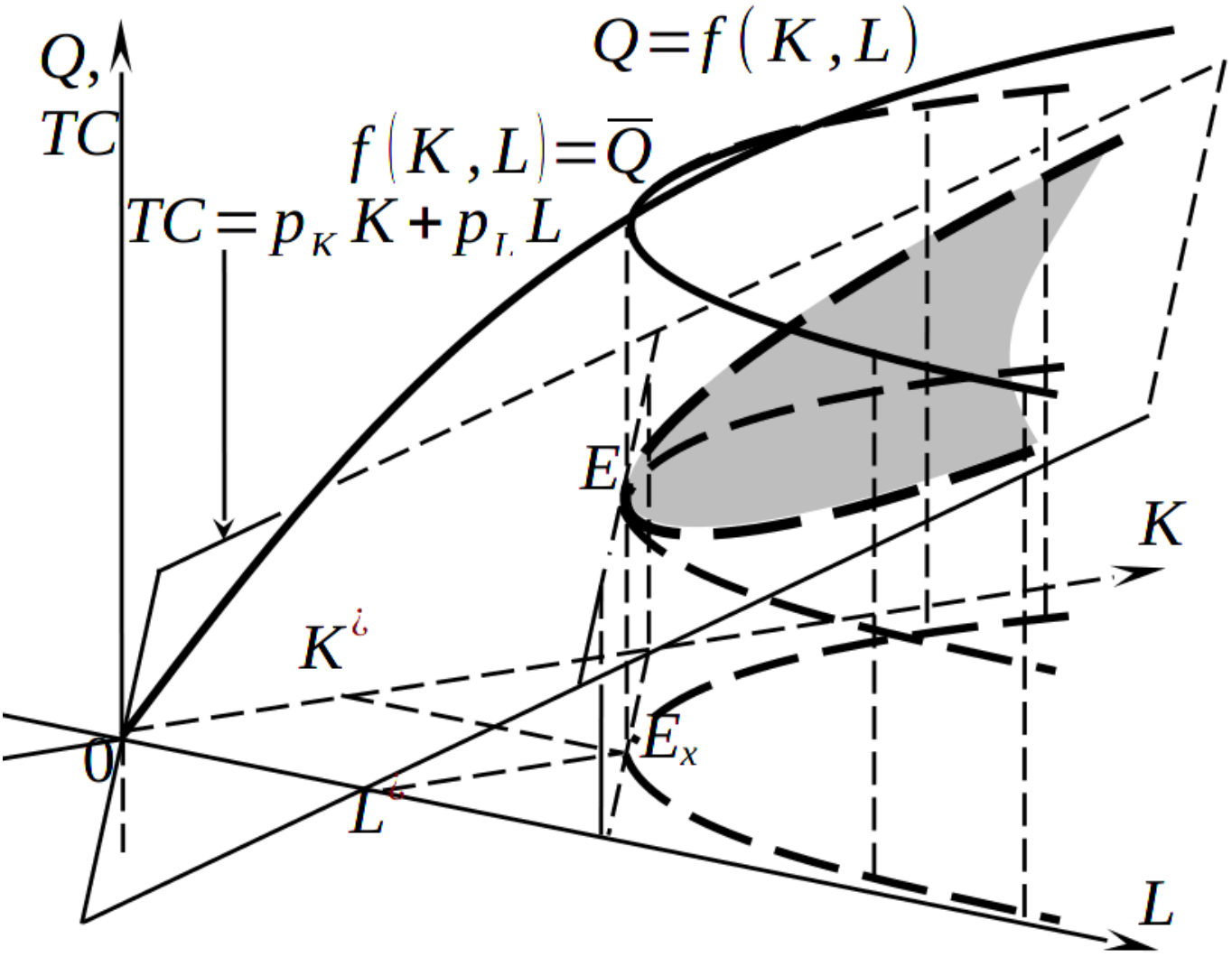


Рисунок 2.34. Пространственная иллюстрация решения задачи минимизации издержек производства при выпуске запланированного объема продукции

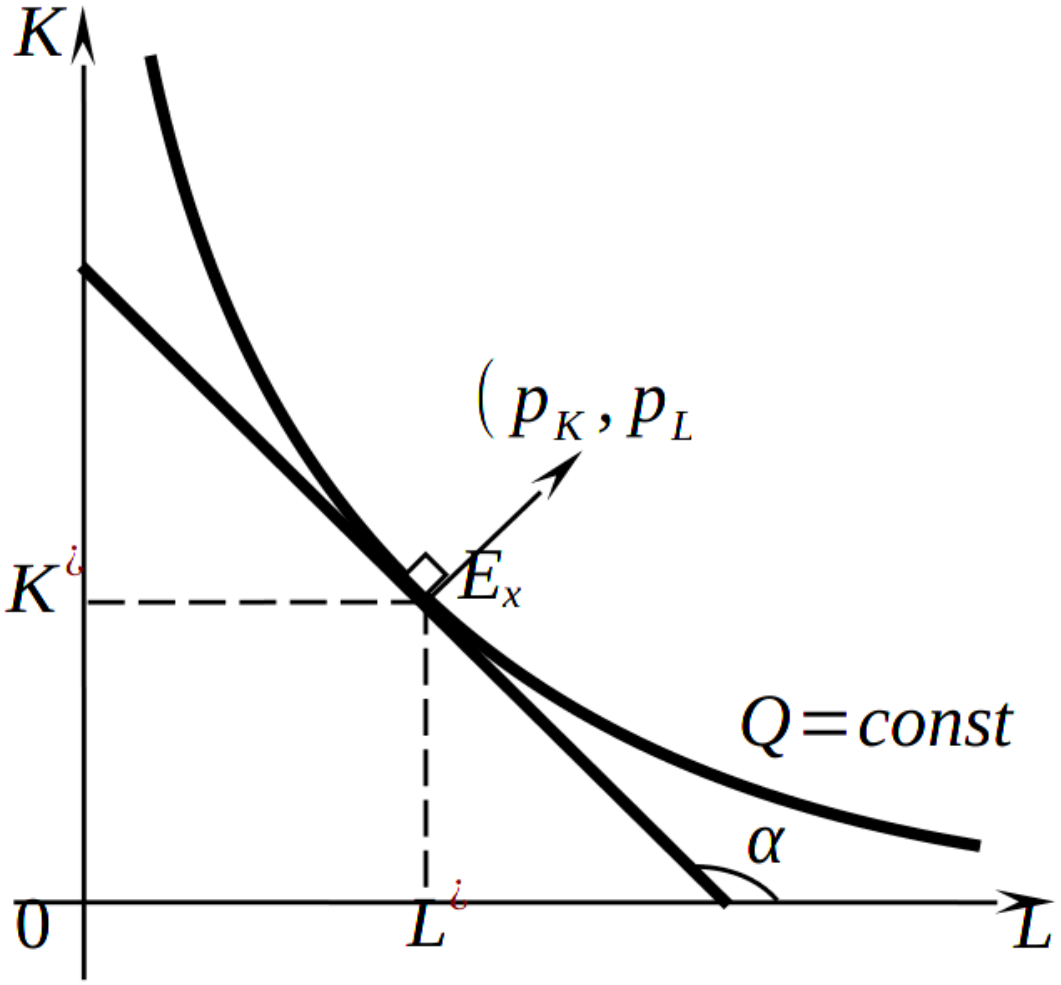


Рисунок 2.35. Оптимальный набор ресурсов на плоскости

Решая задачу (2.78), можно получить зависимости между оптимальными количествами используемых ресурсов и ценами данных ресурсов, а также объемом выпускаемой продукции, выступающим в качестве ограничения:

$$K = K^h\left(p_K, p_L, Q\right), L = L^h\left(p_K, p_L, Q\right); (2.84)$$

которые называются функциями условного спроса (по Хиксу) на соответствующие факторы производства. Графически функции условного спроса выводятся исходя из траектории развития предприятия, которая представляет собой вариацию решения задачи связанной минимизации издержек по запланированному объему производства (рис. 2.41).

Функции условного спроса являются однородными нулевой степени по ценам всех факторов производства:

$$K^h(tp_K, tp_L, Q) = K^h\left(p_K, p_L, Q\right); L^h(tp_K, tp_L, Q) = L^h\left(p_K, p_L, Q\right). (2.85)$$

Для доказательства данного утверждения рассмотрим задачу минимизации издержек производства (2.78) при возросших в t раз ценах факторов:

$$\min_{K\geq 0, L\geq 0}\left(tp_K K + tp_L L\right):$$
$$Q\left(K, L\right) \geq \overline{Q}.$$

Для нее условие стационарности функции Лагранжа по объемам используемых факторов производства принимает вид:

$$\begin{cases} tp_1 = \lambda MU_1, \\ tp_2 = \lambda MU_2; \end{cases} \text{или} \begin{cases} p_1 = \frac{\lambda}{t} MU_1, \\ p_2 = \frac{\lambda}{t} MU_2. \end{cases}$$

Следовательно, эквимаржинальное условие оптимизации производства (2.83) остается в силе. Объединяя его с активным ограничением по выпуску продукции $Q(K, L) = \overline{Q}$, получаем такую же оптимальную комбинацию факторов, как и при решении исходной задачи (2.78). Действительно, равнопропорциональное изменение цен факторов сохраняет неизменным угловой коэффициент изокосты, что при заданном ограничении по объему производства означает постоянство оптимальной комбинации факторов. Таким образом, условный спрос является однородным нулевой степени по ценам факторов производства (2.85).

Выведем в качестве примера функции условного спроса по Хиксу для технологии Кобба–Дугласа $Q = K^{\alpha}L^{\beta}$. Тогда эквимаржинальный принцип (2.76) задает траекторию развития предприятия (рис. 2.36, левая часть):

$$K = \frac{\alpha p_L}{\beta p_K} L. \quad (2.86)$$

В частности, если $Q = K^{1/4}L^{1/2}$, то траектория развития имеет вид:

$$K = \frac{p_L}{2p_K} L.$$

Подставляя траекторию развития фирмы (2.86) в производственную функцию, получаем условный спрос на хозяйственные факторы (рис. 2.36):

$$L = \left(\frac{\beta p_K}{\alpha p_L}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}, K = \left(\frac{\alpha p_L}{\beta p_K}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}. \quad (2.87)$$

В частности, если $Q = K^{1/4}L^{1/2}$, то функции условного спроса на факторы производства таковы:

$$L = \sqrt[3]{\frac{2p_K}{p_L} Q^4}, K = \sqrt[3]{\left(\frac{p_L}{2p_K}\right)^2 Q^4}. \quad (2.88)$$

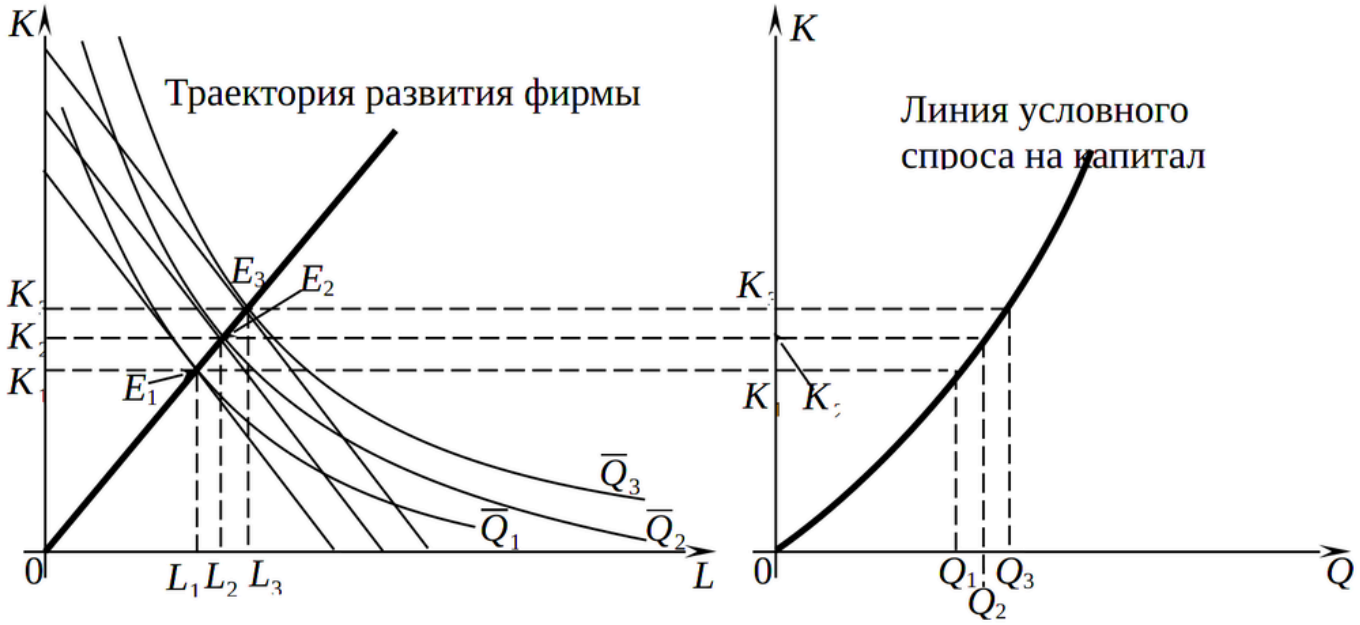


Рисунок 2.36. Траектория развития фирмы и условный спрос на факторы производства при технологии Кобба–Дугласа

Выведем теперь траекторию развития фирмы и функции условного спроса для леонтьевской технологии $Q = \min\left\{\frac{K}{\alpha}, \frac{L}{\beta}\right\}$.

Леонтьевская спецификация производственной функции отражает тот факт, что конкретный ресурс может быть задействован в производстве лишь в том случае, когда данное его количество строго сочетается с определенным количеством другого фактора производства, которое отвечает используемой технологии производства. Отношение коэффициентов α и β характеризует пропорции использования факторов производства в технологическом процессе. Поскольку факторы производства должны быть использованы при изготовлении конечной продукции в строгих пропорциях, постольку между ними отсутствует эффект замещения. При леонтьевской технологии комбинации ресурсов, минимизирующие издержки при заданном объеме выпуска, будут находиться в вершинах углов, являющихся изоквантами данной производственной функции, т.е. справедливо равенство:

$$Q = \frac{K}{\alpha} = \frac{L}{\beta}.$$

Следовательно, траектория развития фирмы имеет вид (рис. 2.37):

$$K = \frac{\beta}{\alpha} L,$$

а функции условного спроса на факторы производства таковы:

$$K^h = \alpha Q, L^h = \beta Q. \quad (2.89)$$

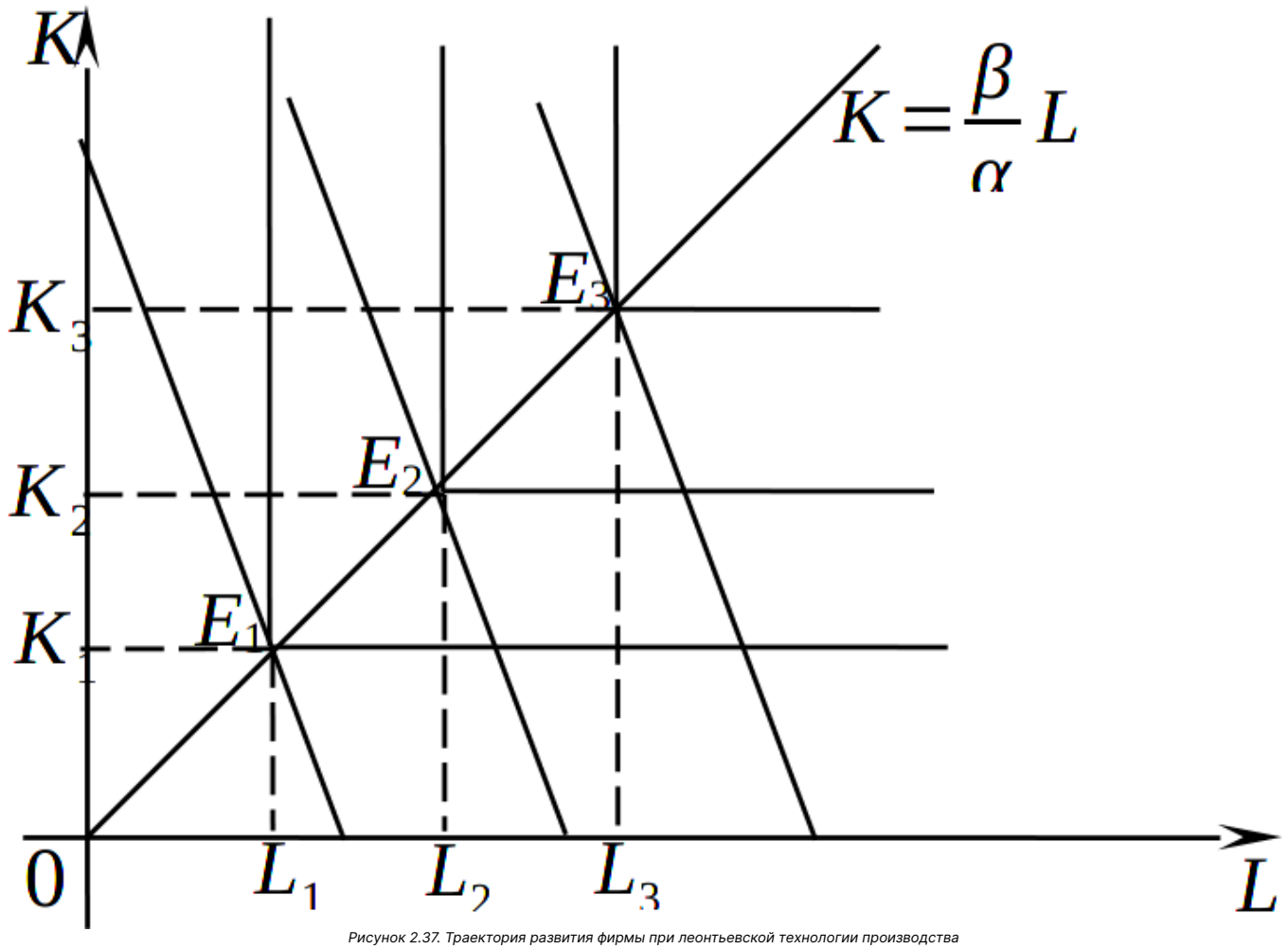


Рисунок 2.37. Траектория развития фирмы при леонтьевской технологии производства

Предположим теперь, что на предприятии действует линейная технология, когда аргументами производственной функции являются ресурсы – совершенные заменители: $Q = \alpha L + \beta K$. Тогда угловой коэффициент изокванты по модулю равен:

$$MRTS_{KL} = \frac{-dK}{dL}\Big|_{Q=const} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Возможны три случая, в каждом из которых будет свой объем условного спроса на факторы производства.

В первом случае, когда $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_L}{p_K}$, или $\frac{p_L}{\alpha} > \frac{p_K}{\beta}$, угловой коэффициент изокванты по абсолютному значению меньше углового коэффициента изокосты, поэтому наблюдается угловое равновесие. В этом случае $L = 0$, $K = \frac{Q}{\beta}$ (рис. 2.38).

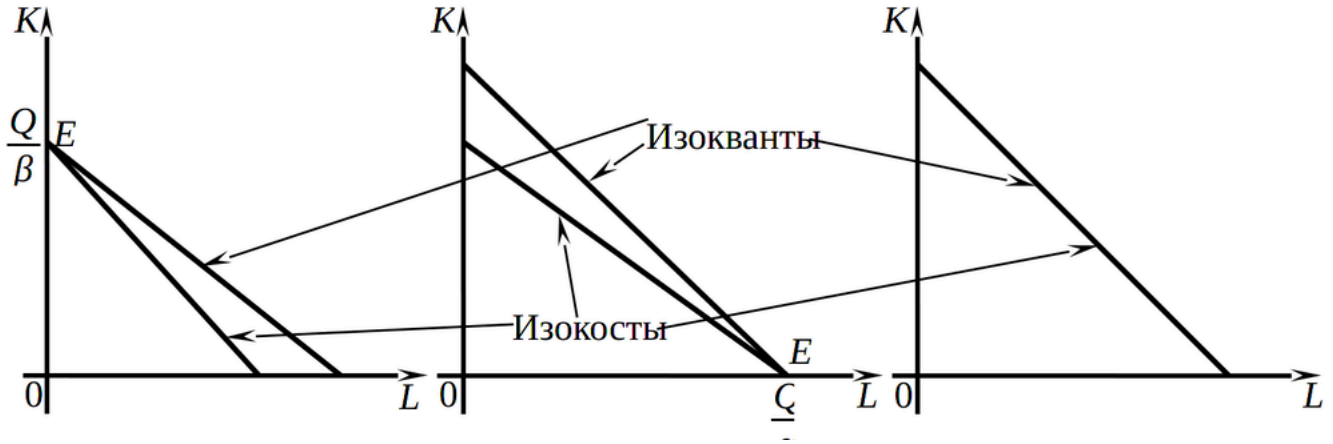
Во втором случае, при $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{p_L}{p_K}$, или $\frac{p_L}{\alpha} < \frac{p_K}{\beta}$, угловой коэффициент изокванты по абсолютному значению больше углового коэффициента изокосты, поэтому также наблюдается угловое равновесие. При этом $K = 0$, $L = \frac{Q}{\alpha}$ (рис. 2.39).

Наконец, в третьем случае, если $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p_L}{p_K}$, или $\frac{p_L}{\alpha} = \frac{p_K}{\beta}$, то изокоста совпадает с изоквантой, поэтому наблюдается неединственность равновесия (рис. 2.40). В этом случае L может принимать любые значения между 0 и $\frac{Q}{\alpha}$, соответственно, K – между $\frac{Q}{\beta}$ и 0.

Рисунок 2.38. Минимизация издержек производства при линейной технологии (случай 1)

Рисунок 2.39. Минимизация издержек производства при линейной технологии (случай 2)

Рисунок 2.40. Минимизация издержек производства при линейной технологии (случай 3)



Объединяя все три случая, можно сделать вывод о том, что для линейной технологии производства, когда его факторы являются совершенными субститутами, условный спрос на факторы производства имеет вид:

$$L^h = t\frac{Q}{\alpha}, K^h = (1-t)\frac{Q}{\beta}, \text{где} \begin{cases} t = 1 при \frac{p_L}{\alpha} < \frac{p_K}{\beta}, \\ t = 0 при \frac{p_K}{\beta} < \frac{p_L}{\alpha}, \\ t \in [0,1] при \frac{p_L}{\alpha} = \frac{p_K}{\beta}. \end{cases}$$

Подставляя функции условного спроса на факторы производства (2.84) в выражение себестоимости продукции, можно получить функцию издержек (рис. 2.41):

$$TC(p_K, p_L, Q) = p_K K(p_K, p_L, Q) + p_L L(p_K, p_L, Q). \quad (2.90)$$

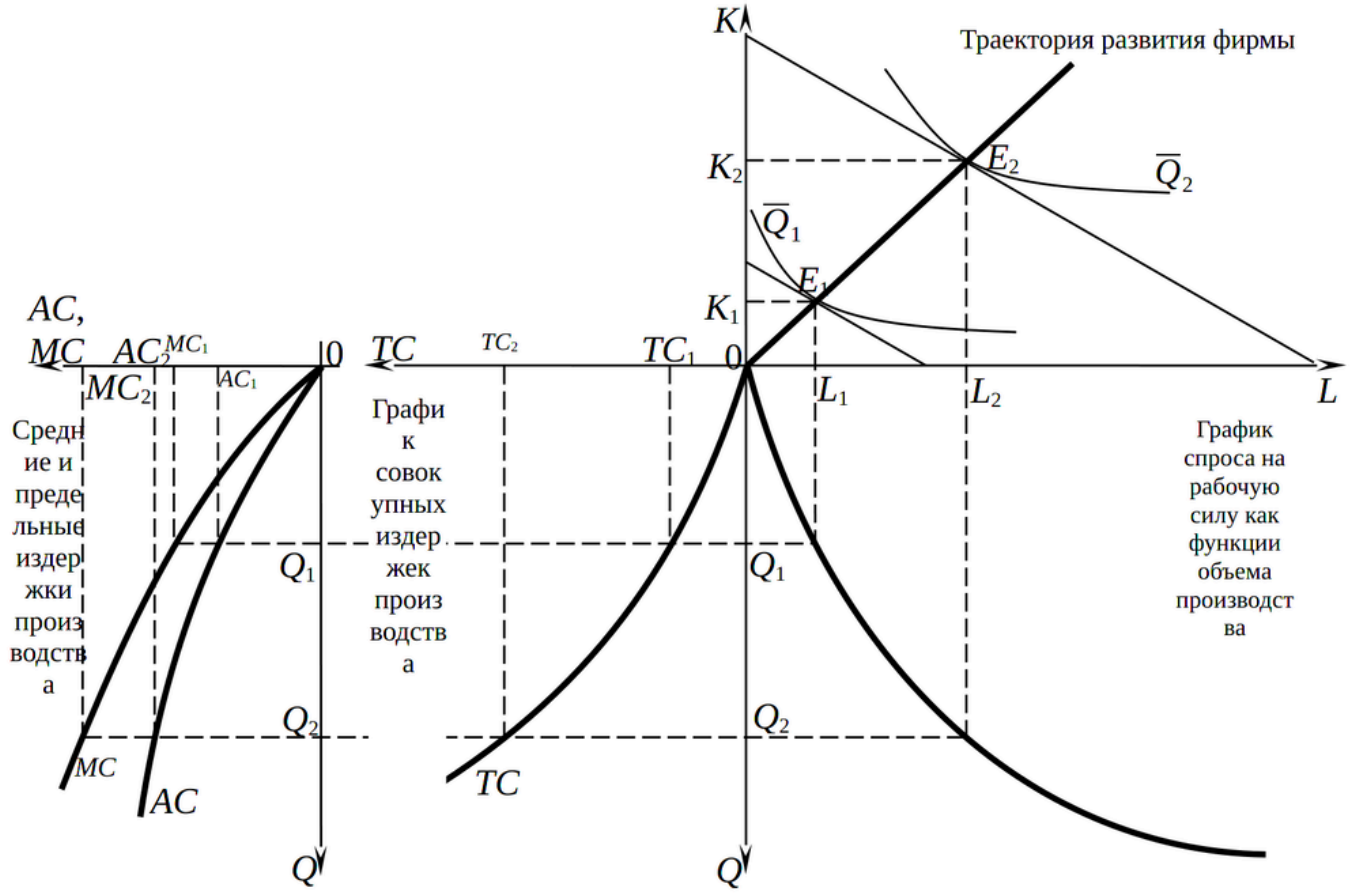


Рисунок 2.41. Вывод функции издержек производства

Отметим, что по своему экономическому смыслу множитель Лагранжа в задаче связанной минимизации расходов (2.47) представляет собой предельные издержки производства:

$$\lambda = \frac{\partial TC(p_K, p_L, Q)}{\partial Q} = MC. \quad (2.91)$$

Для того, чтобы установить этот факт, следует применить теорему об огибающей (xii) к задаче связанной минимизации издержек производства (2.78), приравняв значения полной производной функции издержек по объему производства и соответствующей частной производной функции Лагранжа (2.80), рассчитанные на оптимальной комбинации производственных факторов $(K, L) = \left(K^h\left(p_K, p_L, Q\right), L^h\left(p_K, p_L, Q\right)\right)$:

$$\frac{dTC}{dQ} = \frac{\partial TC(p_K, p_L, Q)}{\partial Q} = \frac{\partial L}{\partial Q} = \lambda.$$

Исходя из экономического смысла множителя Лагранжа (2.91), необходимые условия связанной минимизации денежных затрат (2.82) можно дополнить:

$$\frac{MP_K}{p_K} = \frac{MP_L}{p_L} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{MC}. (2.92)$$

Функции условного спроса на факторы производства в случае достаточной гладкости производственной функции могут быть получены с использованием леммы Шепарда:

$$K^h(p_K, p_L, Q) = \frac{\partial TC(p_L, p_K, Q)}{\partial p_K}, L^h(p_K, p_L, Q) = \frac{\partial TC(p_L, p_K, Q)}{\partial p_L}. (2.93)$$

Для доказательстве леммы Шепарда, которая в теории оптимизации производства доказывается так же, как и в теории потребительского поведения, нужно воспользоваться теоремой об огибающей (xii), в соответствии с которой полная производная функции издержек по цене каждого из ресурсов и соответствующая частная производная функции Лагранжа (2.80), рассчитанные на оптимальной для задачи (2.78) комбинации факторов $(K, L) = \left(K^h\left(p_K, p_L, Q\right), L^h\left(p_K, p_L, Q\right)\right)$, равны между собой:

$$\frac{dTC}{dp_K} = \frac{\partial TC(p_L, p_K, Q)}{\partial p_K} = \frac{\partial L}{\partial p_K} = K^h\left(p_K, p_L, Q\right);$$
$$\frac{dTC}{dp_L} = \frac{\partial TC(p_L, p_K, Q)}{\partial p_L} = \frac{\partial L}{\partial p_L} = L^h\left(p_K, p_L, Q\right),$$

Специализация производства вызывает синергетический эффект, когда совместное использование разных факторов производства дает дополнительный выигрыш по сравнению с раздельной эксплуатацией. Наряду с прямой, существует также опосредованная взаимосвязь между показателями производительности труда и фондоотдачи, с одной стороны, и положительным эффектом масштаба производства – с другой.

Положительный синергетический эффект, возникающий во взаимодействии факторов производства, приводит к опережающему росту эффективности использования трудовых ресурсов и основных фондов по отношению к номинальному увеличению занятости и числа рабочих мест. Создается ситуация, тождественная найму дополнительных работников или привлечению инвестиций в промышленно-производственные фонды с постоянной отдачей. При этом возникает эффект снижения средней ставки заработной и арендной платы, которые выплачиваются соответственно за единицу трудового вклада и отработанных машиночасов оборудования, обладающих неизменной эффективностью. Если фонд оплаты труда и амортизационные отчисления пропорциональны номинальному использованию оборудования и персонала на предприятии, то следствием становится убывание средних издержек производства как функции от объема выпускаемой продукции (2.95), когда обеспечивается рост совокупной отдачи от факторов не за счет пропорционального увеличения расходов, а путем повышения эффективности их использования:

$$AC(\alpha y) < \alpha AC(y), \alpha \in R, \alpha > 1, y > 0. (2.94)$$

Убывание функции средних затрат при этом имеет место, поскольку приращение издержек при реальном вовлечении в производство дополнительных ресурсов, обладающих фиксированной отдачей, было бы более значительным, нежели изменение затрат на найм факторов в рамках крупномасштабного производства:

$$TC(\alpha y) < \alpha TC(y), \alpha \in R, \alpha > 1. (2.95)$$

Докажем эквивалентность таких характеристик технологии как убывание средних издержек (2.94) и положительный эффект масштаба производства (1.37). Выражение для себестоимости выпускаемой продукции, или тождество издержек

$$TC(x_1, \ldots, x_l) \equiv \sum_{j=1}^{l} p_j x_j (2.96)$$

обладает свойством однородности первой степени по затратам ресурсов:

$$TC(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_l) \equiv \sum_{j=1}^{l} p_j\left(\alpha x_j\right) = \sum_{j=1}^{l} \alpha\left(p_j x_j\right) = \alpha \sum_{j=1}^{l} p_j x_j = \alpha TC(x_1, \ldots, x_l). (2.97)$$

Если предположить, что денежные средства экономического субъекта фиксированы: $\sum_{j=1}^{l} p_j x_j \leqslant c_i$, тогда граница такого финансового условия хозяйственной деятельности $\sum_{j=1}^{l} p_j x_j = c_i$, в трехмерном пространстве, т.е. в случае двухпродуктовых корзин товаров, представляет собой вертикальную плоскость (рис. 1).

Действительно, данная граница в трехмерном пространстве означает пересечение плоскости расходов и горизонтальной плоскости фиксированных издержек $TC_i = c_i$. Издержки производства являются линейно однородными не только по объемам ресурсов (2.97), но и по их ценам. При увеличении цен в α раз плоскость расходов поворачивается вверх вокруг прямой, проходящей через начало координат. При этом для каждой данной комбинации потребляемых благ в α раз возрастает величина расходов по отношению к их первоначальной величине, равной c_i:

$$\sum_{j=1}^{l} (\alpha p_j) x_j = \alpha \sum_{j=1}^{l} p_j x_j = \alpha c_i.$$

Это значит, что теперь граница финансового условия будет соответствовать пересечению новой плоскости расходов с горизонтальной плоскостью, проведенной на уровне αc_i. Очевидно, что прямая, по которой пересекутся эти плоскости, будет соответствовать тому же множеству товарных наборов, что и предыдущая линия пересечения плоскости расходов и горизонтальной плоскости фиксированных издержек c_i. Обе эти прямые будут проецироваться на одну и ту же линию на горизонтальной координатной плоскости X_10X_2, т.е. лежат в одной и той же вертикальной плоскости. Варьируя масштабирующий множитель $\alpha \in R_+$ в последнем равенстве, получим бесконечное множество линий пересечения плоскостей расходов с произвольным наклоном и горизонтальных плоскостей издержек αc_i, которое образует вертикальную плоскость – границу финансового условия в трехмерном пространстве (рис. 2.42).

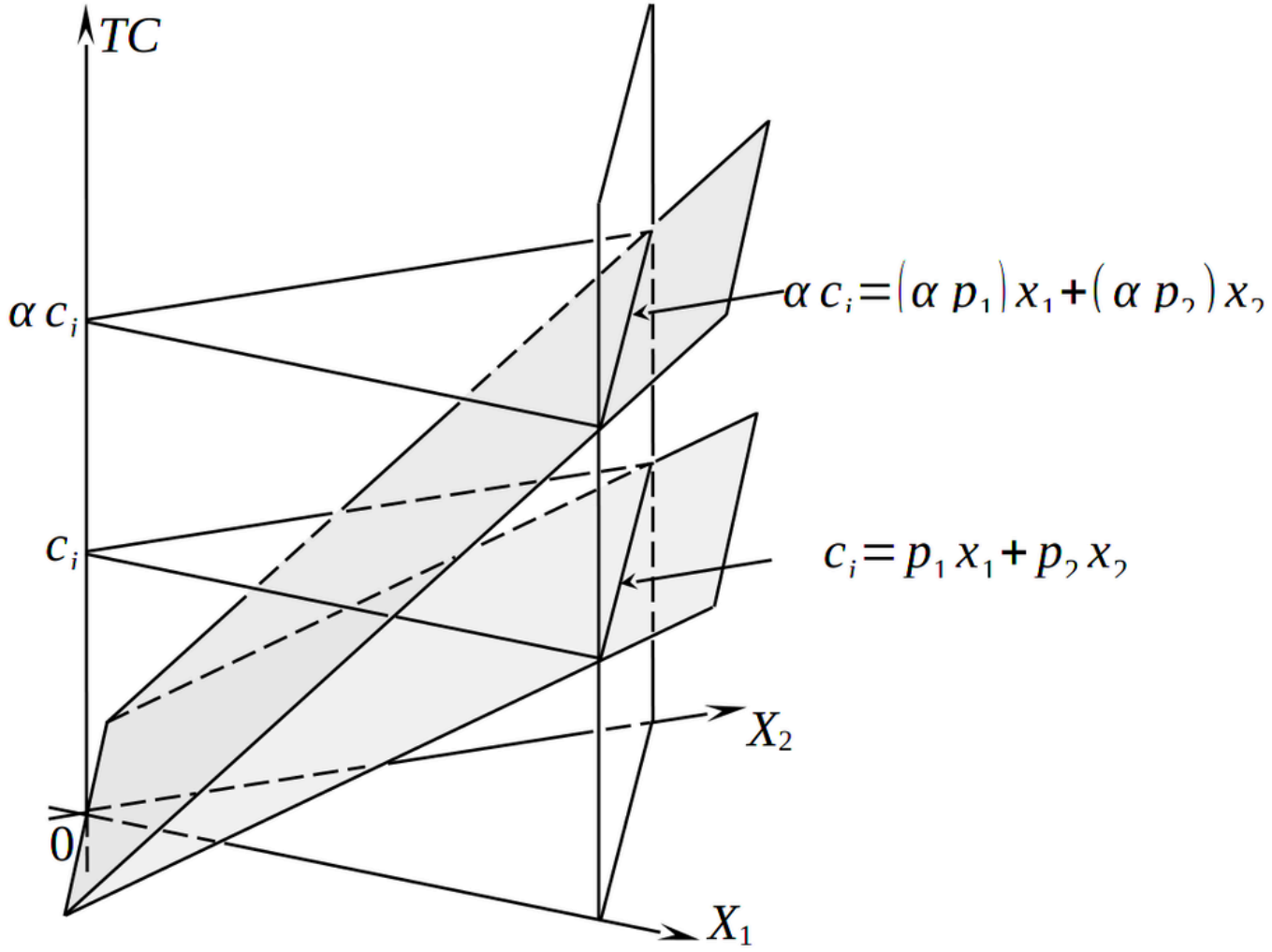


Рисунок 2.42. Финансовое ограничение хозяйственной деятельности

Поскольку каждой комбинации ресурсов соответствует одно определенное значение объема производства, можно перейти от выражения себестоимости продукции (2.96) к функции издержек:

$$TC(y) \equiv TC(f(x_1, \ldots, x_l)) \equiv TC(x_1, \ldots, x_l). \quad (2.98)$$

Итак, проанализируем факторизацию (рис. 2.43) производственных затрат (2.96) на производственную функцию и функцию издержек (2.97).

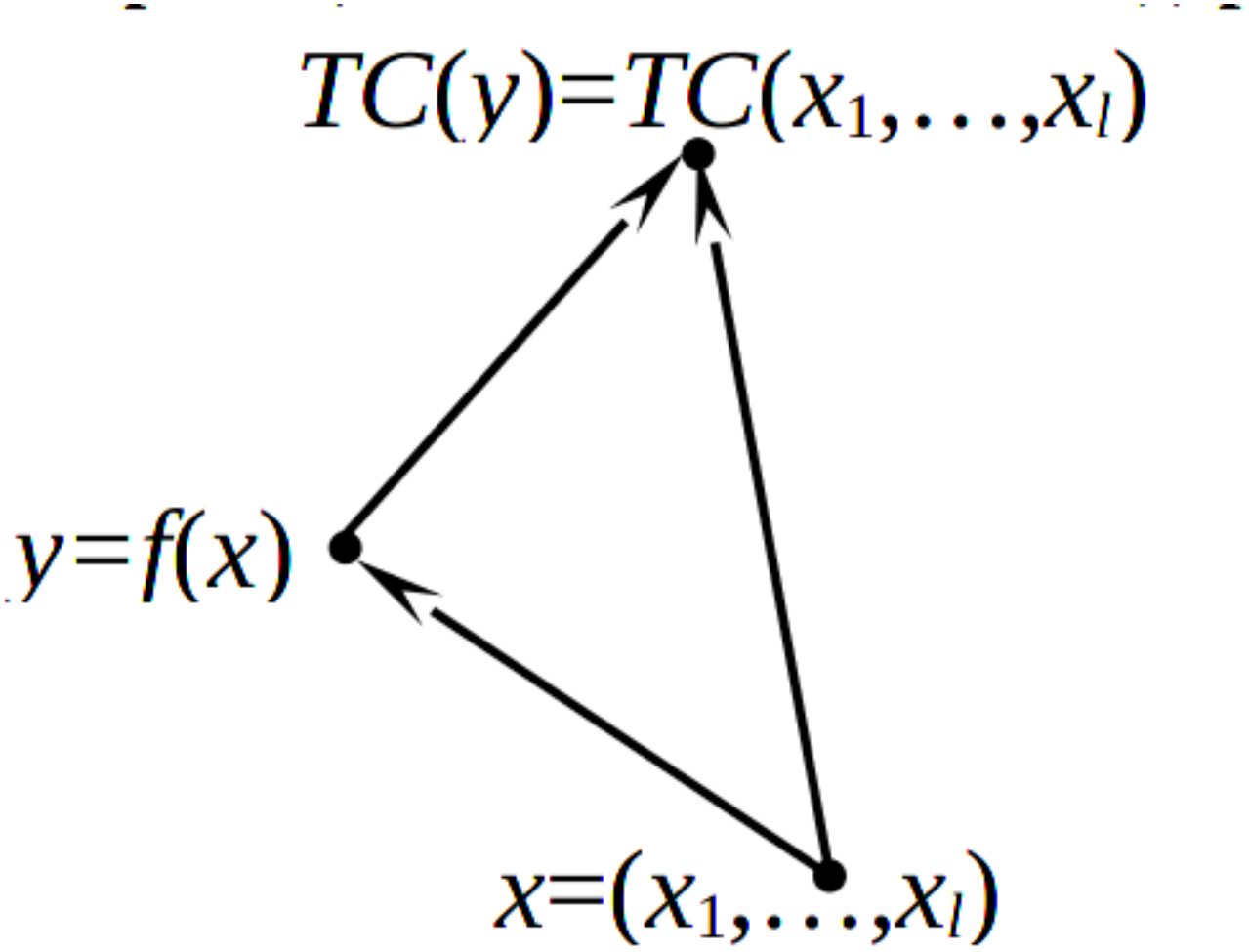


Рисунок 2.43. Факторизация хозяйственных издержек

Используя однородность выражения себестоимости продукции (2.97) и определение функции хозяйственных издержек (2.98), можно записать следующую цепочку равенств:

$$TC(f(\alpha x_1,\ldots,\alpha x_l)) = TC(\alpha x_1,\ldots,\alpha x_l) = \alpha TC(x_1,\ldots,x_l) = \alpha TC(f(x_1,\ldots,x_l)). (2.99)$$

Если изокванты выпуклы к началу координат, то издержки производства представляют собой возрастающую функцию его объема. В силу положительной отдачи от масштаба (1.37) и строго возрастания функции издержек можно сделать вывод, что:

$$TC(\alpha f(x_1,\ldots,x_l)) < TC(f(\alpha x_1,\ldots,\alpha x_l)). (2.100)$$

Объединив соотношения (2.99) и (2.100), устанавливаем неравенство, характеризующее поведение производственных затрат (2.95) как следствие возрастающей отдачи от масштаба производства (1.37). Поделив левую и правую части неравенства (2.95) на $\alpha y > 0$, получаем: $\frac{TC(\alpha y)}{\alpha y} < \frac{TC(y)}{y}$. Таким образом, положительная отдача от масштаба при строгой квазивогнутости технологии для функционирующего в долгосрочном аспекте предприятия $(Q > 0)$ эквивалентна убыванию средних издержек при росте выпуска продукции (2.94).

Справедливо и обратное утверждение. Если в хозяйственном процессе при увеличении объема производства динамика издержек подчиняется неравенству (2.95), где *y* представляет собой значение производственной функции, то в силу соотношения (2.99) можно получить неравенство (2.100). Если учесть строгое возрастание издержек как функции объема производства, тогда из (2.99) вытекает положительная отдача от масштаба хозяйственной деятельности (1.37). Следовательно, убывание средних хозяйственных затрат обеспечивает положительный эффект масштаба производства, т.е. технологии присущ положительный эффект масштаба (1.37) тогда и только тогда, когда для хозяйственной деятельности характерна убывающая зависимость средних издержек от объема производства (2.94) [1].

Аналогично возрастающей отдаче от масштаба и убыванию средних затрат, эквивалентными являются характеристики постоянства отдачи от масштаба (1.41) и средних издержек производства:

$$TC(\alpha y) = \alpha TC(y), \alpha \in R, \alpha > 1, (2.101)$$

а также убывающей отдачи (1.38) и возрастающих средних издержек:

$$TC(\alpha y) > \alpha TC(y), \alpha \in R, \alpha > 1. (2.102)$$

Итак, специализация производства позволяет получить значительный прирост выпуска продукции, не прибегая к большим капиталовложениям. Убывание средних издержек является следствием целостности, или эмерджентности, производственной

системы – превосходстве свойств целого над совокупностью слагающих его частей [2]. Здесь возрастающая отдача от масштаба проявляется в виде прямой экономии издержек производства на микро-, мезо- и макроэкономическом уровне.

$$AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} > \frac{TC(\alpha Q)}{\alpha Q} = AC(\alpha Q).$$

Подытоживая проведенный выше анализ, можно сделать вывод, что проявлениями положительных синергетических эффектов служат следующие эквивалентные понятия (табл. 2.1):

- возрастающей отдачи от масштаба воспроизводства (1.37),
- несовершенной делимости производственных процессов (1.44) и
- убывания средних издержек как функции объема производства (2.95).

Аналогично, эквиваленты противоположные понятия, как проявления отрицательных синергетических эффектов:

- убывающей отдачи от масштабов воспроизводственных процессов (1.38),
- совершенной делимости производственных операций (1.45) и
- возрастания средних издержек как функции объема производства (2.102).

Пограничную ситуацию нулевых синергетических эффектов отражают следующие эквивалентные понятия:

- постоянной отдачи от масштаба воспроизводства (1.41),
- пропорциональной делимости производственных процессов (1.46) и
- постоянства средних издержек как функции объема производства (2.101).

Таблица 2.1. Эквивалентные характеристики хозяйственной деятельности

Отдача от масштаба	Делимость производства	Средние издержки как функция объема производства	Синергия факторов производства
Возрастающая	Несовершенная	Убывающая	Положительная
Постоянная	«Пропорциональная»	Константа	Нулевая
Убывающая	Совершенная	Возрастающая	Отрицательная

Рассмотрим простейший случай двухфакторной технологии. Выведем функцию издержек для важного класса однородных производственных функций (1.42), к которым применима теорема Эйлера (i). Домножим левую и правую части равенства (i) на множитель Лагранжа λ:

$$\lambda \frac{\partial f(K,L)}{\partial K} K + \lambda \frac{\partial f(K,L)}{\partial L} L = \gamma \lambda f(K,L).$$

Используем в данном соотношении условия минимизации издержек (2.81):

$$p_K K + p_L L = \gamma \lambda f(K,L).$$

В левой части здесь записано выражение издержек производства (*TC*). При минимизации затрат производится заданный объем продукции $f(K,L) = Q$. Кроме того, по доказанному выше, множитель Лагранжа λ в задаче минимизации издержек представляет собой их предельную величину, т.е. производную общих издержек по объему производства (2.91). Поэтому последнее равенство можно переписать в виде дифференциального уравнения:

$$TC(Q) = \gamma \frac{dTC}{dQ} Q.$$

Итак, для однородных производственных функций (1.42) средние издержки будут пропорциональны предельным при любом объеме производства:

$$AC(Q) = \gamma MC(Q). \quad (2.103)$$

Решаем полученное линейное однородное дифференциальное уравнение, разделяя переменные: $\frac{1}{\gamma} \int \frac{dQ}{Q} = \int \frac{dTC}{TC} + \ln c$. Интегрируя, приходим к соотношению $\ln |Q|^{1/\gamma} = \ln |TC| + \ln c$, потенцируя которое получаем искомую функцию издержек производства $TC(Q) = cQ^{1/\gamma}$. Константу можно определить, рассчитав издержки производства единичного объема продукции: $c = TC(1)$.

Таким образом, для однородной степени γ производственной функции (1.42) функция издержек имеет степенной вид:

$$TC(Q) = TC(1) Q^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (2.104)$$

Справедливо и обратное утверждение. Пусть функция издержек производства имеет степенной вид (2.104). В силу линейной однородности функции издержек относительно затрат факторов можно выписать следующую цепочку равенств:

$$TC(\alpha K, \alpha L) = TC(1) f(\alpha K, \alpha L)^{\frac{1}{\gamma}} = \alpha TC(K,L) = \alpha TC(1) f(K,L)^{\frac{1}{\gamma}},$$

а значит,

$$f(\alpha K, \alpha L) = \alpha^{\gamma} f(K,L).$$

Таким образом, при степенной функции издержек (2.104) производственная функция является однородной соответствующей степени γ (1.42).

Итак, функция издержек имеет степенной вид (2.104) тогда и только тогда, когда производственная функция является однородной соответствующей степени γ (1.42) [3]. Отметим, что при этом функции предельных и средних издержек производства соответственно имеют вид:

$$MC(Q) = \frac{TC(1)}{\gamma} Q^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}, AC(Q) = TC(1) Q^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}. \quad (2.105)$$

Характерные графики функций общих, средних и предельных издержек производства при различном характере от его масштаба показаны на рис. 2.49, 2.52, 2.53.

Если издержки производства имеют степенной вид (2.104), то аналогично будут выглядеть и функции условного спроса на его факторы (2.84):

$$K = K(1)Q^{\frac{1}{\gamma}}, L = L(1)Q^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Это становится очевидным, если применить лемму Шепарда (2.93)

$$K = \frac{\partial TC(Q,p_K,p_L)}{\partial p_K} = \frac{\partial TC(1,p_K,p_L)}{\partial p_K}Q^{\frac{1}{\gamma}},$$
$$L = \frac{\partial TC(Q,p_K,p_L)}{\partial p_L} = \frac{\partial TC(1,p_K,p_L)}{\partial p_L}Q^{\frac{1}{\gamma}}$$

и учесть, что, поскольку $TC(1,p_K,p_L) = p_K K(1,p_K,p_L) + p_L L(1,p_K,p_L)$, постольку $\frac{\partial TC(1,p_K,p_L)}{\partial p_K} = K(1,p_K,p_L)$, $\frac{\partial TC(1,p_K,p_L)}{\partial p_L} = L(1,p_K,p_L)$.

В качестве примера, выведем функцию издержек производства для технологии Кобба–Дугласа $Q = K^\alpha L^\beta$, подставляя функции условного спроса (2.87) в выражение себестоимости продукции (2.96):

$$TC = (\alpha+\beta)\left(\frac{p_K}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\left(\frac{p_L}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}. (2.106)$$

Производственная функция Кобба-Дугласа $Q = K^\alpha L^\beta$ является однородной степени $\gamma = \alpha + \beta$, и для нее характерна степенная функция издержек (2.104).

Соответственно, средние и предельные издержки производства будут описываться следующими функциональными зависимостями:

$$AC = (\alpha+\beta)\left(\frac{p_K}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\left(\frac{p_L}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}Q^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}, (2.107)$$

$$MC = \left(\frac{p_K}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\left(\frac{p_L}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}Q^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} : (2.108)$$

для которых справедливо соотношение (2.103).

В частности, для производственной функции $Q = K^{¼}L^{½}$ функции общих, предельных и средних издержек соответственно имеют вид:

$$TC = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{p_K p_L^2 Q^4},$$
$$MC = \sqrt[3]{16 p_K p_L^2 Q},$$
$$AC = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{p_K p_L^2 Q}.$$

Выведем теперь функцию издержек для леонтьевской технологии. Рассматривая в выражении себестоимости продукции (2.90) затраты факторов производства как функции условного спроса (2.89), получаем, что для производственной функции леонтьевского типа функция издержек предприятия как зависимость между денежными расходами и выпускаемым объемом продукции будет линейной:

$$TC = Q(\alpha p_K + \beta p_L). (2.109)$$

При этом предельные и средние издержки предприятия не зависят от объема производства, а лишь от цен на ресурсы:

$$MC = AC = \alpha p_K + \beta p_L = TC(1,p_K,p_L).$$

Выведем теперь функцию долгосрочных издержек производства для линейной производственной функции $Q = \alpha L + \beta K$. Будем опираться на проанализированные выше три возможных случая (рис. 2.38-2.40), в каждом из которых будут иметь место свои выражения для условного спроса на факторы производства.

В первом случае (рис. 2.38), когда $\frac{p_L}{\alpha} > \frac{p_K}{\beta}$, $L = 0$, $K = \frac{Q}{\beta}$. Значит, $TC = p_K K = \frac{Q}{\beta}p_K$.

Во втором случае (рис. 2.39), когда $\frac{p_L}{\alpha} < \frac{p_K}{\beta}$, $K = 0$, $L = \frac{Q}{\alpha}$, следовательно, $TC = p_L L = \frac{Q}{\alpha}p_L$.

Наконец, в третьем случае (рис. 2.40), если $\frac{p_L}{\alpha} = \frac{p_K}{\beta}$, то L может принимать любые значения между 0 и $\frac{Q}{\alpha}$, соответственно, K – между $\frac{Q}{\beta}$ и 0. Поэтому величина издержек может быть определена как в точке $L = 0$, $K = \frac{Q}{\beta}$, так и в точке $K = 0$, $L = \frac{Q}{\alpha}$: $TC = \frac{Q}{\beta}p_K = \frac{Q}{\alpha}p_L$.

Таким образом, для линейной технологии производства, когда его факторы являются совершенными субститутами, получаем следующее выражение для издержек производства:

$$TC = p_L L^h + p_K K^h = p_L t\frac{Q}{\alpha} + p_K(1-t)\frac{Q}{\beta} = Q\left(t\frac{p_L}{\alpha} + (1-t)\frac{p_K}{\beta}\right), где \begin{cases} t = 1 при \frac{p_L}{\alpha} < \frac{p_K}{\beta}, \\ t = 0 при \frac{p_K}{\beta} < \frac{p_L}{\alpha}, \\ t \in [0,1] при \frac{p_L}{\alpha} = \frac{p_K}{\beta}; \end{cases}$$

или

$$TC = \begin{cases} Q\frac{p_L}{\alpha}, если \frac{p_L}{\alpha} < \frac{p_K}{\beta}, \\ Q\frac{p_K}{\beta}, если \frac{p_K}{\beta} < \frac{p_L}{\alpha}, \\ Q\frac{p_L}{\alpha} = Q\frac{p_K}{\beta}, если \frac{p_L}{\alpha} = \frac{p_K}{\beta}; \end{cases}$$

которое можно записать в следующей форме:

$$TC = Q \bullet \min\left\{\frac{p_L}{\alpha}, \frac{p_K}{\beta}\right\}. (2.110)$$

При этом, как и для леонтьевской технологии, в силу постоянной отдачи от масштаба производства предельные и средние издержки предприятия будут являться постоянными величинами и совпадать с издержками производства единичного объема продукции:

$$MC = AC = TC(1, p_K, p_L) = \min\left\{\frac{p_L}{\alpha}, \frac{p_K}{\beta}\right\}.$$

Технологии производства в условиях взаимозаменяемых и взаимодополняемых факторов производства характеризуются постоянной отдачей от масштаба, т.е. являются однородными первой степени $(\gamma = 1)$, и для них справедливы общий вид функции издержек (2.104), а также соотношение между средними и предельными издержками производства (2.103).

В силу однородности нулевой степени условного спроса (2.85), функция издержек является однородной первой степени по ценам факторов производства:

$$TC(tp_K, tp_L, Q) = tp_K K^h(tp_K, tp_L, Q) + tp_L L^h(tp_K, tp_L, Q) = tp_K K^h(p_K, p_L, Q) + tp_L L^h(p_K, p_L, Q) = tTC(p_K, p_L, Q), t$$

При этом важным свойством функции издержек производства $TC(p_L, p_K, Q)$ является ее вогнутость по ценам факторов производства [4] p_L и p_K.

Пусть комбинация факторов производства (K, L) является решением задачи связанной минимизации издержек (2.78) при ценах на факторы производства p_L^3 и p_K^3. Другими словами, $\min TC\left(p_L^3, p_K^3, Q\right) = p_L^3 L + p_K^3 K$ при ограничении $Q(K, L) \geq \overline{Q}$. Положим, что вектор цен на факторы производства $p_3 = \left(p_L^3, p_K^3\right)$ представляет собой линейную комбинацию некоторых векторов $p_1 = \left(p_L^1, p_K^1\right)$ и $p_2 = \left(p_L^2, p_K^2\right)$: $p_3 = \left(p_L^3, p_K^3\right) = \left(\lambda p_L^1 + (1-\lambda)p_L^2, \lambda p_K^1 + (1-\lambda)p_K^2\right) = \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2, \lambda \in [0,1]$. Тогда имеет место следующее соотношение:

$$TC\left(p_L^3, p_K^3, \overline{Q}\right) = p_L^3 L + p_K^3 K = \lambda p_L^1 L + (1-\lambda)p_L^2 L + \lambda p_K^1 K + (1-\lambda)p_K^2 K = \lambda\left(p_L^1 L + p_K^1 K\right) + (1-\lambda)\left(p_L^2 L + p_K^2 K\right).$$

Заметим, что комбинация факторов производства (K, L), дающая минимальное значение общих издержек производства заданного объема продукции $\overline{Q}$ при ценах на факторы производства p_L^3 и p_K^3, не является оптимальной с точки зрения минимизации издержек при ценах труда и капитала p_L^1 и p_K^1, а также при p_L^2 и p_K^2:

$$p_L^1 L + p_K^1 K \geq TC\left(p_L^1, p_K^1, \overline{Q}\right) up_L^2 L + p_K^2 K \geq TC\left(p_L^2, p_K^2, \overline{Q}\right)$$

Тем самым, приходим к неравенству Йенсена (1.12), характеризующему вогнутую зависимость общих издержек производства $TC = TC(p_L, p_K, Q)$ от цен факторов производства p_L и p_K (рис. 2.44):

$$TC\left(\lambda p_L^1 + (1-\lambda)p_L^2, \lambda\alpha p_K^1 + (1-\lambda)p_K^2, \overline{Q}\right) \geq \lambda TC\left(p_L^1, p_K^1, \overline{Q}\right) + (1-\lambda)TC\left(p_L^2, p_K^2, \overline{Q}\right),$$

или в векторной форме:

$$TC\left(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2, \overline{Q}\right) \geq \lambda TC\left(p_1, \overline{Q}\right) + (1-\lambda)TC\left(p_2, \overline{Q}\right).$$

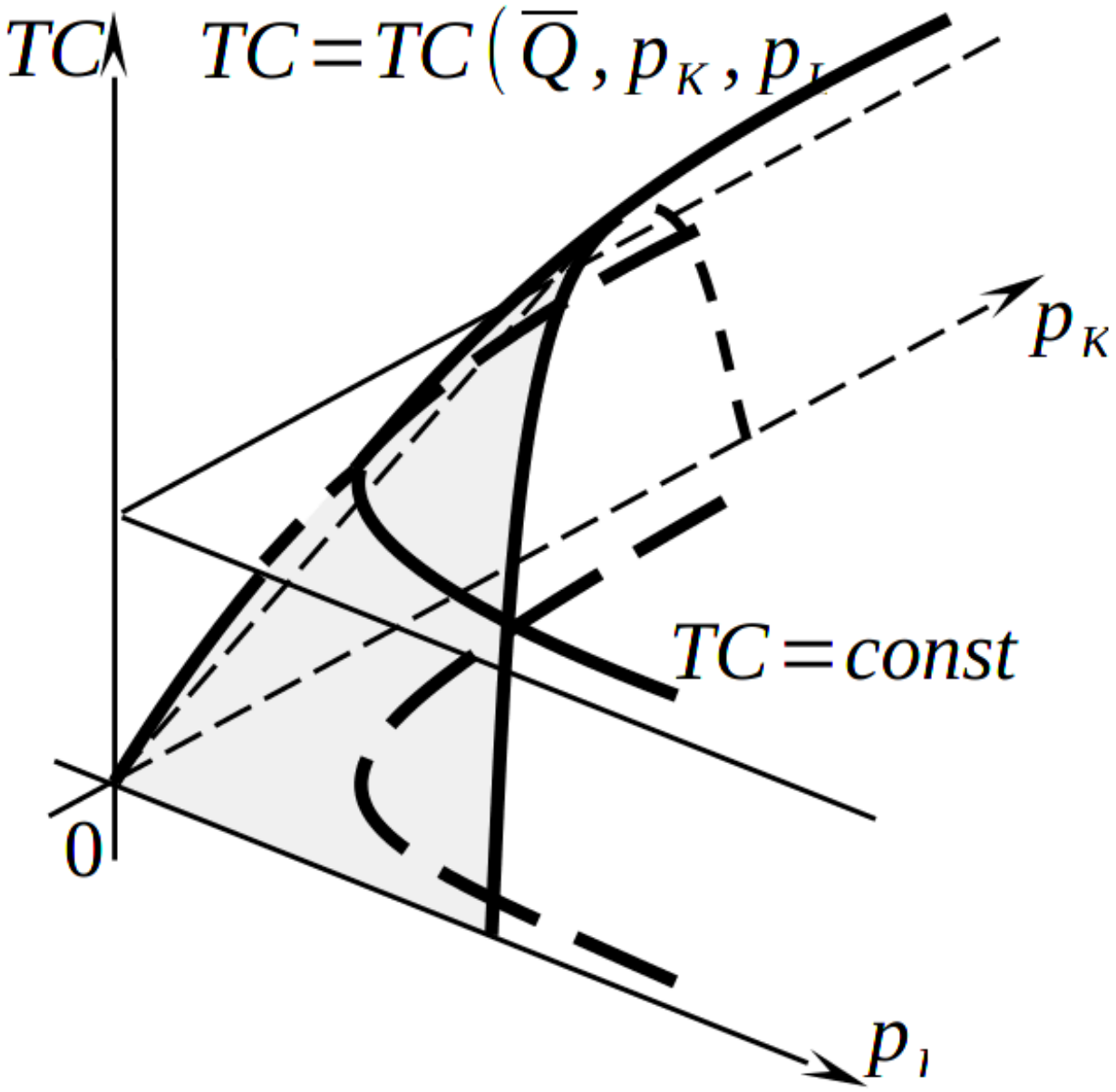


Рисунок 2.44. Вогнутость функции издержек по ценам факторов производства

На рис. 2.45 изображено сечение поверхности издержек вертикальной плоскостью, соответствующей фиксированной цене капитала, т.е. график издержек производства как функция цены труда. При снижении ставки заработной платы $\left(p_L^2 < p_L^1\right)$ и росте его покупаемого количества $(L_1 > L_2)$ угловой коэффициент касательной к данному графику издержек увеличивается: $tg\beta > tg\alpha$, поскольку по лемме Шепарда (2.93) $tg\alpha = \frac{\partial TC}{\partial p_L}\left(p_L^1\right) = L_1$, $tg\beta = \frac{\partial TC}{\partial p_L}\left(p_L^2\right) = L_2$.

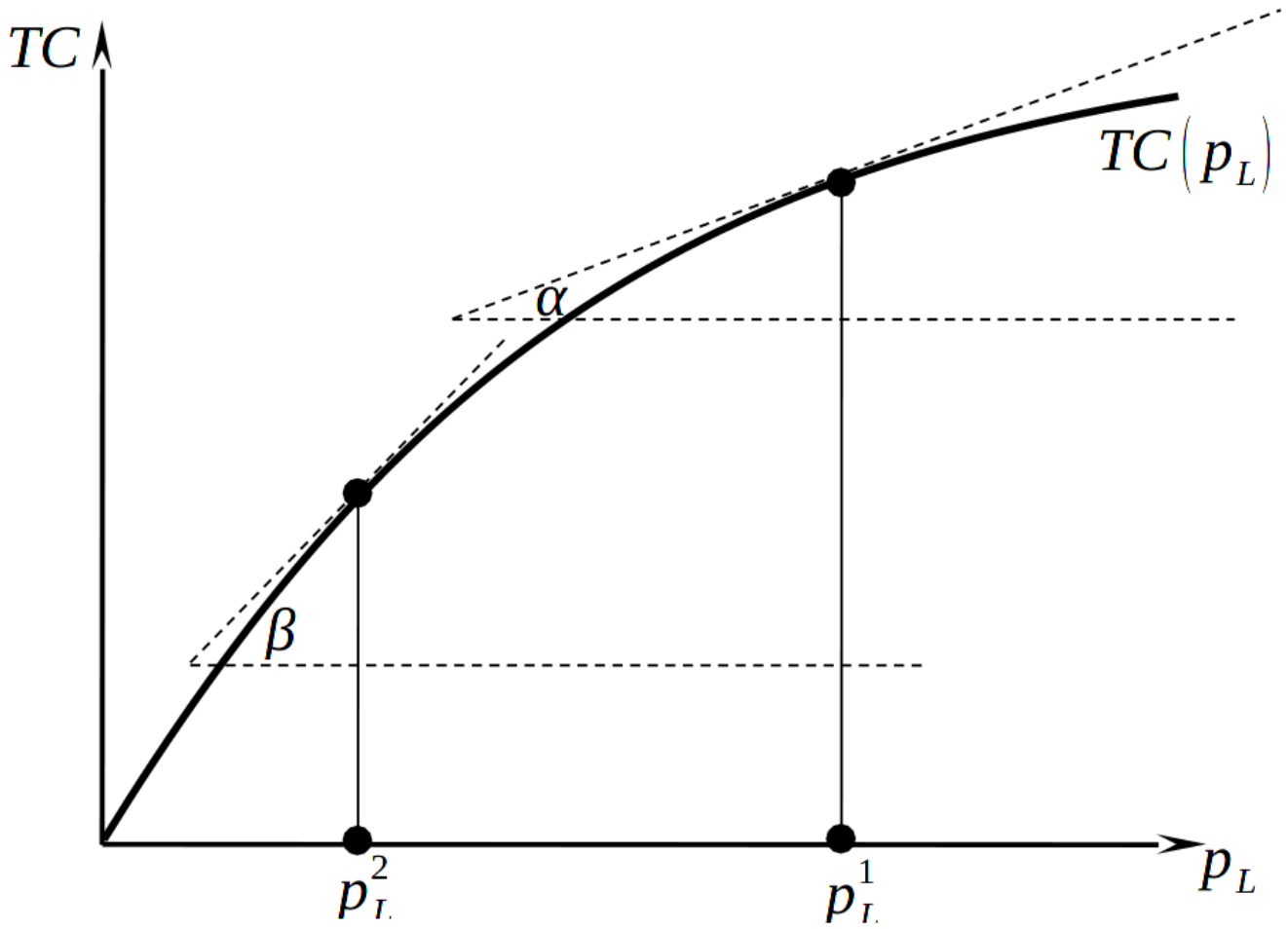


Рисунок 2.45. Вогнутость функции издержек по ценам факторов производства

На рис. 2.46 изображена изокоста $\left\{(p_L, p_K) : TC(p_L, p_K) = \overline{TC}\right\}$, соответствующая минимальным общим издержкам выпуска одной единицы продукции этой фирмы в пространстве цен на факторы производства p_L и p_K. Поскольку в силу леммы Шепарда (2.93) $\frac{\partial TC(p)}{\partial p_K} = K(p)$ и $\frac{\partial TC(p)}{\partial p_L} = L(p)$, постольку $grad(TC(p)) = (L(p); K(p))$.

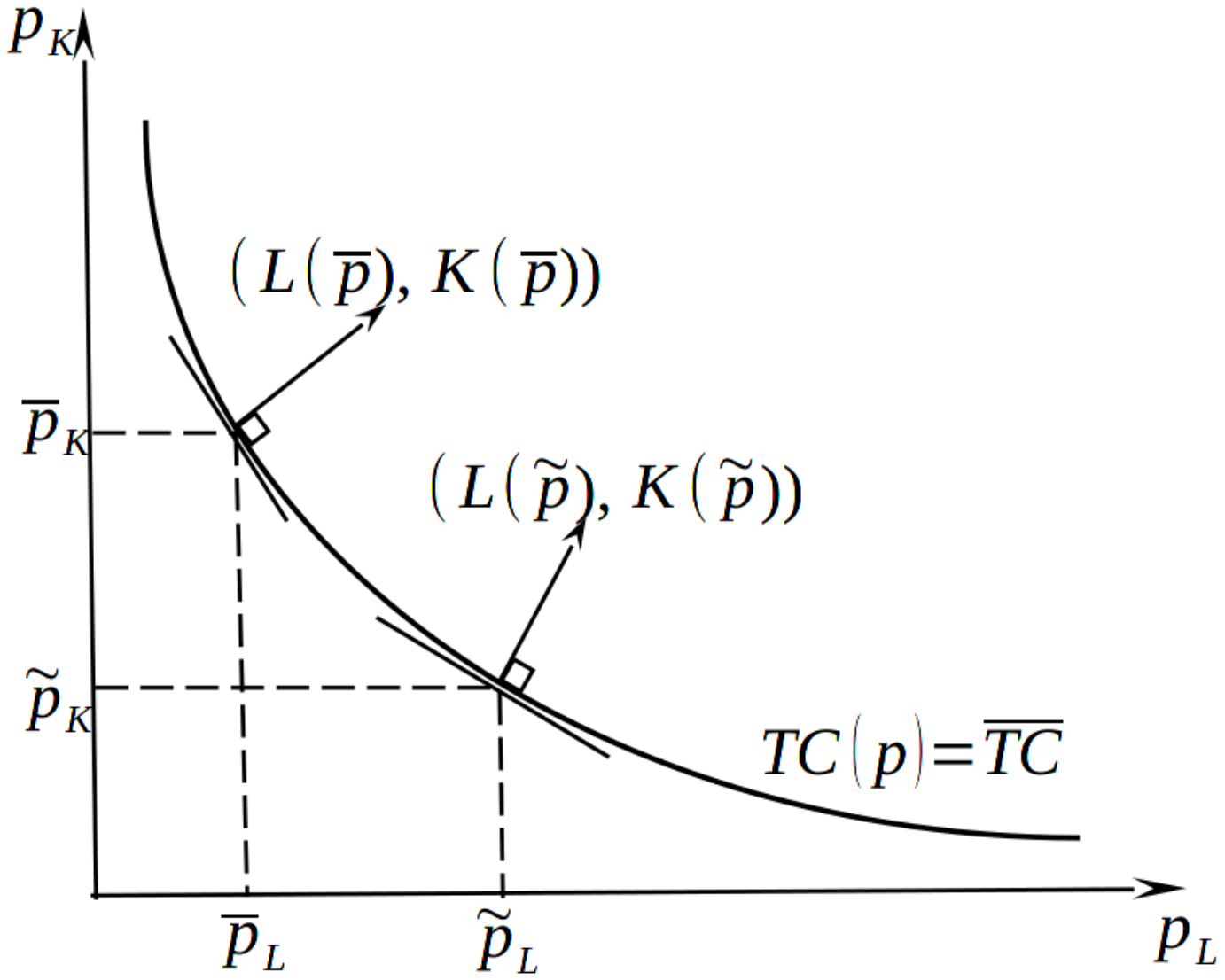


Рисунок 2.46. Изокоста в пространстве цен на факторы производства

Изокоста представляет собой убывающую функцию, так как с ростом ставки заработной платы процентная ставка на капитал должна снижаться, чтобы минимальные издержки выпуска одной единицы продукции оставались неизменными. Поскольку выше была доказана вогнутость функции общих издержек производства $TC(p_L, p_K)$ по ценам факторов производства p_L и p_K, то из этого следует вывод, что она также является квазивогнутой по этим переменным, тем самым все изокосты являются выпуклыми к началу координат в пространстве цен на ресурсы. Поскольку градиент функции $TC(p)$ в точке $(\overline{p}_L, \overline{p}_K)$, являющийся нормалью к изокосте в этой точке, в точности равен вектору $(L(\overline{p}), K(\overline{p}))$, постольку при движении вдоль изокосты к более высокой ставке заработной платы отношение $L(p)/K(p)$ снижается.

Обратим внимание на то, что все приведенные выше примеры функций издержек для различных типов технологии производства (2.106), (2.109), (2.110) иллюстрируют данное свойство выпуклости функции издержек по ценам факторов производства. Данные функции как зависимости от цен факторов являются однородными первой степени (2.111), при этом издержки производства при технологии Кобба-Дугласа имеют степенной вид (2.106), при линейной технологии являются кусочно-линейной (2.110), а при леонтьевской технологии – линейной (2.109) функциями. Очевидно, что соответствующие им матрицы Гессе будут отрицательно полуопределены.

В заключение анализа задачи связанной минимизации издержек отметим ряд примечательных свойств, присущих функциям условного спроса на факторы производства.

Функции условного спроса на труд и капитал являются невозрастающими по ценам соответствующих факторов – труда и капитала:

$$\frac{\partial K^h(p_K,p_L,Q)}{\partial p_K} \leq 0, \frac{\partial L^h(p_K,p_L,Q)}{\partial p_L} \leq 0.$$

Действительно, если функция издержек является дважды дифференцируемой, то ее «чистые» частные производные второго порядка, которые по лемме Шепарда (2.93) представляют собой функции условного спроса на факторы производства, будут неположительными, ведь в силу вогнутости функции издержек по ценам факторов ее матрица Гессе должна быть отрицательно полуопределенной:

$$\frac{\partial^2 TC(p_K,p_L,Q)}{\partial p_K^2} = \frac{\partial K^h(p_K,p_L,Q)}{\partial p_K} \leq 0, \frac{\partial^2 TC(p_K,p_L,Q)}{\partial p_L^2} = \frac{\partial L^h(p_K,p_L,Q)}{\partial p_L} \leq 0.$$

Во внутренних оптимумах при строгой выпуклости изоквант к началу координат, когда функция издержек строго вогнута по ценам факторов, а значит, ее матрица Гессе является отрицательно определенной, условный спрос на труд и капитал является убывающей функцией цены соответствующего фактора – труда и капитала:

$$\frac{\partial K^h(p_K,p_L,Q)}{\partial p_K} < 0, \frac{\partial L^h(p_K,p_L,Q)}{\partial p_L} < 0.$$

Наконец, следует отметить, что, если функция издержек производства является дважды непрерывно дифференцируемой, то перекрестные эффекты замещения равны между собой:

$$\frac{\partial K^h(p_K,p_L,Q)}{\partial p_L} = \frac{\partial L^h(p_K,p_L,Q)}{\partial p_K}.$$

Действительно, по лемме Шепарда (2.93)

$$\frac{\partial^2 TC(p_K,p_L,Q)}{\partial p_K \partial p_L} = \frac{\partial K^h(p_K,p_L,Q)}{\partial p_L}, \frac{\partial^2 TC(p_K,p_L,Q)}{\partial p_L \partial p_K} = \frac{\partial L^h(p_K,p_L,Q)}{\partial p_K}.$$

При этом по теореме Шварца, если вторые частные производные функции издержек производства непрерывны, то они равны между собой, т.е. значения непрерывных вторых частных производных не зависят от порядка дифференцирования:

$$\frac{\partial^2 TC(p_K,p_L,Q)}{\partial p_K \partial p_L} = \frac{\partial^2 TC(p_K,p_L,Q)}{\partial p_L \partial p_K},$$

что в свою очередь подразумевает симметричность перекрестных эффектов замещения.

---

1. Если предположить, что функция издержек является дифференцируемой, то можно утверждать, что если технология характеризуется возрастающей отдачей от масштаба, то средние издержки превышают предельные. Действительно, продифференцируем средние издержки производства по объему выпускаемой продукции: $\frac{\partial AC}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{TC}{y}\right) = \frac{MC-AC}{y}$, т.е $MC < AC$ тогда и только тогда, когда $\frac{\partial AC}{\partial y} < 0$, а значит, средние издержки – убывающая функция объема производства. Справедливы и аналогичные соотношения при остальных типах отдачи от масштаба: $MC > AC$, если и только если $\frac{\partial AC}{\partial y} > 0$, т.е. средние издержки –возрастающая функция объема выпускаемой продукции; наконец, равенство AC и MC эквивалентно равенству нулю производной, т.е. постоянству средних издержек и отдачи от масштаба. ↩

2. Анфилатов В.С., Емельянов А.А., Кукушкин А.А. Системный анализ в управлении. – М.: Финансы и статистика, 2002; Баранцев Р.Г. Синергетика в современном естествознании. – М.: Едиториал УРСС, 2003; Управление организацией / Под ред. Поршнева А.Г., Румянцевой З.П., Саломатина Н.А. 2-е изд. – М.: Инфра-М, 2002. ↩

3. Лазарев И.А. Технология с постоянной отдачей от масштаба производства в экономико-математических моделях // Материалы конференции «Ломоносов–2003». – М.: ТЕИС, 2004. ↩

4. Ср.: Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. – New York, Oxford: Oxford university press, 1995, p. 60. ↩

2.4. Максимизация прибыли и предложение продукции конкурентной фирмой

Специально подчеркнем, что в данной главе нами анализируется поведение фирмы в условиях совершенной конкуренции. Одним из важнейших положений модели совершенной конкуренции является экзогенность цен для экономических агентов. В условиях несовершенной конкуренции фирмы могут использовать рыночную власть для того, чтобы влиять на уровень цен.

Итак, в условиях совершенной конкуренции бесконечно большое число предельно малых по величине производителей и потребителей в силу ничтожных размеров оказываются не в состоянии влиять на ценовые параметры рынка. Субъектов такой рыночной структуры называют "ценополучателями". Данная рыночная структура характерна для отраслей с однородной, стандартной продукцией, в которых фирмы действуют в условиях полной определенности, то есть в их распоряжении должна быть полная информация о рынке. Необходимым условием возможности отнесения рынка к совершенно конкурентным является отсутствие барьеров для входа и свобода выхода фирм из отрасли, абсолютная мобильность ресурсов.

В условиях совершенной конкуренции, когда ни одна из фирм в отдельности оказывается не в состоянии повлиять на цену выпускаемой продукции, устанавливаемую механизмом отраслевого равновесия спроса и предложения, средний доход равен предельному и совпадает с уровнем рыночной цены: $MR = AR = p$.

Формально ситуацию ситуацию совершенной конкуренции как на рынке готовой продукции, так и на рынке труда можно описать набором нулевых производных функций – спроса на продукцию предприятия по объему его производства, предложения труда и капитала для отдельной фирмы по объему его трудозатрат и основных фондов:

$$\frac{\partial P}{\partial Q} = \frac{\partial p_L}{\partial L} = \frac{\partial p_L}{\partial K} = \frac{\partial p_K}{\partial K} = \frac{\partial p_K}{\partial L} = 0. \qquad (2.112)$$

В современной экономической теории часто принимается предпосылка о том, что целью деятельности фирмы является максимизация прибыли, задаваемой как разность между общим доходом ($TR = pQ$, где p – цена готовой продукции) и общими издержками: $PR = TR - TC$. С учетом наличия внутризаводского оборота продукции прибыль предприятия можно трактовать как стоимость его чистого выпуска:

$$PR = \sum_{j=1}^{l} p_j \left(q_j - x_j\right) = \sum_{j=1}^{l} p_j y_j,$$

где x_j – объем используемого -го ресурса, q_j – объем производства j-го товара, $y_j = q_j - x_j^p$ – чистый выпуск j-го товара. Для анализируемой нами монопродуктовой фирмы чистый выпуск производимого ею вида продукции будет положительным, а чистых выпуск всех остальных товаров, которые выступают в роли ресурсов, будет равен объему их использования, взятому со знаком минус.

В дальнейшем, анализируя предприятие в долгосрочном аспекте, будем исходить из того, что прибыль является неотрицательной величиной: $PR \geq 0$, ведь в противном случае фирма всегда сможет выйти из бизнеса, избежав тем самым убытков.

Задача максимизации прибыли может трактоваться двояко: как поиск оптимальной комбинации факторов производства либо оптимального объема выпускаемой продукции, соответствующих наибольшему превышению выручки над издержками производства. решаться с применением процедур как одношаговой (одноэтапной), так и двухшаговой (двухэтапной) оптимизации. В первом случае, когда прибыль рассматривается как функция объемов используемых факторов производства, мы имеем дело с одноэтапной постановкой данной задачи. По-другому такая постановка задачи называется максимизацией прибыли на рынках факторов производства. Во втором случае прибыль рассматривается как функция объема производства, и задача поиска наибольшей прибыли рассматривается в двухэтапной постановке, когда предварительным этапом для решения данной задачи становится вывод функции издержек от количества продукции на основе решения задачи их минимизации при ограничении по выпуску. В такой трактовке рассматриваемой задачи максимизация прибыли предполагает минимизацию издержек производства. Действительно, при каждом, данном объеме производства, если комбинация его факторов не соответствует минимуму издержек, то прибыль фирмы всегда можно увеличить, оптимизируя сочетание факторов производства и сокращая, тем самым, производственные издержки. Оптимизация финансовых результатов фирмы может быть формально разложена на два этапа – минимизацию издержек при каждом данном объеме производства и выбор количества выпускаемой продукции, соответствующего максимально возможной прибыли. Часто такая постановка задачи называется максимизацией прибыли на рынке продукта.

Будем рассматривать одноэтапную постановку задачи максимизации прибыли (рис. 2.47):

$$\max_{K,L} PR = \max_{K,L} \{pQ(K,L) - p_K K - p_L L\},$$

где K, L и $Q = Q(K,L)$ – соответственно затраты факторов и объем выпускаемой продукции как значение производственной функции, характеризующей технологические процессы на предприятии.

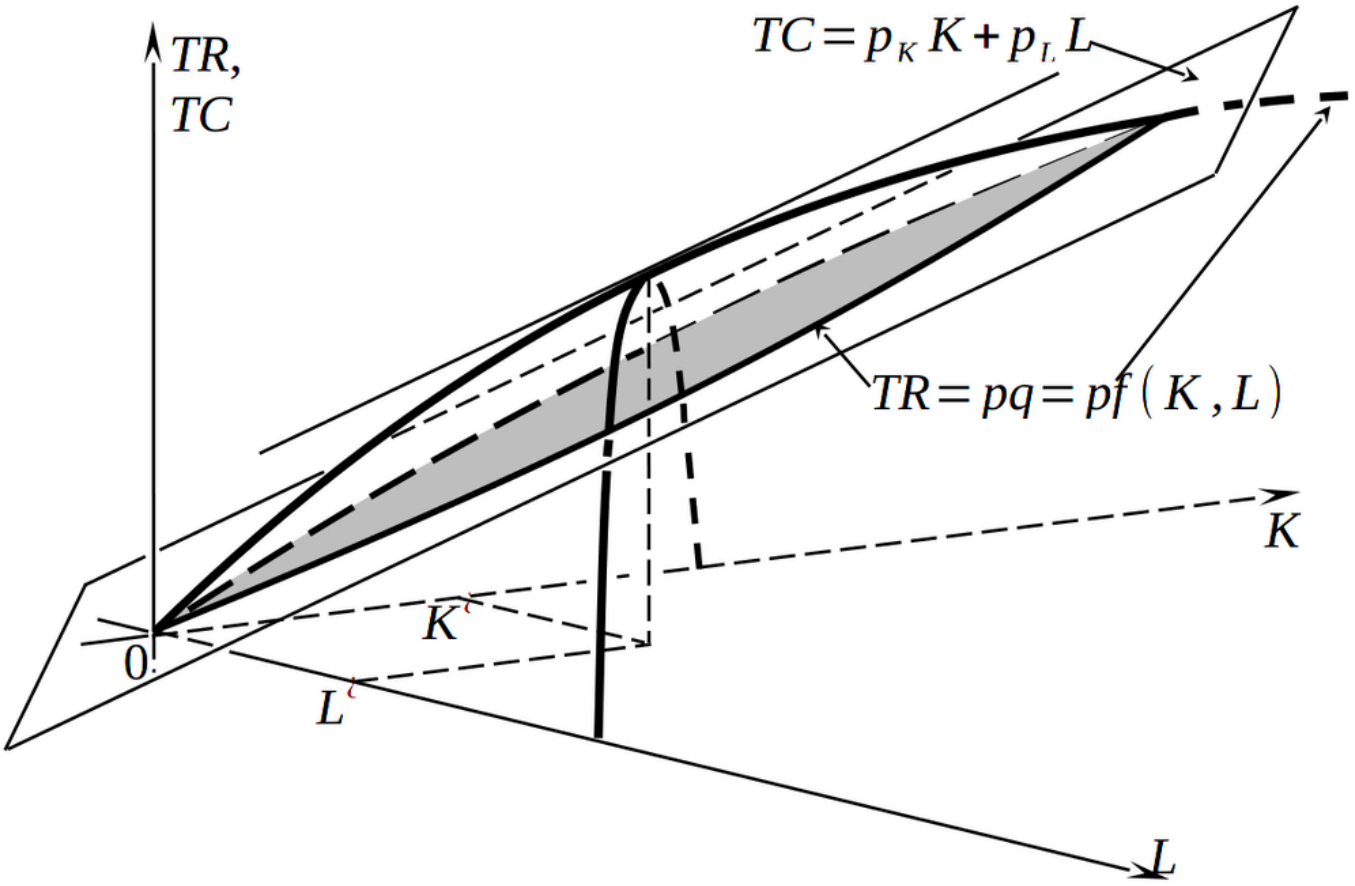


Рисунок 2.47. Пространственная иллюстрация решения задачи максимизации прибыли в одноэтапной постановке

В условиях экзогенных цен, когда ценовые параметры для предприятий заданы рынками продуктов и факторов производства, издержки производства будут линейной, а значит, вогнутой функцией, поэтому строгая вогнутость функции прибыли будет эквивалентна строгой вогнутости функции выручки, которая, в свою очередь, будет иметь место, если строго вогнутой является производственная функция. Это легко проверяется с помощью неравенства Йенсена (1.13).

Очевидно, что в условиях убывающей отдачи от масштаба исключается возможность “асимптотически конусообразной” (на бесконечности) поверхности производственной функции:

$$\forall x \in R_{+}{}^{l+m+1} \not\exists \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{f(\alpha x)}{\alpha \| x \|}, \alpha \in R. \quad (2.114)$$

Если не выполняется предположение (2.114) и для какого-то луча αx, $\alpha \in R$, $\alpha > 0$, существует $\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{f(\alpha x)}{\alpha \| x \|} = R$, $R \in R$, то в соответствии со свойством (1.37) строгой вогнутости на бесконечности угловой коэффициент секущих графика производственной функции вдоль данного луча мог бы стремиться к некоторой постоянной величине *R*. Предпосылка (2.114) означает, что тангенс угла наклона секущей графика технологии производства, а значит, при параметрическом характере цен и функции выручки может быть любым, ведь $\forall x \in R_{+}{}^{l}$ и $\forall R \in R \; \exists \varepsilon > 0 : \forall h(\varepsilon) \in R \exists \alpha > h(\varepsilon) \left| \frac{f(\alpha x)}{\alpha \| x \|} - R \right| > \varepsilon$. В силу предпосылки об эффективности производства технология монотонно возрастает, поэтому предметом исследования являются положительные значения *R*. Поскольку, в свете свойства (1.37), угловой коэффициент секущей графика строго вогнутой функции с ростом затрат факторов хозяйственной деятельности монотонно убывает, условие (2.114) гарантирует, что на бесконечности для произвольного луча αx, $\alpha \in R$, $\alpha > 0$, исходящего из начала координат и проходящего в множестве доступных факторов производства *X*, каким бы малым не было выбрано число *R*, будет существовать секущая графика выручки, одним из своих концов так же имеющая нулевую точку, с угловым коэффициентом меньше *R*:

$$\frac{f(\alpha x)}{\alpha \| x \|} < R - \varepsilon < R.$$

Тангенс угла наклона секущей графика производственной функции, исходящей из нуля, может быть произвольно малым. Таким образом, поверхности производственной функции и выручки от реализации, обладающие свойством (2.114), пересекают луч с любым ненулевым угловым коэффициентом, исходящий из начала координат и имеющий общие точки соответственно с технологическим множеством либо множеством точек, лежащих под графиком валового дохода.

Итак, в условиях убывающей отдачи от масштаба производства, когда объем выпуска и выручки увеличивается медленнее, нежели линейные, однородные издержки (2.96), возможна двоякая ситуация. Если провести лучи из начала координат в неотрицательном ортанте, проходящие по плоскости издержек, то они обязательно либо вторично пересекут график выручки (рис. 2.47), либо, начиная с первой, предельно малой единицы затраченных ресурсов, будут лежать всюду выше графика валового дохода, и предприятие при первой же единице произведенной продукции начинает нести убытки. Отметим, что первая точка пересечения графиков выручки и издержек, очевидно, находится в начале координат (рис. 2.47), поскольку в силу отсутствия «рога изобилия» при отсутствии затрат факторов не производится никакой продукции. Далее будет показано, что

случай, когда график выручки расположен всюду выше какого-то из лучей, в силу невозможности асимптотической конусообразности первого (2.114), следует исключить из рассмотрения.

Во втором случае, когда пересечение графиков наблюдается только в нуле, т.е. график издержек лежит всюду выше графика валового дохода, существует тривиальное решение задачи максимизации прибыли – отказ от хозяйственной деятельности, что позволяет избежать убытков, которые будут иметь место при любой ненулевой используемой комбинации факторов производства.

Остановимся на первом случае, когда в силу убывания отдачи от масштаба производства график производственной функции будет лежать выше отрезка, проведенного из начала координат до пересечения с ним. Рассмотрим множество $\widehat{X}$ комбинаций факторов производства, которому соответствует пересечение областей величин издержек и дохода, когда хозяйственная деятельность ведется с нулевой прибылью. Очевидно, что $0 \in \widehat{X}$.

Проведем лучи из начала координат через каждый набор хозяйственных ресурсов $\widehat{x}$ из множества $\widehat{X}$. Нулевая комбинация факторов производства и другая их корзина, соответствующая нулевой прибыли $\widehat{x}$, определяют на данных лучах сегменты, внутренние точки которых $\widetilde{x}$ при $\alpha \in [0,1]$, $\alpha \in R$, удовлетворяют соотношению $\widetilde{x} = \alpha\widehat{x}$. При затратах факторов, соответствующих внутренним точкам данного отрезка, прибыль будет положительной; на его концах – в начале координат и во второй, ненулевой комбинации ресурсов, задающей точку пересечения плоскости издержек производства с графиком выручки $\widehat{x}$ – прибыль будет нулевой; а далее от начала координат вдоль луча – отрицательной.

Рассмотрим множество $\widetilde{X}$ точек данных отрезков. Оно является замкнутым как дополнение к открытому множеству $\overline{X}$ комбинаций факторов производства $\overline{x} = \alpha\widehat{x}$, $\alpha \in R$, $\alpha > 1$, которые входят в данное множество вместе со своей окрестностью [1].

Докажем теперь ограниченность множества $\widetilde{X}$. Для этого предположим обратное – что существует последовательность точек $\{\widehat{x}_n\}$ множества $\widehat{X}$ такая, что:

$$\forall R \in Ru \forall k \in N \exists n \geqslant k : \left\|\widehat{x}_n\right\| \geqslant R. \quad (2.115)$$

Обозначим через *L* множество лучей, исходящих из начала координат и лежащих в неотрицательном вещественном ортанте R_{+^l}. Зафиксируем произвольную гиперплоскость *G*, пересекающую координатные оси R_{+^l} и параллельную оси 0*Y*, которая, скажем, проходит через координатные орты единичной длины:

$$x_1 + \ldots + x_l = 1. \quad (2.116)$$

Ее сегмент, лежащий в неотрицательном ортанте действительных чисел R_{+^l}, будет представлять собой l-мерный симплекс. Каждой его точке $x^{'}$, которая представима в виде линейной комбинации координатных ортов (x_k) $x^{'} = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k x_k$ с единичной суммой коэффициентов $\lambda_k \geqslant 0 \left(\sum_{k=1}^{l} \lambda_k = 1\right)$, будет соответствовать один из лучей $l = \alpha x^{'} \in L$, $\alpha > 0$, $\alpha \in R$.

Множество лучей *L* можно рассматривать в качестве метрического пространства, если ввести в нем метрику, то есть расстояние между любыми двумя лучами $l_1 = \alpha x_1^{'}$ и $l_2 = \alpha x_2^{'}$, как длину отрезка $\rho\left(x_1^{'}, x_2^{'}\right)$, соединяющего точки $x_1^{'}$ и $x_2^{'}$ гиперплоскости *G*, принадлежащие этим лучам. Все три свойства метрики при этом, очевидно, выполняются: $\rho(l_1, l_2) = 0$ тогда и только тогда, когда l_1 и l_2 совпадают, то есть проходят через одну и ту же точку гиперплоскости *G*; метрика симметрична, то есть $\rho(l_1, l_2) = \rho(l_2, l_1)$; а также справедливо неравенство треугольника $\rho(l_1, l_2) + \rho(l_2, l_3) \geqslant \rho(l_1, l_3)$, где $l_3 = \alpha x_3^{'}$ – луч из множества *L*, проходящий через точку $x_3^{'}$ гиперплоскости *G*; поскольку то же справедливо для точек $x_1^{'}$, $x_2^{'}$ и $x_3^{'}$. ε-окрестность луча $l = \alpha x^{'}$ будет представлять собой конус, состоящий из лучей, проходящих через точки гиперплоскости *G*, расположенные в ε-окрестности точки $x^{'}$.

Итак, рассмотрим отображение φ, ставящее в соответствие каждому элементу множества точек гиперплоскости *G* один, единственный элемент множества лучей *L*. Данное отображение φ является непрерывным, поскольку для него выполняется условие Коши [2]: если выбрать окрестность некоторого луча $l = \alpha x^{'}$, $\alpha \in R$, $\alpha > 0$, имеющую произвольный радиус ε, то для всех точек *x*, лежащих в окрестности того же радиуса ε по отношению к точке $x^{'}$, соответствующие им лучи $l^{'} = \alpha x$, $\alpha \in R$, $\alpha > 0$, будут находиться в данной ε-окрестности луча *l*.

Множество точек гиперплоскости G внутри неотрицательного ортанта действительных чисел R_{+^l} замкнуто как пересечение соответствующих замкнутых множеств. Поскольку все координаты каждой из точек данного множества неотрицательны, в силу (2.116) можно сделать вывод, что $0 \leqslant x_j \leqslant 1, j = 1, \ldots, l$. Следовательно, $\rho(x_1, x_2) \leqslant \sqrt{l}$, где x_1 и x_2 – произвольные точки неотрицательного сегмента гиперплоскости *G*.

Поскольку данное множество имеет конечный диаметр, оно является ограниченным. Таким образом, как замкнутое и ограниченное множество действительных чисел, множество точек гиперплоскости *G*, лежащих внутри R_{+^l}, представляет собой метрический компакт.

Множество лучей *L* есть непрерывный образ компакта, следовательно, оно так же, как и его прообраз, представляет собой компакт [3]. Следовательно, в множестве лучей *L* каждое бесконечное множество имеет хотя бы одну предельную точку [4]. А значит, и последовательность лучей, каждый из которых содержит одну из точек анализируемой нами последовательности комбинаций факторов производства, обеспечивающих неотрицательную прибыль $\{\widehat{x}_n\}$, имеет в качестве предельной точки луч $\widetilde{l}$, в любой окрестности которого есть хотя бы один, а значит – бесконечно много лучей из множества *L*.

Допустим, что на данном луче $\widetilde{l}$ можно найти такую комбинацию факторов хозяйственной деятельности $\widehat{x}_0$, которой соответствуют равные значения валовой выручки и издержек, то есть нулевая прибыль. Но это будет означать, что у последовательности ресурсных наборов $\{\widehat{x}_n\}$ существует предел $\widehat{x}_0$: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists h(\varepsilon) \in N : \forall n > h(\varepsilon) \left\|\widehat{x}_n - \widehat{x}_0\right\| < \varepsilon$, чего по предположению (2.115) не может быть.

Полученное противоречие показывает, что на луче $\widetilde{l}$, как на предельной точке множества *L*, отсутствуют комбинации факторов производства, которым соответствовали бы равные значения выручки и издержек, или нулевая прибыль. Но существование такого луча, в свою очередь, противоречит доказанному выше утверждению о том, что график валовой выручки, который, по предположению (2.114), не может быть асимптотически конусообразным, в условиях убывающей отдачи от масштаба производства обязательно пересекает плоскость издержек.

Итак, данное противоречие доказывает невозможность существования неограниченной последовательности наборов факторов хозяйственной деятельности, при которых издержки не превосходят выручку (2.115).

Следовательно, множество комбинаций хозяйственных ресурсов, соответствующих неотрицательной прибыли, $\widetilde{X}$ является ограниченным. Кроме того, выше было обосновано, что оно является замкнутым. Таким образом, множество наборов факторов производства, обеспечивающих положительную или хотя бы нулевую прибыль, является компактным.

Издержки производства являются непрерывными как линейная функция. В силу соображений, изложенных во введении, будет разумным допустить также принадлежность производственной функции классу гладкости C^0. Следовательно, прибыль, как разница между выручкой – линейным преобразованием производственной функции в условиях параметрического характера цен – и издержками, также будет непрерывной функцией. Согласно "принципу компактности" Вейерштрасса [5], непрерывная действительнозначная функция, определенная на компактном множестве $\widetilde{X} \in R_{+^l}$, достигает на $\widetilde{X}$ максимального и минимального значения. Поэтому в какой-то внутренней точке рассмотренного выше компактного множества $\widetilde{X}$ прибыль будет достигать наибольшего значения.

Итак, в случае убывающей отдачи от масштаба производства, поскольку можно исключить возможность асимптотической конусообразности поверхности производственной функции (2.114), постольку задача максимизации прибыли имеет решение при любом изначальном соотношении между выручкой и издержками. В силу того, что вогнутости производственной функции при отсутствии "рога изобилия" достаточно для убывания отдачи от ее масштаба (1.38), задача максимизации прибыли будет обязательно разрешима при данной характеристике технологии предприятия.

Итак, строгая вогнутость производственной функции (1.12), а значит, убывающая отдача от масштаба производства (при отсутствии «рога изобилия») является достаточным условием максимизации прибыли (в одноэтапной постановке) [6].

Более того, если производственная функция является не только непрерывной, но и строго вогнутой, то оптимальная комбинация факторов производства $\widehat{x}$ является единственной.

Докажем единственность оптимальной комбинации факторов производства в задаче максимизации прибыли от противного. Пусть найдется другой, не равный полученной нами производственной комбинации $\widehat{x}$ набор благ $\check{x}$, который также является решением задачи максимизации прибыли. Допустимое множество *S* задачи максимизации прибыли – весь неотрицательный ортант действительных чисел – является выпуклым. Поэтому весь отрезок, соединяющий точки $\widehat{x}$, $\check{x}$ и состоящий из точек вида $x = \alpha\widehat{x} + (1-\alpha)\check{x}$, $\alpha \in (0,1)$, содержится в *S*.

Поскольку производственная функция является строго вогнутой, постольку:

$$PR(x) = TR(x) - TC(x) = pQ\big(\alpha\widehat{x} + (1-\alpha)\check{x}\big) - TC\big(\alpha\widehat{x} + (1-\alpha)\check{x}\big) = pQ\big(\alpha\widehat{x} + (1-\alpha)\check{x}\big) - \alpha TC\big(\widehat{x}\big) + (1-\alpha)\,TC($$

Но данное неравенство противоречит условию, гласящему, что $\widehat{x}$ и $\check{x}$ – решения задачи максимизации прибыли, т.е. оптимальные производственные наборы. Полученное противоречие показывает, что гипотеза о неединственности оптимального производственного набора является ложной. Следовательно, оптимальный производственный набор $\widehat{x}$ является единственным решением задачи максимизации прибыли.

Таким образом, доказав единственность оптимального производственного набора, мы показали, что локальный максимум в задаче максимизации прибыли совпадает с глобальным.

Как правило, производственная функция предполагается (дважды непрерывно) дифференцируемой по затратам факторов производства $\big(Q = Q(K,L) \in C^2\big)$. Тогда необходимое условие максимума функции прибыли предприятия в одноэтапной постановке (2.113), которая является дифференцируемой как линейный оператор, действующий на производственную функцию, представляет собой равенство нулю первой производной данной функции по объемам используемых факторов – труда и капитала:

$$\begin{cases} \frac{\partial PR(K,L)}{\partial L} = p\frac{\partial f(K,L)}{\partial L} + \frac{\partial p}{\partial L}f(K,L) - K\frac{\partial p_K}{\partial L} - w - \frac{\partial p_L}{\partial L}L = 0, (2.117) \\ \frac{\partial PR(K,L)}{\partial K} = p\frac{\partial f(K,L)}{\partial K} + \frac{\partial p}{\partial K}f(K,L) - r - \frac{\partial p_K}{\partial K}K - L\frac{\partial p_L}{\partial K} = 0. (2.118) \end{cases}$$

Сумма первых двух слагаемых в выражении (2.117) представляет собой производную общего дохода фирмы по количеству применяемого труда, или предельную доходность этого фактора производства, равную произведению предельного дохода предприятия на предельный продукт фактора:

$$MRP_L \equiv \frac{\partial TR}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}(pQ(K,L)) = \frac{\partial TR(Q)}{\partial Q}\frac{\partial Q(K,L)}{\partial L} = MR \bullet MP_L.$$

Аналогично для равенства (2.118):

$$MRP_K \equiv \frac{\partial TR}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}(pQ(K,L)) = \frac{\partial TR(Q)}{\partial Q}\frac{\partial Q(K,L)}{\partial K} = MR \bullet MP_K.$$

Сумма последних трех слагаемых в выражениях (2.117) – (2.118) представляют собой производные общих издержек фирмы по соответствующей переменной, или предельные издержки фактора производства:

$$MC_L \equiv \frac{\partial TC}{\partial L}, MC_K \equiv \frac{\partial TC}{\partial K}.$$

Таким образом, если прибыль при определенном объеме выпуска достигает максимума и существует ее производная при данном объеме производства, то:

$$\begin{cases} MRP_L = MC_L; \\ MRP_K = MC_K. \end{cases}$$

По три слагаемых в каждом из выражений (2.117) – (2.118), в силу предположений (2.112), равняются нулю:

$$\frac{\partial P}{\partial L} f(K,L) = \frac{\partial P}{\partial K} f(K,L) = \frac{\partial p_L}{\partial L} L = \frac{\partial p_K}{\partial K} K = K \frac{\partial p_K}{\partial L} = L \frac{\partial p_L}{\partial K} = 0.$$

Последние четыре равенства непосредственно следуют из (2.112), а первые два становятся очевидными, если расписать присутствующие в них производные, рассматривая соответствующие функции как композитные: $\frac{\partial P}{\partial L} = \frac{\partial P}{\partial Q} \frac{\partial Q(K,L)}{\partial L}$, $\frac{\partial P}{\partial K} = \frac{\partial P}{\partial Q} \frac{\partial Q(K,L)}{\partial K}$ и использовать свойство (2.112). Поэтому необходимое условие максимума функции прибыли представляет собой систему:

$$\begin{cases} p \bullet MP_L(K,L) = p_L, \\ p \bullet MP_K(K,L) = p_K, \end{cases} \text{или} \begin{cases} MP_L = \frac{p_L}{p}, \\ MP_K = \frac{p_K}{p}. \end{cases} (2.119)$$

Итак, экономический смысл необходимых условий экстремума (2.119) состоит в одновременном равенстве этих предельных продуктов соответственно реальной ставке заработной (p_L/p) и арендной (p_K/p) платы [7].

Итак, при дифференцируемости технологии производства необходимым условием максимизации прибыли в одноэтапной постановке (2.113) будет равенство стоимости предельных продуктов ценам факторов производства (2.119). Достаточным условием максимизации прибыли при экзогенном характере цен для хозяйствующих субъектов будет отрицательная определенности матрицы Гессе производственной функции $Q = Q(K,L) \in C^2$.

Объединенное необходимое условие максимума прибыли можно сформулировать так:

$$\frac{MP_L(K,L)}{p_L} = \frac{MP_K(K,L)}{p_K} = \frac{1}{p}, (2.120)$$

то есть отношение предельного продукта фактора производства к его цене должно быть одинаковым для всех ресурсов и равным обратной величине цены готовой продукции.

Вариацией решения задачи максимизации прибыли в одноэтапной постановке (2.113) – оптимальной комбинации факторов (K, L) – по параметрам этой задачи – ценам факторов производства и выпускаемого продукта (p_K, p_L, p) – являются функции производного спроса на труд и капитал:

$$K = K(p_K, p_L, p); L = L(p_K, p_L, p). (2.121)$$

Рассматривая данные функции производного спроса на факторы в качестве аргументов производственной функции, можно получить функцию предложения продукции предприятием:

$$Q = Q(K(p_K, p_L, p), L(p_K, p_L, p)) = Q(p_K, p_L, p). (2.122)$$

Доказав единственность оптимального производственного набора, мы обосновали существование функций производного спроса (2.121) и предложения продукции предприятием (2.122) как зависимостей соответственно между оптимальными величинами факторов и объема производства, с одной стороны, и ценами – на продукт и на факторы хозяйственной деятельности – с другой.

Выведем, например, функции производного спроса на труд и капитал при технологии $Q = K^\alpha L^\beta$. Из системы условий (2.119) имеем соответственно $p\beta K^\alpha L^{\beta-1} = p_L$, $p\alpha K^{\alpha-1} L^\beta = p_K$, откуда приходим к траектории развития фирмы (2.86). Таким образом, функции производного спроса на факторы хозяйственной деятельности будут выглядеть так (рис. 4.16):

$$L = \left(\frac{p\alpha^\alpha \beta^{1-\alpha}}{p_K^\alpha p_L^{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}, K = \left(\frac{p\alpha^{1-\beta} \beta^\beta}{p_K^{1-\beta} p_L^\beta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}. (2.123)$$

В частности, если $Q = K^{1/4} L^{1/2}$, то

$$K = \frac{p^4}{64 p_K^2 p_L^2}, L = \frac{p^4}{32 p_K p_L^3}. (2.124)$$

Достаточное условие максимума прибыли состоит в строгой вогнутости технологии производства, т.е. в отрицательной определенности соответствующей матрицы Гессе:

$$\begin{pmatrix} \frac{-3}{16} K_i^{\frac{-7}{4}} L_i^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{8} K_i^{\frac{-3}{4}} K_i^{\frac{-1}{2}} \\ \frac{1}{8} K_i^{\frac{-3}{4}} L_i^{\frac{-1}{2}} & \frac{-1}{4} K_i^{\frac{1}{4}} L_i^{\frac{-3}{2}} \end{pmatrix}.$$

Действительно, ее первый главный минор отрицателен:

$$\frac{-3}{16} K_i^{\frac{-7}{4}} L_i^{\frac{1}{2}} < 0,$$

а второй главный минор – положителен:

$$\frac{3}{16} K_i^{\frac{-7}{4}} L_i^{\frac{1}{2}} \bullet \frac{1}{4} K_i^{\frac{1}{4}} L_i^{\frac{-3}{2}} - \left(\frac{1}{8} K_i^{\frac{-3}{4}} L_i^{\frac{-1}{2}} \right)^2 = \frac{1}{32} K_i^{\frac{-3}{2}} L_i^{-1} > 0.$$

Подставляя данные функции производного спроса на факторы (2.123)-(2.124) в производственную функцию, получаем соответствующие функции предложения продукции предприятием

$$Q = \left(\frac{\alpha}{p_K} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{p_L} \right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} p^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}}. (2.125)$$

$$Q(p_K, p_L, p) = \frac{p^3}{16 p_K p_L^2}. (2.126)$$

Функции производного спроса (2.121) являются однородными нулевой степени по ценам факторов производства и выпускаемого продукта:

$$K(tp_K, tp_L, tp) = K(p_K, p_L, p); L(tp_K, tp_L, tp) = L(p_K, p_L, p). (2.127)$$

Для доказательства данного утверждения рассмотрим задачу максимизации прибыли (2.113) при возросших в t раз ценах факторов производства и выпускаемого продукта:

$$\max_{K\geq 0, L\geq 0} PR(K, L) = \max_{K\geq 0, L\geq 0} \{tpQ(K, L) - tp_K K - tp_L L\}$$

Для нее необходимые условие максимума (2.119) остаются в силе:

$$\begin{cases} tp \bullet MP_L(K, L) = tp_L, \\ tp \bullet MP_K(K, L) = tp_K, \end{cases} m.e. \begin{cases} MP_L = \frac{p_L}{p}, \\ MP_K = \frac{p_K}{p}. \end{cases}$$

Очевидно, что ее решением является точно такая же оптимальная комбинация факторов, которая была решением исходной задачи (2.113). Таким образом, производный спрос является однородным нулевой степени по ценам факторов производства и выпускаемого продукта (2.127).

А значит, однородной нулевой степени по ценам факторов производства и выпускаемого продукта будет и функция предложения:

$$Q(tp_K, tp_L, tp) = Q(K(tp_K, tp_L, tp), L(tp_K, tp_L, tp))$$
$$Q(K(p_K, p_L, p), L(p_K, p_L, p)) = Q(p_K, p_L, p). (2.128)$$

Функции производного спроса на факторы производства и предложения продукции в случае достаточной гладкости производственной функции могут быть получены с использованием леммы Хотеллинга дифференцированием функции прибыли, рассматриваемой как зависимость от вектора цен факторов и продукта, по соответствующим аргументам:

$$\frac{\partial PR(p_L, p_K, p)}{\partial p_K} = -K(p_K, p_L, p), \frac{\partial PR(p_L, p_K, p)}{\partial p_L} = -L(p_K, p_L, p); (2.129)$$
$$\frac{\partial PR(p_L, p_K, p)}{\partial p} = Q(p_K, p_L, p). (2.130)$$

Для доказательства данных утверждений выпишем полные производные функции прибыли по ценам факторов производства и выпускаемого продукта:

$$\frac{\partial PR(p_L, p_K, p)}{\partial p_K} = p\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial p_K} + p\frac{\partial Q}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial p_K} - K(p_K, p_L, p) - p_K\frac{\partial K}{\partial p_K} - p_L\frac{\partial L}{\partial p_K} = \left(p\frac{\partial Q}{\partial K} - p_K\right)\frac{\partial K}{\partial p_K} + \left(p\frac{\partial Q}{\partial L} - p_L\right)\frac{\partial L}{\partial p_K} - K(p_K, p_L, p)$$

$$\frac{\partial PR(p_L, p_K, p)}{\partial p_L} = p\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial p_L} + p\frac{\partial Q}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial p_L} - L(p_K, p_L, p) - p_L\frac{\partial L}{\partial p_L} - p_K\frac{\partial K}{\partial p_L} = \left(p\frac{\partial Q}{\partial K} - p_K\right)\frac{\partial K}{\partial p_L} + \left(p\frac{\partial Q}{\partial L} - p_L\right)\frac{\partial L}{\partial p_L} - L(p_K, p_L, p) =$$

$$\frac{\partial PR(p_L, p_K, p)}{\partial p} = Q(p_K, p_L, p) + p\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial p} + p\frac{\partial Q}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial p} - p_K\frac{\partial K}{\partial p} - p_L\frac{\partial L}{\partial p} = Q(p_K, p_L, p) + \left(p\frac{\partial Q}{\partial K} - p_K\right)\frac{\partial K}{\partial p} + \left(p\frac{\partial Q}{\partial L} - p_L\right)\frac{\partial L}{\partial p} = Q$$

Здесь были использованы условия максимизации прибыли (2.119).

Фактически для доказательства леммы Хотеллинга была применена теорема об огибающей (xii). Это становится очевидным, если рассмотреть максимизацию прибыли (2.113) как задачу условной оптимизации:

$$\max_{K\geq 0, L\geq 0} PR(K, L) = \max_{K\geq 0, L\geq 0} \{pQ - p_K K - p_L L\} : \\ Q(K, L) \geq Q, (2.131)$$

где $Q(K, L)$ – значение производственной функции.

Соответствующая функция Лагранжа будет иметь вид:

$$L = \lambda_0(pQ - p_K K - p_L L) + \lambda_1(Q(K, L) - Q),$$

где (λ_0, λ_1) – вектор множителей Лагранжа.

Необходимыми для связанной максимизации прибыли являются условия:

стационарности функции Лагранжа по объемам используемых факторов производства:

$$\begin{cases} \lambda_1 MP_K = \lambda_0 p_K, \\ \lambda_1 MP_L = \lambda_0 p_L; \end{cases}$$

дополняющей нежесткости:

$$\lambda_1(Q(K, L) - Q) = 0, Q(K, L) \geq Q;$$

а также неотрицательности множителей Лагранжа:

$$\lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0.$$

При этом вектор множителей Лагранжа должен быть ненулевым.

Предполагая, что $\lambda_1 = 0$, при предпосылке об эффективности производства (2.1) из условий стационарности функции Лагранжа по объемам факторов в силу того, что предметом анализа выступают экономические ресурсы $(p_K > 0, p_L > 0)$, получаем, что и $\lambda_0 = 0$, чего не может быть, поскольку по необходимому условию экстремума вектор множителей Лагранжа является ненулевым. Тогда из условия дополняющей нежесткости следует, что предприятие работает на границе технологического множества $Q = Q(K, L)$.

И наоборот, из условий стационарности функции Лагранжа по объемам факторов с учетом эффективности производства (2.1) при $\lambda_0 = 0$ оказывается и $\lambda_1 = 0$, чего во внутреннем оптимуме не может быть, поскольку по необходимому условию экстремума вектор множителей Лагранжа является ненулевым. Таким образом, $\lambda_0 \neq 0$, и без ограничения общности его можно положить равным единице, или, что эквивалентно, поделить на него лагранжиан, пронормировав тем самым вектор множителей Лагранжа:

$$L = pQ - p_K K - p_L L + \lambda \left(Q(K, L) - Q \right), (2.132)$$

где $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} > 0$.

При этом условия стационарности функции Лагранжа по объемам факторов производства упрощаются и принимают вид (2.81).

Приравнивая полные производные целевой функции прибыли и частные производные функции Лагранжа (2.132), рассчитанные на оптимальной комбинации факторов производства $(K, L) = (K(p_K, p_L, p), L(p_K, p_L, p))$, по параметрам задачи – ценам на производственные факторы и продукцию фирмы, в соответствии с теоремой об огибающей (xii) получаем утверждения леммы Хоттелинга (2.129)-(2.130).

При двухэтапной оптимизационной схеме первый шаг оптимизационной процедуры заключается в решении задачи минимизации расходов предприятия при ограничении по мощностям (2.78) и расчете для данной технологии издержек *TC* как функции объема выпускаемой продукции Q (2.90). Второй шаг состоит собственно в безусловной максимизации прибыли (в положительном ортанте затрат факторов производства) как функции от объема выпускаемой продукции. Итак, с помощью двухэтапной оптимизационной схемы задачу максимизации прибыли можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\max_q PR = \max_q \{pq - TC(q, p_K, p_L)\} : \\ &\begin{cases} TC(q, p_K, p_L) = \min_{K,L} \{p_K K + p_L L\} : (2.133) \\ \quad Q(K, L) \geqslant q; K \geqslant 0, L \geqslant 0. \end{cases} \end{aligned}$$

При использовании двухэтапной оптимизационной схемы видно, что, поскольку процедура определения наибольшей разницы между выручкой и издержками включает в себя в качестве необходимого условия механизм минимизации денежных затрат, задача максимизации прибыли является продолжением, развитием рассмотренной выше задачи условной оптимизации (2.78), которая является взаимной, или двойственной, по отношению к задаче (2.73).

В двухэтапной постановке (2.133) необходимым условием максимума функции прибыли – является равенство нулю ее производной (рис. 2.48):

$$\frac{dPR}{dQ} = p - MC(Q, p_K, p_L,) = 0.$$

Следовательно, максимизируя прибыль, конкурентная фирма будет выпускать такой объем продукции, при котором величина предельных издержек уравнивается с рыночной ценой:

$$p = MC(Q, p_K, p_L,). (2.134)$$

Условие максимизации прибыли конкурентной фирмой (2.134) определяет соотношение между оптимальным объемом производства продукции предприятием и уровнем рыночной цены, т.е. характеризует готовность фирмы производить определенный (оптимальный) объем продукции при каждом заданном уровне цены. Следовательно, равенство предельных издержек, как функции объема выпускаемой продукции, и ее цены (2.134) задает функцию предложения конкурентной фирмы. Таким образом, график функции предложения продукции конкурентной фирмы определяется линией предельных издержек.

Графически процедура максимизации прибыли предполагает поиск такого объема производимой продукции, при котором точка на графике выручки будет расположена как можно более высоко над соответствующей точкой на графике издержек. Необходимое условие максимума прибыли утверждает, что при данном объеме производства касательная к графику прибыли будет горизонтальной, а угловые коэффициенты касательных к графикам издержек и выручки будут равны (см. верхнюю часть рис. 2.48). Это соответствует пересечению графиков предельных издержек (MC) и выручки (P) в нижней части рис. 2.48.

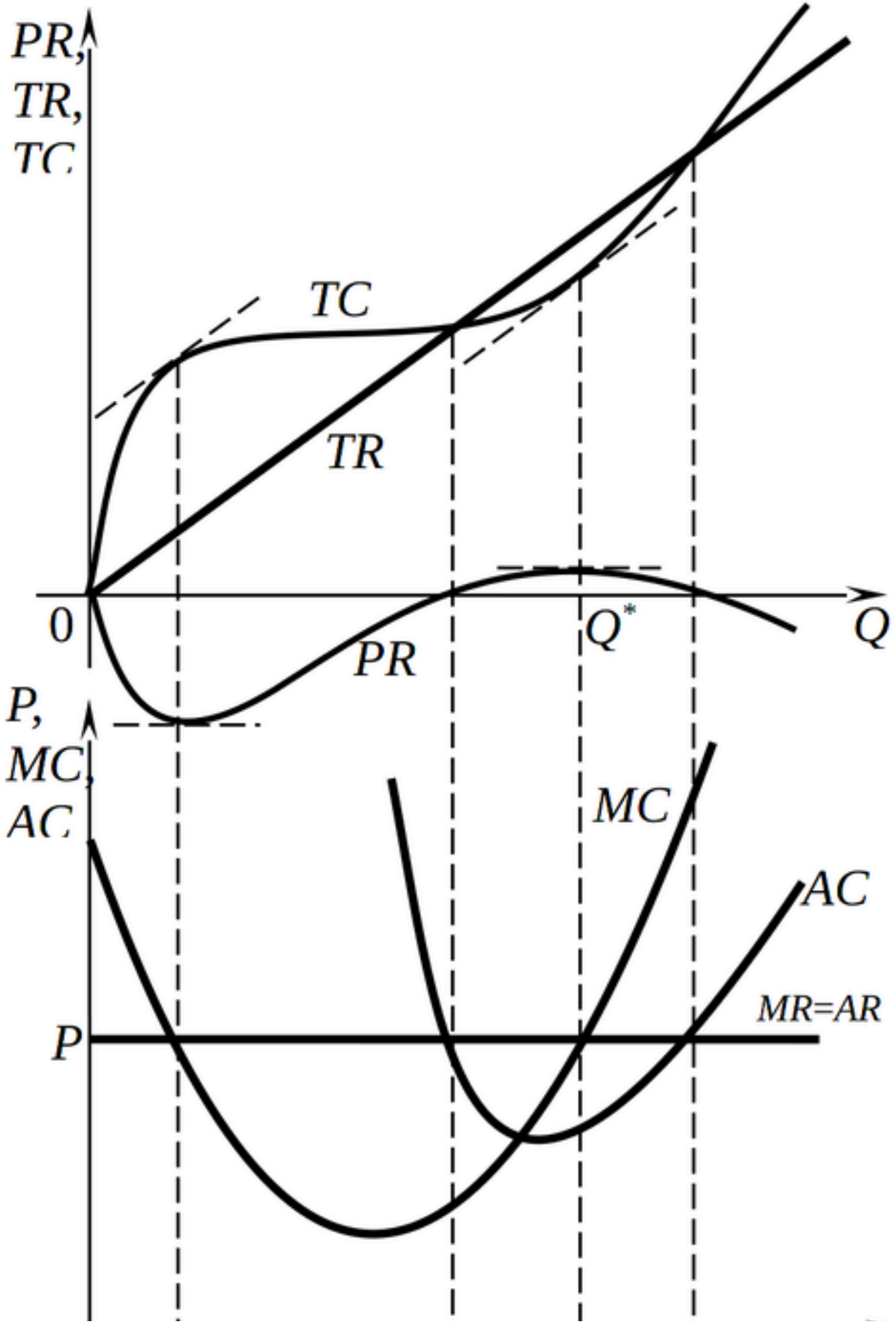

PR,
TR,
TC
TC
TR
0
PR
Q*
Q
P,
MC,
AC
MC
AC
MR=AR
P



Рисунок 2.48. Максимизация прибыли конкурентной фирмой

Условию (2.134), выполнение которого необходимо для достижения максимума прибыли, могут соответствовать несколько объемов производства, в частности, таковыми являются величины Q_1 и Q на рис. 2.48. Однако меньший выпуск Q_1 соответствует максимальным убыткам, и Q является единственным объемом продукции, обеспечивающим фирме наибольшую прибыль.

Для доказательства этого факта необходимо учесть достаточное условие максимизации прибыли для совершенно конкурентной фирмы, которое утверждает, что при объеме производства, соответствующем равенству предельных издержек и цены (2.134), вторая производная прибыли должна быть отрицательной:

$$\frac{d^2PR}{dq^2} = \frac{d}{dq}(p - MC(q, p_K, p_L,)) = \frac{-dMC}{dq} < 0.$$

Другими словами, достаточным условием максимизации прибыли в условиях совершенной конкуренции будет положительность производной предельных издержек:

$$\frac{dMC(q,p_K,p_L,)}{dq} > 0.(2.135)$$

Следовательно, оптимальный объем производства фирмы в условиях совершенной конкуренции Q будет соответствовать возрастающему участку графика предельных издержек (рис. 2.48). А значит, и график функции предложения для конкурентной фирмы будет определяться возрастающим участком графика предельных издержек.

Таким образом, условие (2.134) с учетом неравенства (2.135) устанавливает соотношение между произвольным уровнем рыночной цены и оптимальным объемом производства фирмы, т.е. задает функцию предложения фирмы, которая является обратной по отношению к функции предложения, полученной выше (2.122).

Например, используя функцию предельных издержек (2.108) в необходимом условии максимизации прибыли при двухэтапной схеме (2.134), получаем функцию предложения продукции предприятием, работающим в рамках технологии Кобба–Дугласа $Q = K^{\alpha}L^{\beta}$:

$$p = \left(\frac{p_K}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{p_L}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}. (2.136)$$

Данная функция будет работать при любом неотрицательном объеме производства, поскольку минимум средних издержек (2.107), представляющий собой минимальный уровень цены для существования фирмы в долгосрочной перспективе, достигается в нуле и при любом положительном объеме производства

$$MC' = \left(\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)\left(\frac{p_K}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{p_L}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1-2\alpha-2\beta}{\alpha+\beta}} > 0.$$

Соответственно, для производственной функции $Q = K^{¼}L^{½}$ предложение продукции будет следующим образом связано с уровнем рыночной цены:

$$p = \sqrt[3]{16 p_K p_L^2 Q}.$$

Данная функция будет работать при любом неотрицательном объеме производства, поскольку минимум средних издержек (2.20), представляющий собой минимальный уровень цены для существования фирмы в долгосрочной перспективе, достигается в нуле, и при любом положительном объеме производства

$$MC' = \frac{2}{3}\sqrt[3]{2} p_K^{\frac{1}{3}} p_L^{\frac{2}{3}} Q^{\frac{-2}{3}} > 0.$$

Очевидно, что зависимость (2.136), рассчитанная на втором этапе решения оптимизационной задачи (2.133), является обратной по отношению к функции предложения (2.126), полученной на основе одноэтапной процедуры максимизации прибыли (2.113).

При однородности (степени γ) технологии производства максимизация прибыли конкурентной фирмой показана на рис. 2.49. Оптимальный объем производства Q будет соответствовать неубывающему участку предельных издержек, а значит, невозрастающей отдаче от масштаба производства (2.105), т.е. достаточное условие максимизации прибыли будет выполняться.

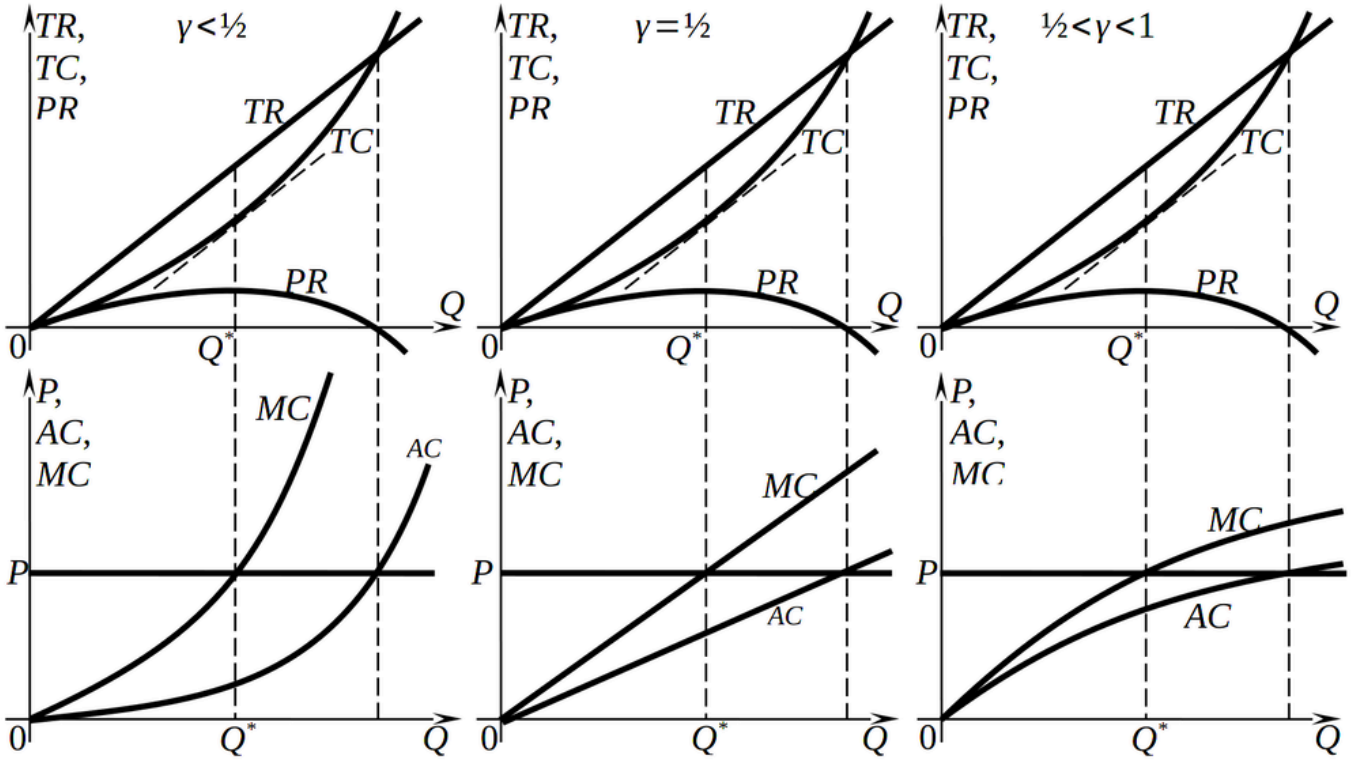


Рисунок 2.49. Максимизация прибыли в двухэтапной трактовке при различных показателях однородности технологии в условиях убывающей отдачи от масштаба

Объединяя необходимые условия минимизации издержек (2.92) и максимизации прибыли (2.134), можно выписать обобщенное условие максимизации прибыли предприятия в условиях совершенной конкуренции на рынке продукта и ресурса в двухэтапной постановке (2.133). Отношение предельного продукта фактора производства к его цене должно быть одинаковым для всех ресурсов и равным обратной величине множителя Лагранжа, предельных издержек производства и цены на продукцию фирмы:

$$\frac{MP_L}{p_L} = \frac{MP_K}{p_K} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{MC} = \frac{1}{p}. (2.137)$$

Данное равенство представляет собой детализацию условия максимизации прибыли в одноэтапной постановке (2.120) с учетом экономического смысла множителя Лагранжа и показывает, тем самым, эквивалентность между одноэтапной (2.113) и двухэтапной (2.133) процедурами максимизации прибыли.

В силу однородности нулевой степени предложения и производного спроса (2.127)-(2.128) функция прибыли является однородной первой степени по ценам факторов производства и готовой продукции:

$$PR(tp_K, tp_L, tp) = tpQ(tp_K, tp_L, tp) - tp_K K(tp_K, tp_L, tp) - tp_L L(tp_K, tp_L, tp) = tpQ(p_K, p_L, p) - tp_K K(p_K, p_L, p) - tp_L L(t$$
$$tPR\,(p_K, p_L, p), t > 0. (2.138)$$

Важным свойством функции прибыли $PR\,(p_K, p_L, p)$ является ее выпуклость по ценам факторов производства и выпускаемого продукта p_L, p_K и p.

Пусть комбинация факторов производства (K, L) является решением задачи максимизации прибыли (2.113) при ценах на факторы производства p_L^3, p_K^3 и цене продукта p^3. Другими словами, $\max PR\left(p_L^3, p_K^3, p^3\right) = p^3 Q(K, L) - p_L^3 L - p_K^3 K$.
Положим, что вектор цен на факторы производства и выпускаемую продукцию $p_3 = \left(p_L^3, p_K^3, p^3\right)$ представляет собой линейную комбинацию некоторых векторов $p_1 = \left(p_L^1, p_K^1, p^1\right)$ и $p_2 = \left(p_L^2, p_K^2, p^2\right)$:
$p_3 = \left(p_L^3, p_K^3, p^3\right) = \left(\lambda p_L^1 + (1-\lambda)p_L^2, \lambda p_K^1 + (1-\lambda)p_K^2, \lambda p^1 + (1-\lambda)p^2\right) = \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2$, $\lambda \in [0,1]$. Тогда имеет место следующее соотношение:

$$PR\left(p_L^3, p_K^3, p^3\right) = p^3 Q(K, L) - p_L^3 L - p_K^3 K = \lambda p^1 Q + (1-\lambda)p^2 Q - \lambda p_L^1 L - (1-\lambda)p_L^2 L - \lambda p_K^1 K - (1-\lambda)p_K^2 K = \lambda\left(p^1 Q\right.$$

Заметим, что комбинация факторов производства (K, L), дающая максимальную прибыль при ценах на факторы производства p_L^3, p_K^3 и цене выпускаемого продукта p^3, не является оптимальной с точки зрения максимизации прибыли при ценах p_L^1, p_K^1, p^1 и p_L^2, p_K^2, p^2:

$$p^1 Q(K, L) - p_L^1 L - p_K^1 K \le PR\left(p_L^1, p_K^1, p^1\right) \text{ и } p^2 Q(K, L) - p_L^2 L - p_K^2 K \le PR\left(p_L^2, p_K^2, p^2\right).$$

Тем самым, приходим к неравенству Йенсена, характеризующему выпуклую зависимость прибыли $PR = PR(p_L, p_K, p)$ от цен факторов производства p_L, p_K и выпускаемого продукта p:

$$PR\left(\lambda p_L^1 + (1-\lambda)p_L^2, \lambda\alpha p_K^1 + (1-\lambda)p_K^2, \lambda p^1 + (1-\lambda)p^2\right) \le \lambda PR\left(p_L^1, p_K^1, p^1\right) + (1-\lambda)PR\left(p_L^2, p_K^2, p^2\right),$$

или в векторной форме:

$$PR\left(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2\right) \le \lambda PR(p_1) + (1-\lambda)PR\left(p_2\right).$$

Как показано на рис. 2.50, при снижении цены продукта $\left(p^2 < p^1\right)$ и сокращении его продаваемого количества $(Q_2 < Q_1)$ угловой коэффициент касательной к графику функции прибыли уменьшается: $tg\beta < tg\alpha$, поскольку по лемме Хотеллинга (2.130) $tg\alpha = \frac{\partial PR}{\partial p}\left(p^1\right) = Q_1$, $tg\beta = \frac{\partial PR}{\partial p}\left(p^2\right) = Q_2$.

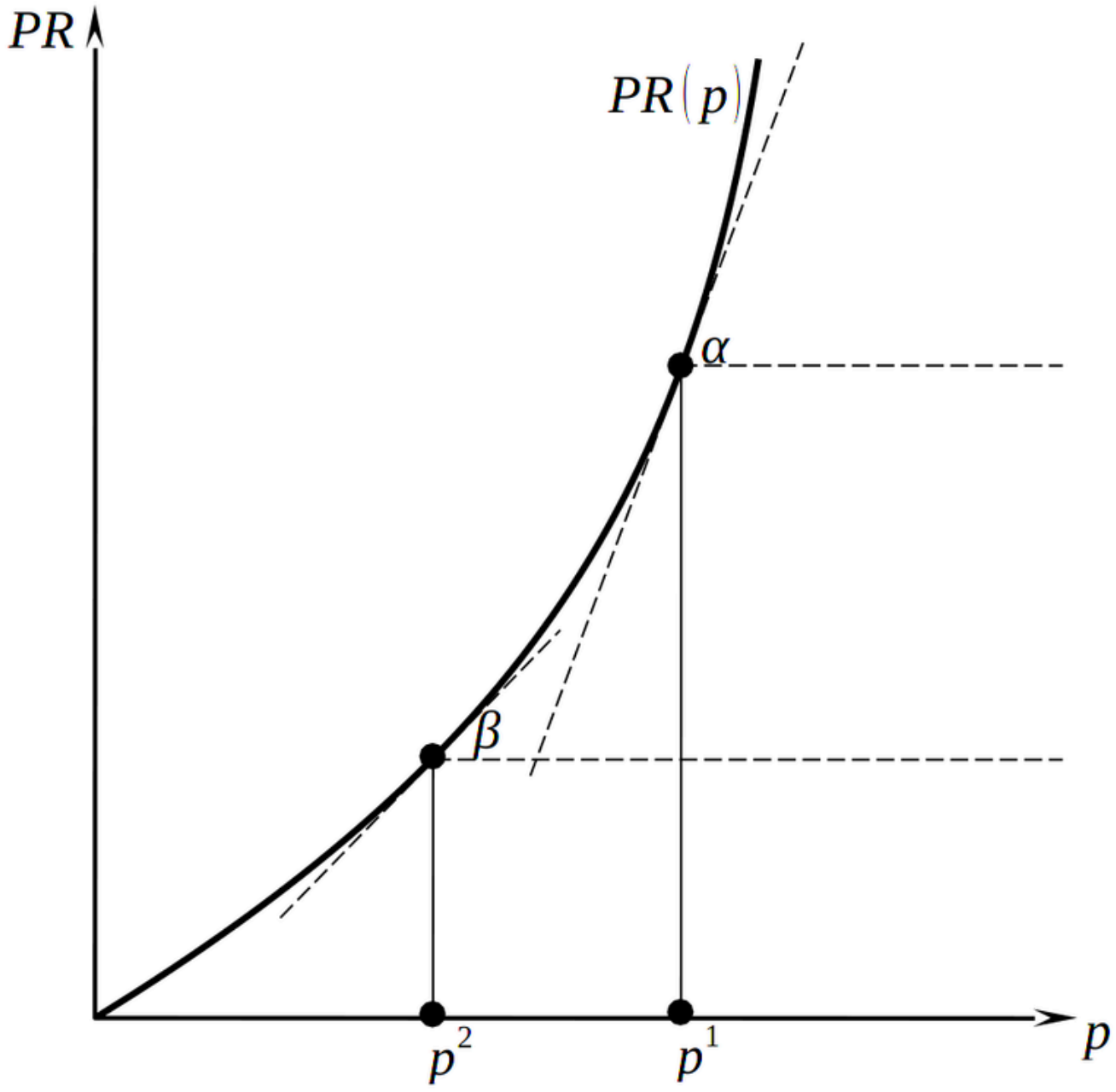


Рисунок 2.50. Выпуклость функции прибыли по цене продукта

Обратим внимание на то, что в случае единственности оптимального набора факторов $(K > 0, L > 0)$, представляющего собой внутренний оптимум, которая будет иметь место при строгой вогнутости производственной функции, неравенства выше, в том числе, и неравенство Йенсена, будут строгими, а значит, будет иметь место строгая выпуклость функции прибыли по ценам факторов производства и выпускаемого продукта.

Если выше однородность первой степени функции прибыли по ценам факторов и продукции (2.138) была выведена из однородности нулевой степени производного спроса (2.127) и предложения (2.128), то лемма Хотеллинга (2.129) позволяет, наоборот, доказать однородность нулевой степени функций производного спроса и предложения, исходя из однородности первой степени прибыли. Действительно, дифференцируя по цене любого из факторов, а также цене выпускаемой продукции выражение, характеризующее однородность первой степени функции прибыли по ценам (2.138) и применяя лемму Хотеллинга (2.129)-(2.130):

$$\frac{\partial PR(tp_K,tp_L,tp)}{\partial p_K} = \frac{\partial PR(tp_K,tp_L,tp)}{\partial (tp_K)} \bullet \frac{\partial (tp_K)}{\partial p_K} = -tK(tp_K,tp_L,tp) = t\frac{\partial PR(p_K,p_L,p)}{\partial p_K} = -tK\left(p_K,p_L,p\right),$$

$$\frac{\partial PR(tp_K,tp_L,tp)}{\partial p_L} = \frac{\partial PR(tp_K,tp_L,tp)}{\partial (tp_L)} \bullet \frac{\partial (tp_L)}{\partial p_L} = -tL(tp_K,tp_L,tp) = t\frac{\partial PR(p_K,p_L,p)}{\partial p_L} = -tL\left(p_K,p_L,p\right),$$

$$\frac{\partial PR(tp_K,tp_L,tp)}{\partial p} = \frac{\partial PR(tp_K,tp_L,tp)}{\partial (tp)} \bullet \frac{\partial (tp)}{\partial p} = tQ(tp_K,tp_L,tp) = t\frac{\partial PR(p_K,p_L,p)}{\partial p} = tQ\left(p_K,p_L,p\right),$$

приходим к однородности нулевой степени функций производного спроса (2.127) и предложения (2.128).

Выпуклость функции прибыли позволяет сформулировать несколько важных свойств функций производного спроса и предложения.

Функции производного спроса на труд и капитал являются невозрастающими по ценам соответствующих факторов – труда и капитала, а функция предложения – неубывающей по цене выпускаемой продукции:

$$\frac{\partial K(p_K,p_L,p)}{\partial p_K} \le 0, \frac{\partial L(p_K,p_L,p)}{\partial p_L} \le 0,$$
$$\frac{\partial Q(p_K,p_L,p)}{\partial p} \ge 0.$$

Действительно, если функция прибыли является дважды дифференцируемой, то ее «чистые» частные производные второго порядка, которые по лемме Хотеллинга (2.129) представляют собой функции производного спроса на факторы производства со знаком минус и предложения, будут неотрицательными, ведь в силу выпуклости функции прибыли по ценам факторов и продукта ее матрица Гессе должна быть положительно полуопределенной:

$$\frac{\partial^2 PR(p_K,p_L,p)}{\partial p_K^2} = \frac{-\partial K(p_K,p_L,p)}{\partial p_K} \ge 0,$$
$$\frac{\partial^2 PR(p_K,p_L,p)}{\partial p_L^2} = \frac{-\partial L(p_K,p_L,p)}{\partial p_L} \ge 0,$$
$$\frac{\partial^2 PR(p_K,p_L,p)}{\partial p^2} = \frac{\partial Q(p_K,p_L,p)}{\partial p} \ge 0.$$

Во внутренних оптимумах при строгой вогнутости технологии производства, когда функция прибыли строго выпукла по ценам факторов и выпускаемой продукции, а значит, ее матрица Гессе является положительно определенной, производный спрос на труд и капитал является убывающей функцией цены соответствующего фактора – труда и капитала, а предложение – возрастающей функцией цены продукта:

$$\frac{\partial K(p_K,p_L,p)}{\partial p_K} < 0, \frac{\partial L(p_K,p_L,p)}{\partial p_L} < 0,$$
$$\frac{\partial Q(p_K,p_L,p)}{\partial p} > 0.$$

Таким образом, имеют силу т.н. «закон спроса» на факторы производства и «закон предложения» продукции фирмой.

Наконец, следует отметить, что, если функция прибыли является дважды непрерывно дифференцируемой, то перекрестные эффекты замещения равны между собой:

$$\frac{\partial K(p_K,p_L,p)}{\partial p_L} = \frac{\partial L(p_K,p_L,p)}{\partial p_K}.$$

Действительно, по лемме Хотеллинга (2.129)

$$\frac{\partial^2 PR(p_K,p_L,p)}{\partial p_K \partial p_L} = \frac{\partial K(p_K,p_L,p)}{\partial p_L}, \frac{\partial^2 PR(p_K,p_L,p)}{\partial p_L \partial p_K} = \frac{\partial L(p_K,p_L,p)}{\partial p_K}.$$

При этом по теореме Шварца, если вторые частные производные функции прибыли непрерывны, то они равны между собой, т.е. значения непрерывных вторых частных производных не зависят от порядка дифференцирования:

$$\frac{\partial^2 PR(p_K,p_L,p)}{\partial p_K \partial p_L} = \frac{\partial^2 PR(p_K,p_L,p)}{\partial p_L \partial p_K},$$

что в свою очередь подразумевает симметричность перекрестных эффектов замещения.

Хотя задача извлечения наибольшей прибыли разрешима при убывающей отдаче от масштабов хозяйственной деятельности, в современных условиях научно-технологической революции и повсеместного наличия положительных внешних эффектов человеческой жизнедеятельности, а занчит, и возрастающей отдачи от масштаба производства, предприятие, максимизирующее прибыль, не может достигнуть цели своей деятельности (рис. 2.51 – 2.52). Даже если технология производства характеризуется постоянным эффектом масштаба, задача максимизации прибыли в общем случае не имеет решения (рис. 2.53). У технологии с постоянной отдачей от масштаба наблюдается нестрогая вогнутость вдоль лучей, исходящих из начала координат, лежащих в неотрицательном ортанте и являющихся образующими поверхности функции (1.41). Поверхность такой функции является конусообразной, поэтому для такой зависимости не выполняется предпосылка (2.114), обеспечивающая существование решения задачи максимизации прибыли. Выручка предприятия, как функция однородная первой степени, в данном случае увеличивается постоянным темпом. Аналогичным образом ведет себя и линейная функция издержек производства. Разница между их темпами роста порождает потенциал нелимитируемого возрастания либо прибыли, либо убытков.

Задача максимизации прибыли при постоянной отдаче от масштаба имеет решение лишь в случае нулевой прибыли. Если издержки обгоняют по темпу роста выручку предприятия, график которой при этом целиком (на R_{+l}) будет лежать ниже затратной плоскости, то задача максимизации трансформируется в противоположную проблему минимизации убытков. Решением будет “бездействие”, то есть нулевые объемы потребляемых ресурсов, отказ от выпуска продукции. При этом прибыль будет нулевой, а убытки минимальными.

Вырожденная ситуация будет также наблюдаться, если себестоимость продукции совпадает по темпу роста с выручкой от ее реализации, когда графики данных функций пересекаются по лучу, исходящему из начала координат и лежащему в неотрицательной вещественной области R_{+l}, на котором будет наблюдаться нулевая прибыль, а при всех иных комбинациях факторов производства – прибыль отрицательна, то есть предприятие несет убытки. В таком случае невозможно точно определить требуемый объем производства, поскольку любая его величина будет давать нулевую прибыль.

Итак, если производственная функция характеризуется постоянной отдачей от масштаба, то решение задачи максимизации прибыли в общем случае, за исключением вырожденных ситуаций, отсутствует. В случае строго положительного эффекта масштаба, данная задача оказывается тем более неразрешимой, поскольку с наращиванием затрат факторов производства выручка предприятия увеличивается быстрее, чем однородная первой степени зависимость, а значит, заведомо обгоняет прирост линейной функции издержек производства. Следовательно, обязательно будет существовать неограниченный диапазон значений факторов, на котором прибыль окажется сколь угодно большой.

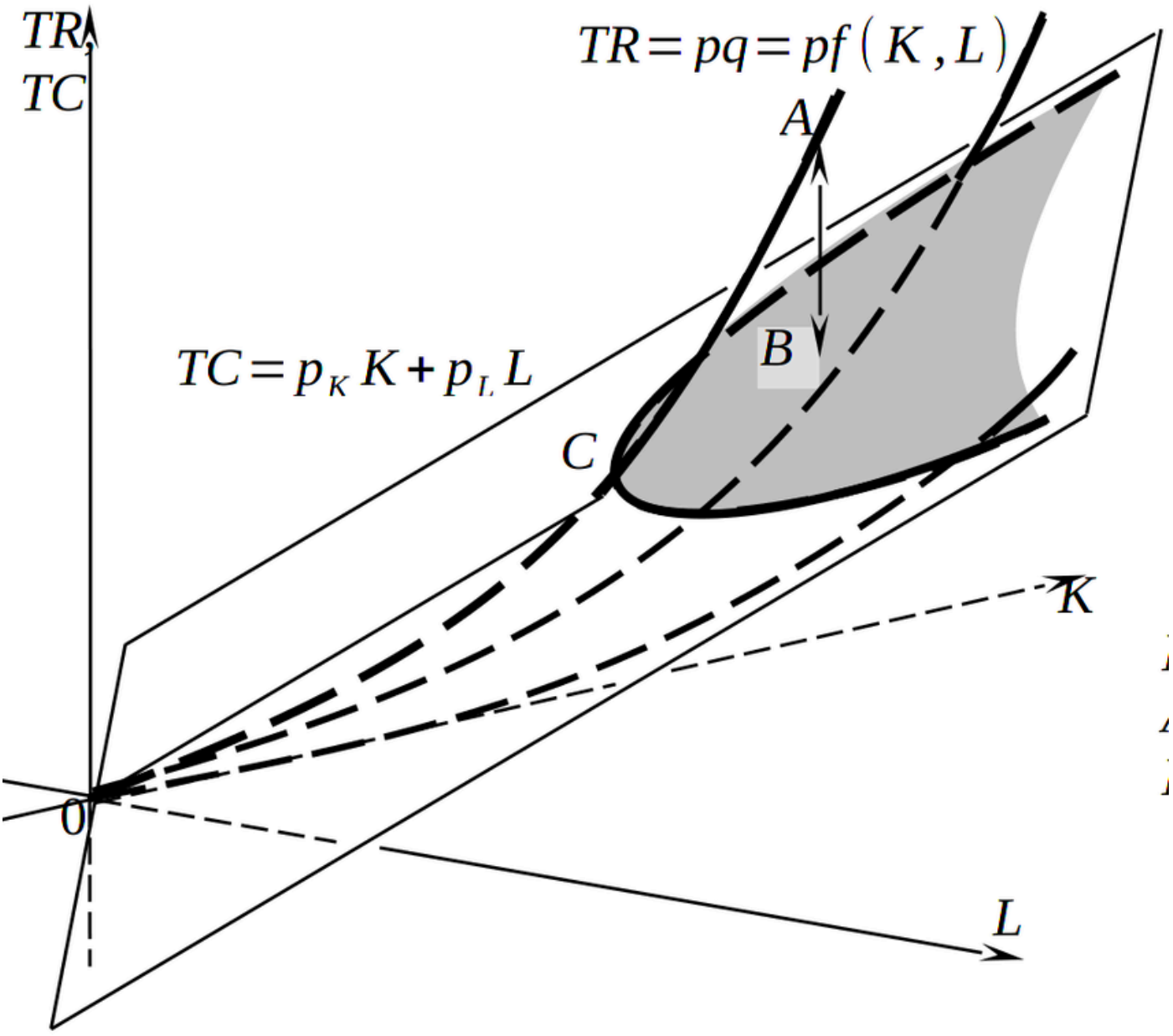


Рисунок 2.51. Невозможность максимизации прибыли при возрастающей отдаче от масштаба производства (одноэтапная трактовка)

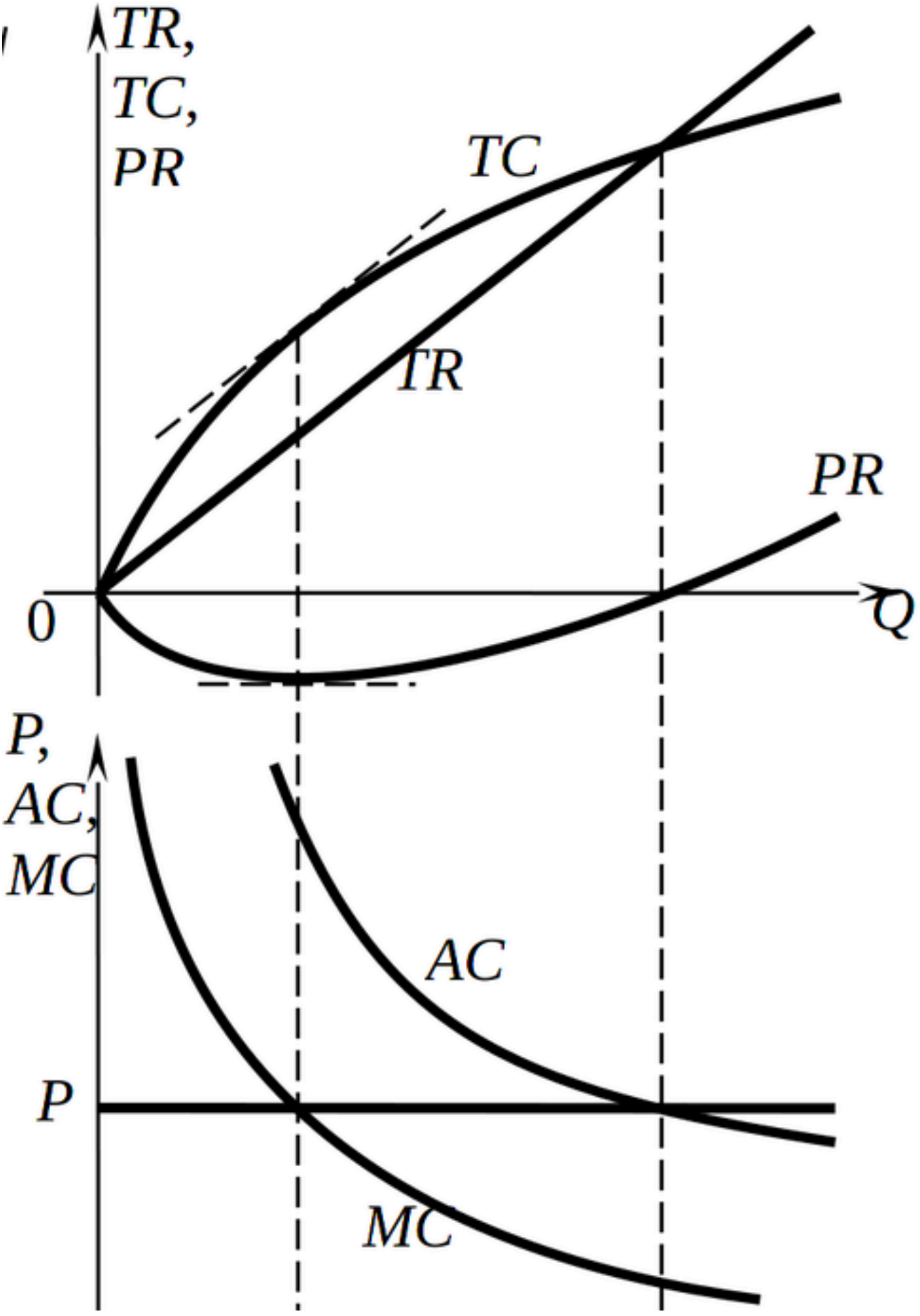

TR,
TC,
PR
TC
TR
PR
0
Q
P,
AC,
MC
AC
P
MC



Рисунок 2.52. Невозможность максимизации прибыли при возрастающей отдаче от масштаба производства (двухэтапная трактовка)

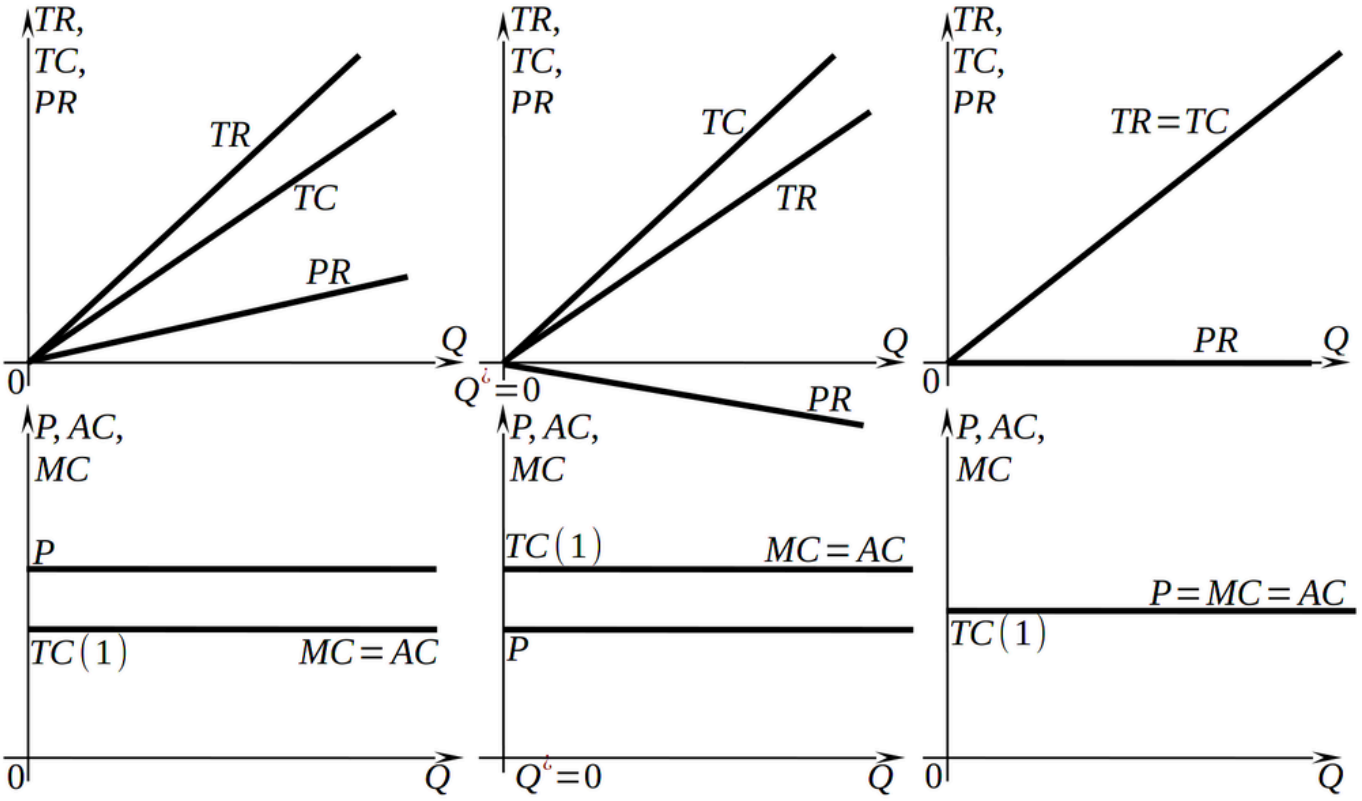


Рисунок 2.53. Проблемы максимизации прибыли при постоянной отдаче от масштаба производства (двухэтапная трактовка)

Для функции с возрастающей отдачей от масштаба производства при отсутствии “рога изобилия” характерно, что ее график лежит ниже произвольного отрезка, проведенного из начала координат до пересечения с ним. Это справедливо и для отрезка, лежащего в плоскости издержек. В точках сечения графика функции выручки – в условиях параметрического поведения цен представляющей линейную трансформацию производственной функции – затратной плоскостью, например, в точке *C* на рис. 2.51, прибыль нулевая ($pf(x_K,x_L)=p_Kx_K+p_Lx_L$). Соответственно, дальше точки пересечения по отношению к началу координат график функции выручки будет лежать выше плоскости издержек, что гарантирует положительную прибыль:

$$pf(\alpha x_K, \alpha x_L) > \alpha pf(x_K, x_L) = \alpha(p_K x_K + p_L x_L) = p_K \bullet (\alpha x_K) + p_L \bullet (\alpha x_L).$$

При параметрическом характере цен расстояние между графиком функции выручки и плоскостью издержек ([*AB*] на рис. 2.51) с удалением от начала координат неограниченно возрастает. При отсутствии асимптотической конусообразности (2.114) функция выручки, обладающая возрастающей отдачей от масштаба, вторично пересекает любую прямую, проведенную из начала координат, как бы ни был велик ее угловой коэффициент. А значит, начиная с определенной точки, с ростом затрат факторов производства прибыль предприятия неограниченно возрастает.

Таким образом, с ростом объема производства прибыль уходит в бесконечность. Невозможность реализации цели максимизации прибыли и отсутствие устойчивого равновесия фирмы и рынка при возрастающей отдаче от масштаба производства подталкивает предприятие к неограниченному расширению производства. В связи с этим эксплуатация передовых технологий, интерспециализированных рабочих мест и высококвалифицированных трудовых ресурсов, создающая положительную отдачу от масштаба производства, напрямую сопряжена с тенденцией к рыночному доминированию для конкретного предприятия, максимизирующего прибыль, и является объективной основой монополизации отраслевых структур на последовательных стадиях процесса переработки ресурсов в готовую продукцию, а также экономики в целом в случае преобладания у ее субъектов ориентации на финансовую выгоду [8].

Итак, в условиях совершенной конкуренции задача максимизации прибыли оказывается неразрешимой при возрастающей (рис. 2.51 – 2.52) и даже, в общем случае, при постоянной отдаче от масштаба производства (рис. 2.53).

В условиях возрастающей отдачи от масштаба производства задача извлечения наибольшей прибыли, может иметь решение в отдельном случае при наличии рыночной власти предприятия над отпускными ценами, которые при этом из параметров, меняющих свои значения автономно от действий хозяйствующего субъекта, превращаются в экономически значимое ограничение по платежеспособному спросу [9], когда рыночная цена зависит от решений, принимаемых фирмой, в частности, по поводу объема производимой продукции и использования ресурсов. В этой ситуации условием, обеспечивающим существование решения в названных выше типах задач при квазивогнутой производственной функции, является достаточно высокая скорость убывания рыночной цены при увеличении выпускаемого предприятием объема продукции. Для возможности максимизации

прибыли при несовершенной конкуренции необходимо, чтобы ограничение по рыночному спросу компенсировало положительный эффект масштаба производства [10]. Расширение производства на фирмах, которые в силу своего технологического потенциала получают возможность монопольного господства на рынке, в таком случае оказывается ограничено емкостью последнего [11]. Однако, поскольку могущественная в финансовом, научно-техническом, информационном отношении фирма не просто пассивно адаптируется к платежеспособным потребностям, но активно воздействует на рыночную конъюнктуру, формируя спрос, раздвигая и даже снимая данное ограничение [12], реальная хозяйственная ситуация обретает свойства, аналогичные тем, которые присущи совершенной конкуренции, с неразрешимостью задачи статичной максимизации прибыли. В общем случае нельзя гарантировать разрешимость задач максимизации прибыли и при несовершенной конкуренции в условиях положительного эффекта масштаба производства.

---

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977. ↩
2. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977; Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 6-е изд. – М.: Наука, 1989. ↩
3. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977; Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 6-е изд. – М.: Наука, 1989. ↩
4. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977. ↩
5. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Оптимизация: теория, примеры, задачи. – М.: Едиториал УРСС, 2000. ↩
6. Зорич В.А. Математический анализ. – 2-е изд. – М.: ФАЗИС, 1997, ч.1. ↩
7. Используя соотношения (2.119), можно дать альтернативную трактовку равенства (1.56), заменив в его правой части предельные продукты капитала и труда на их цены, скорректированные на общий уровень цен: $\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + s_K\frac{\dot{K}}{K} + s_L\frac{\dot{L}}{L}$. Здесь $s_K = \frac{P_K \bullet K}{P \bullet Y}$ и $s_K = \frac{P_L \bullet L}{P \bullet Y}$ – соответственно доли рентных доходов и оплаты труда в совокупной выручке. ↩
8. Еще А. Маршалл придерживался мнения, что в сферах бизнеса, характеризующихся положительной эффективностью крупномасштабного производства, возможна ситуация, когда “любая фирма, первой добившаяся большого успеха, приобретает монополию на все производство данной отрасли в своем районе”. Указывая на многочисленные препятствия неограниченному расширению предприятия и активности его руководителя, существующие в реальной хозяйственной практике, классик, тем не менее, признает, что, если абстрагироваться от них, то в таких условиях “нет предела, у которого ему следует остановиться” [Маршалл А. Принципы экономической науки. – М.: Прогресс-Универс, 1993, т.1,с.368-370; т.2,с.156]. При этом естественным мотивом хозяйственной деятельности А. Маршалл полагал увеличение чистого дохода. ↩
9. Корнаи Я. Дефицит. – М.: Наука, 1990. ↩
10. Подробнее данный вопрос будет рассмотрен в главе 6, при анализе деятельности естественной монополии. ↩
11. Маршалл А. Принципы экономической науки. – М.: Прогресс-Универс, 1993, т.1. ↩
12. Гэлбрейт Дж.К. Новое индустриальное общество. – М.: Прогресс, 1969; Гэлбрейт Дж.К. Экономические теории и цели общества. – М.: Прогресс, 1976. ↩

Глава 3. Двойственность в теории потребления и производства

3.1. Двойственность в теории потребительского выбора
3.2. Уравнение Слуцкого: эффекты замещения и дохода
3.3. Измерение изменений благосостояния потребителя
3.4. Уравнение Слуцкого с учетом индивидуальных активов: эффекты замещения, дохода и богатства
3.5. Двойственность в теории производства: эффекты замещения и выпуска

3.1. Двойственность в теории потребительского выбора

Природа потребительского выбора двойственна: выбор оптимального для потребителя набора товаров (x_1, x_2) может анализироваться не только как проблема максимизации уровня полезности при заданном бюджетном ограничении (2.6), но и как проблема минимизации бюджетных расходов при заданном уровне предпочтений (2.47).

Симметрия, или двойственность, между задачами связанной максимизации полезности (2.6) и минимизации расходов (2.47) потребителя при условии равенства соответствующих предпочтений и товарных цен состоит в следующем. Если рассчитать, используя решение (x_1, x_2), максимальный уровень полезности U в задаче (2.6) и рассматривать его в качестве ограничения $\overline{U}$, то решение задачи (2.47) (x_1, x_2) совпадет с ответом в (2.6). При этом величина расходов потребителя в (2.47) совпадет с его ограничением по доходу в (2.6). Другими словами, если $\max_{x_1,x_2} U(x_1, x_2) = \overline{U}$ при условии $p_1x_1 + p_2x_2 \leq \overline{M}$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, то $\min_{x_1,x_2}(p_1x_1 + p_2x_2) = \overline{M}$ при выполнении ограничения: $U(x_1, x_2) \geq \overline{U}$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Двойственность между задачами связанной максимизации полезности (2.6) и минимизации расходов (2.47) отражается четырьмя тождествами (рис. 3.1), выполняющимися для локально ненасыщаемых непрерывных предпочтений.

Минимальные расходы, необходимые для достижения полезности $U = V(p_1, p_2, M)$ в двойственной задаче (2.47), представляют собой доход потребителя M, выступающий в качестве ограничения в прямой задаче (2.6):

$$E(p_1, p_2, V(p_1, p_2, M)) \equiv M. \quad (3.1)$$

Максимум полезности, достижимый при доходе $M = E\left(p_1, p_2, \overline{U}\right)$, в рамках прямой задачи (2.6) есть $\overline{U}$, выступающая в качестве ограничения в двойственной задаче:

$$V\left(p_1, p_2, E\left(p_1, p_2, \overline{U}\right)\right) \equiv \overline{U}. \quad (3.2)$$

Маршаллианский спрос на некоторый, *i*-й товар при доходе M тождественно равен хиксианскому спросу на данный товар при заданном уровне полезности $U = V(p_1, p_2, M)$:

$$x_i^m(p_1, p_2, M) \equiv x_i^h(p_1, p_2, V(p_1, p_2, M)), i = 1, 2. \quad (3.3)$$

Хиксианский спрос на некоторый, *i*-й товар при заданной полезности $\overline{U}$ тождественно равен маршаллианскому спросу на данный товар при доходе $M = E\left(p_1, p_2, \overline{U}\right)$:

$$x_i^h\left(p_1, p_2, \overline{U}\right) \equiv x_i^m\left(p_1, p_2, E\left(p_1, p_2, \overline{U}\right)\right), i = 1, 2. \quad (3.4)$$

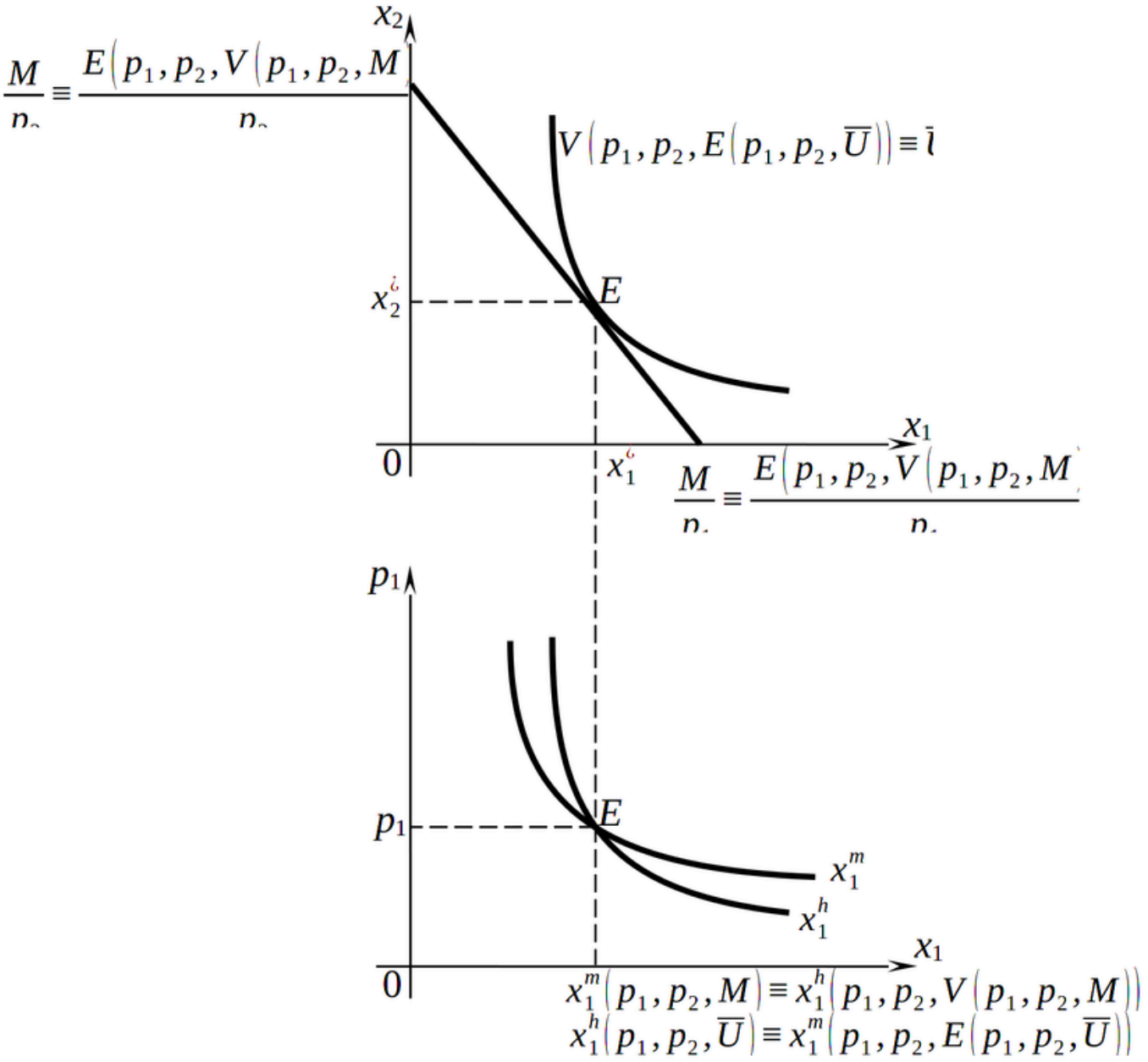


Рисунок 3.1. Двойственность задач потребительского выбора

Тождества (3.1)-(3.2) свидетельствуют о том, что функции расходов (2.56) и косвенной полезности (2.33) являются взаимно обратными (рис. 3.2). Это можно продемонстрировать, сравнивая соответствующие зависимости, полученные для случаев:

- функций полезности Стоуна-Джери ((2.61) и (2.35)) и Кобба-Дугласа ((2.62)-(2.63) и (2.36)-(2.37)) [1],
- совершенных субститутов ((2.64)-(2.65) и (2.38)-(2.39)),
- совершенных комплементов ((2.66) и (2.40)),
- функции полезности CES ((2.67) и (2.41)).

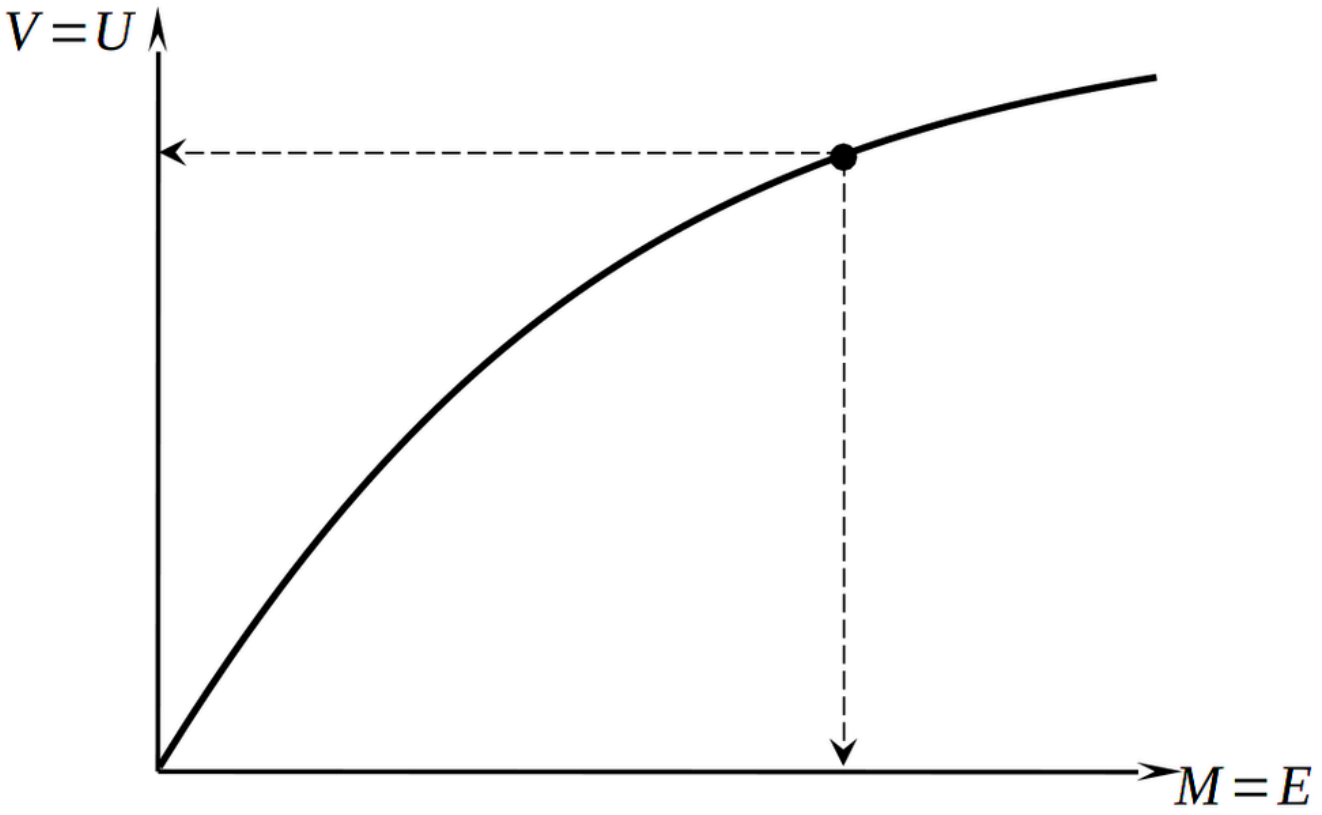


Рисунок 3.2. Двойственность задач потребительского выбора

Кроме того, проявлением двойственности между связанной максимизацией полезности (2.6) и минимизацией расходов (2.47) потребителя является также то, что множители Лагранжа в этих задачах представляют собой взаимно обратные величины. Действительно, множители Лагранжа в этих задачах представляют собой производные соответственно косвенной полезности по доходу (2.42) и расходов по уровню полезности (2.69), а поскольку функции расходов и косвенной полезности являются взаимно обратными, постольку их производные представляют собой взаимно обратные величины.

Таким образом, можно привести следующую схематическую иллюстрацию соотношений двойственности в потреблении (рис. 3.3), которая одновременно послужит отправной точкой для продолжения анализа данной проблематики в связи с фундаментальным для теории потребительского выбора уравнением Слуцкого.

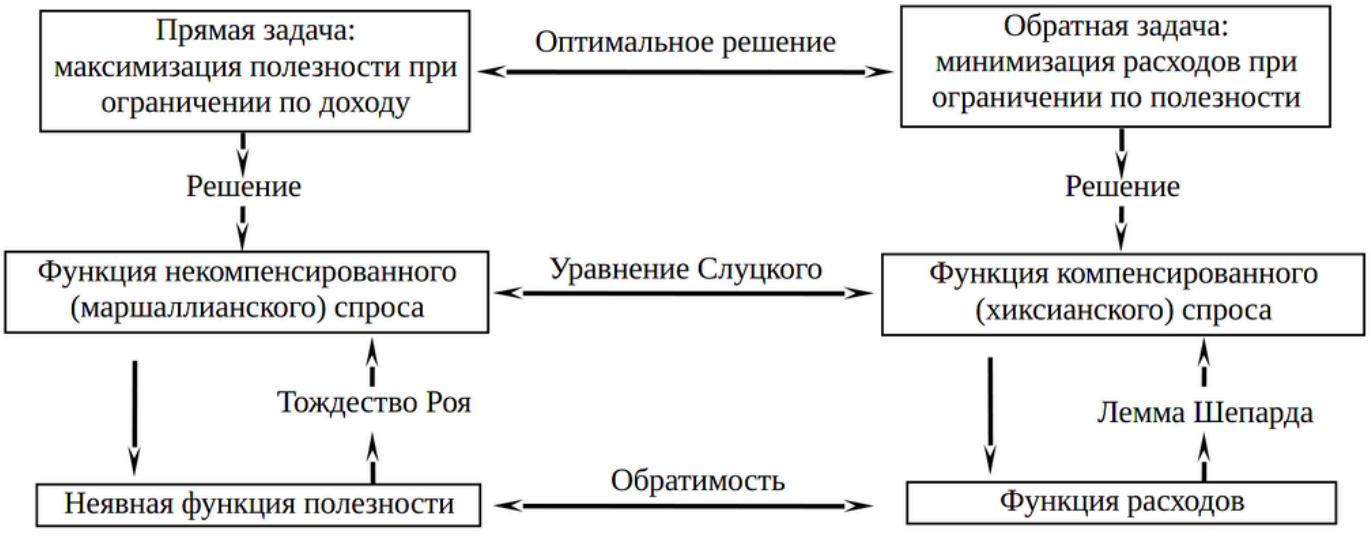


Рисунок 3.3. Двойственность в теории потребления

1. Функция расходов (xvii) и (xviii) при *n*-продуктовых потребительских корзинах являются обратными по отношению к косвенным функциям полезности при предпочтениях Стоуна-Джери (x) и Кобба-Дугласа (xi). ↩

3.2. Уравнение Слуцкого: эффекты замещения и дохода

Изменение величины спроса на товар, происходящее вследствие изменения его цены, возникает как результат действия двух одновременных эффектов.

Во-первых, когда цена одного из товаров изменяется, у потребителя появляется возможность изменить количество данного товара в своем наборе: в случае понижения цены купить большее количество относительно подешевевшего товара, а в случае повышения цены купить меньшее количество относительно подорожавшего товара. Во-вторых, изменение цены одного товара влияет на возможность потребителя купить остальные блага: удорожание одного товара сокращает долю дохода, которая может быть направлена на приобретение других товаров, а удешевление одного товара, напротив, увеличивает возможности потребителя по части покупки других благ. Таким образом, реакция потребителя на изменение цены товара зависит: а) непосредственно от его возможностей увеличить потребление относительно подешевевшего товара за счет сокращения потребления относительно дорогих благ (при этом потребитель сохраняет прежний уровень благосостояния, или реального дохода); б) от изменения покупательной способности в целом в отношении обоих товаров, что подразумевает изменение благосостояния, или реального дохода, потребителя.

Под эффектом замещения понимается изменение величины спроса на товар, происходящее под влиянием изменения относительных цен благ, что побуждает потребителя приобретать относительно подешевевшие товары взамен относительно подорожавших. Иными словами, эффект замещения отражает реакцию потребителя на изменение относительных цен.

Под эффектом дохода понимается изменение величины спроса на товар, происходящее под влиянием изменения реального дохода покупателя. Иными словами, эффект дохода отражает реакцию потребителя на изменение реального дохода.

Эффекты замещения и дохода в сумме дают эффект цены – общее изменение величины спроса на товар. Различение эффектов дохода и замены позволяет углубить знания о поведении потребителя. В частности, оно помогает определить, насколько изменение величины спроса на товар вызвано изменением пропорции обмена двух товаров и насколько – изменением покупательной способности потребителя.

Действие эффектов замещения и дохода, формирующих общий эффект цены, описывает фундаментальное для теории спроса уравнение Слуцкого. Выведем его, опираясь на сформулированные выше тождества (3.1), (3.3) и (3.4), характеризующие двойственность решений задач потребительского выбора (2.6) и (2.47).

Продифференцировав тождество (3.4) по p_j , получаем:

$$\frac{\partial x_i^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_j}=\frac{\partial x_i^m\left(p_1,p_2,E\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)\right)}{\partial p_j}+\frac{\partial x_i^m\left(p_1,p_2,E\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)\right)}{\partial M}\bullet\frac{\partial E\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_j};i,j=1,2.$$

Рассматривая данную величину полезности как значение ее косвенной функции при ценах (p_1,p_2) и доходе M, т.е. предполагая $U=V\left(p_1,p_2,M\right)$, из тождества (3.1) имеем:

$$E\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)=E(p_1,p_2,V\left(p_1,p_2,M\right))=M.$$

Тогда с учетом леммы Шепарда (2.70) получаем:

$$\frac{\partial x_i^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_j}=\frac{\partial x_i^m(p_1,p_2,M)}{\partial p_j}+\frac{\partial x_i^m(p_1,p_2,M)}{\partial M}\bullet x_j^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right),i,j=1,2.$$

С учетом тождества (3.3) для *j*-того товара имеем:

$$x_i^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)=x_i^h\left(p_1,p_2,V\left(p_1,p_2,M\right)\right)\equiv x_i^m\left(p_1,p_2,M\right),i=1,2.$$

Таким образом, заменив хиксианский спрос на маршаллианский и сделав соответствующие перестановки, получим уравнение Слуцкого[1] в общей форме:

$$\frac{\partial x_i^m(p_1,p_2,M)}{\partial p_j}=\frac{\partial x_i^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_j}-\frac{\partial x_i^m(p_1,p_2,M)}{\partial M}\bullet x_j^m\left(p_1,p_2,M\right),i,j=1,2.\ (3.5)$$

Согласно уравнению Слуцкого, общее влияние изменения цены на потребление товара $\left(\frac{\partial x_i^m}{\partial p_j}\right)$, которое наблюдается в реальной действительности, можно разложить на два эффекта – ненаблюдаемый эффект замещения $\left(\frac{\partial x_i^h}{\partial p_j}\right)$ и наблюдаемый эффект дохода $\left(\frac{-\partial x_i^m}{\partial M}\bullet x_j^m\right)$. Эффект замещения отражает рост величины спроса на относительно подешевевшие и уменьшение величины спроса на относительно подорожавшие товары при сохранении благосостояния потребителя на неизменном уровне. Эффект дохода $\left(\frac{-\partial x_i^m}{\partial M}\bullet x_j^m\right)$ заключается в том, что, в частности, при удешевлении какого-либо из товаров потребитель получает возможность купить больше данного товара, не сокращая объема потребления других.

При $i=j$ имеют место уравнения Слуцкого для прямых эффектов:

$$\frac{\partial x_1^m(p_1,p_2,M)}{\partial p_1}=\frac{\partial x_1^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_1}-\frac{\partial x_1^m(p_1,p_2,M)}{\partial M}\bullet x_1^m\left(p_1,p_2,M\right),(3.6)$$

$$\frac{\partial x_2^m(p_1,p_2,M)}{\partial p_2}=\frac{\partial x_2^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_2}-\frac{\partial x_2^m(p_1,p_2,M)}{\partial M}\bullet x_2^m\left(p_1,p_2,M\right).(3.7)$$

В силу отрицательности собственных коэффициентов замещения при строгой квазивогнутости полезности (1.81) прямой эффект замещения $\left(\frac{\partial x_i^h}{\partial p_i}\right)$ всегда – для всех типов благ – отрицателен. Если закон спроса работает, то общий эффект цены $\left(\frac{\partial x_i^m}{\partial p_i}\right)$ является отрицательным. Для нормальных благ функция Энгеля является возрастающей, т.е. $\frac{\partial x_i^m}{\partial M}>0$, а значит, прямой эффект

дохода $\left(\frac{-\partial x_i^m}{\partial M} \bullet x_i^m\right)$ будет отрицательным и сонаправленным с эффектом замещения, способствуя, тем самым, сокращению спроса на товар при увеличении его цены и, наоборот, снижению спроса при повышении цены. Для инферiорных товаров функция Энгеля – убывающая, т.е. $\frac{\partial x_i^m}{\partial M} < 0$, а значит, прямой эффект дохода $\left(\frac{-\partial x_i^m}{\partial M} \bullet x_i^m\right)$ окажется положительным, действующим в противоположном направлении по отношению к эффекту замещения. Будучи меньше эффекта замещения по абсолютной величине, эффект дохода, тем самым, сократит воздействие общего эффекта цены. Если же эффект дохода, связанный с изменением цены инферiорного блага, окажется больше эффекта замещения по абсолютному значению, то закон спроса перестанет действовать, и объем спроса изменится в том же направлении, что и рыночная цена. Случай товара Гиффена, который соответствует данной ситуации исключения из закона спроса будет подробнее проанализирован ниже.

При $i \neq j$ имеем уравнения Слуцкого для перекрестных эффектов:

$$\frac{\partial x_1^m(p_1,p_2,M)}{\partial p_2} = \frac{\partial x_1^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_2} - \frac{\partial x_1^m(p_1,p_2,M)}{\partial M} \bullet x_2^m\left(p_1,p_2,M\right), (3.8)$$

$$\frac{\partial x_2^m(p_1,p_2,M)}{\partial p_1} = \frac{\partial x_2^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_1} - \frac{\partial x_2^m(p_1,p_2,M)}{\partial M} \bullet x_1^m\left(p_1,p_2,M\right). (3.9)$$

Используя теорему о симметричности коэффициентов замещения (2.68), можно записать уравнение Слуцкого для перекрестных эффектов в следующей замкнутой форме:

$$\frac{\partial x_1^m(p_1,p_2,M)}{\partial p_2} + \frac{\partial x_1^m(p_1,p_2,M)}{\partial M} \bullet x_2^m(p_1,p_2,M) = \frac{\partial x_2^m(p_1,p_2,M)}{\partial p_1} + \frac{\partial x_2^m(p_1,p_2,M)}{\partial M} \bullet x_1^m\left(p_1,p_2,M\right).$$

Проиллюстрируем уравнение Слуцкого (3.6) на примере функции полезности Кобба-Дугласа $U = \sqrt{x_1 x_2}$, когда функция спроса по Хиксу имеет вид (1.66), а по Маршаллу – (1.40). Эффекты замещения и дохода будут соответственно равны: $\frac{\partial x_1^h}{\partial p_1} = \frac{-p_2^{1/2}}{2p_1^{3/2}}\sqrt{x_1 x_2} = \frac{-p_2^{1/2}}{2p_1^{3/2}}\sqrt{\frac{M}{2p_1}\frac{M}{2p_2}} = \frac{-M}{4p_1^2}$, $-x_1\frac{\partial x_1^m}{\partial M} = \frac{-M}{2p_1}\frac{1}{2p_1} = \frac{-M}{4p_1^2}$. Таким образом, в полном соответствии с уравнением Слуцкого данные два эффекта в сумме будут равны общему эффекту цены:

$$\frac{\partial x_1^h}{\partial p_1} - x_1\frac{\partial x_1^m}{\partial M} = \frac{-M}{2p_1^2} = \frac{\partial x_1^m}{\partial p_1}.$$

Домножив левую и правую части (3.5) на цену *j*-го и разделив на объем потребления *i*-го товара, а также умножив и поделив последнее слагаемое на величину дохода:

$$\frac{\partial x_i^m}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_i} = \frac{dx_i^h}{dp_j}\frac{p_j}{x_i} - \frac{x_j p_j}{M}\frac{\partial x_i^m}{\partial M}\frac{M}{x_i}; i,j = 1,2;$$

можно переписать уравнение Слуцкого в коэффициентах эластичности:

$$E_{p_j}^{d_i} = E_{p_j}^{d_i^h} - \rho_j E_M^{d_i}; i,j = 1,2;$$

где $E_{p_j}^{d_i} = \frac{\partial x_i^m}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_i}$ и $E_M^{d_i} = \frac{\partial x_i^m}{\partial M}\frac{M}{x_i}$ – эластичности маршаллианского спроса на *i*-е благо соответственно по цене товара *j* и по доходу потребителя, $E_{p_j}^{d_i^h} = \frac{dx_i^h}{dp_j}\frac{p_j}{x_i}$ – эластичность компенсированного спроса на *i*-е благо по цене товара *j*, ρ_j – доля расходов на *j*-й товар в доходе потребителя.

При $i = j$ имеют место уравнения Слуцкого с прямыми эластичностями спроса:

$$E_{p_1}^{d_1} = E_{p_1}^{d_1^h} - \rho_1 E_M^{d_1}, (3.10)$$

$$E_{p_2}^{d_2} = E_{p_2}^{d_2^h} - \rho_2 E_M^{d_2}. (3.11)$$

При $i \neq j$ имеем уравнения Слуцкого для перекрестных эластичностей спроса:

$$E_{p_2}^{d_1} = E_{p_2}^{d_1^h} - \rho_2 E_M^{d_1}, (3.12)$$

$$E_{p_1}^{d_2} = E_{p_1}^{d_2^h} - \rho_1 E_M^{d_2}. (3.13)$$

Домножив уравнения Слуцкого в коэффициентах эластичности (3.10) и (3.13) на доли соответственно первого (ρ_1) и второго (ρ_2) блага в расходах потребителя, затем преобразовав их:

$$\rho_1 E_{p_1}^{d_1} + \rho_1^2 E_M^{d_1} = \rho_1 E_{p_1}^{d_1^h}, \rho_2 E_{p_1}^{d_2} + \rho_1\rho_2 E_M^{d_2} = \rho_2 E_{p_1}^{d_2^h},$$

сложим почленно полученные уравнения:

$$\rho_1 E_{p_1}^{d_1} + \rho_2 E_{p_1}^{d_2} + \rho_1\left(\rho_1 E_M^{d_1} + \rho_2 E_M^{d_2}\right) = \rho_1 E_{p_1}^{d_1^h} + \rho_2 E_{p_1}^{d_2^h}.$$

Обратим внимание на то, что, в силу закона Курно (1.54), сумма первых двух слагаемых в левой части равна доли первого товара со знаком минус, а по закону Энгеля (1.48) выражение в скобках равно единице, следовательно, вся левая часть данного выражения аннулируется.

Аналогичным образом, домножив уравнения Слуцкого в коэффициентах эластичности (3.11) и (3.12) на доли соответственно второго (ρ_2) и первого (ρ_1) блага в расходах потребителя, затем преобразовав их:

$$\rho_1 E_{p_2}^{d_1} + \rho_1\rho_2 E_M^{d_1} = \rho_1 E_{p_2}^{d_1^h}, \rho_2 E_{p_2}^{d_2} + \rho_2^2 E_M^{d_2} = \rho_2 E_{p_2}^{d_2^h}.$$

сложим почленно полученные уравнения:

$$\rho_1 E_{p_2}^{d_1} + \rho_2 E_{p_2}^{d_2} + \rho_2 \left(\rho_1 E_M^{d_1} + \rho_2 E_M^{d_2} \right) = \rho_1 E_{p_2}^{d_1^h} + \rho_2 E_{p_2}^{d_2^h}.$$

Обратим внимание на то, что, в силу закона Курно (1.54), сумма первых двух слагаемых в левой части равна доли второго товара со знаком минус, а по закону Энгеля (1.48) выражение в скобках равно единице, следовательно, вся левая часть данного выражения аннулируется.

Таким образом получаем, что сумма эластичностей компенсированного спроса на все товары по цене одного из них, взвешенных по долям соответствующих благ, равна нулю:

$$\rho_1 E_{p_1}^{d_1^h} + \rho_2 E_{p_1}^{d_2^h} = 0, \rho_1 E_{p_2}^{d_1^h} + \rho_2 E_{p_2}^{d_2^h} = 0.$$

Декомпозиция общего эффекта изменения цены на эффекты дохода и замещения в концепции Дж.Р. Хикса для случая нормальных благ показана на рис. 3.4. Пусть изначально потребительский набор E_1 являлся оптимальным для потребителя, расходующего весь свой номинальный доход M на два нормальных товара по ценам p_1 и p_2. При снижении цены первого товара бюджетное ограничение поворачивается против часовой стрелки вокруг точки пересечения с осью второго блага из исходного положения 1 в новое положение 2. Снижение цены первого товара привело к расширению бюджетного множества, снижению абсолютного значения углового коэффициента бюджетной линии и перемещению равновесия потребителя в точку E_2. Изменение величины спроса $\Delta x_1 = x_1^2 - x_1^1$, произошедшее в результате снижения цены, содержит в себе эффекты дохода и замещения.

Тогда точка E_3 будет представлять собой вспомогательный оптимум, который мог бы иметь место, если бы на величину спроса действовал только эффект замещения.

Для того, чтобы оценить влияние эффекта замещения на величину спроса, следует элиминировать влияние эффекта дохода, предположив, что реальный доход при изменении цены не меняется. С этой целью на графике нужно построить третью, вспомогательную бюджетную линию с угловым коэффициентом, равным по абсолютной величине новому соотношению цен, т.е. параллельно новому, второму бюджетному ограничению, таким образом, чтобы данная вспомогательная бюджетная линия касалась исходной кривой безразличия $\overline{U}_1$. Это будет означать, что мы возвращаем потребителя на прежний уровень полезности и, следовательно, определяем величину номинального дохода, которая при изменившейся цене первого товара позволила бы потребителю сохранить прежний уровень реального дохода. Перемещение вдоль первоначальной кривой безразличия $\overline{U}_1$ от исходного оптимума E_1 к вспомогательному оптимуму E_3 показывает эффект замещения. Действительно, если равновесный потребительский набор соответствует точке E_3, то реальный доход потребителя остается неизменным, так как точка E_3, как и точка E_1, принадлежит кривой безразличия $\overline{U}_1$. Величина спроса на товары меняется только вследствие изменения соотношения их цен.

Однако итоговым оптимальным потребительским решением стал не набор E_3, а набор E_2, соответствующий более высокому уровню реального дохода и принадлежащий кривой безразличия $\overline{U}_2$. Причем, став реально богаче, потребитель смог позволить себе при новом соотношении цен приобрести количественно больше как первого, так и второго товара. Таким образом, переход на более высокую кривую безразличия $\overline{U}_2$ от точки E_3 к конечному оптимуму E_2 за счет параллельного сдвига бюджетного ограничения из положения 3 в положение 2 характеризует эффект дохода.

На рис. 3.4 через OIE и OSE обозначены, соответственно, прямые эффекты дохода и замещения, отражающие изменение спроса на данный товар при изменении его цены [2]; а через CIE, CSE – перекрестные эффекты дохода и замещения, отражающие изменение спроса на другое благо при изменении цены данного товара [3].

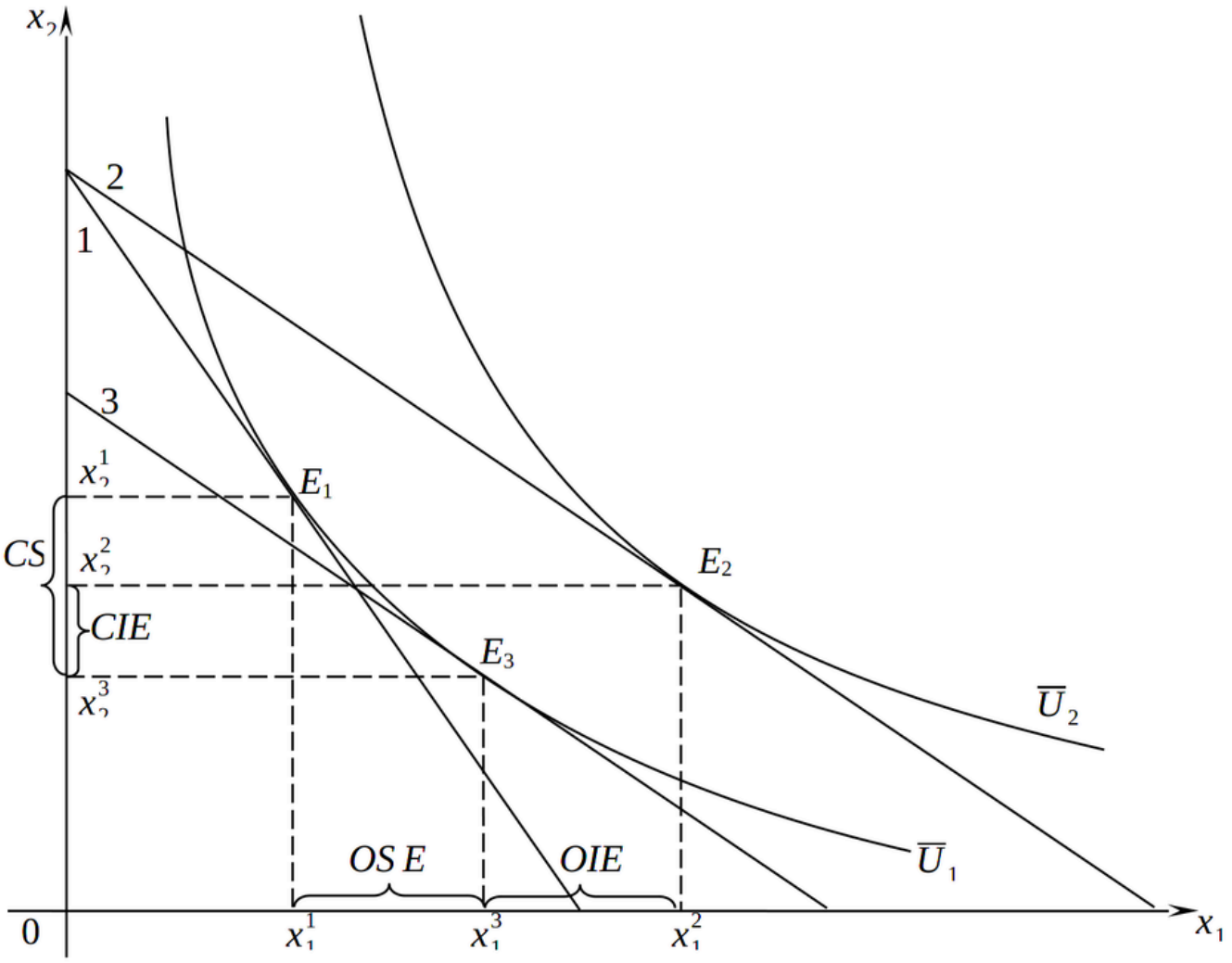


Рисунок 3.4. Эффекты дохода и замещения для нормального блага

Обратим внимание на то, что для нормального товара при понижении его цены и эффект замещения, и эффект дохода действуют в сторону увеличения величины спроса, усиливая друг друга, т.е. $\Delta x_1^s = x_1^3 - x_1^1 > 0$, $\Delta x_1^I = x_1^2 - x_1^3 > 0$ и $\Delta x_1 = x_1^2 - x_1^1 > 0$. Соответственно, рассматривая случай повышения цены нормального товара, будем иметь уменьшение величины спроса вследствие действия обоих эффектов: $\Delta x_1^s < 0$, $\Delta x_1^I < 0$ и $\Delta x_1 < 0$.

Допустим, например, что предпочтения потребителя описываются функцией полезности Кобба-Дугласа вида: $U = x_1^{½} x_2^{¾}$. Пусть денежный доход потребителя составляет 100 (ден.ед.); цена первого товара первоначально равнялась 4 (ден.ед.), а затем снизилась до 2 (ден.ед.), тогда как цена второго – неизменна и составляет 3 (ден.ед.). Первоначальные объемы потребления товаров (при $p_1^1 = 4$, $p_2 = 3$) рассчитываем исходя из эквимаржинального принципа $\frac{MU_1}{MU_2} = \frac{2x_2}{3x_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{4}{3}$, или $x_2 = 2x_1$; а также бюджетного ограничения $4x_1 + 3x_2 = 10x_1 = 100$. Следовательно, вначале объемы потребления благ были таковы: $x_1 = 10$, $x_2 = 20$. При этом уровень полезности индивида $\overline{U}_0$ был приблизительно равен 29,9.

При изменившейся цене первого товара ($p_1^2 = 2$) пересчитываем условия оптимальности: $\frac{MU_1}{MU_2} = \frac{2x_2}{3x_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{2}{3}$, т.е. $x_2 = x_1$, и $2x_1 + 3x_2 = 5x_1 = 100$. Значит, объем потребления первого блага возрастет до 20 и сравняется с количеством второго товара, а уровень полезности индивида $\overline{U}_1$ составит примерно 42,29.

Рассчитаем вспомогательный оптимум, когда при новом соотношении цен, т.е. при $x_2 = x_1$ (в силу эквимаржинального принципа), потребитель должен остаться на исходном уровне полезности: $\overline{U}_0 = x_1^{½} x_2^{¾} = x_1^{\frac{5}{4}} = 29,9$. Получаем $x_1 = x_2 \approx 15,15$. Таким образом, получаем величины прямых эффектов дохода и замещения по Хиксу:

$$OSE \approx 5,15;\ OIE \approx 4,85. (3.14)$$

При снижении p_1 данный товар становится относительно более дешевым, а второй – относительно более дорогим, поэтому за счет перекрестного эффекта замещения спрос на него снижается. Перекрестный эффект дохода уравновешивает перекрестный эффект замещения, и общий перекрестный эффект оказывается нулевым.

Поскольку при строгой выпуклости кривых безразличия к началу координат собственные коэффициенты замещения представляют собой отрицательные величины (1.81), постольку эффект замещения всегда направлен в сторону, противоположную изменению цены: с уменьшением цены за счет эффекта замены происходит увеличение величины спроса, а с увеличением цены за счет эффекта замены происходит уменьшение величины спроса. Что касается эффекта дохода, то он может «работать» как

сонаправленно с изменением цены, так и разнонаправленно. Направление действия эффекта дохода зависит от категории, к которой относится товар, цена которого изменяется.

Если для нормальных товаров эффекты дохода и замещения сонаправлены, то для инферiорных – противоположно направлены.

Прямые эффекты дохода и замещения для худшего блага, для которого выполняется закон спроса, проиллюстрированы на рис. 3.5. Пусть потребитель считает первое благо некачественным товаром. При снижении цены первого товара произойдет перемещение оптимума из точки E_1 в точку E_2 и построение вспомогательного бюджетного ограничения даст вспомогательный оптимум E_3. Разложение эффекта цены на эффекты дохода и замещения будет следующим: за счет эффекта замещения величина спроса на данный товар увеличится (потребитель при новом соотношении цен купит больше дешевого товара), а за счет эффекта дохода уменьшится, поскольку при произошедшем росте реального дохода потребитель уменьшит величину спроса на некачественный товар. Однако величина эффекта цены будет положительной, так как абсолютно эффект замещения превышает эффект дохода, т.к. закон спроса в случае с данным некачественным товаром продолжает действовать: снижение цены приводит к росту величины спроса, а повышение цены приводит к снижению величины спроса.

В итоге при понижении цены инферiорного блага, для которого закон спроса остается в силе, имеем: $\Delta x_1^s = x_1^3 - x_1^1 > 0$, $\Delta x_1^I = x_1^2 - x_1^3 < 0$ и $\Delta x_1 = x_1^2 - x_1^1 > 0$, т.к. $|\Delta x_1^s| > |\Delta x_1^I|$; при повышении цены соответственно: $\Delta x_1^s < 0$, $\Delta x_1^I > 0$ и $\Delta x_1 < 0$.

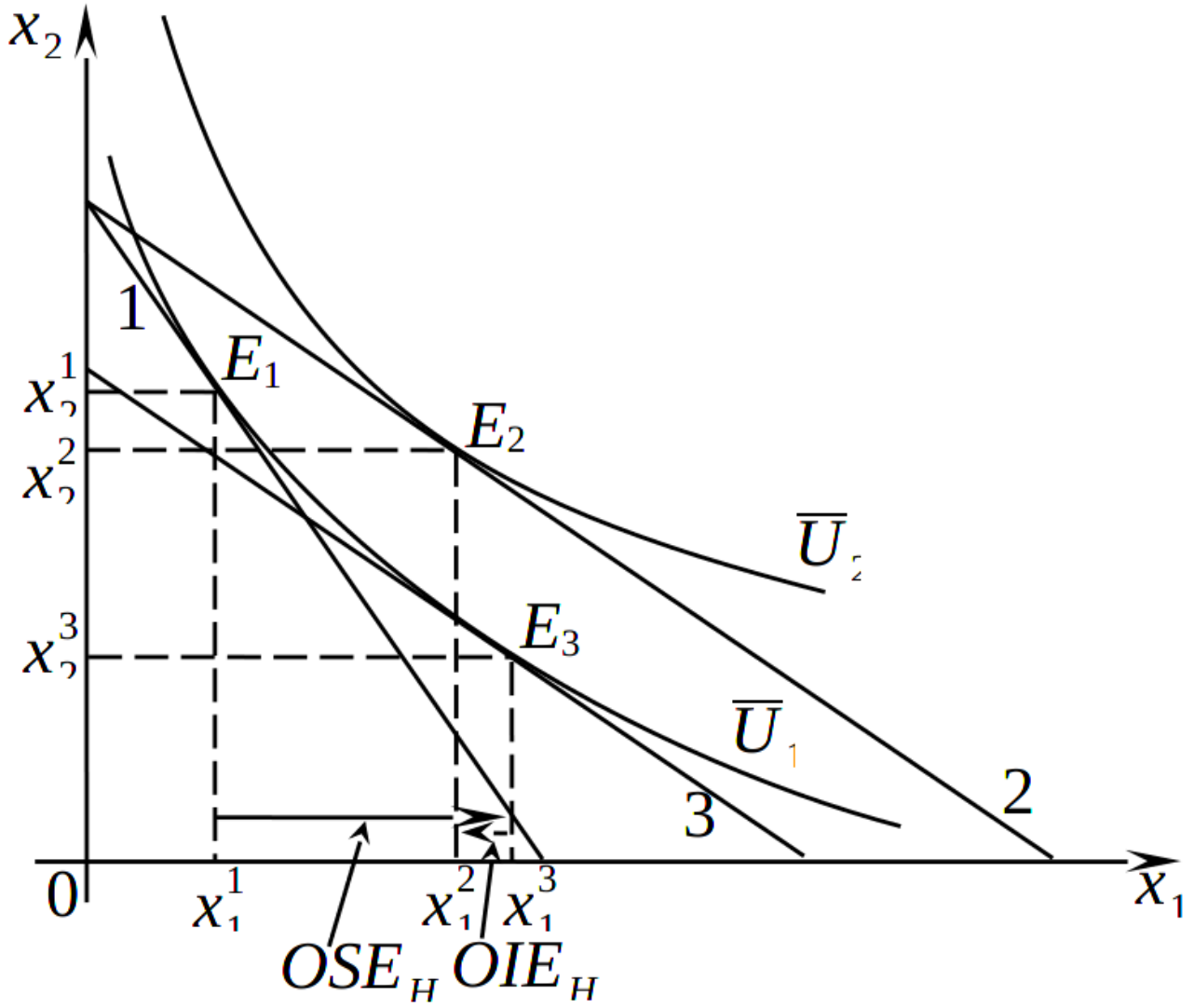


Рисунок 3.5. Эффекты дохода и замещения для инферiорного блага, не являющегося товаром Гиффена

Особую группу среди инферiорных благ составляют товары Гиффена, для которых эластичность спроса по доходу является отрицательной величиной. Товар Гиффена – это инферiорное благо, занимающее существенную долю в расходах относительно бедного потребителя, для которого эффект дохода действует в противоположном направлении и является более мощным по отношению к эффекту замещения. Пусть благо Гиффена – это первый из товаров в потребительской корзине. Тогда для него в уравнении Слуцкого в коэффициентах эластичности (3.10) $E_M^{d_1} < 0$ и, поскольку величина ρ_1 является очень существенной, постольку $E_{p_1}^{d_1^h} < \rho_1 E_M^{d_1}$, что приводит к тому, что $E_{p_1}^{d_1} > 0$.

Рис. 1.64 демонстрирует прямые эффекты дохода и замещения для первого товара, являющегося благом Гиффена. При снижении цены товара произойдет перемещение оптимума из точки E_1 в точку E_2 и построение вспомогательного бюджетного ограничения

даст вспомогательный оптимум E_3. За счет эффекта замены величина спроса на первый товар несколько увеличится, а за счет эффекта дохода значительно уменьшится, поскольку при произошедшем росте реального дохода потребитель резко уменьшит величину спроса на данное худшее благо. Величина эффекта цены будет отрицательной, так как эффекты замещения и дохода при изменении цены данного товара Гиффена действуют в противоположных направлениях, и эффект дохода по абсолютной величине превышает эффект замещения. Закон спроса в случае с товаром Гиффена нарушается: снижение цены приводит к снижению величины спроса, а повышение цены приводит к росту величины спроса. При понижении цены данного (первого) товара имеем: $\Delta x_1^s = x_1^3 - x_1^1 > 0$, $\Delta x_1^I = x_1^2 - x_1^3 < 0$ и $\Delta x_1 = x_1^2 - x_1^1 < 0$, т.к. $|\Delta x_1^s| < |\Delta x_1^I|$; при повышении цены соответственно: $\Delta x_1^s < 0$, $\Delta x_1^I > 0$ и $\Delta x_1 > 0$.

Таким образом, товар Гиффена представляет собой исключение из закона спроса. Для такого блага при снижении его цены линия “цена-потребление” будет характеризовать убывающую зависимость объема потребления второго блага в потребительской корзине от количества товара Гиффена, а соответствующая функция спроса является возрастающей (рис. 3.6). Соответственно, коэффициент эластичности спроса по цене для благ Гиффена принимает положительные значения.

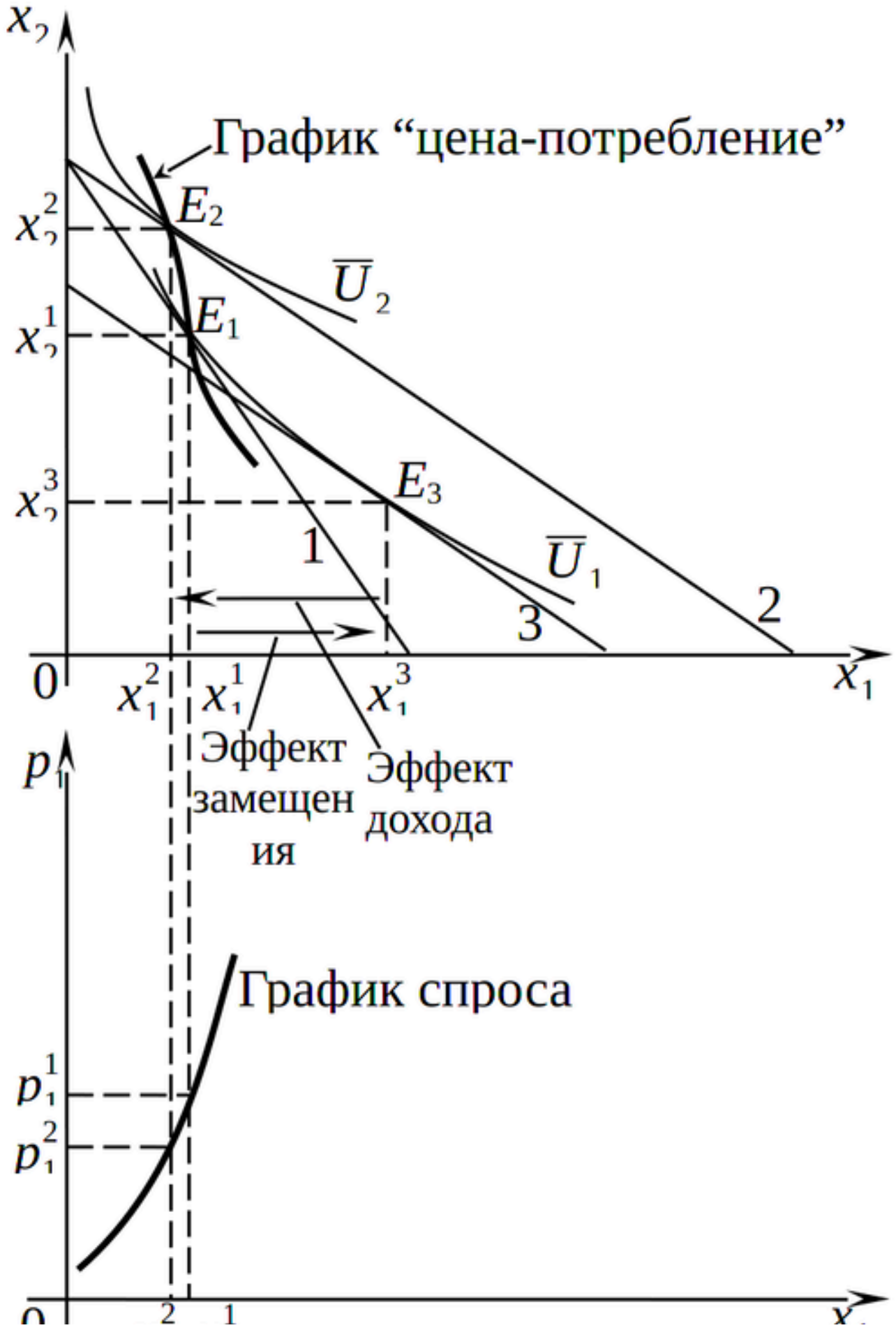

x_2
График “цена-потребление”
E_2
x_2^2
$\overline{U}_2$
E_1
x_2^1
E_3
x_2^3
1
$\overline{U}_1$
2
3
0
x_1^2
x_1^1
x_1^3
x_1
Эффект замещения
Эффект дохода
p_1
График спроса
p_1^1
p_1^2
0
2
1
x_1



Рисунок 3.6. Спрос на товар Гиффена

БОЛЬШАЯ РОССИЙСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ | Заглянем в Большую российскую энциклопедию: Благо Гиффена

Рассмотрим в качестве примера предпочтения потребителя, описываемые функцией полезности:

$$U = \min\{x_1\left(x_2^2+1\right), 2x_2 + x_1\} = \begin{bmatrix} x_1\left(x_2^2+1\right) при x_2 \le \frac{2}{x_1}, \\ 2x_2 + x_1 при x_2 > \frac{2}{x_1}. \end{bmatrix}$$

Покажем, что данная функция полезности может иллюстрировать поведение потребителя по Гиффену [4].

Рассмотрим первый из сегментов соответствующих кривых безразличия:

$$x_2 = \sqrt{\frac{\overline{U}}{x_1} - 1}.$$

Он представляет собой убывающую зависимость между объемами потребления второго и первого товаров:

$$\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{U=const=\overline{U}} = \frac{-\overline{U}}{2\sqrt{\overline{U}x_1^3 - x_1^4}} < 0.$$

Отметим, что $\lim\limits_{x_1 \to 0} \frac{dx_2}{dx_1} = -\infty$.

Кроме того, предпочтения на данном сегменте кривых безразличия не являются выпуклыми: $\frac{d^2x_2}{dx_1^2}\Big|_{U=\overline{U}} = \frac{\overline{U}\left(3\overline{U}-4x_1\right)}{4x_1^{\frac{5}{2}}\left(\overline{U}-x_1\right)^{\frac{3}{2}}} \le 0$ при $x_2 \le \frac{\sqrt{3}}{3}$ и, наоборот, $\frac{d^2x_2}{dx_1^2}\Big|_{U=\overline{U}} > 0$ при $x_2 > \frac{\sqrt{3}}{3}$. Таким образом, на линии $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ располагаются точки перегиба первого сегмента кривых безразличия (рис. 3.7, верхняя часть).

При достаточно низких уровнях полезности может отсутствовать пересечение линии безразличия $x_2 = \sqrt{\frac{\overline{U}}{x_1} - 1}$ с гиперболой $x_2 = \frac{2}{x_1}$. Тогда кривая безразличия целиком будет представлять собой данную, нелинейную зависимость, располагаясь при этом под гиперболой $x_2 = \frac{2}{x_1}$. Примером служит кривая безразличия, соответствующая уровню полезности $\overline{U}_1$, в верхней части рис. 3.7.

При более высоких уровнях полезности, когда имеют место две точки пересечения графика $x_2 = \sqrt{\frac{\overline{U}}{x_1} - 1}$ с гиперболой $x_2 = \frac{2}{x_1}$, линия безразличия будет состоять из трех сегментов – двух нелинейных, описываемых зависимостью $x_2 = \sqrt{\frac{\overline{U}}{x_1} - 1}$, по краям и одного линейного $x_2 = \frac{\overline{U}-x_1}{2}$ по середине. Примером могут служить линии безразличия, соответствующие уровням полезности $\overline{U}_2, \overline{U}_3$ и $\overline{U}_4$, в верхней части рис. 3.7.

Из эквимаржинального принципа следует $\frac{MU_1}{MU_2} = \frac{x_2^2+1}{2x_1x_2} = \frac{p_1}{p_2}$, т.е. $x_1 = \frac{p_2x_2}{2p_1} + \frac{p_2}{2p_1x_2}$. Подставляя данное выражение в бюджетное ограничение, получаем квадратное уравнение $3p_2x_2^2 - 2Mx_2 + p_2 = 0$, решениями которого при условии $M \ge \sqrt{3}p_2$ являются следующие объемы потребления товаров:

$$x_1 = \frac{2M \mp \sqrt{M^2-3p_2^2}}{3p_1}, x_2 = \frac{M \pm \sqrt{M^2-3p_2^2}}{3p_2}.$$

Очевидно, что точка, соответствующая меньшему значению x_1 и большему – x_2 (при $M > \sqrt{3}p_2$), находится на выпуклом $\left(\frac{d^2x_2}{dx_1^2}\Big|_{U=const} > 0\right)$, а большему значению x_1 и меньшему – x_2 – на вогнутом $\left(\frac{d^2x_2}{dx_1^2}\Big|_{U=const} < 0\right)$ сегменте кривой безразличия. Следовательно, точкой максимума полезности является корзина E_1 на верхней части рис. 3.7:

$$x_1 = \frac{2M - \sqrt{M^2-3p_2^2}}{3p_1}, x_2 = \frac{M + \sqrt{M^2-3p_2^2}}{3p_2}.$$

В данной точке должно выполняться условие $x_2 \le \frac{2}{x_1}$, из которого следует соотношение между ценами благ и уровнем дохода потребителя: $p_1 \ge \frac{M^2 + M\sqrt{M^2-3p_2^2+3p_2^2}}{18p_2}$.

Данные зависимости оптимальных объемов потребления товаров от их цен удовлетворяют закону спроса $\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1} < 0, \frac{\partial x_2}{\partial p_2} < 0\right)$. При этом начиная с некоторого минимального уровня дохода первый товар является нормальным:

$$\frac{\partial x_1}{\partial M} = \frac{2\sqrt{M^2-3p_2^2} - M}{3p_1\sqrt{M^2-3p_2^2}} > 0, если M > 2p_2.$$

Очевидно, что второй товар здесь является нормальным независимо от уровня дохода.

Когда бюджетное ограничение оказывается достаточно пологим, при $p_1 < \frac{M^2+M\sqrt{M^2-3p_2^2}+3p_2^2}{18p_2}$, оптимальной становится корзина товаров, соответствующая излому кривой безразличия на стыке двух участков анализируемой функции полезности: $x_2 = \frac{2}{x_1}$.

При угловом оптимуме с учетом бюджетного ограничения получаем квадратное уравнение $p_1x_1^2 - Mx_1 + 2p_2 = 0$. Обратим внимание на то, что в силу условия, характеризующего соотношение между доходом потребителя и ценами товаров, действительные корни данного квадратного уравнения будут существовать: $M \geq \sqrt{8p_1p_2}$. Значимым является наименьший из его корней, поскольку большему решению будет соответствовать снижение уровня полезности. Итак, решая данное квадратное уравнение, получаем функции спроса:

$$x_1 = \frac{M-\sqrt{M^2-8p_1p_2}}{2p_1}, x_2 = \frac{M+\sqrt{M^2-8p_1p_2}}{2p_2}.$$

В данной ситуации первое из благ будет товаром Гиффена:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{\left(\frac{M}{2}-\sqrt{\frac{M^2}{4}-2p_1p_2}\right)^2}{2p_1^2\sqrt{\frac{M^2}{4}-2p_1p_2}} > 0.$$

При дальнейшем уменьшении абсолютной величины углового коэффициента бюджетного ограничения, начиная с уровня, равного абсолютному значению тангенса угла наклона прямой линии безразличия $\left(\frac{MU_1}{MU_2} = \frac{1}{2} \geq \frac{p_1}{p_2}\right)$, может возникнуть краевой оптимум E_3, когда потребитель откажется от второго товара (рис. 3.7, верхняя часть), и весь доход будет потрачен на потребление первого блага $\left(x_1 = \frac{M}{p_1}\right)$. Очевидно, что в краевом оптимуме первое благо является нормальным.

При равенстве угловых коэффициентов линии безразличия и бюджетного ограничения возникает еще и множественное равновесие:

$$x_1 = \left(\left[\frac{M-\sqrt{M^2-8p_1p_2}}{2p_1}, \frac{M+\sqrt{M^2-8p_1p_2}}{2p_1}\right], \frac{M}{p_1}\right).$$

Таким образом, для анализируемой функции полезности спрос на первый товар будет немонотонным, неединственным, разрывным:

$$x_1 = \begin{cases} \frac{M}{p_1} при p_1 < \frac{p_2}{2}, \\ \left[\frac{M-\sqrt{M^2-8p_1p_2}}{2p_1}, \frac{M+\sqrt{M^2-8p_1p_2}}{2p_1}\right], \frac{M}{p_1} при p_1 = \frac{p_2}{2}, \\ \frac{M-\sqrt{M^2-8p_1p_2}}{2p_1} при p_1 < \frac{M^2+M\sqrt{M^2-3p_2^2}+3p_2^2}{18p_2}, \\ \frac{2M-\sqrt{M^2-3p_2^2}}{3p_1} при p_1 \geq \frac{M^2+M\sqrt{M^2-3p_2^2}+3p_2^2}{18p_2}. \end{cases}$$

График спроса, состоящий из данных сегментов, который показан в нижней части на рис. 3.7, соответствует графику «цена-потребления», изображенному несколькими наиболее «жирными» линиями в верхней части рис. 3.7. Между первым, идущим от оси $0x_2$ вплоть до точки оптимума E_2, и вторым, линейным, «жирными» сегментами линия «цена потребления» идет по гиперболе $x_2 = \frac{2}{x_1}$, нанесенной на графике пунктиром.

Тезис о социальной обусловленности процессов потребления лежит в русле современных направлений развития теории поведения потребителя, в частности, поведенческой экономики. Фундаментальное значение здесь имеют привычки, традиции общества, его социальная стратификация, в том числе, обусловленная устойчивыми различиями в уровнях дохода различных членов общества, социальных групп, классов. Рассмотренная выше функция полезности иллюстрирует зависимость индивидуального восприятия блага от уровня дохода потребителя. При данного рода индивидуальных предпочтениях первое благо из нормального превращается в товар Гиффена, если доход покупателя, соотнесенный с ценами, превышает определенную величину. При падении цены ниже некоторого порогового значения данное благо начинает расцениваться потребителем в определенном социальном контексте как инферирное, а эффект дохода является настолько сильным, что перевешивает эффект замещения. Однако при дальнейшем снижении цены, начиная с определенного уровня, потребитель, будучи стесненным в денежных средствах, ориентируясь, прежде всего на существенный эффект дохода, принимает решение целиком переключиться на данное благо, которое, тем самым, полностью вытесняет из потребления товар-заменитель.

Следует также обратить внимание на то, что данный пример иллюстрирует разрывность маршаллианского спроса при отсутствии квазивогнутости функции полезности, о чем шла речь выше, в главе 2.

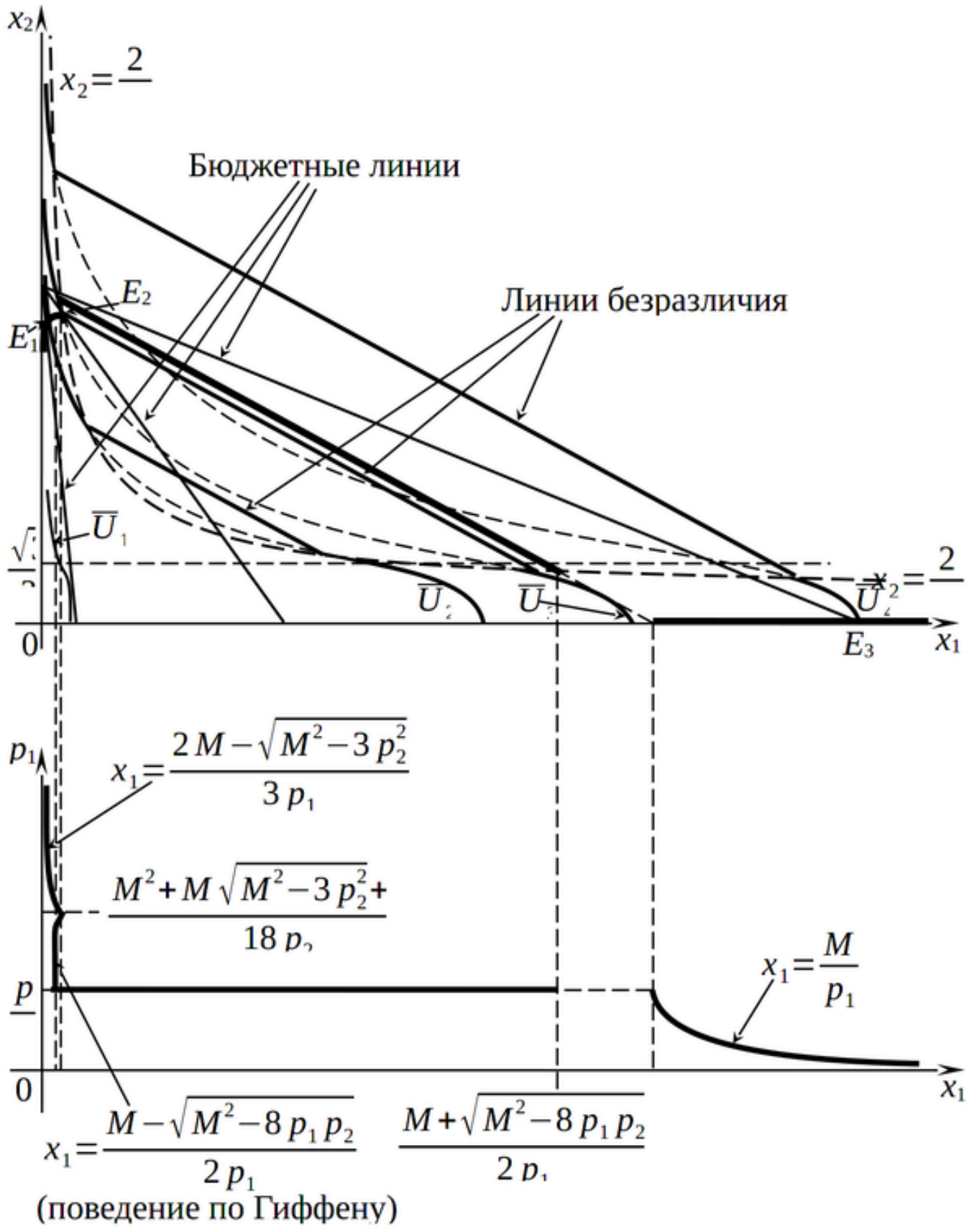


Рисунок 3.7. Графики «цена – потребление» и спроса при поведении по Гиффену

Используя эффекты дохода и замещения, можно осуществить типологизацию хозяйственных благ. Вспомним, что в случае товаров-субститутов, если действует закон спроса, то объем потребления одного блага изменяется в том же направлении, что и цена другого (рис. 3.4). Для комплементарных благ объем покупок одного из них изменяется в направлении, противоположном изменению цены другого при условии, что выполняется закон спроса (рис. 1.61). В координатах потребительского выбора это будет означать, что при снижении цены первого блага новый оптимум должен находиться выше первоначального для взаимодополняющих товаров и ниже первоначального для взаимозаменяющих благ (рис. 3.8). При этом если оба блага являются

нормальными, то новый оптимум будет располагаться на бюджетном ограничении 2 выше и правее вспомогательной точки равновесия E_3, иллюстрирующей эффект замещения (по Хиксу). Если новый оптимум окажется левее точки E_3 на второй бюджетной линии, то первое благо окажется инферирным. Оба блага в потребительской корзине не могут быть инферирными, поэтому при этом второй товар будет нормальным. Если новый оптимум окажется ниже точки E_3 на второй бюджетной линии, то теперь второе благо будет худшим, тогда как первое – нормальным.

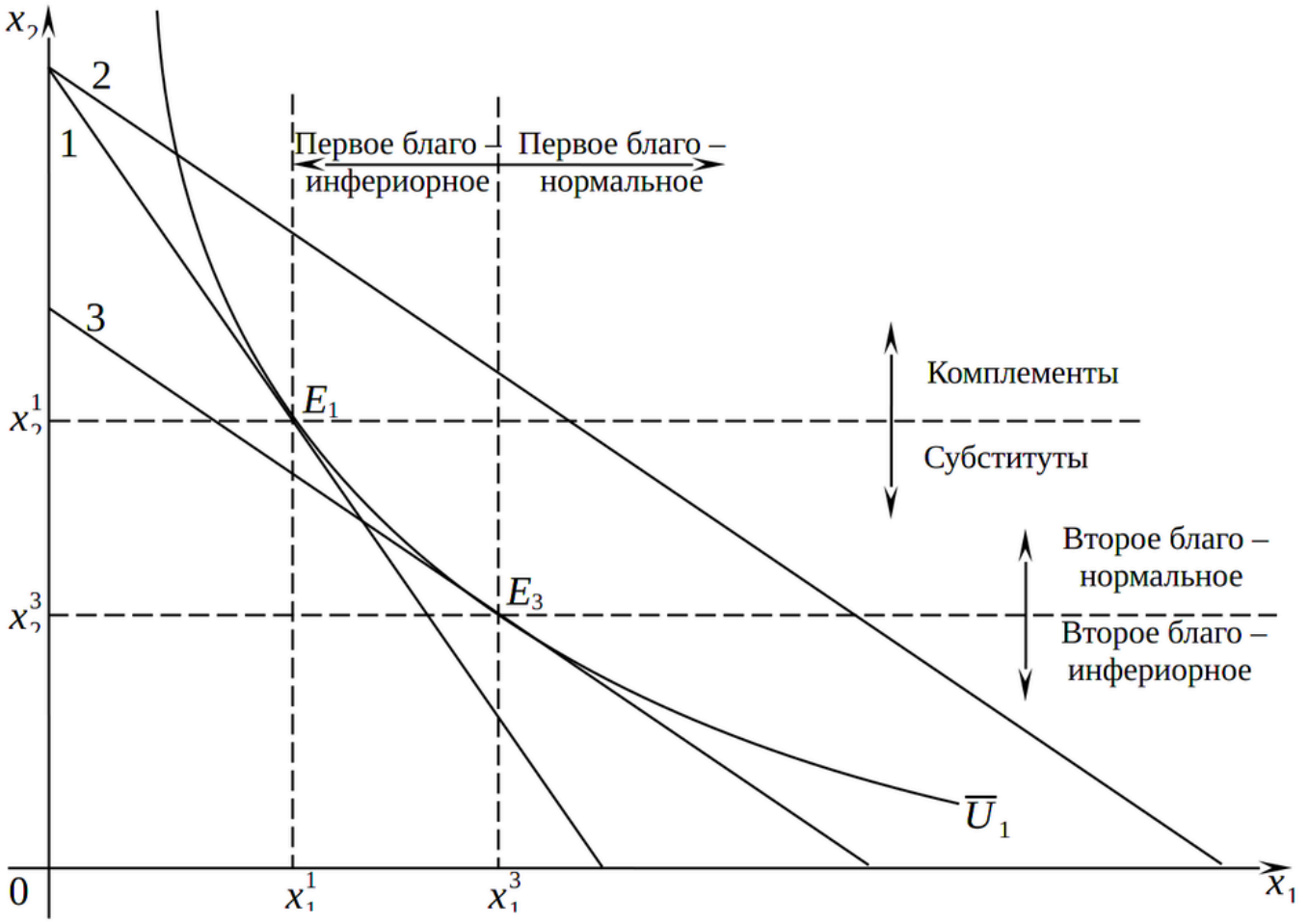
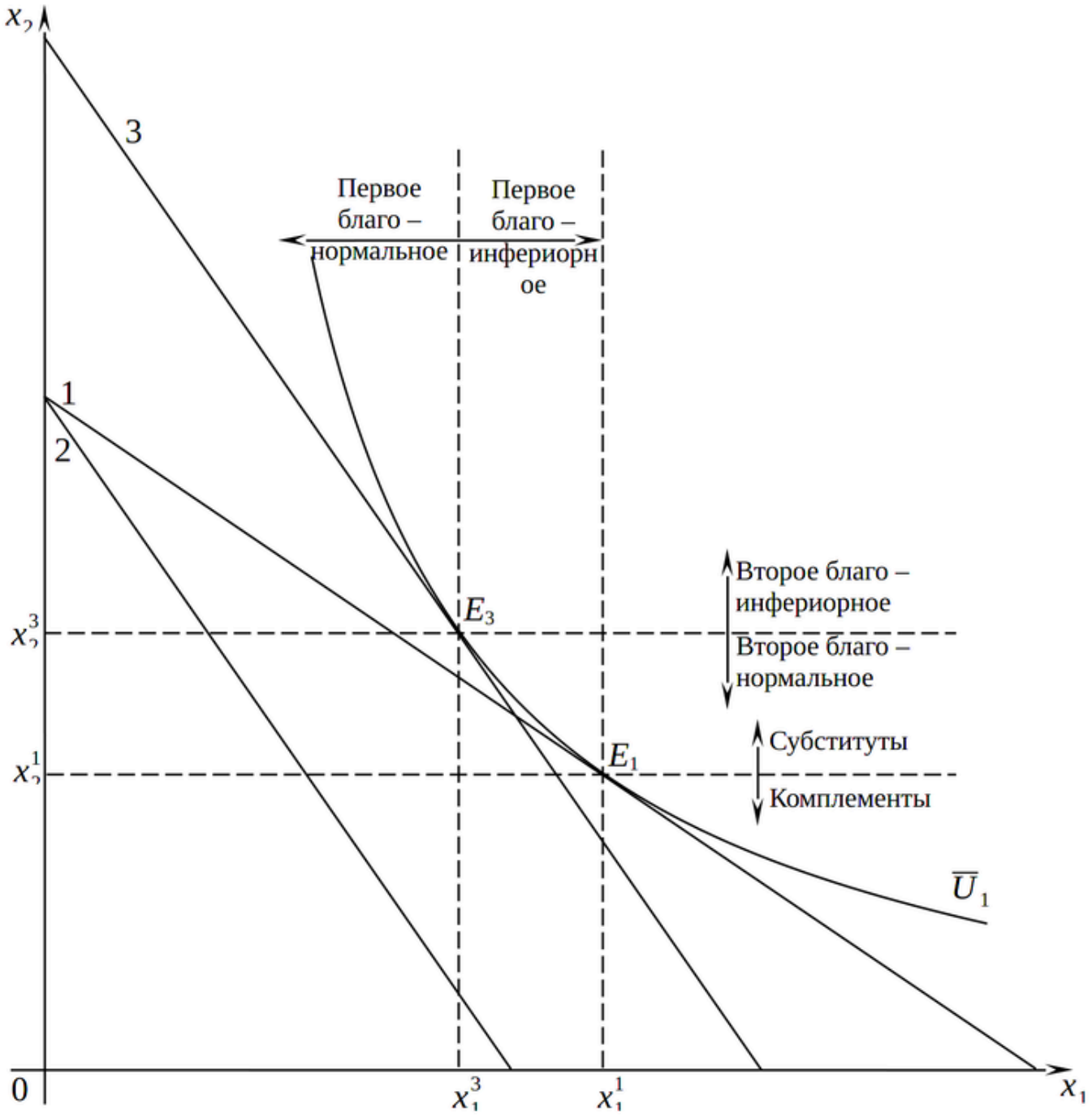


Рисунок 3.8. Типология благ при выполнении закона спроса (случай снижения цены первого блага)

При повышении цены первого блага новый оптимум, наоборот, должен находиться выше первоначального для субститутов и ниже – для комплементов (рис. 3.9). При этом если оба блага являются нормальными, то новый оптимум будет располагаться на бюджетном ограничении 2 ниже и левее вспомогательной точки равновесия E_3, иллюстрирующей эффект замещения (по Хиксу). Если новый оптимум окажется правее точки E_3 на второй бюджетной линии, то первое благо окажется инферирным. Оба блага в потребительской корзине не могут быть инферирными, поэтому при этом второй товар будет нормальным. Если новый оптимум окажется выше точки E_3 на второй бюджетной линии, то теперь второе благо будет худшим, тогда как первое – нормальным.


x_2
3
Первое благо – нормальное
Первое благо – инфериорное
1
2
E_3
x_2^3
Второе благо – инфериорное
Второе благо – нормальное
E_1
x_2^1
Субституты
Комплементы
$\overline{U}_1$
0
x_1^3
x_1^1
x_1

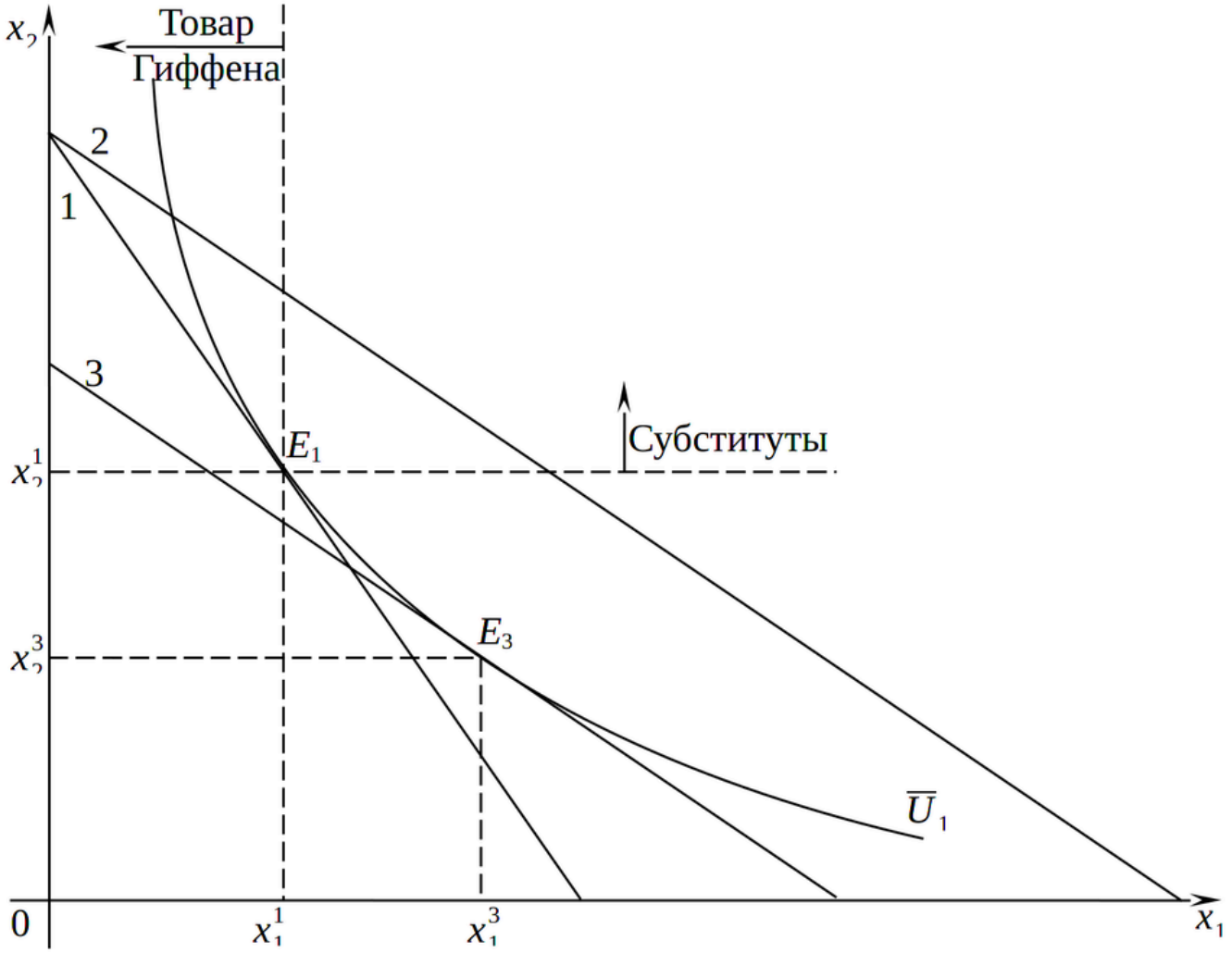


Рисунок 3.9. Типология благ при выполнении закона спроса (случай повышения цены первого блага)

Если же закон спроса не выполняется и одно из благ является товаром Гиффена, то перекрестные эластичности спроса для субститутов и комплементов будут обратных знаков, по сравнению со стандартной ситуацией. Объем потребления товара-заменителя будет изменяться в направлении, противоположном изменению цены товара Гиффена, и перекрестная эластичность спроса будет отрицательной. Объем покупок дополняющего блага будет изменяться в том же направлении, что и цена товара Гиффена, и перекрестная эластичность спроса будет положительной.

В частности, если цена на товар Гиффена снижается, то объем его потребления будет также уменьшаться. При этом объем продаж его субститута будет возрастать (рис. 3.10).

Рисунок 3.10. Типология благ: исключение из закона спроса (случай снижения цены первого блага)

Если цена на товар Гиффена возрастает, то объем его потребления будет также увеличиваться. При этом объем продаж его субститута будет падать расти (рис. 3.11).

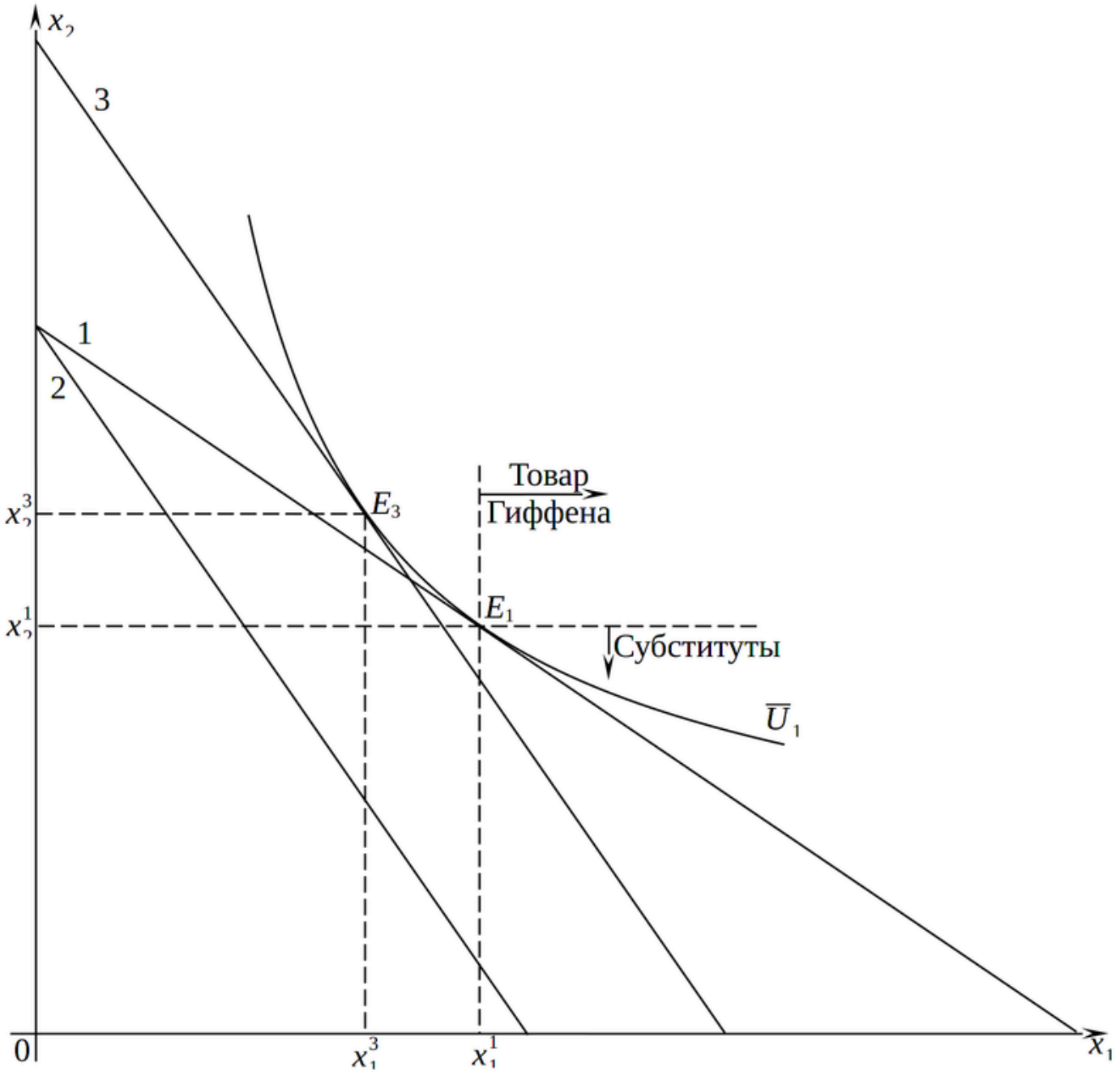


Рисунок 3.11. Типология благ: исключение из закона спроса (случай повышения цены первого блага)

Отрицательность собственных коэффициентов замещения при строгой квазивогнутости функции полезности (1.81), т.е. прямого эффекта замещения (*OSE*), была сформулирована Д.Р. Хиксом как закон компенсированного спроса, «согласно которому действие по крайней мере эффекта замещения всегда приводит к расширению спроса при падении цены, как бы ни тратил свой доход потребитель» [5]. В соответствии с этим законом, изменения цены товара и величины компенсированного спроса на него разнонаправлены. Таким образом, в силу (1.81) функция хиксианского (компенсированного) спроса всегда – для всех типов благ – имеет отрицательный наклон (рис. 3.12-3.17).

При этом кривая хиксианского спроса быстрее убывает (имеет более «крутой» наклон) относительно оси количества товара, по сравнению с маршаллианской кривая спроса для нормальных товаров, так как первая учитывает только эффект замещения, а вторая – как эффект замещения, так и эффект дохода (рис. 3.12-3.13).

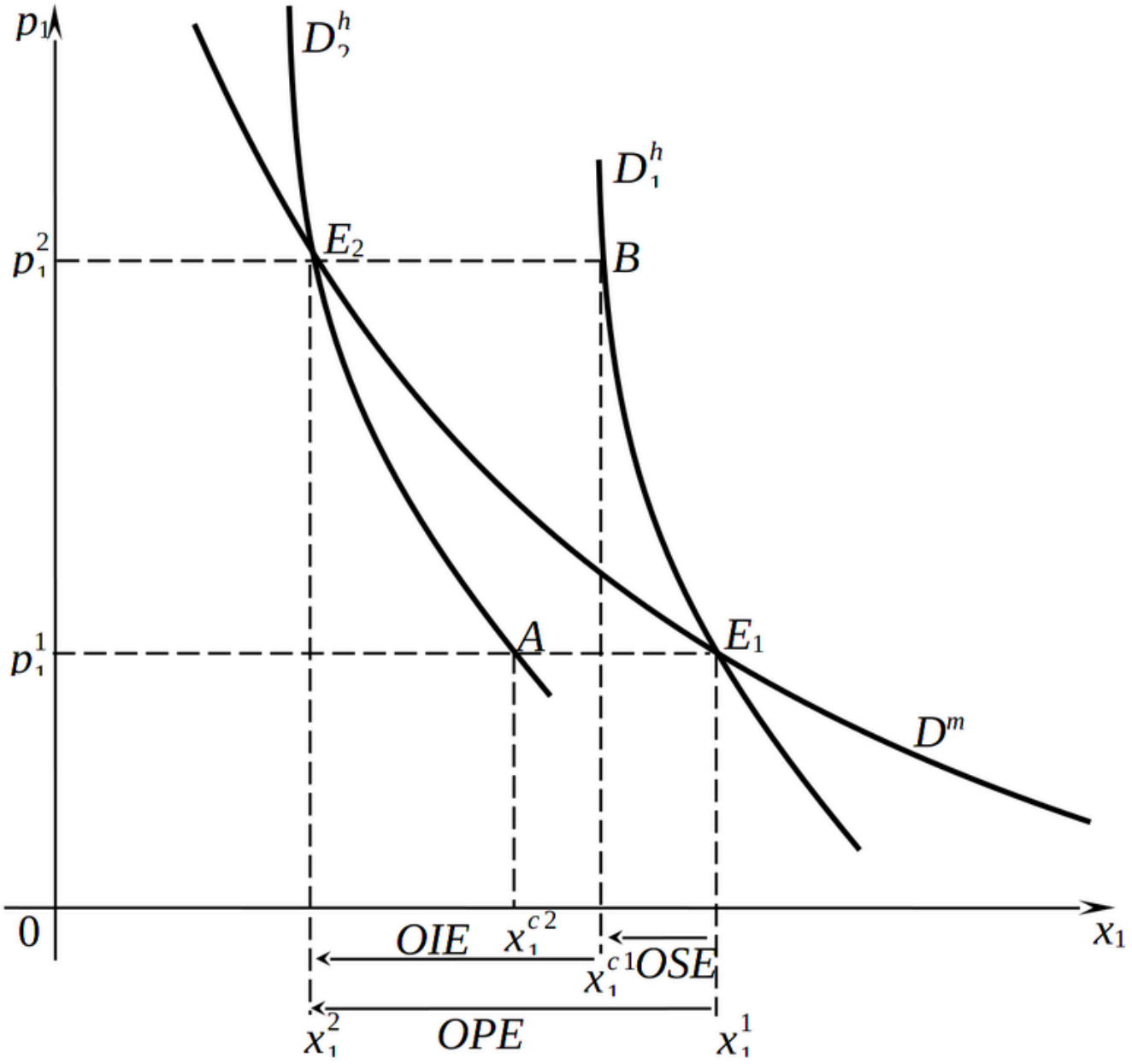


Рисунок 3.12. Кривые маршаллианского и хиксианского спроса для нормального блага (случай роста цены)

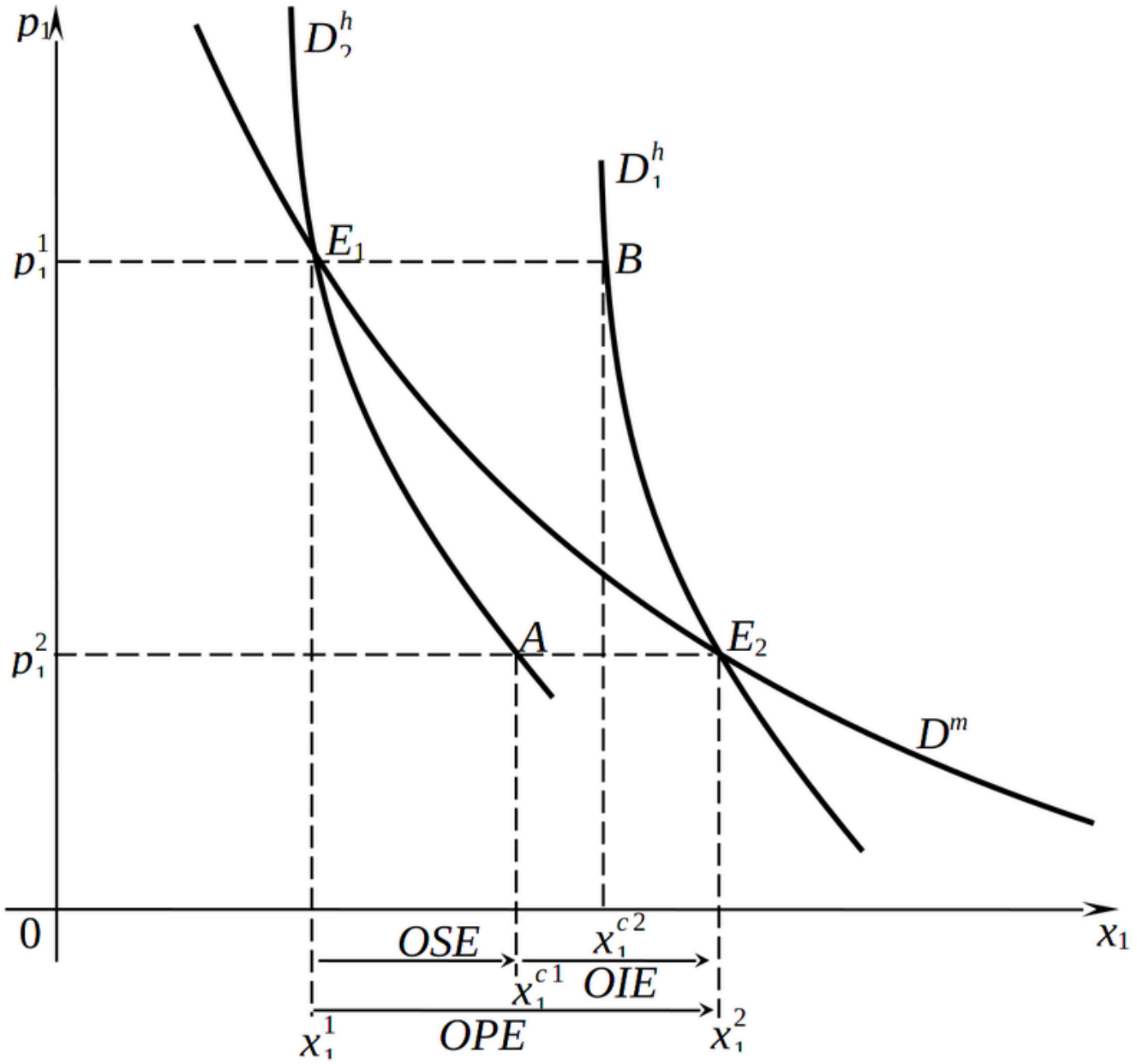


Рисунок 3.13. Кривые маршаллианского и хиксианского спроса для нормального блага (случай снижения цены)

Для обычных инфериорных благ (не являющихся товарами Гиффена), наоборот, кривая компенсированного спроса является более «пологой», т.е. убывает более медленно относительно оси объема потребления блага, по сравнению с маршаллианским спросом, т.к. при формировании спроса по Маршаллу эффект дохода противодействует эффекту замещения (рис. 3.14-3.15).

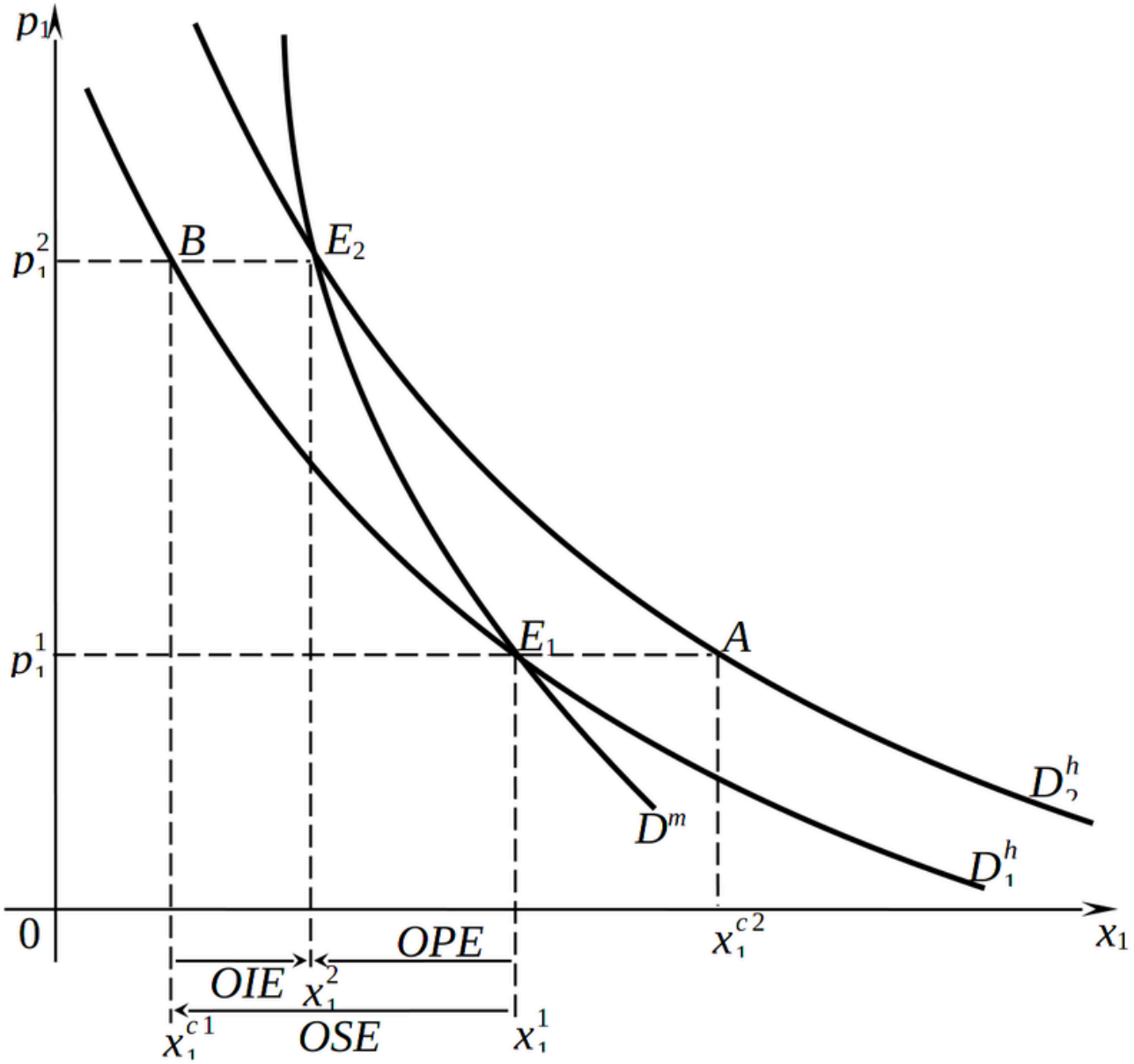


Рисунок 3.14. Кривые маршаллианского и хиксианского спроса для инфериорного блага, не являющегося товаром Гиффена (случай повышения цены)

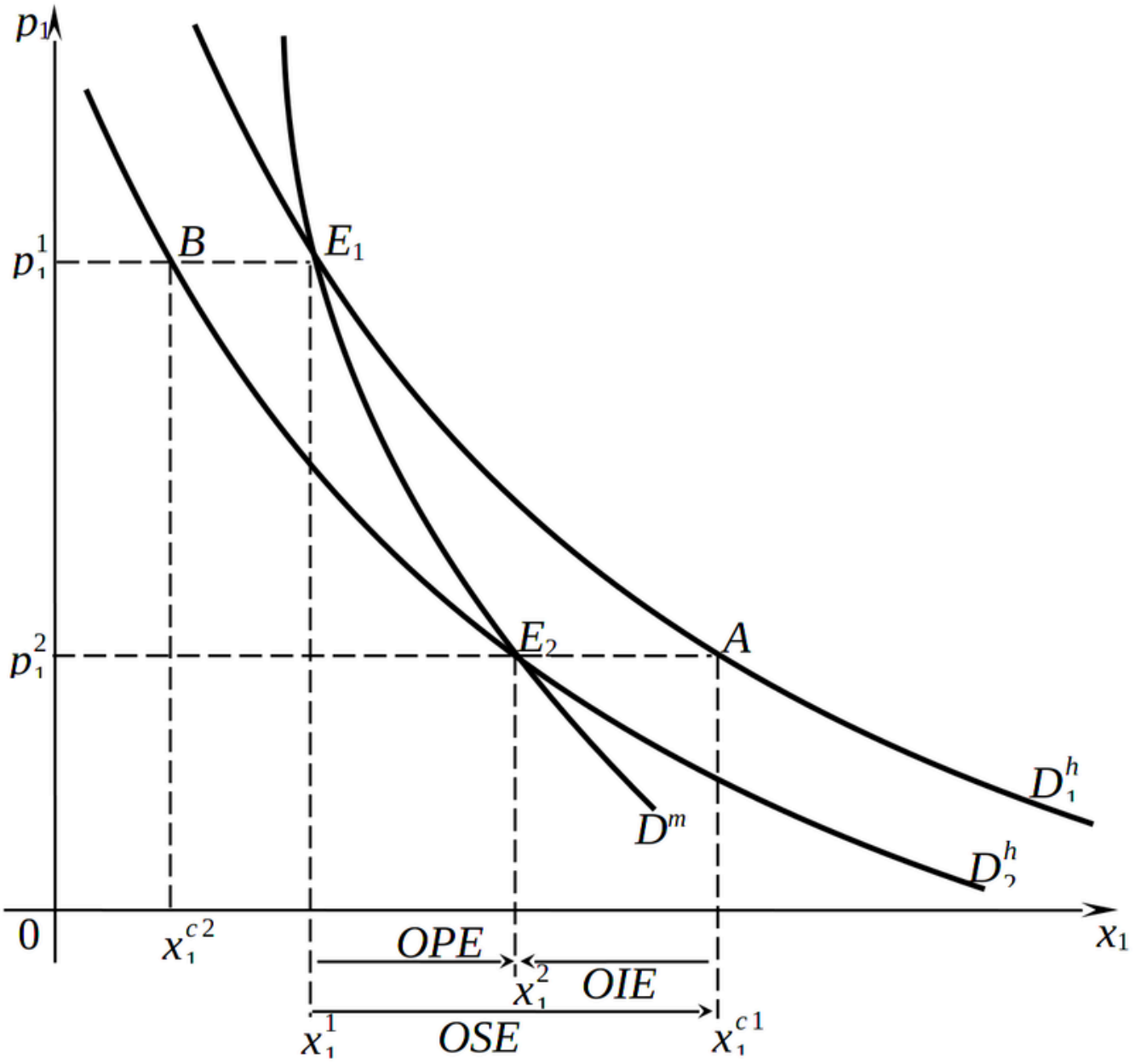


Рисунок 3.15. Кривые маршаллианского и хиксианского спроса для инфериорного блага, не являющегося товаром Гиффена (случай снижения цены)

Наконец, для товаров Гиффена компенсированный спрос представляет собой убывающую зависимость, тогда как марсшаллианский спрос – это возрастающая функция цены от объема потребления блага (рис. 3.16-3.17).

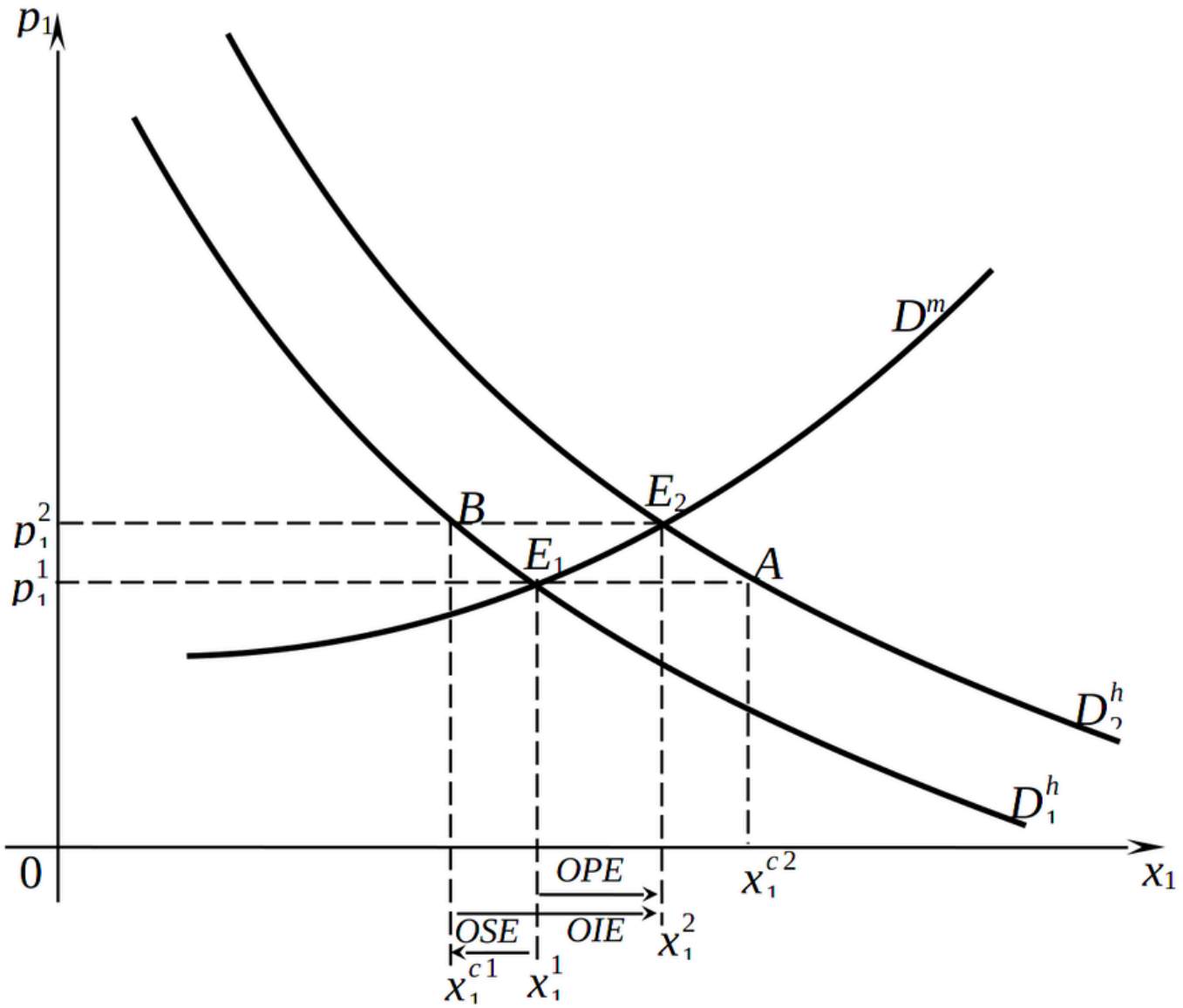


Рисунок 3.16. Кривые маршаллианского и хиксианского спроса для товара Гиффена (случай повышения цены)

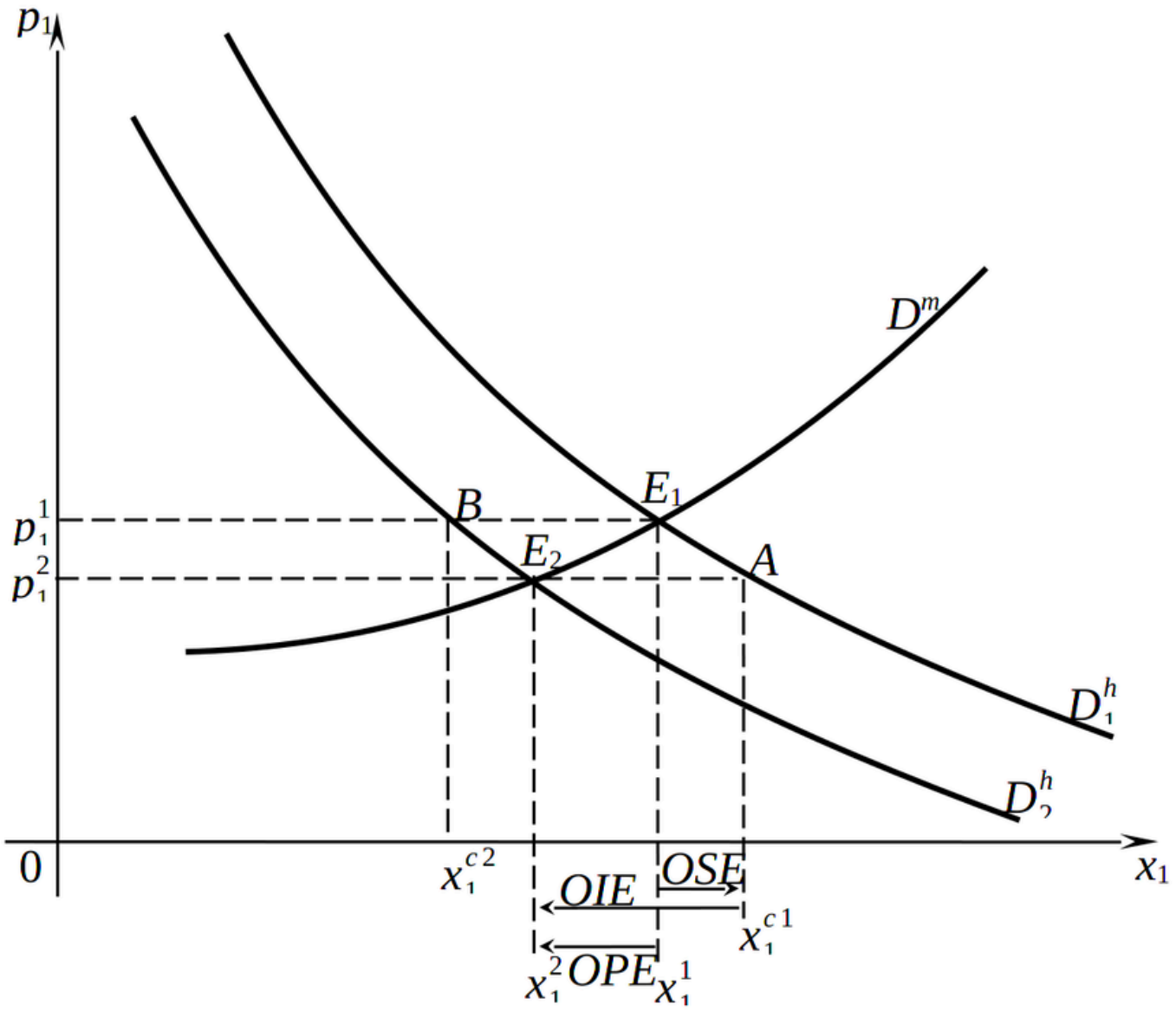


Рисунок 3.17. Кривые маршаллианского и хиксианского спроса для товара Гиффена (случай снижения цены)

В заключение данного раздела рассмотрим, как, используя понятия эффектов дохода и замещения, можно показать влияние различных типов налогообложения на потребительский оптимум. Будем использовать трактовку Хикса неизменности благосостояния индивида.

Покажем графически воздействие на выбор потребителей аккордного, т.е. не зависящего от объема потребления товаров, налога в размере *T*. Исходное бюджетное ограничение, до введения налога, имеет вид: $p_1^0 x_1 + p_2^0 x_2 = M$. Введение аккодного налога, снижая располагаемый доход потребителя $\left(p_1^0 x_1 + p_2^0 x_2 = M - T\right)$, приводит к параллельному сдвигу бюджетного ограничения в направлении начала координат и перемещает точку оптимума из положения E_0 в положение E_T за счет эффекта дохода (*IE*) (рис. 3.18).

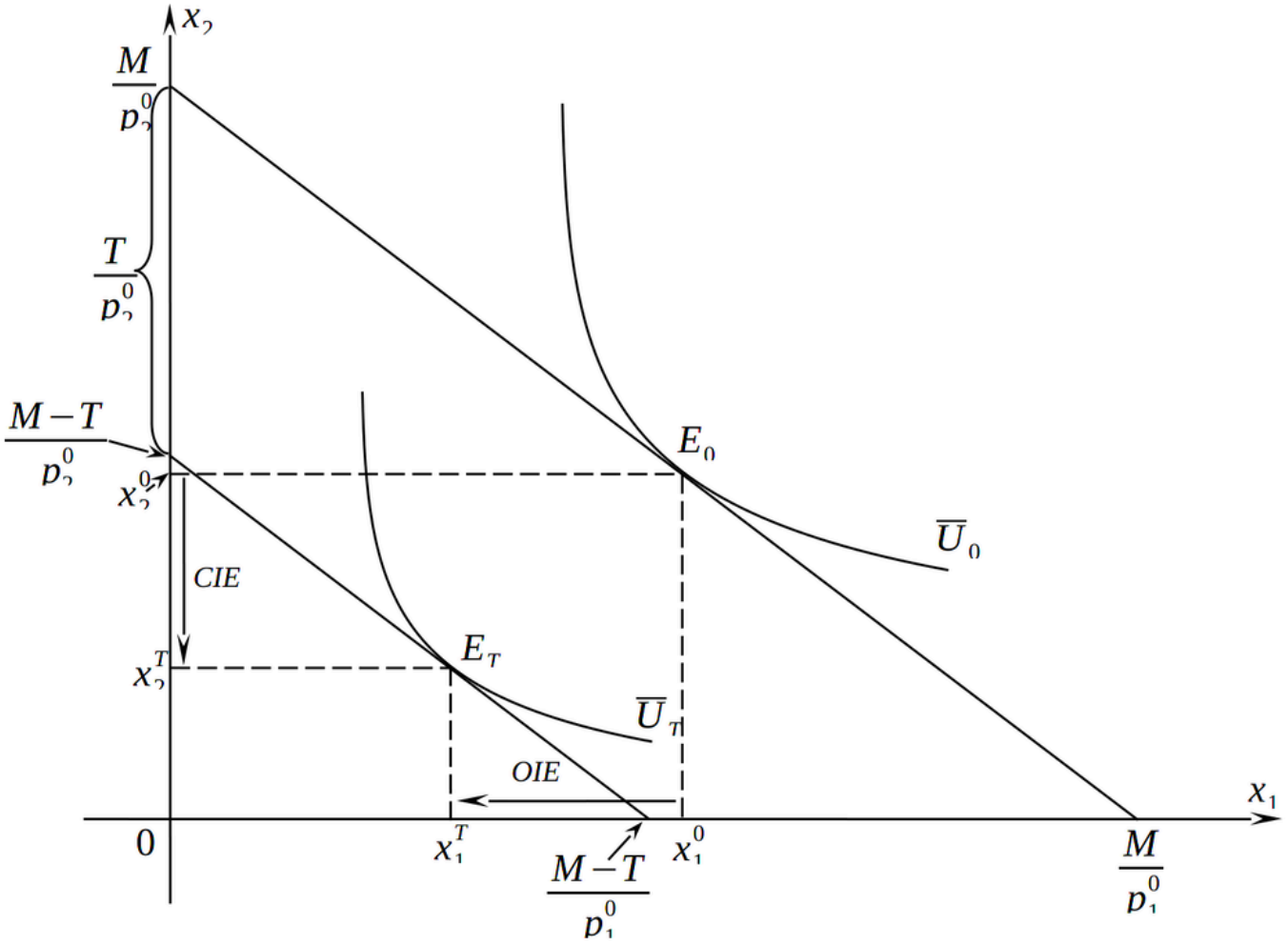


Рисунок 3.18. Влияние аккордного налога на выбор потребителя

Покажем теперь на графике воздействие на выбор потребителя налога *t* на единицу потребления первого товара, которое, для определенности, будем считать нормальным. Будем использовать следующее обозначение: $p_1^t = p_1^0 + t$.

При введении потоварного налога бюджетное ограничение $\left(\left(p_1^0 + t\right)x_1 + p_2^0 x_2 = p_1^t x_1 + p_2^0 x_2 = M\right)$ поворачивается по часовой стрелке вокруг точки пересечения с вертикальной осью (второго блага) – его угловой коэффицент увеличивается по абсолютной величине (бюджетное ограничение становится «круче») – покупательные возможности сокращаются. При переходе на более низкую кривую безразличия $\overline{U}_t$, касательную к новой бюджетной линии, объем потребления первого товара сокращается до x_1^t: соответственно, от x_1^0 до $x_1^{'}$ – за счет эффекта замещения (*OSE*) и от $x_1^{'}$ до x_1^t – за счет эффекта дохода (*OIE*) (рис. 3.19).

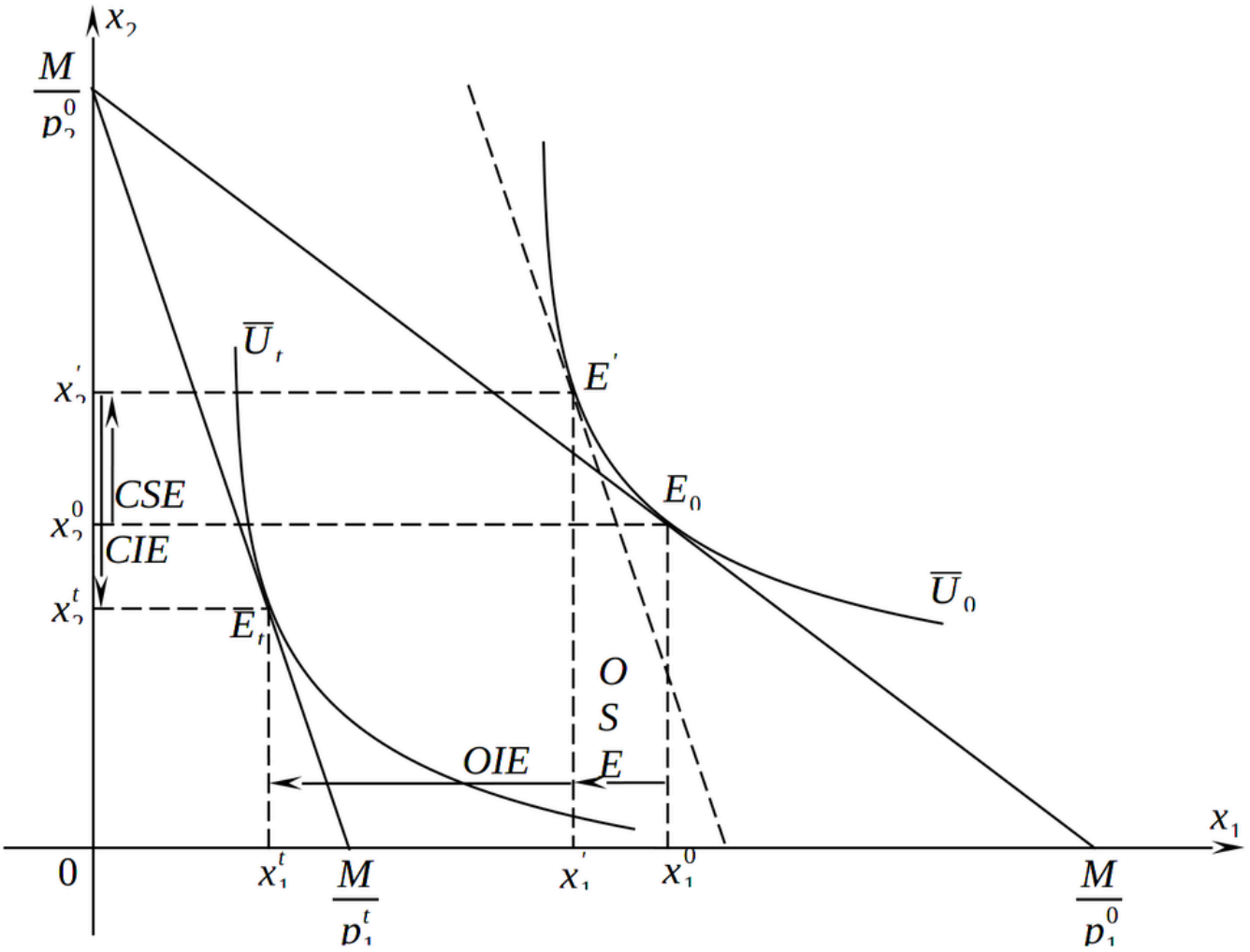


Рисунок 3.19. Влияние потоварного налога на выбор потребителя

Заметим, что влияние аккордной и потоварной субсидии на потребительский выбор будет полностью аналогичным рассмотренным выше двум типам налогообложения.

1. Евгений Евгеньевич Слуцкий (1880-1948) – российский и советский экономист и математик. ↩
2. OIE – аббревиатура английского словосочетания *own-price income effect*, OSE – аббревиатура от английского словосочетания *own-price substitution effect*. ↩
3. CIE – аббревиатура английского словосочетания *cross-price income effect*, CSE – аббревиатура от английского словосочетания *cross-price substitution effect*. ↩
4. См.: Антипина О.Н., Вереникин А.О., Матвеев Е.О. Парадокс Гиффена в XXI в. // Вестник Московского университета. Серия 6. Экономика. – 2019. – № 5. С. 183-205. ↩
5. Хикс Д.Р. Стоимость и капитал. М.: Изд. группа «Прогресс» «Универс», 1993. С. 128. ↩

3.3. Измерение изменений благосостояния потребителя

Изменение цен товаров оказывает влияние на благосостояние потребителей. В качестве одного из инструментов для измерения изменений благосостояния потребителей используется изменение маршаллианского потребительского излишка.

В силу (1.98), а также тождества (3.2), изменение полезности потребителя при бесконечном изменении цены, например, первого товара p_1 задается следующим соотношением: $dU = dV = -\lambda x_1 dp_1$. Опираясь на данное равенство, можно рассчитать изменение полезности индивидуума при колебании рыночной цены покупаемого продукта:

$$\Delta U = -\int\limits_{p_1^1}^{p_1^2} \lambda x_1\left(p_1, \overline{p}_2, \overline{M}\right) dp_1 = \int\limits_{p_1^2}^{p_1^1} \lambda x_1\left(p_1, \overline{p}_2, \overline{M}\right) dp_1.$$

Если допустить, что предельная полезность денег λ является величиной постоянной и не меняется при колебании цен товаров, то в данном выражении его можно будет вынести за знак интеграла. Тогда изменение полезности потребителя можно будет измерить с точностью до константы λ площадью под графиком маршаллианского спроса, ограниченной уровнями прежней и новой рыночной цены на данный товар:

$$\Delta U = \lambda \int\limits_{p_1^2}^{p_1^1} x_1\left(p_1, \overline{p}_2, \overline{M}\right) dp_1.$$

Эта площадь ($S_{p_1p_2E_2E_1}$ на рис. 3.12) называется изменением выигрыша, или излишка, потребителя по Маршаллу (ΔCS).

В частности, изменение потребительского излишка в примере из параграфа 1.7 (с.45-46) можно определить, опираясь на соответствующую функцию маршаллианского спроса:

$$\Delta CS = \int\limits_2^4 \frac{40}{p_1} dp_1 = 40 \int\limits_2^4 d\ln p_1 = 40 \ln p_1 |_2^4 = 40(\ln 4 - \ln 2) = 40 \ln 2 \approx 27,7.$$

Однако изменение маршаллианского потребительского излишка будет являться точной мерой повышения или снижения благосостояния только в случае предпочтений, для которых при изменении цены товара не проявляется эффект дохода [1]. Проблема состоит в том, что, к примеру, при снижении цены товара рост величины спроса на него за счет эффектов замещения и дохода уменьшает количество денег в кошельке потребителя, а значит сопровождается повышением предельной полезности денег. Это означает, что не остается постоянной единица измерения изменения благосостояния, что делает оценки некорректными.

Использование уровня полезности в качестве индикатора изменения благосостояния указывает только на направление этого изменения, но не позволяет измерить его.

Недостатком маршаллианского потребительского излишка как меры соответствующих выигрышей или потерь является чрезмерно ограничительное допущение о постоянстве предельной полезности денег λ.

Рассмотрим альтернативные подходы к оценке влияние изменения цены, скажем, первого товара от p_1^1 до p_1^2 на изменение индивидуального благосостояния.

Компенсирующая вариация дохода (*CV*) показывает, на какую величину нужно изменить расходы потребителя, чтобы при новых ценах его благосостояние осталось бы на неизменном уровне. *CV* рассчитывается при выборе в качестве сопоставимых новых цен (рис.3.20-3.21):

$$CV = E\left(p_1^2, p_2, V\left(p_1^2, p_2, M\right)\right) - E\left(p_1^2, p_2, V\left(p_1^1, p_2, M\right)\right) = M - E\left(p_1^2, p_2, V\left(p_1^1, p_2, M\right)\right) = M - E\left(p_1^2, p_2, \overline{U}^0\right).$$

Эквивалентная вариация дохода (*EV*) показывает, на какую величину нужно скорректировать расходы (доход) потребителя, чтобы (при фиксированных на исходном уровне ценах) его благосостояние изменилось на ту же величину, что и при данной вариации цен. *EV* рассчитывается при выборе в качестве сопоставимых исходных цен (рис. 3.20-3.21):

$$EV = E\left(p_1^1, p_2, V\left(p_1^2, p_2, M\right)\right) - E\left(p_1^1, p_2, V\left(p_1^1, p_2, M\right)\right) = E\left(p_1^1, p_2, V\left(p_1^2, p_2, M\right)\right) - M = E\left(p_1^1, p_2, \overline{U}^1\right) - M.$$

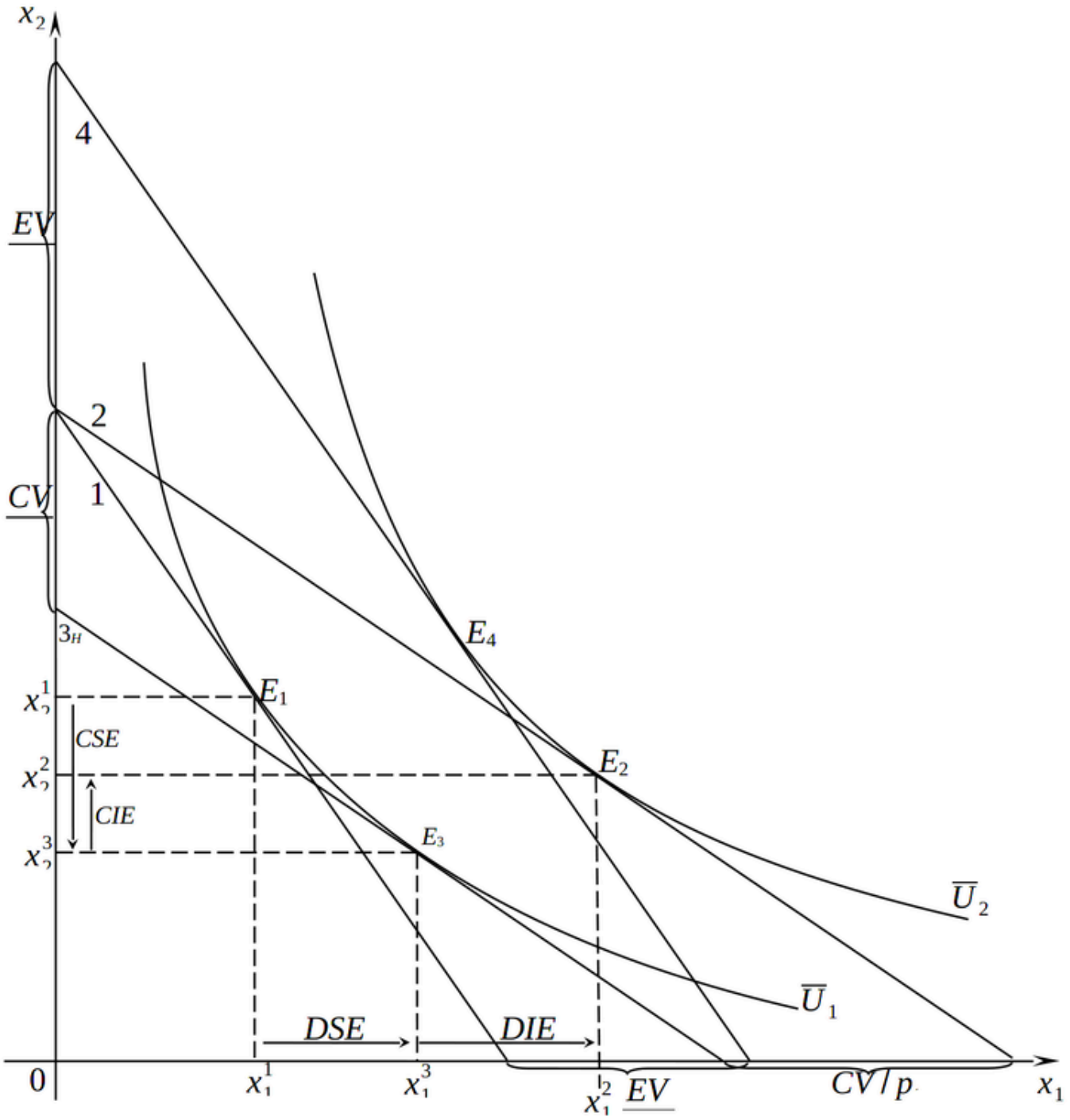


Рисунок 3.20. Эффекты дохода и замещения, а также компенсирующие и эквивалентные вариации дохода (случай нормальных товаров при снижении цены одного из них)

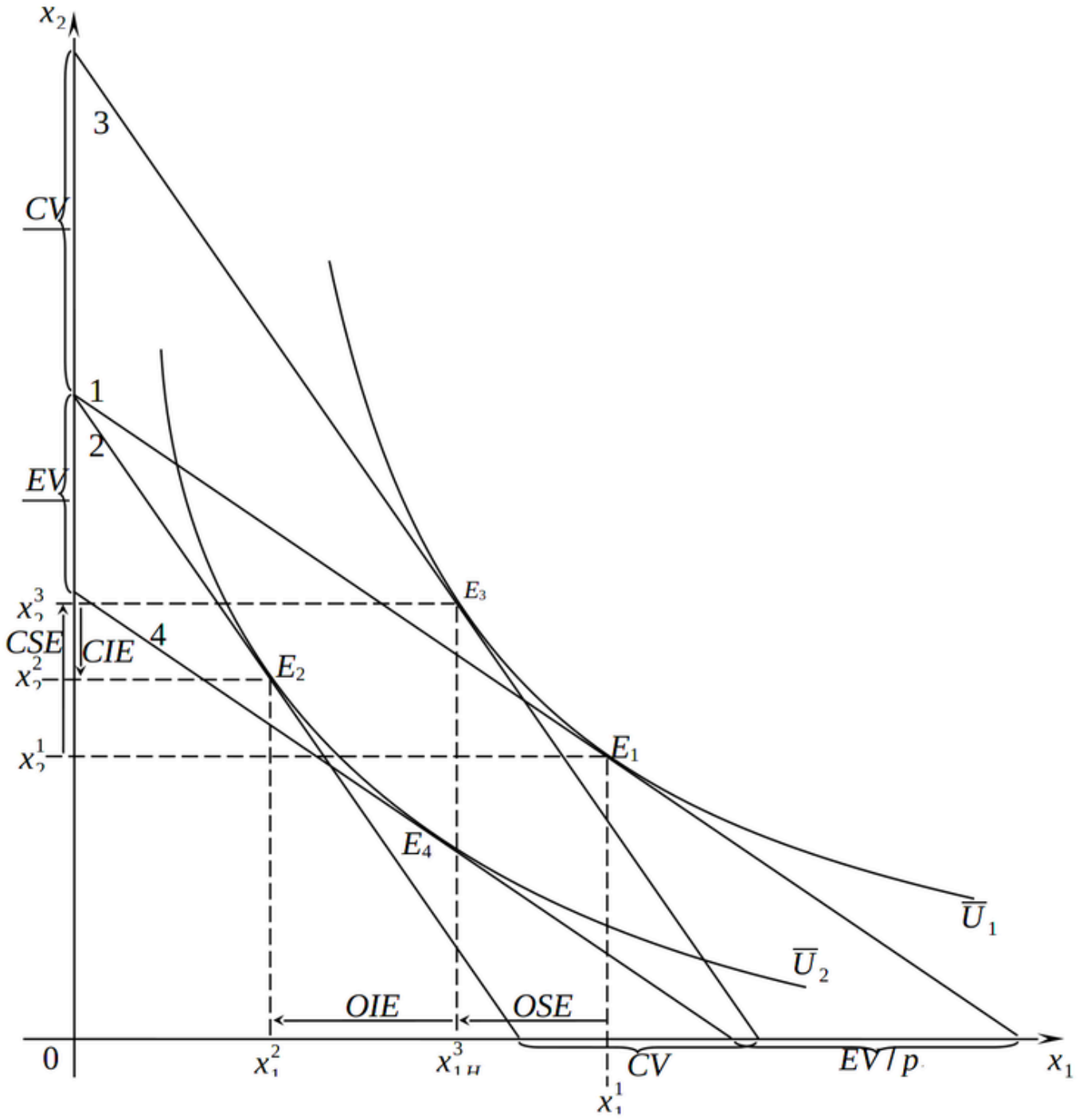


Рисунок 3.21. Эффекты дохода и замещения, а также компенсирующие и эквивалентные вариации дохода (случай нормальных товаров при повышении цены одного из них)

Для иллюстрации расчета компенсирующей и эквивалентной вариации дохода продолжим рассмотрение примера из параграфа 1.7 (с.45-46). Потребление вспомогательной корзины товаров $\left(x_1^3, x_2^3\right) = (15, 15; 15, 15)$ при новых ценах $\left(p_1^2, p_2\right) = (2, 3)$ будет стоить $M_1 = 15,15 \bullet 2 + 15,15 \bullet 3 = 75,75$. Поэтому компенсирующая вариация дохода составит:
$CV = 75,75 - 100 = -24,25$.

Если бы при старых ценах $\left(p_1^1, p_2\right) = (4, 3)$, когда эквимаржинальное условие имело вид $\frac{MU_1}{MU_2} = \frac{x_2}{x_1} = 2$, т.е. $x_2 = 2x_1$, потребитель захотел достигнуть новый уровень полезности $\left(\overline{U}_1 = 42,29 = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}} x_1^{\frac{5}{4}}\right)$, то его оптимальная корзина товаров была бы: $x_1^4 \approx \sqrt[5]{\frac{42,29^4}{8}} \approx 13,2, x_2^4 \approx 26,4$. Данный набор стоил бы $M_2 \approx 13,2 \bullet 4 + 26,4 \bullet 3 \approx 132$. Следовательно, эквивалентная вариация дохода составит: $EV \approx 132 - 100 \approx 32$.

Компенсирующую и эквивалентную вариации дохода можно подсчитать, опираясь на лемму Шепарда (2.70). Очевидно, что, подставив в функцию расходов (1.70) косвенную функцию полезности (1.83), получаем их величину, тождественно совпадающую с доходом, обеспечивающим потребителю данный уровень полезности:

$$E\left(p_1, p_2, V\left(p_1, p_2, M\right)\right) \equiv M.$$

Рассчитаем исходный оптимальный уровень полезности, соответствующий первоначальной цене первого товара p_1^1, цене второго товара p_2 и доходу M_1: $\overline{U}_1 = V\left(p_1^1, p_2, M_1\right)$, а также новый оптимальный уровень полезности, соответствующий изменившейся цене p_1^2 при той же цене второго блага и величине дохода: $\overline{U}_2 = V\left(p_1^2, p_2, M_1\right)$.

Интегрируя функцию спроса по Хиксу на первый товар, соответствующую первоначальному уровню полезности, по отрезку от p_1^1 до p_1^2, получаем разность между величиной расходов, обеспечивающей исходную полезность при новой цене первого товара, и заданной величиной располагаемого дохода потребителя, т.е. компенсирующую вариацию дохода (*CV*):

$$\int\limits_{p_1^1}^{p_1^2} x_1^h\left(p_1, p_2, \overline{U}_1\right)dp_1 = \int\limits_{p_1^1}^{p_1^2} \frac{dE\left(p_1, p_2, \overline{U}_1\right)}{dp_1}dp_1 = E\left(p_1^2, p_2, V\left(p_1^1, p_2, M_1\right)\right) - E\left(p_1^1, p_2, V\left(p_1^1, p_2, M_1\right)\right) = E\left(p_1^2, p_2, \overline{U}_1\right) - M_1 = C$$

Таким образом, компенсирующая вариация дохода представляет собой площадь, ограниченную графиком функции спроса по Хиксу, соответствующей изначальному уровню полезности, и осью цены товара, на отрезке от первого до второго ее значения. В частности, при повышения цены первого товара $\left(p_1^1 < p_1^2\right)$ $CV = S_{p_1p_2BE_1}$ на рис. 3.12).

Аналогично, интегрируя функцию спроса по Хиксу на первый товар, соответствующую конечному уровню полезности, по отрезку от p_1^1 до p_1^2, получаем разность между заданной величиной располагаемого дохода и величиной расходов потребителя, обеспечивающей новую полезность при исходной цене первого товара, т.е. эквивалентную вариацию дохода (*EV*):

$$\int\limits_{p_1^2}^{p_1^1} x_1^h\left(p_1, p_2, \overline{U}_2\right)dp_1 = \int\limits_{p_1^2}^{p_1^1} \frac{dE\left(p_1, p_2, \overline{U}_2\right)}{dp_1}dp_1 = E\left(p_1^1, p_2, V\left(p_1^2, p_2, M_1\right)\right) - E\left(p_1^2, p_2, V\left(p_1^2, p_2, M_1\right)\right) = E\left(p_1^1, p_2, \overline{U}_2\right) - M_1 = E$$

Таким образом, эквивалентная вариация дохода представляет собой площадь ограниченную графиком функции спроса по Хиксу, соответствующей конечному уровню полезности, и осью цены товара, на отрезке от второго до первого ее значения. При повышения цены первого товара $\left(p_1^1 < p_1^2\right)$ $EV = S_{p_1p_2E_1A}$ на рис. 3.12.

В случае снижения цены первого товара $\left(p_1^1 > p_1^2\right)$ $\overline{U}_1 = V\left(p_1^1, p_2, M_1\right) < \overline{U}_2 = V\left(p_1^2, p_2, M_1\right)$, т.к. косвенная полезность является убывающей функцией цен при строгой выпуклости кривых безразличия к началу координат (1.100), а значит, исходная и новая кривые компенсированного спроса меняются местами (рис. 3.13). Поэтому в таком случае $CV = S_{p_1p_2AE_1}$, $EV = S_{p_1p_2E_1B}$ на рис. 3.13.

В частности, компенсирующую и эквивалентную вариации дохода в примере выше можно было рассчитать альтернативным способом как площадь под соответствующими функциями хиксианского спроса:

$$CV = \int\limits_4^2 \overline{U}_0^{\frac{4}{5}}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{3}}dp_1 = 29,9^{\frac{4}{5}}\int\limits_4^2\left(\frac{3}{p_1}\right)^{\frac{2}{3}}dp_1 = 5^{\frac{5}{4}}3^{\frac{5}{3}}2^{\frac{11}{6}}\left(1-\sqrt[3]{2}\right) \approx -24,3;$$

$$EV = -\int\limits_4^2 \overline{U}_1^{\frac{4}{5}}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{3}}dp_1 = -42,29^{\frac{4}{5}}\int\limits_4^2\left(\frac{3}{p_1}\right)^{\frac{2}{3}}dp_1 = 5^{\frac{5}{4}}3^{\frac{5}{3}}2^{\frac{37}{12}}(\sqrt[3]{2}-1) \approx 32.$$

Очевидно, что CV при снижении цены равна EV при ее повышении, и наоборот.

Очевидно, что при росте цены товара эквивалентная вариация дохода будет отрицательной, а компенсирующая вариация дохода – положительной. При снижении цены товара, напротив, эквивалентная вариация дохода будет положительной, а компенсирующая вариация дохода – отрицательной.

При этом соотношение между абсолютными величинами вариаций и изменением маршаллианского потребительского излишка зависит от вида товара.

При повышении цены товара $CV > |\Delta CS| > |EV|$ для нормальных благ (рис. 3.12) и $CV < |\Delta CS| < |EV|$ для инфериорных благ (рис. 3.14). При снижении цены товара, наоборот, $|CV| < \Delta CS < EV$ для нормальных благ (рис. 3.13) и $|CV| > \Delta CS > EV$ для инфериорных благ (рис. 3.36. 2).

Обратим внимание на то, что для нейтральных к доходу благ компенсирующая и эквивалентная вариации дохода, а также изменение маршаллианского потребительского излишка будут равны между собой. Это имеет место, в частности, для квазилинейных предпочтений.

Покажем это на примере функции полезности $U = \sqrt{x_1} + x_2$. Пусть цена первого товара снижается от уровня p_1^1 до p_1^2 (рис. 3.22). Учитывая, что точки оптимума E_1 и E_3 лежат на кривой безразличия, соответствующей уровню полезности $\overline{U}_1$, а E_2 и E_4 – на кривой безразличия, соответствующей уровню полезности $\overline{U}_2$, рассчитаем разность отрезков $\left[x_2^4x_2^2\right]$ и $\left[x_2^1x_2^3\right]$:

$$x_2^4 - x_2^2 - \left(x_2^1 - x_2^3\right) = \overline{U}_2 - \sqrt{x_1^4} - \overline{U}_2 + \sqrt{x_1^2} - \overline{U}_1 + \sqrt{x_1^1} + \overline{U}_1 - \sqrt{x_1^3} = \frac{p_2}{2}\left(\frac{-1}{p_1^1} + \frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_1^1} - \frac{1}{p_1^2}\right) = 0.$$

Здесь были использованы выражения для соответствующих кривых безразличия потребителя с предпочтениями $U = \sqrt{x_1} + x_2$ и функции спроса на первое благо $x_1 = \left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2$. Та же разность отрезков, рассчитанная напрямую, исходя из функций спроса на второе благо, составит:

$$x_2^4 - x_2^2 - \left(x_2^1 - x_2^3\right) = \frac{M+EV}{p_2} - \frac{p_2}{4p_1^1} - \frac{M}{p_2} + \frac{p_2}{4p_1^2} + \frac{M+CV}{p_2} - \frac{p_2}{4p_1^2} - \frac{M}{p_2} + \frac{p_2}{4p_1^1} = \frac{EV+CV}{p_2}.$$

Таким образом, для квазилинейных предпочтений $U = \sqrt{x_1} + x_2$ при любом изменении цены первого блага $CV = -EV$. Поскольку эффект дохода здесь отсутствует, постольку изменение маршаллианского потребительского излишка будет по абсолютной величине равно обеим вариациям дохода: $|CV| = |\Delta CS| = |EV|$.

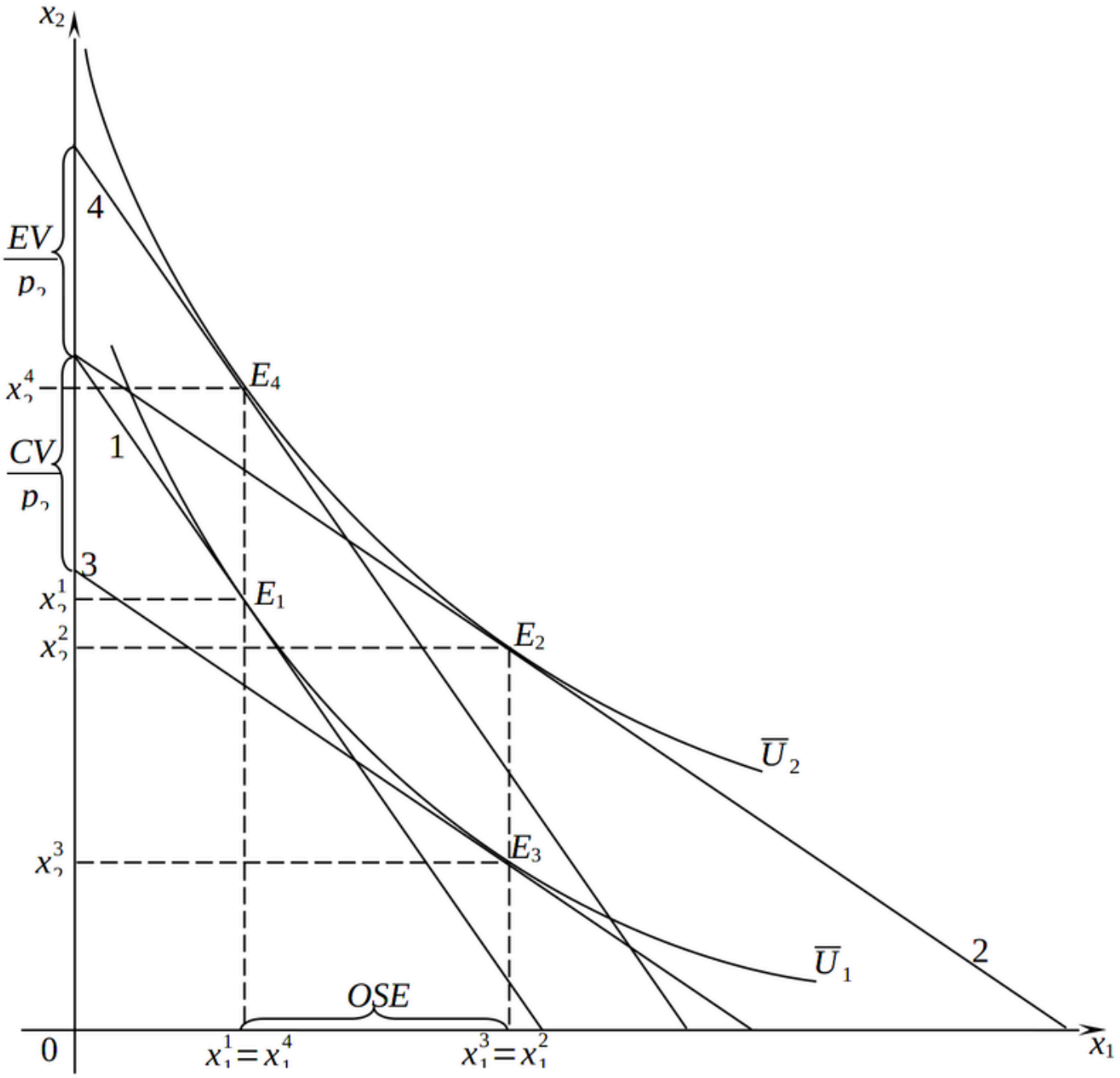


Рисунок 3.22. Эффекты дохода и замещения, компенсирующая и эквивалентная вариации дохода при квазилинейных предпочтениях

В заключение данного раздела покажем, как, используя понятия компенсирующей и эквивалентной вариации дохода, можно показать влияние двух типов налогообложения – аккордного и потоварного налога, рассмотренных выше, на общественное благосостояние. Вначале рассмотрим две гипотетические ситуации.

Предположим, что аккордный налог будет приносить в бюджет такой же доход, что и потоварный (т.е. что $T_0 = tx_1^t$). Определим, при какой из схем налогообложения благосостояние потребителей будет выше.

Характеризуя бюджетное ограничение при потоварном налоге в новой точке оптимума потребителя E_t, можно записать: $(p_1 + t)x_1^t + p_2x_2^t = M$, или $p_1x_1^t + p_2x_2^t = M - tx_1^t$. Поскольку аккордный налог должен приносить в бюджет такой же доход, что и потоварный $\left(T_0 = tx_1^t\right)$, постольку в точке E_t будет выполняться бюджетное ограничение для случая аккордного налогообложения: $p_1x_1^t + p_2x_2^t = M - tx_1^t = M - T_0$. Таким образом, бюджетное ограничение при аккордном налоге будет проходить через точку оптимума при потоварном налоге E_t (рис. 3.23). Поскольку угловой коэффициент бюджетного ограничения при аккордном налоге меньше по абсолютной величине (данное бюджетное ограничение – более «пологое»), чем при потоварном, постольку оно будет секущей линией по отношению к оптимальной кривой безразличия, соответствующей случаю потоварного налогообложения. Следовательно, будет существовать отрезок на бюджетной линии при аккордном налоге, который будет лежать «выше» (т.е. дальше от начала координат), по отношению к данной кривой безразличия. Следовательно, будет существовать «более высокая» кривая безразличия (расположенная дальше от начала координат), которая будет касательной к данному бюджетному ограничению на этом отрезке. Таким образом $U_T > U_t$, т.е. благосостояние потребителя при аккордном налоге будет выше по сравнению с ситуацией потоварного налогообложения.

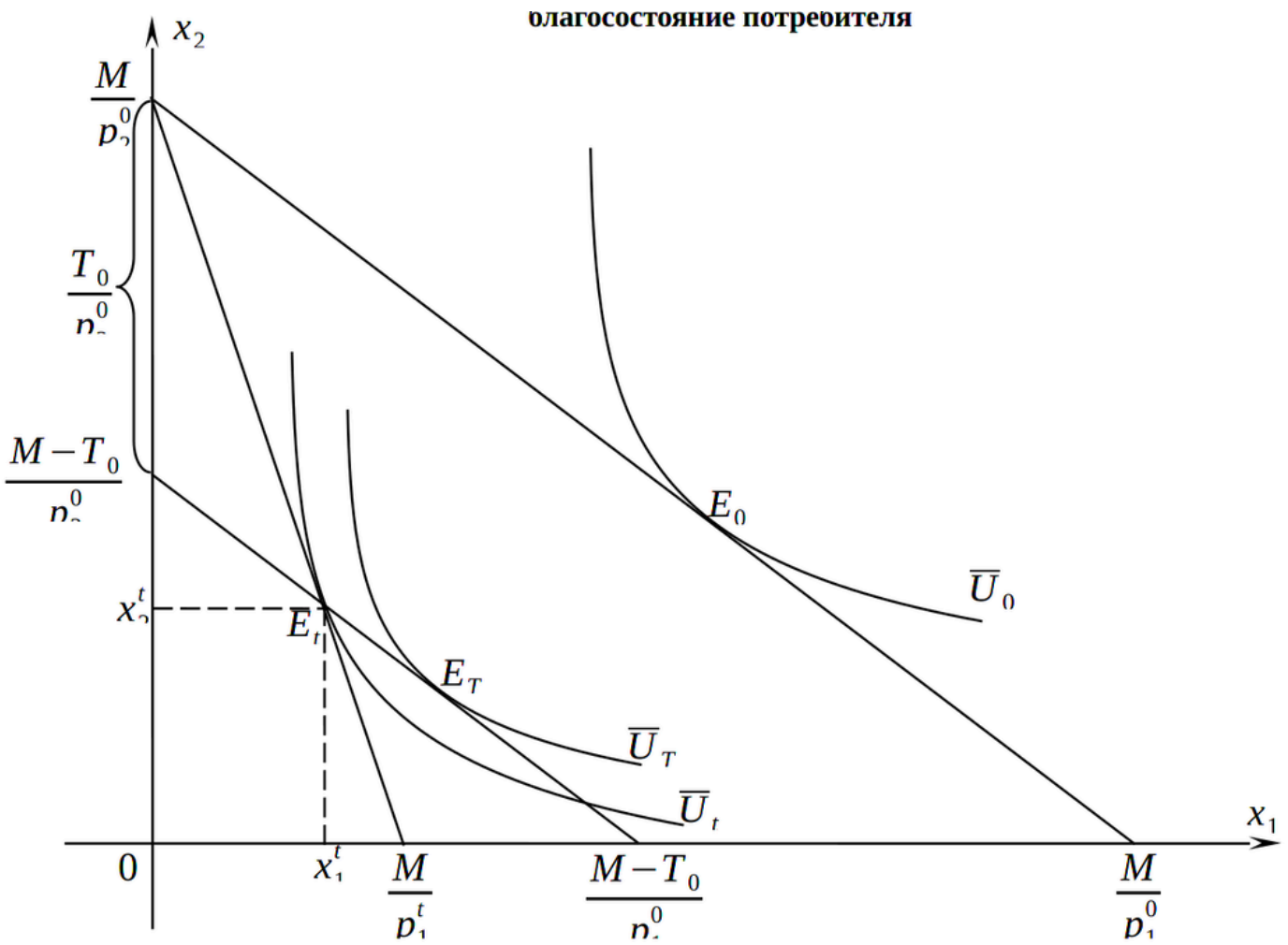


Рисунок 3.23. Влияние различных налогов на благосостояние потребителя

Предположим теперь, что потребитель будет достигать одинакового уровня благосостояния при налогообложении по рассматриваемым двум схемам. Определим, какая из них принесет больший доход государственному бюджету.

Аккордный налог принес бы бюджету столько же денег, что и потоварный $\left(T_0 = tx_1^t\right)$, если бы соответствующее бюжетное ограничение прошло через точку E_t (см. рассуждения выше). Но, поскольку бюджетное ограничение при аккордном налоге должно быть касательным оптимальной кривой безразличия для ситуации потоварного налогообложения $\overline{U}_t$, а значит, оно лежит ниже по отношению к пунктирному бюджетному ограничению (рис. 3.24), постольку аккордный налог принесет в бюджет больше денег, чем потоварный $\left(T_1 > T_0 = tx_1^t\right)$.

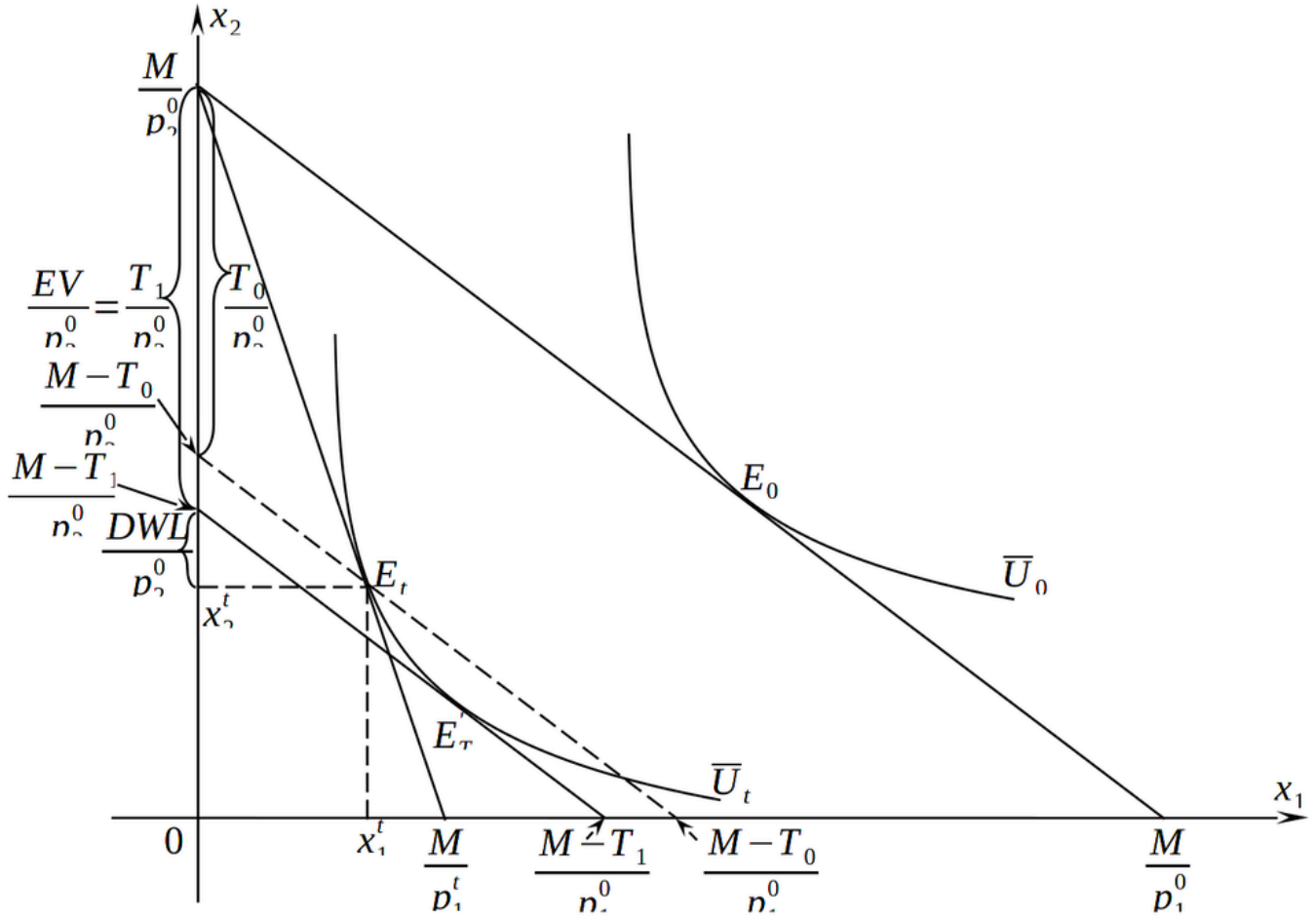


Рисунок 3.24. Нагрузка на государственный бюджет при различных налогах

Обозначим через EV сумму аккордного налога (T_1 на рис. 3.24), которую должен был бы получить государственный бюджет, чтобы полезность потребителя оказалась на том же уровне, что и при уплате потоварного налога.

Фактически при введении поштучного налога t благосостояние потребителя будет ниже, чем при аккордном налоге $T_0 = tx_1^t$, т.к. $|EV| > T_0$ (или $EV \leftarrow T_0$, т.к. $EV < 0$), или, другими словами, т.к. $E\left(p_1^0, p_2^0, \overline{U}_t\right) - M \leftarrow T_0$, т.е. $M - T_0 > E\left(p_1^0, p_2^0, \overline{U}_t\right)$.

Разность $-EV - T_0 = -\left(E\left(p_1^0, p_2^0, \overline{U}_t\right) - M\right) - T_0 = M - E\left(p_1^0, p_2^0, \overline{U}_t\right) - T_0$ характеризует потребительские потери – т.н. "мертвый груз" (DWL) – возникающие в результате поштучного налогообложения (рис. 3.24). Она показывает дополнительные расходы, которые несет потребитель при поштучном налогообложении по сравнению с минимальными, неизбежными потерями, обеспечивающими эквивалентные поступления в бюджет при аккордном налогообложении.

С учетом того, что $T_0 = tx_1^m\left(p_1^t, p_2^0, M\right) = tx_1^h\left(p_1^t, p_2^0, \overline{U}_t\right)$, получаем:

$$M - E\left(p_1^0, p_2^0, \overline{U}_t\right) - T_0 = E\left(p_1^t, p_2^0, \overline{U}_t\right) - E\left(p_1^0, p_2^0, \overline{U}_t\right) - tx_1^h\left(p_1^t, p_2^0, \overline{U}_t\right).$$

Таким образом, зная функцию расходов потребителя, можно измерить потери потребителя ("мертвый груз"), возникающие в результате поштучного налогообложения, как площадь под кривой хиксианского спроса, ограниченную сверху уровнем цены с учетом налоговой ставки, а снизу – исходной цены (при отсутствии налогооболожения), за вычетом налоговых поступлений в государственный бюджет (S_{ABC} на рис. 3.25):

$$DWL = -EV - T_0 = E\left(p_1^t, p_2^0, \overline{U}_t\right) - E\left(p_1^0, p_2^0, \overline{U}_t\right) - tx_1^h\left(p_1^t, p_2^0, \overline{U}_t\right) = \int_{p_1^0}^{p_1^t} x_1^h\left(p_1, p_2, \overline{U}_t\right) dp_1 - tx_1^h\left(p_1^t, p_2^0, \overline{U}_t\right).$$

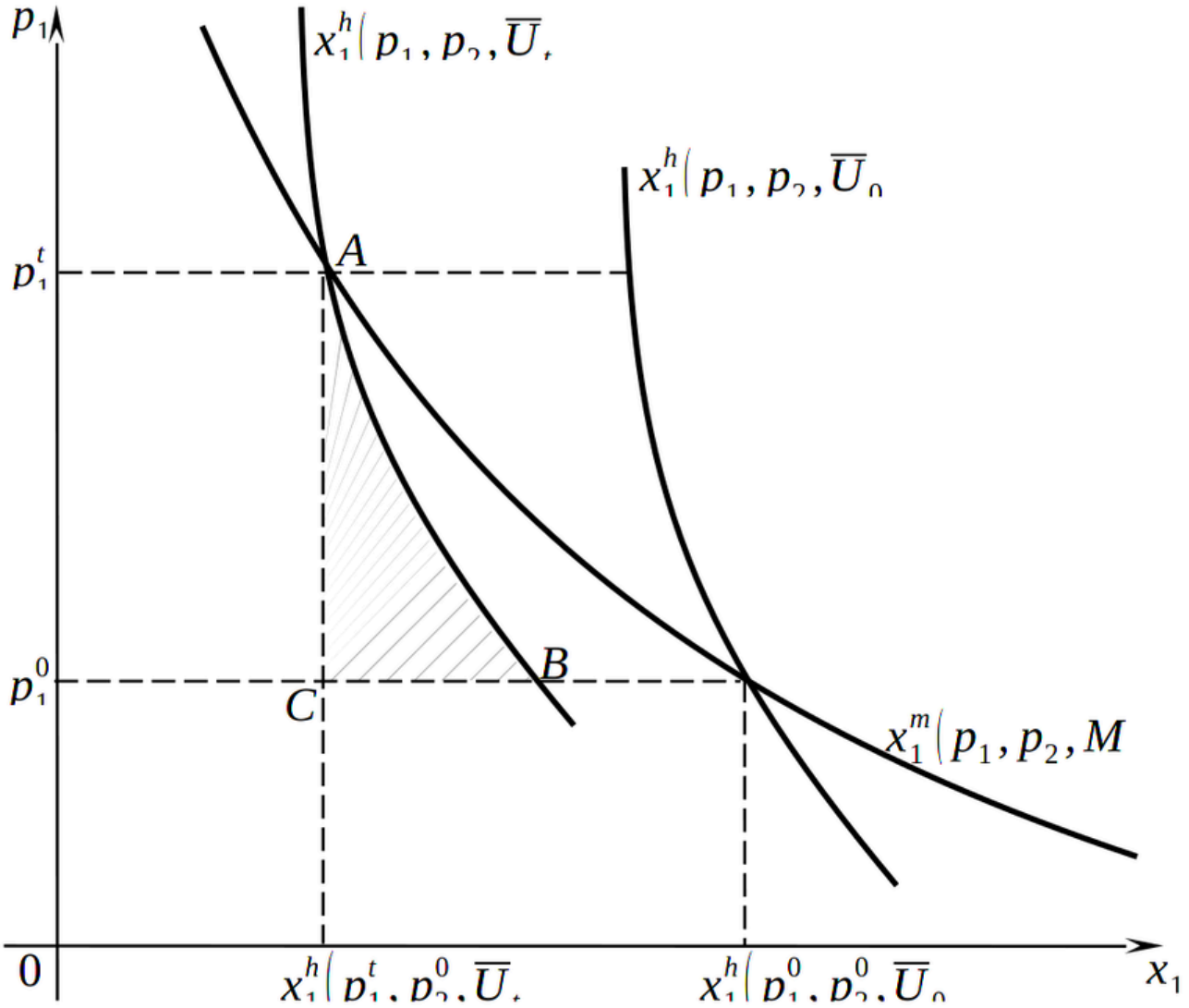


Рисунок 3.25. Потребительские потери при потоварном налогообложении

Существует альтернативный способ определения DWL в результате поштучного налогообложения. Обозначим через CV компенсацию, которая потребовалась бы индивиду после уплаты потоварного налога для сохранения его полезности на первоначальном уровне. Поскольку поступления денежных средств в государственный бюджет при объеме потребления блага, соответствующем компенсации, оказываются меньше требуемой суммы компенсационных выплат, постольку возникают чистые потери общества в размере

$$CV - tx_1^h\left(p_1^t, p_2^0, \overline{U}_0\right) = E\left(p_1^t, p_2^0, \overline{U}_0\right) - M - tx_1^h\left(p_1^t, p_2^0, \overline{U}_0\right) = E\left(p_1^t, p_2^0, \overline{U}_0\right) - E\left(p_1^0, p_2^0, \overline{U}_0\right) - tx_1^h\left(p_1^t, p_2^0, \overline{U}_0\right).$$

Таким образом, чистые потери общества, возникающие в результате потоварного налогообложения, можно рассчитать как площадь под функцией хиксианского спроса, соответствующей исходному уровню индивидуальной полезности, ограниченную уровнями цены – первоначальной, до назначения налога и измененной, учитывающей налоговую ставку – за вычетом налоговых выплат, которые имели бы место при получении компенсационных выплат из государственного бюджета (S_{ABC} на рис. 3.26):

$$DWL = CV - T_0 = E\left(p_1^t, p_2^0, \overline{U}_0\right) - E\left(p_1^0, p_2^0, \overline{U}_0\right) - tx_1^h\left(p_1^t, p_2^0, \overline{U}_t\right) = \int_{p_1^0}^{p_1^t} x_1^h\left(p_1, p_2, \overline{U}_0\right) dp_1 - tx_1^h\left(p_1^t, p_2^0, \overline{U}_0\right).$$

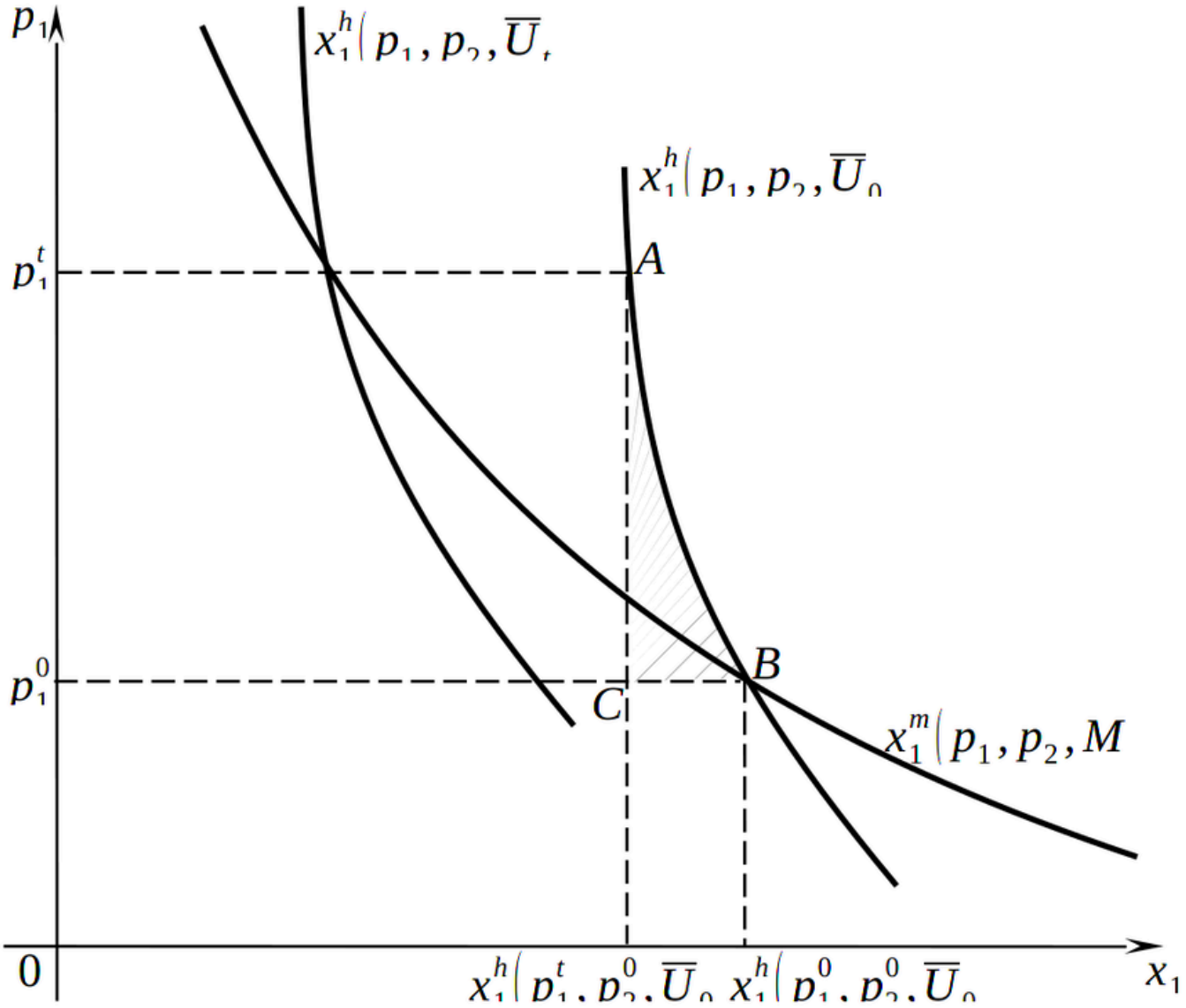


Рисунок 3.26. Потребительские потери при потоварном налогообложении: альтернативная трактовка

1. В этом можно убедиться на примере квазилинейных предпочтений (1.36). ↩

3.4. Уравнение Слуцкого с учетом индивидуальных активов: эффекты замещения, дохода и богатства

Обобщением простейшей задачи потребительского выбора является такая ее постановка, в которой рассматривается не только расходование денежного дохода индивида, но и его формирование как стоимости активов потребителя:

$$\max_{x_1,x_2} U(x_1,x_2): \\ p_1x_1+p_2x_2 \le M = p_1\omega_1+p_2\omega_2, \quad (3.15)$$

где ω_i – запас *i*-го блага, находящийся в собственности индивида, $i=1,2$.

Введем понятие чистого, или избыточного, спроса потребителя на каждый товар как превышение спроса, предъявляемого на данный товар, над доступным его количеством, т.е. первоначальным запасом:

$$z_i = x_i - \omega_i. \quad (3.16)$$

В этих обозначениях бюджетное ограничение потребителя может быть переписано так: $p_1z_1 = -p_2z_2$. Таким образом, индивид финансирует покупки товара, в котором он ощущает недостаток по сравнению с имеющимся запасом, за счет продажи излишка другого продукта – того, который у него имеется в избытке.

Условия максимизации полезности в задаче выбора с учетом первоначальных запасов благ остаются такими же, как и в исходной задаче потребительского выбора, с учетом того, что доход теперь является уже не экзогенно заданной денежной суммой, а стоимостью активов индивида. Это обстоятельство позволяет представить индивидуальные функции валового маршаллианского спроса в виде зависимостей оптимальных объемов потребления товаров от их цен и первоначальных запасов:

$$x_i^m = x_i(p_1,p_2,\omega_1,\omega_2), i=1,2. \quad (3.17)$$

Выведем в качестве примера данные функции спроса для функции полезности Кобба-Дугласа. Если расписать доход как стоимость первоначальных запасов благ, то функции спроса по Маршаллу (1.39) принимают вид:

$$x_1^m = \frac{c(p_1\omega_1+p_2\omega_2)}{(c+d)p_1} = \frac{c\omega_1}{c+d} + \frac{c\omega_2p_2}{(c+d)p_1},$$
$$x_2^m = \frac{d(p_1\omega_1+p_2\omega_2)}{(c+d)p_2} = \frac{d\omega_2}{c+d} + \frac{d\omega_1p_1}{(c+d)p_2}.$$

Рассчитаем прямую эластичность спроса по цене:

$$E_{p_1}^{x_1} = \frac{\partial x_1^m}{\partial p_1} \bullet \frac{p_1}{x_1^m} = \frac{-c\omega_2p_2}{p_1^2(c+d)} \frac{p_1}{\frac{c(p_1\omega_1+p_2\omega_2)}{(c+d)p_1}} = \frac{-\omega_2p_2}{p_1\omega_1+p_2\omega_2},$$
$$E_{p_2}^{x_2} = \frac{\partial x_2^m}{\partial p_2} \bullet \frac{p_2}{x_2^m} = \frac{-d\omega_1p_1}{p_2^2(c+d)} \frac{p_2}{\frac{d(p_1\omega_1+p_2\omega_2)}{(c+d)p_2}} = \frac{-\omega_1p_1}{p_1\omega_1+p_2\omega_2}.$$

Маршаллианский спрос без учета формирования дохода как стоимости первоначальных запасов благ (1.39) представляет собой степенную функцию с показателем степени при переменной цены i-го товара, равной -1, а значит, он обладает единичной эластичностью [1]. Рассчитанная здесь эластичность спроса по Маршаллу при наличии первоначального запаса по абсолютной величине меньше единицы. Таким образом, спрос с учетом первоначального запаса благ менее эластичен, нежели без учета этого запаса.

С учетом определения (3.16) валовой спрос по Маршаллу (3.17) представляет собой чистый спрос, увеличенный на величину запаса данного блага, которым изначально располагает потребитель: $x_i^m = z_i + \omega_i$. Значит, уравнение Слуцкого в общем виде для прямых и перекрестных эффектов (3.5) применительно к теории потребительского выбора с учетом первоначальных запасов благ можно переписать так:

$$\frac{\partial x_i^m(p_1,p_2,M)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_j} - \frac{\partial x_i^m(p_1,p_2,M)}{\partial M} \bullet x_j^m(p_1,p_2,M) = \frac{\partial x_i^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_j} - \frac{\partial x_i^m(p_1,p_2,M)}{\partial M} \bullet (z_j+\omega_j) = \frac{\partial x_i^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_j} - \frac{\partial x_i^m(p_1,p_2,M)}{\partial M} \bullet$$

где $\left(\frac{\partial x_i^m}{\partial p_j}\right)$ – эффект изменения цены при фиксированном денежном доходе потребителя, $\frac{\partial x_i^h}{\partial p_j}$ – эффект замещения, $\left(-z_j\frac{\partial x_i^m}{\partial M}\right)$ – чистый эффект дохода, $\left(\omega_j\frac{\partial x_i^m}{\partial M}\right)$ – эффект богатства для продавца первоначального запаса; $i,j=1,2$.

Чистый эффект дохода представляет собой валовой эффект дохода $\left(-x_j^m\frac{\partial x_i^m}{\partial M}\right)$, уменьшенный на величину эффекта богатства продавца:

$$\frac{-\partial x_i^m}{\partial M} \bullet z_j = \frac{-\partial x_i^m}{\partial M} \bullet x_j^m + \frac{\partial x_i^m}{\partial M} \bullet \omega_j.$$

При этом фактическое изменение объема потребления блага, возникающее из-за повышения или понижения цены товара, может быть представлено суммарным эффектом замещения и чистого дохода либо как эффект цены при фиксированном доходе, скорректированный на эффект богатства продавца первоначального запаса блага:

$$\frac{\partial x_i^h\left(p_1,p_2,\overline{U}\right)}{\partial p_j} - \frac{\partial x_i^m(p_1,p_2,M)}{\partial M} \bullet z_j = \frac{\partial x_i^m(p_1,p_2,M)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^m(p_1,p_2,M)}{\partial M} \bullet \omega_j.$$

Эффект богатства продавца (*WE*) проявляется в изменении (снижении или повышении) стоимости запаса блага, находящегося в распоряжении индивида, при колебании (снижении или повышении) цены на данный товар. Графически эффект богатства отражается (рис. 3.27 – 3.28) переходом со вспомогательного бюджетного ограничения №4, в котором стоимость потребления товаров рассчитывается по изменившимся, а запасов – по старым ценам ($p_1^2x_1+p_2x_2 = p_1^1\omega_1+p_2\omega_2$, или

$x_2 = \frac{p_1^1}{p_2}\omega_1 + \omega_2 - \frac{p_1^2}{p_2}x_1$), на конечное бюджетное ограничение № 2, в котором стоимость и покупок, и запасов рассчитывается по новым ценам $\left(p_1^2 x_1 + p_2 x_2 = p_1^2\omega_1 + p_2\omega_2, или x_2 = \frac{p_1^2}{p_2}\omega_1 + \omega_2 - \frac{p_1^2}{p_2}x_1\right)$.

Направленность чистого эффекта дохода (*NIE*) как разницы между валовым эффектом дохода (*IE*) и эффектом богатства будет зависеть от того, является человек чистым покупателем или продавцом данного товара. В первом случае индивид в реальности не продает, но докупает для себя недостающее количество данного блага, поэтому преобладающим оказывается рост покупательной способности при снижении цены товара, и чистый эффект дохода (отражаемый перемещением от третьего до второго бюджетного ограничения на рис. 3.27) является положительным.

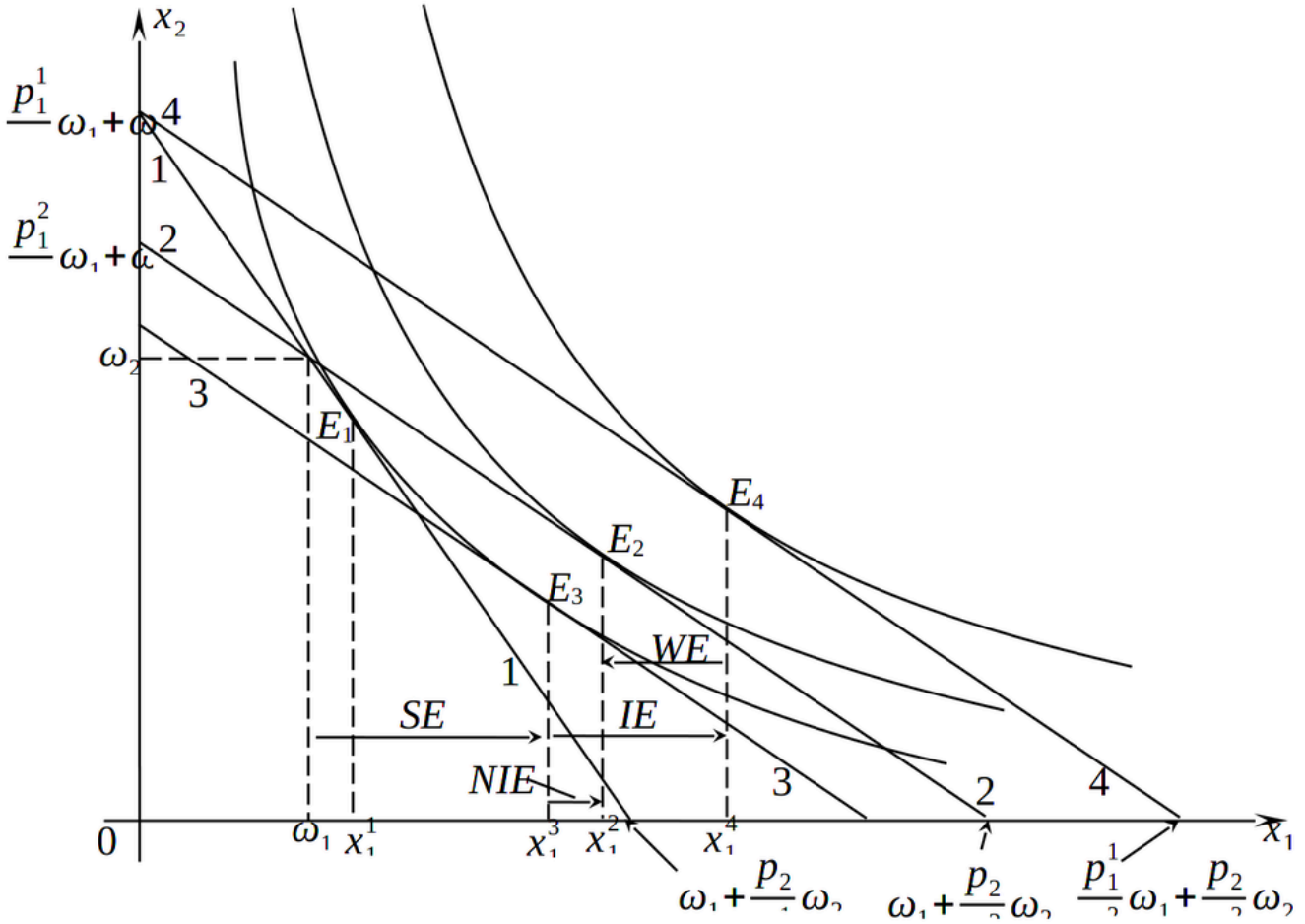


Рисунок 3.27. Прямые эффекты дохода, замещения и богатства при снижении цены первого товара для его нетто-покупателя

Во втором случае индивид фактически не покупает данный товар, запаса которого ему с избытком хватает для удовлетворения своей платежеспособной потребности. Поэтому для него имеет значение именно эффект богатства, который частично компенсируется валовым эффектом дохода; и чистый эффект дохода при снижении цены товара (отражаемый перемещением с третьего на второе бюджетное ограничение на рис. 3.28) оказывается отрицательным.

Очевидно, что в первоначальном бюджетном ограничении (№ 1) стоимость и покупок, и запасов рассчитывается по исходным ценам $\left(p_1^1 x_1 + p_2 x_2 = p_1^1\omega_1 + p_2\omega_2, или x_2 = \frac{p_1^1}{p_2}\omega_1 + \omega_2 - \frac{p_1^1}{p_2}x_1\right)$. Бюджетное ограничение № 3 служит для выделения эффекта замещения (*SE*). Третье бюджетное ограничение представляет собой параллельный сдвиг линии № 2 до касания с исходной кривой безразличия. Такой параллельный сдвиг подразумевает изменение величины расходов потребителя, покупки которого оцениваются по новым, измененным ценам.

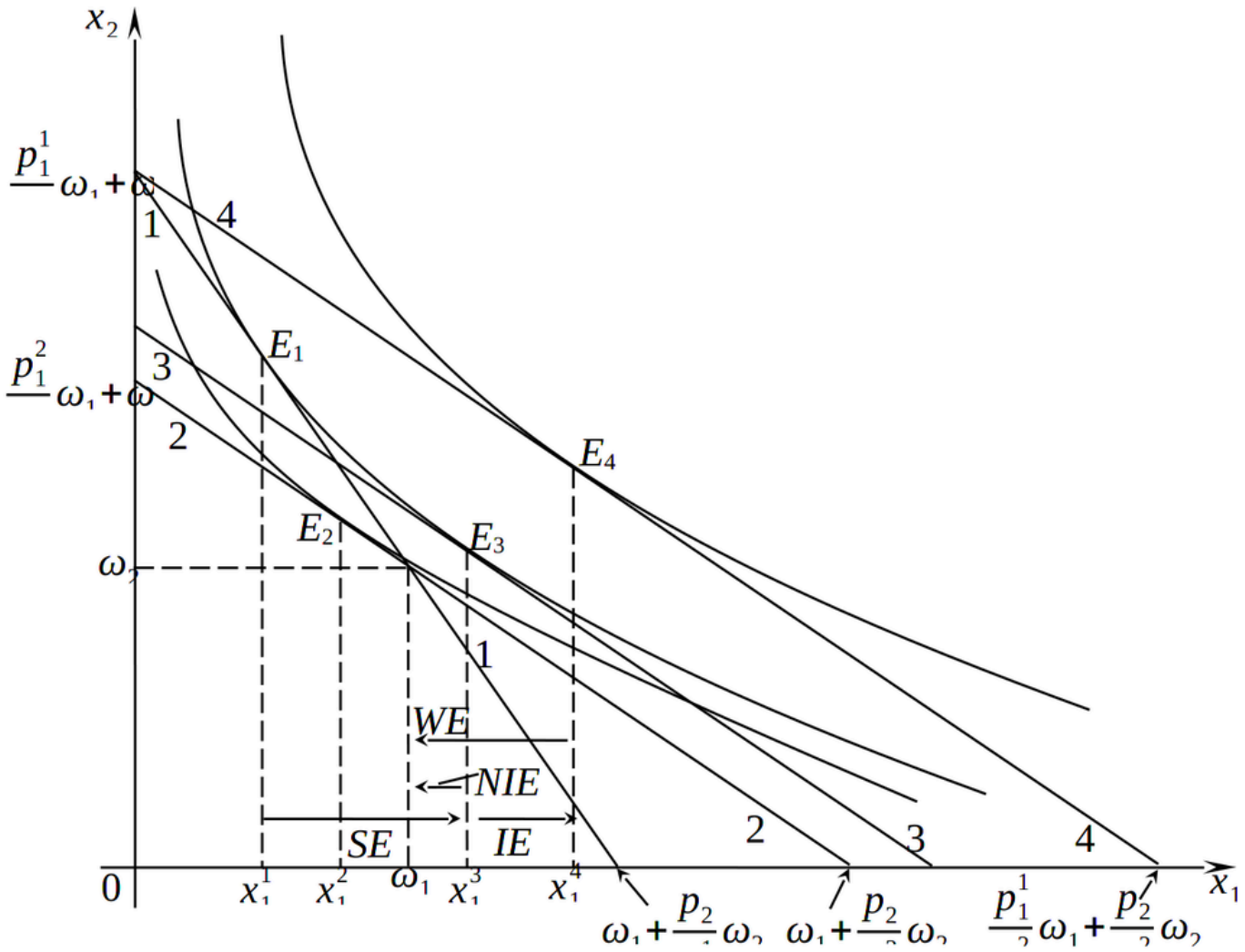


Рисунок 3.28. Прямые эффекты дохода, замещения и богатства при снижении цены первого товара для его нетто-продавца

Для иллюстрации расчета эффектов замещения, дохода и богатства продолжим рассмотрение примера из параграфа 1.2. Пусть выполняются все условия данного примера за исключением того, что доход потребителя задан не в денежной, а в натуральной форме – запасов товаров, которые составляют: $\omega_1 = 10, \omega_2 = 20$. Поскольку при этом денежная величина дохода остается такой же, как и в примере выше, сохраняют силу расчеты начального (E_1) и вспомогательного (E_3) оптимумов. Кроме того, в рассматриваемом примере был рассчитан и оптимум E_4, который в простейшей задаче потребительского выбора (1.2) являлся конечным (E_2). Поэтому остаются справедливыми соответствующие расчеты эффекта замещения и дохода (3.14).

Рассчитаем теперь эффект богатства. Обратим внимание на то, что в данном примере наблюдается вырожденная ситуация, когда начальный оптимум (E_1) совпадает с корзиной запасов благ (ω_1, ω_2), и потребителю не нужно ни продавать, ни докупать ни один из товаров. Поэтому, в соответствии с уравнением Слуцкого (3.18), эффект богатства должен компенсировать эффект дохода, и общий эффект должен совпадать с эффектом замещения. Однако в общем случае это верно лишь при бесконечно малых изменениях цен. В нашем примере конечное (№ 2) и третье, вспомогательное (№ 3_H) бюджетные ограничения уже не совпадают, и прямой эффект богатства, который равен –4, несколько расходится по абсолютной величине с эффектом дохода (3.14).

Важной разновидностью эффекта богатства является эффект реальных кассовых остатков, который играет фундаментальную роль в исследованиях монетарной экономики. Деньги являются разновидностью богатства. В экономической теории, например, в рамках концепции неоклассического синтеза [2], важную роль играет зависимость потребительского спроса от богатства домохозяйства, в том числе, от запаса денежных средств. В макроэкономических моделях эта зависимость называется эффектом реальных денежных, или кассовых, остатков.

Эффект реальных кассовых остатков заключается в следующем. При росте цен стоимость блага «реальные денежные остатки» растет: экономическому агенту приходится все бóльшую номинальную денежную сумму отводить на формирование запасов ликвидных средств, способных быть обмененными на одну и ту же товарную массу при обеспечении товарно-денежного обращения. Эту мысль можно сформулировать и по-другому. При росте уровня цен p цена денег, равная $1/p$, снижается: на ту же их сумму можно теперь приобрести уже меньше товаров. Реальные денежные запасы дорожают по отношению к другим видам богатства и за счет эффекта замещения вытесняются в хозяйственной деятельности последними [3]. Одновременно при росте цен снижается покупательная способность доходов экономических агентов. Поскольку реальные денежные запасы являются нормальным благом, этот отрицательный эффект дохода снижает спрос на них.

Возможна и альтернативная иллюстрация эффекта реальных денежных остатков: по мере нарастания реальных денежных запасов потребность в их дальнейшем увеличении становится все менее интенсивной. Индивидуум, богатея, наращивает не только реальные денежные запасы, но и другие активы.

Для того, чтобы проанализировать микроэкономические основы эффекта реальных кассовых остатков, рассмотрим модификацию задачи потребительского выбора с учетом первоначальных запасов благ (3.15):

$$\begin{array}{c} \max_{C,M} U\left(C,M\right): \\ M+pC=\omega_M+p\omega_C\equiv\overline{M}, \end{array} \quad (3.19)$$

где C – объем потребления товаров в реальном выражении, M – объем средств, хранимых индивидуум в ликвидной (денежной) форме, ω_C – величина товарных активов, ω_M – величина денежных (ликвидных) активов, $\overline{M}$ – совокупные финансовые ресурсы экономического агента.

Функция Лагранжа для данной задачи потребительского выбора будет иметь вид:

$$L=U(C,M)-\lambda\left(M+pC-\omega_M-p\omega_C\right).$$

Необходимое условие внутреннего оптимума потребителя $(Mgt0,\ Cgt0)$ подразумевает выполнение системы условий:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial C}=\frac{\partial U}{\partial C}-\lambda p=0, \\ \frac{\partial L}{\partial M}=\frac{\partial U}{\partial M}-\lambda=0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=-M-pC+\omega_M+p\omega_C=0; \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} MU_C=\lambda p, \\ MU_M=\lambda, \\ M+pC=\omega_M+p\omega_C; \end{cases}$$

откуда вытекает эквимаржинальный принцип оптимальности потребительского набора, утверждающий, что предельная норма замещения потребительских расходов деньгами в положении равновесия равна величине реальных кассовых остатков (рис. 3.29):

$$MRS_{HC}\equiv\frac{-dC}{dM}\Big|_{U=const}=\frac{\partial U/\partial M}{\partial U/\partial C}=\frac{MU_M}{MU_C}=\frac{1}{p}. \quad (3.20)$$

Вариации решения задачи выбора между ликвидными активами и потребительскими благами (3.19) представляют собой соответствующие индивидуальные функции спроса по Маршаллу как зависимости объема потребления товаров и остатков ликвидности на счетах экономических агентов от величины запасов денежных средств, товарных активов и общего уровня цен:

$$C=C^m\left(p,\overline{M}\right)=C^m\left(p,\omega_M,\omega_C\right),M=M^m\left(\frac{1}{p},\overline{M}\right)=M^m\left(\frac{1}{p},\omega_M,\omega_C\right).$$

Сопряженная по отношению к связанной максимизации полезности (3.19) задача минимизации совокупных расходов потребителя как владельца активов при условии достижения заданного уровня полезности будет выглядеть так:

$$\begin{array}{c} \min_{C,M}\left(M+pC\right): \\ U(C,M)=\overline{U}. \end{array} \quad (3.21)$$

Соответствующая функция Лагранжа будет выглядеть так:

$$L=M+pC-\lambda\left(U(C,M)-\overline{U}\right);$$

а необходимые условия связанной минимизации расходов потребителя (здесь, как и ранее предполагается наличие внутреннего оптимума, когда $Mgt0,\ Cgt0$) таковы:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial C}=p-\lambda\frac{\partial U}{\partial C}=0, \\ \frac{\partial L}{\partial M}=1-\lambda\frac{\partial U}{\partial M}=0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=-U(C,M)+\overline{U}=0; \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} \lambda MU_C=p, \\ \lambda MU_M=1, \\ U(C,M)=\overline{U}. \end{cases}$$

Отсюда вытекает эквимаржинальный принцип оптимальности потребительского набора, сформулированный выше (3.20).

Вариациями решения данной задачи связанной минимизации расходов (3.21) являются функции хиксианского спроса на потребительские блага и денежные активы:

$$C=C^h\left(p,\overline{U}\right),M=M^h\left(\frac{1}{p},\overline{U}\right).$$

Данный вектор компенсированного спроса позволяет получить функцию потребительских расходов:

$$E\left(p,\overline{U}\right)=M\left(\frac{1}{p},\overline{U}\right)+pC\left(p,\overline{U}\right).$$

Для данной функции расходов справедлива лемма Шепарда (2.70):

$$\frac{\partial E}{\partial p} = C\left(p, \overline{U}\right).$$

Используя лемму Шепарда в данной формулировке можно выписать уравнение Слуцкого с учетом первоначальных запасов благ (3.18) применительно к рассматриваемым задачам потребительского выбора:

$$\frac{\partial C^m\left(p,\overline{M}\right)}{\partial p} = \frac{\partial C^h\left(p,\overline{U}\right)}{\partial p} - \frac{\partial C^m\left(p,\overline{M}\right)}{\partial \overline{M}} \bullet C^m\left(p,\overline{M}\right) = \frac{\partial C^h\left(p,\overline{U}\right)}{\partial p} - \frac{\partial C^m\left(p,\overline{M}\right)}{\partial \overline{M}} \bullet (z_c + \omega_C) = \frac{\partial C^h\left(p,\overline{U}\right)}{\partial p} - \frac{\partial C^m\left(p,\overline{M}\right)}{\partial \overline{M}} \bullet z_c - \frac{\partial C^m\left(p,\overline{M}\right)}{\partial \overline{M}}$$

где $z_c = C^m - \omega_C$ – чистый спрос на товары, $\left(\frac{\partial C^m}{\partial p}\right)$ – эффект изменения цены при фиксированных финансовых ресурсах потребителя, $\frac{\partial C^h}{\partial p}$ – эффект замещения, $\left(-z_c \frac{\partial C^m}{\partial \overline{M}}\right)$ – чистый эффект дохода, $\left(\omega_C \frac{\partial C^m}{\partial \overline{M}}\right)$ – эффект богатства для продавца товарных запасов.

Если поставить видоизмененную задачу минимизации совокупных расходов потребителя как владельца товарных и денежных активов при условии достижения заданного уровня полезности:

$$\begin{matrix} \min_{C,M}\left(\frac{M}{p} + C\right): \\ U(C,M) = \overline{U}, \end{matrix} \quad (3.23)$$

то соответствующая функция расходов будет выглядеть так:

$$E\left(p,\overline{U}\right) = \frac{M\left(\frac{1}{p},\overline{U}\right)}{p} + C\left(p,\overline{U}\right),$$

а лемма Шепарда будет утверждать, что:

$$\frac{\partial E}{\partial\left(\frac{1}{p}\right)} = M\left(\frac{1}{p},\overline{U}\right).$$

Тогда уравнение Слуцкого (3.18) применительно к потребительскому выбору между товарами и денежными средствами можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial M^m\left(\frac{1}{p},\overline{M}\right)}{\partial\left(\frac{1}{p}\right)} = \frac{\partial M^h\left(\frac{1}{p},\overline{U}\right)}{\partial\left(\frac{1}{p}\right)} - \frac{\partial M^m\left(\frac{1}{p},\overline{M}\right)}{\partial \overline{M}} \bullet M^m\left(\frac{1}{p},\overline{M}\right) = \frac{\partial M\left(\frac{1}{p},\overline{U}\right)}{\partial\left(\frac{1}{p}\right)} - \frac{\partial M^m\left(\frac{1}{p},\overline{M}\right)}{\partial \overline{M}} \bullet (z_M + \omega_M) = \frac{\partial M^h\left(\frac{1}{p},\overline{U}\right)}{\partial\left(\frac{1}{p}\right)} - \frac{\partial M^m\left(\frac{1}{p},\overline{M}\right)}{\partial \overline{M}} \bullet z_M -$$

где $z_M = M^m - \omega_M$ – чистый спрос на денежные средства, $\left(\frac{\partial M^m}{\partial\left(\frac{1}{p}\right)}\right)$ – эффект изменения цены денег при фиксированных финансовых ресурсах потребителя, $\frac{\partial M^h}{\partial\left(\frac{1}{p}\right)}$ – эффект замещения, $\left(-z_M \frac{\partial M^m}{\partial \overline{M}}\right)$ – чистый эффект дохода, $\left(\omega_M \frac{\partial M^m}{\partial \overline{M}}\right)$ – эффект реальных кассовых остатков для поставщика ликвидных (денежных) ресурсов.

Проанализируем эффект реальных кассовых остатков графически (рис. 3.29) в случае повышения цен $(p_2 g t p_1)$.

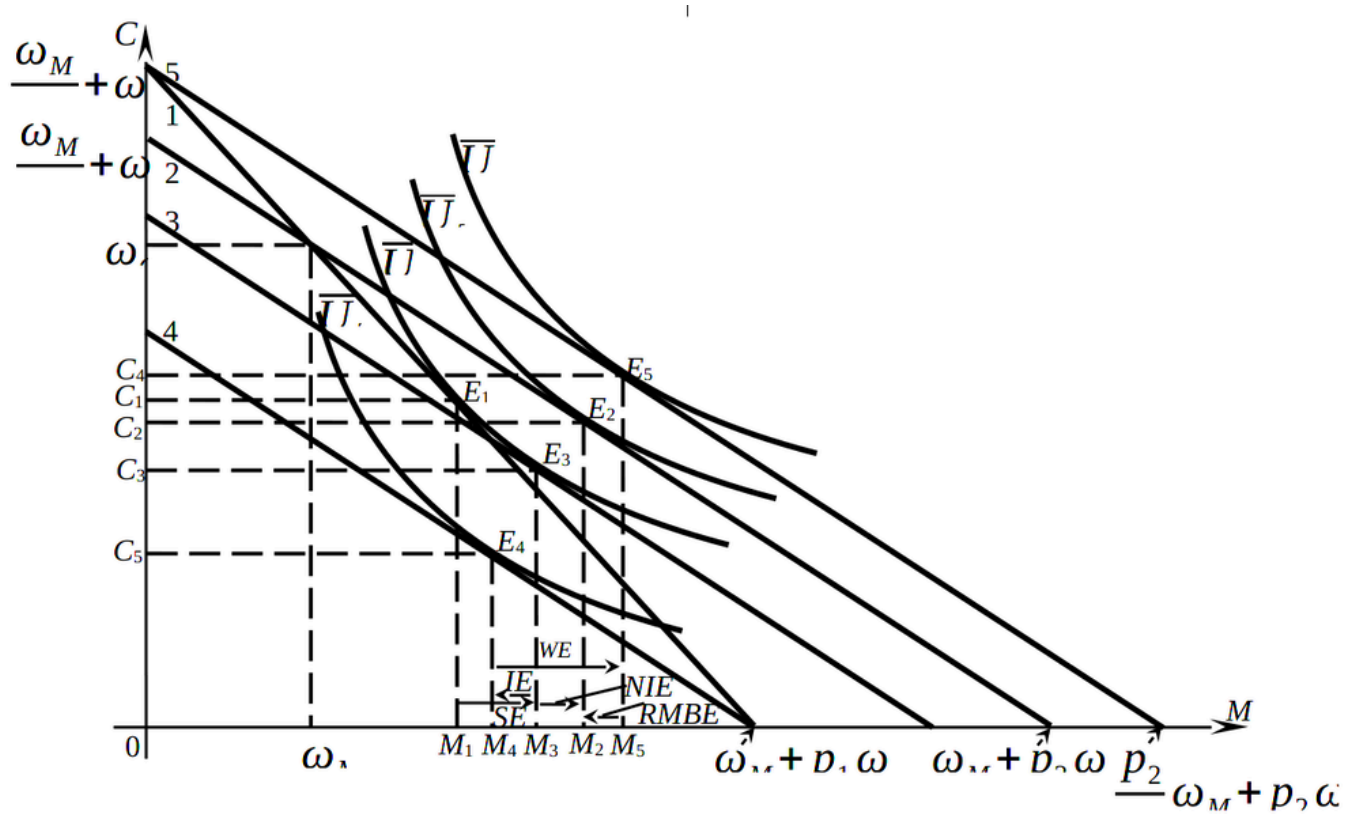


Рисунок 3.29. Эффекты замещения, дохода и реальных кассовых остатков при росте уровня цен

Бюджетное ограничение №1, имеющее вид $M + p_1 C = \omega_M + p_1 \omega_C$, или $C = \frac{\omega_M}{p_1} + \omega_C - \frac{M}{p_1}$, пересекается с горизонтальной осью при величине финансовых средств $(\omega_M + p_1 \omega_C)$ и соответствует исходному оптимуму потребителя E_1.

Бюджетное ограничение №2, характеризуемое выражением $M + p_2 C = p_2 \left(\frac{\omega_M}{p_2} \right) + p_2 \omega_C$, или $C = \frac{\omega_M}{p_2} + \omega_C - \frac{M}{p_2}$, и пересекающееся с горизонтальной осью при величине финансовых средств$(\omega_M + p_2 \omega_C)$, соответствует изменившемуся уровню цен и новому фактическому оптимуму потребителя E_2

Линия фиксированных расходов №3 соответствует решению задачи их минимизации при ограничении по полезности, заданном оптимумом потребителя при исходных ценах.

Для того, чтобы отобразить валовой эффект дохода и эффект богатства, необходимо построить вспомогательное бюджетное ограничение №4, в котором расходы потребителя рассчитываются в новых, изменившихся ценах, а активы – исходя из прежних цен: $M + p_2 C = p_1 \left(\frac{\omega_M}{p_1} \right) + p_1 \omega_C$, или $C = \frac{\omega_M}{p_2} + \frac{p_1}{p_2} \omega_C - \frac{M}{p_2}$. Данное бюджетное ограничение пересекается с горизонтальной осью при величине финансовых средств$(\omega_M + p_1 \omega_C)$. Переход с линии равных расходов №3 на бюджетное ограничение №4 отражает валовой эффект дохода.

Для иллюстрации эффекта реальных денежных остатков (*RMBE*) необходимо построить еще одно воображаемое бюджетное ограничение, обозначаемое нами номером 5, в котором все доходы и расходы рассчитываются в новых, изменившихся ценах, но величина денежных запасов в реальном выражении определяется исходя из прежнего уровня цен: $M + p_2 C = p_2 \left(\frac{\omega_M}{p_1} \right) + p_2 \omega_C$, или $C = \frac{\omega_M}{p_1} + \omega_C - \frac{M}{p_2}$. Оно будет пересекаться с горизонтальной осью при величине финансовых средств $\left(\frac{p_2}{p_1} \omega_M + p_2 \omega_C \right)$. Переход с бюджетного ограничения №4 на данное, пятое ограничение характеризует эффект богатства, стоимость которого теперь начинает рассчитываться в изменившихся ценах. Переоценка же запасов денежных средств по отношению к новому уровню цен будет отражать действие эффекта реальных остатков. Графически его будет иллюстрировать переход со вспомогательного бюджетного ограничения №5 на фактическое итоговое ограничение №2.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий эффекты замещения (в трактовке Хикса), дохода, богатства и реальных кассовых остатков при повышении общего уровня цен для случая индивидуальных предпочтений Кобба-Дугласа, характеризуемых функцией полезности $U = \sqrt{CM}$. Пусть данный индивидуум располагает первоначальными запасами материальных активов $\omega_C = 50$ и денег $\omega_M = 4$. Предположим, что уровень цен повышается от $p_1 = 1$ до $p_2 = 2$.

Выпишем эквимаржинальное условие оптимального потребительского выбора (3.20):

$$\frac{MU_M}{MU_C} = \frac{C}{M} = \frac{1}{p}, или M = pC.$$

Эффект реальных кассовых остатков позволяют проанализировать следующие пять бюджетных ограничений, которым будут соответствовать пять точек оптимума потребителя.

При бюджетном ограничении №1, которое имеет следующее выражение: $M_1 + C_1 = 4 + 50 = 54$, условие оптимума принимает вид: $2C_1 = 54$. Значит, точка оптимума (E_1) характеризуется следующими координатами: $C_1 = M_1 = 27$. При этом полезность потребителя достигает уровня $U = 27$.

Используя конечное фактическое бюджетное ограничение №2: $M_2 + 2C_2 = 4C_2 = 4 + 100 = 104$, получаем соответствующий оптимальный набор благ (т. E_2): $C_2 = 26, M_2 = 52$.

Бюджетное ограничение №3 будет определяться касанием исходной кривой безразличия: $27 = \sqrt{\frac{M_3^2}{2}} = \frac{M}{\sqrt{2}}$, откуда $M_3 = 27\sqrt{2} \approx 38,2, C_3 = \frac{27}{\sqrt{2}} \approx 19,1$ (т. E_3). Поэтому эффект замещения по Хиксу составит: $\Delta M = 11,2; \Delta C = -7,9$.

Бюджетное ограничение №4 с учетом эквимаржинального условия будет выглядеть так: $M_4 + 2\frac{M_4}{2} = 2M_4 = 4 + 50 = 54$. Значит, соответствующий оптимум таков (т. E_4): $M_4 = 27, C_4 = 13,5$. Следовательно, валовой эффект дохода будет равен: $\Delta M = -11,2; \Delta C = -5,6$.

Бюджетное ограничение 5: $M_5 + 2\frac{M_5}{2} = 2M_5 = 2 \bullet 4 + 2 \bullet 50 = 108$. Соответствующий потребительский оптимум будет характеризоваться координатами: $M_5 = 54, C_5 = 27$. Значит, эффект богатства окажется равным: $\Delta M = 27; \Delta C = 13,5$. А эффект реальных кассовых остатков составит: $\Delta M = -2; \Delta C = -1$.

В совокупности валовой эффект дохода, эффекты богатства и реальных кассовых остатков дают чистый эффект дохода: $\Delta M = -11,2 + 27 - 2 = 13,8 = 52 - 38,2; \Delta C = -5,6 + 13,5 - 1 = 6,9 = 26 - 19,1$.

Эффект реальных кассовых остатков возникает, в частности, в процессе индивидуального выбора между трудовой деятельностью (*L*), приносящей доход, который впоследствии становится источником для приобретения товаров, и досугом (*H*) как экономическим благом.

Здесь функция потребительских предпочтений трактуется в широком смысле, когда объектом выбора являются не только предметы потребления, но и свободное время, досуг как экономическое благо *U*(*C*,*H*), где $C = p_1^0 x_1^t + p_2^0 x_2^t$ – расходы на потребительские товары в реальном выражении, рассчитанные в ценах базисного периода. При этом труд выступает для потребителя как отказ от использования досуга – вынужденная необходимость, неизбежная жертва времени, сил и средств, а значит, как благо с отрицательной полезностью, антиблаго.

Максимизируя индивидуальную полезность, работник должен учитывать два типа ограничений – по времени: $H + L = \omega_T$, а также по финансовым средствам: $pC = wL + \omega_M$. Здесь L – продолжительность рабочего дня в часах; *w* – ставка заработной платы, ω_M – денежный доход помимо заработной платы, ω_T – совокупный (дневной) временной фонд жизнедеятельности человека (как правило, считается, что $\omega_T = 24$), $p = \frac{p_1^t x_1^t + p_2^t x_2^t}{p_1^0 x_1^t + p_2^0 x_2^t}$ – индекс потребительских цен; C – расходы на товары в реальном выражении (в ценах базисного периода), т.е. $pC = \left(\frac{p_1^t x_1^t + p_2^t x_2^t}{p_1^0 x_1^t + p_2^0 x_2^t}\right)\left(p_1^0 x_1^t + p_2^0 x_2^t\right) = p_1^t x_1^t + p_2^t x_2^t$ – фактические расходы индивида на потребительские товары.

Объединяя ограничения по времени и денежным средствам, получаем: $\omega_M + w(\omega_T - H) = pC$, или $\omega_M + w\omega_T = pC + wH$, где $\overline{M} = \omega_M + w\omega_T$ – полная величина дохода с учетом альтернативной стоимости совокупного запаса времени, $E = pC + wH$ – полная величина расходов, включающая альтернативную стоимость использования досуга. Если выразить объем материальных благ: $C = \frac{\omega_M + 24w}{P} - \frac{w}{P}H$, то можно видеть, что реальная ставка заработной платы w/P как индивидуальная ценность работы по найму является альтернативной стоимостью свободного времени, досуга.

При заданной ставке заработной платы работник максимизирует функцию предпочтений, делая выбор между материальными благами *C* и досугом *H* при условии ограничений по времени и финансовым средствам, расходуемым на покупки потребительских благ:

$$\max_{C,H} U(C,H):\\ pC = wL + \omega_M, \quad (3.25)\\ H + L = \omega_T;$$

где w – ставка заработной платы; L – продолжительность рабочего дня в часах, ω_T – совокупный (дневной) временной фонд жизнедеятельности человека.

Решая задачу связанной максимизации полезности (3.25), объединяем финансовое и временно́е ограничения $(pC = w(\omega_T - H) + \omega_M)$ и переходим к исследованию на экстремум функции Лагранжа $L = U(C,H) - \lambda(pC + wH - \omega_M - w\omega_T)$. Необходимое условие внутреннего оптимума потребителя ($Hlt\omega_T$) – это равенство нулю ее дифференциала:

\(d{L = d}U{\left({C,H} \right) - d}{\left({\lambda\left({{\mathit{pC} + \mathit{wH} - \omega_{M} - w}\omega_{T}} \right)} \right) = \allowbreak d}U{\left({C,H} \right) - \left({{\mathit{pC} + \mathit{wH} - \omega_{M} - w}\omega_{T}} \right)}{\mathit{d\lambda} - \mathit{\lambda d}}{\left({{\mathit{pC} + \mathit{wH} - \omega_{M} - w}\omega_{T}} \right) = \allowbreak \frac{\partial U}{\partial C}} {\mathit{dC} + \frac{\partial U}{\partial H}}{\mathit{dH} - \left({{\mathit{pC} + \mathit{wH} - \omega_{M} - w}\omega_{T}} \right)} {\mathit{d\lambda} - \lambda}{\left({\mathit{pdC} + \mathit{wdH}} \right) = \allowbreak \left({\frac{\partial U}{\partial C} - \mathit{\lambda p}} \right)}{\mathit{dC} + \allowbreak \left({\frac{\partial U}{\partial H} - \mathit{\lambda w}} \right)}{\mathit{dH} - \left({{\mathit{pC} + \mathit{wH} - \omega_{M} - w}\omega_{T}} \right)}{\mathit{d\lambda} = 0.}\)

Равенство нулю дифференциала функции Лагранжа должно выполняться для любых значений дифференциалов независимых переменных dC, dH, $d\lambda$, а значит, необходимое условие связанного максимума полезности представляет собой систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial C} = \frac{\partial U}{\partial C} - \lambda p = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial H} = \frac{\partial U}{\partial H} - \lambda w = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -pC - wH + \omega_M + w\omega_T = 0. \end{cases}$$

Итак, индивидуальное равновесие в модели выбора между трудом и досугом представлено системой условий:

$$\begin{cases} MU_C = \lambda p, \\ MU_H = \lambda w, \\ pC = \omega_M + w\omega_T - wH. \end{cases}$$

Деление первого равенства на второе дает эквимаржинальный принцип оптимума потребителя, утверждающий, что предельная норма замещения потребительских расходов досугом в положении равновесия равна реальной ставке заработной платы (рис. 3.30) [4]:

$$MRS_{HC} \equiv \frac{-dC}{dH}\Big|_{U=const} = \frac{\partial U/\partial H}{\partial U/\partial C} = \frac{MU_H}{MU_C} = \frac{w}{p}. \quad (3.26)$$

Решая задачу выбора работника между свободным временем и расходами на потребление материальных благ (3.25), аналогично базовой теории потребительского выбора, можно получить маршаллианскую функцию спроса индивидуума на досуг и материальные блага как зависимости соответственно количества нерабочих часов в день, выбираемого индивидуумом, и потребляемых товаров от ставки заработной платы, уровня цен и нетрудового дохода:

$$H = H^m\left(w, p, \overline{M},\right), C = C^m\left(w, p, \overline{M}\right).$$

Аналогично базовой теории потребительского выбора (см. параграф 1.4), функция спроса, в частности, на досуг выводится на основе линии «цена-потребление», которая соединяет множество точек оптимума потребителя, возникающих при изменении ставки заработной платы и постоянстве общего уровня цен, денежного дохода, не связанного с трудовой деятельностью, и предпочтений индивидуума (рис. 3.30).

Задача распределения времени между трудом и досугом (3.25) представляет собой развитие модели выбора с учетом первоначальных запасов благ (3.15), где таковыми являются временно́й фонд жизнедеятельности человека (ω_T) и нетрудовой доход в реальном выражении (ω_M/P), который, в свою очередь, можно трактовать как стоимость активов индивидуума. Поэтому наряду с валовым спросом можно рассматривать и функции чистого спроса на досуг и материальные блага:

$$z_H = H^m\left(w, p, \overline{M}\right) - \omega_T, z_c = C^m\left(w, p, \overline{M}\right) - \frac{\omega_M}{p}.$$

В силу ограничения по времени очевидно, что чистый спрос на досуг является отрицательным. Поэтому чистый спрос на досуг, взятый с обратным знаком, как разность между временным фондом жизнедеятельности человека и валовым спросом на досуг, задает индивидуальную функцию (чистого) предложения рабочей силы, представляющую собой зависимость количества отработанных часов в день от ставки заработной платы, величины нетрудовых доходов и уровня цен, задающего стоимость потребления:

$$L_s = \omega_T - H^m\left(w, p, \overline{M}\right).$$

Поскольку задача распределения времени между трудом и досугом представляет собой развитие модели выбора с учетом первоначальных запасов благ, где таковыми являются временно́й фонд жизнедеятельности человека (ω_T) и нетрудовой доход в реальном выражении (ω_M/P), который, в свою очередь, можно трактовать как стоимость активов индивида, постольку функция предложения индивидуальной рабочей силы формируется под влиянием эффектов замещения (*SE*), дохода (*IE*) и богатства, или первоначального запаса (*WE*). Докажем это, выписав уравнение Слуцкого применительно к данной модели.

Симметричная, или взаимная, по отношению к связанной максимизации полезности (3.25) задача минимизации совокупных расходов потребителя как работника при условии достижения заданного уровня полезности будет выглядеть так:

$$\begin{matrix} \min_{C,H}(pC + wH): \\ U(C,H) = \overline{U}, \end{matrix} \quad (3.27)$$

Решая данную задачу минимизации расходов работника, можно получить функции компенсированного спроса на досуг $H = H^h\left(p, w, \overline{U}\right)$ и материальные блага $C = C^h\left(p, w, \overline{U}\right)$. Подставляя эти функции условного спроса по Хиксу в выражение потребительских затрат, можно получить функцию расходов работника, аргументами которой будут являться ставка заработной платы, уровень цен и заданный уровень полезности:

$$E\left(p, w, \overline{U}\right) = pC\left(p, w, \overline{U}\right) + wH\left(p, w, \overline{U}\right).$$

С учетом данной функции расходов лемма Шепарда (2.70) применительно к теории выбора между доходом и досугом будет выглядеть так:

$$\frac{dE}{dw} = H\left(p, w, \overline{U}\right),$$
$$\frac{dE}{dp} = C\left(p, w, \overline{U}\right).$$

Дифференцируя тождество (3.4) соответственно по w и p, учитывая тождество (3.1) и применяя лемму Шепарда, получаем уравнения Слуцкого применительно к теории выбора между доходом и досугом:

$$\frac{\partial H^m\left(w,p,\overline{M}\right)}{\partial w} = \frac{\partial H^h\left(p,w,\overline{U}\right)}{\partial w} - \frac{\partial H^m\left(w,p,\overline{M}\right)}{\partial \overline{M}} \bullet H^m\left(w, p, \overline{M}\right) = \frac{\partial H^h\left(p,w,\overline{U}\right)}{\partial w} - \frac{\partial H^m\left(w,p,\overline{M}\right)}{\partial \overline{M}} \bullet (z_H + \omega_T) = \frac{\partial H^h\left(p,w,\overline{U}\right)}{\partial w} + \frac{\partial H^m\left(w,p,\overline{M}\right)}{\partial \overline{M}}$$

$$\frac{\partial C^m\left(w,p,\overline{M}\right)}{\partial p} = \frac{\partial C^h\left(p,w,\overline{U}\right)}{\partial p} - \frac{\partial C^m\left(w,p,\overline{M}\right)}{\partial \overline{M}} \bullet C^m\left(w, p, \overline{M}\right) = \frac{\partial C^h\left(p,w,\overline{U}\right)}{\partial p} - \frac{\partial C^m\left(w,p,\overline{M}\right)}{\partial \overline{M}} \bullet \left(z_C + \frac{\omega_M}{p}\right) = \frac{\partial C^h\left(p,w,\overline{U}\right)}{\partial p} - \frac{\partial C^m\left(w,p,\overline{M}\right)}{\partial \overline{M}}$$

где $\frac{\partial H^m}{\partial w}$ – эффект изменения ставки заработной платы при фиксированных финансовых ресурсах потребителя, $\frac{\partial C^m}{\partial p}$ – эффект изменения ставки заработной платы при фиксированных финансовых ресурсах потребителя, $\frac{\partial H^h}{\partial w}$ и $\frac{\partial C^h}{\partial p}$ – эффекты замещения, $\left(L_S \frac{\partial H^m}{\partial \overline{M}}\right)$ и $\left(-z_C \frac{\partial C^m}{\partial \overline{M}}\right)$ – чистые эффекты дохода, $\left(\omega_T \frac{\partial H^m}{\partial \overline{M}}\right)$ и $\left(\frac{\omega_M}{p} \bullet \frac{\partial C^m}{\partial \overline{M}}\right)$ – эффекты богатства соответственно для наемного работника – продавца рабочей силы и для поставщика ликвидных ресурсов, последний из которых проявляется как эффект реальных кассовых остатков.

Опираясь на соотношение между валовым и чистым спросом на потребительские блага:

$$C^m\left(w, p, \overline{M}\right) = z_c\left(w, p, \overline{M}\right) + \frac{\omega_M}{p},$$

из которого следует, что влияние изменения ставки заработной платы на валовой спрос можно разложить на эффект ставки заработной платы при фиксированных финансовых ресурсах потребителя относительно чистого спроса на предметы потребления и эффект переоценки запаса денежных средств в реальном выражении:

$$\frac{\partial C^m\left(w,p,\overline{M}\right)}{\partial p} = \frac{\partial z_c\left(w,p,\overline{M}\right)}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\omega_M}{p}\right) = \frac{\partial z_c\left(w,p,\overline{M}\right)}{\partial p} - \frac{\omega_M}{p^2}.$$

Поэтому уравнение Слуцкого для потребительских благ можно переписать с точки зрения эффекта изменения ставки заработной платы на чистый спрос при фиксированных финансовых ресурсах индивидуума:

$$\frac{\partial z_c\left(w,p,\overline{M}\right)}{\partial p} = \frac{\partial C^h\left(p,w,\overline{U}\right)}{\partial p} - \frac{\partial C^m\left(w,p,\overline{M}\right)}{\partial \overline{M}} \bullet z_C - \frac{\partial C^m\left(w,p,\overline{M}\right)}{\partial \overline{M}} \bullet \left(\frac{\omega_M}{p}\right) + \frac{\omega_M}{p^2}.$$

Эффект реальных кассовых остатков здесь будут отражать последние два слагаемые в правой части данного уравнения Слуцкого.

Для того чтобы проиллюстрировать графически влияние эффектов замещения, дохода и богатства на предложение труда, рассмотрим изменение, например, повышение ставки заработной платы (рис. 3.30).

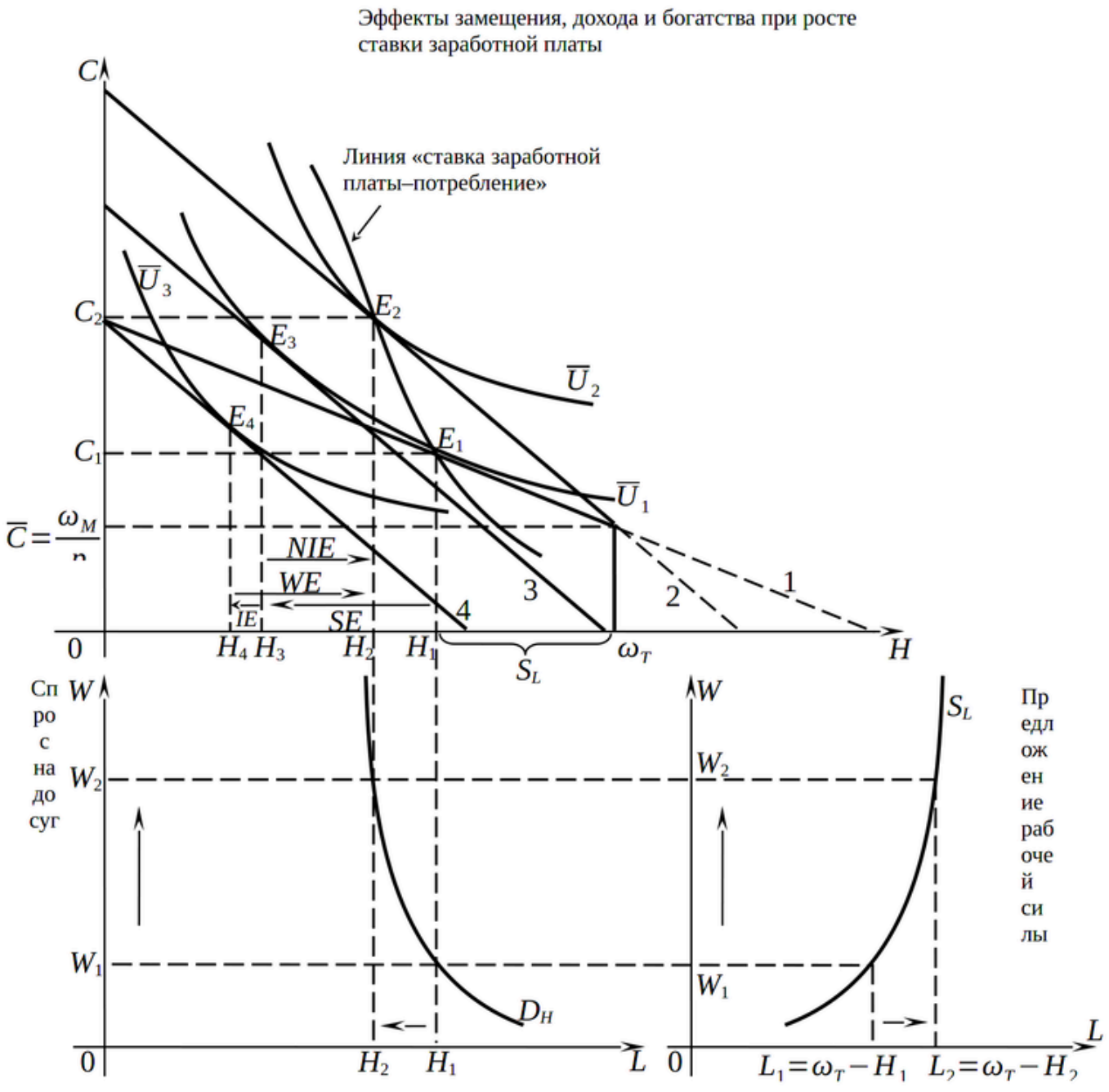


Рисунок 3.30. Выбор между потреблением товаров и досугом: индивидуальное предложение труда

Поскольку свободное время является нормальным благом, эффекты дохода и замещения сонаправлены [5]. Величина общего эффекта изменения цены рабочей силы (отрезок $[H_2H_1]$ на рис. 3.30) складывается из трех эффектов: замещения $[H_3H_1]$, возникающего за счет относительного удорожания досуга; дохода $[H_4H_3]$, проистекающего из снижения покупательной способности человека с учетом потребления досуга; и богатства $[H_4H_2]$, имеющего своим источником повышение потенциальной стоимости временно́го фонда жизнедеятельности человека. Знак общего эффекта определяет направление монотонности функции предложения труда. Она является возрастающей, если эффекты замещения и дохода превышают эффект богатства и общий эффект противоположен по направлению изменению ставки заработной платы. Возможна и противоположная ситуация, когда эффект богатства перекрывает эффекты замещения и дохода, общий эффект сонаправлен изменению ставки заработной платы. При этом функция предложения труда будет убывающей.

Отметим, что, несмотря на то что у индивидуальной линии предложения труда может присутствовать убывающий участок, рыночное предложение труда, как горизонтальная сумма индивидуальных функций, как правило, будет возрастающим, поскольку для большинства работников эффект богатства не настолько велик, чтобы заставить их работать меньше при увеличении ставки заработной платы.

Поскольку первоначальный запас денег в реальном выражении зафиксирован $\left(\frac{\omega_M}{\bar{p}}\right)$, постольку общий эффект изменения уровня цен также можно разложить на следующие три составляющие: эффект замещения, эффект дохода в узком смысле как изменение покупательной способности запаса денег в реальном выражении и эффект богатства, который проявляется как эффект реальных кассовых остатков – изменение их стоимости в текущих ценах (рис. 3.31).

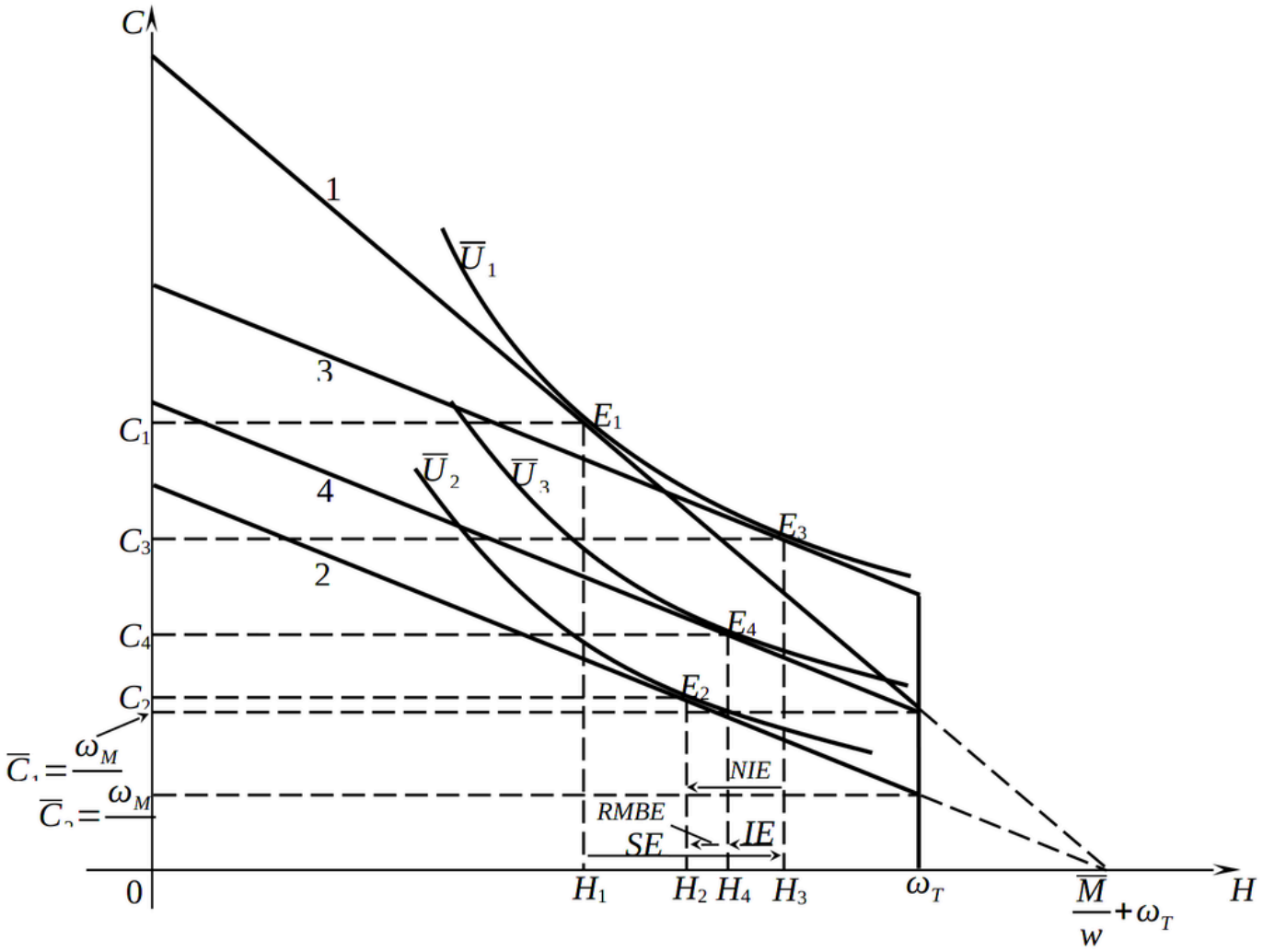


Рисунок 3.31. Эффекты замещения, дохода и реальных кассовых остатков при росте уровня цен

В частности, при повышении уровня цен $(p_2 g t p_1)$ первоначальное бюджетное ограничение (№1) $p_1 C + wH = p_1\left(\frac{\omega_M}{p_1}\right) + w\omega_T$, или $C = \frac{\omega_M}{p_1} + \frac{w}{p_1}\omega_T - \frac{w}{p_1}H$, поворачивается против часовой стрелки вокруг точки пересечения с горизонтальной осью $\left(\frac{\omega_M}{w} + \omega_T, 0\right)$ в положение №2 и принимает вид $p_2 C + wH = p_2\left(\frac{\omega_M}{p_2}\right) + w\omega_T$, или $C = \frac{\omega_M}{p_2} + \frac{w}{p_2}\omega_T - \frac{w}{p_2}H$. Соответственно общий эффект изменения цены потребительских благ характеризуется перемещением фактической, наблюдаемой точки оптимума потребителя от E_1 – к E_2. Эффект замещения отражается движением из исходной точки оптимума в точку E_3 касания с исходной кривой безразличия $\overline{U}_1$ виртуальной линии расходов №3, угловой коэффициент которой определяется новым соотношением цен.

Бюджетное ограничении №4 $p_2 C + wH = p_2\left(\frac{\omega_M}{p_1}\right) + w\omega_T$, или $C = \frac{\omega_M}{p_1} + \frac{w}{p_2}\omega_T - \frac{w}{p_2}H$, соответствует ситуации, когда потребитель оценивает свои реальные ликвидные активы, отталкиваясь от первоначального уровня цен $\left(\frac{\omega_M}{p_1}\right)$, тогда как фактические цены уже повысились до уровня p_2. При этом, с точки зрения данного индивидуума, номинальная стоимость его реальных ликвидных активов повышается до уровня $p_2\left(\frac{\omega_M}{p_1}\right)$. Таким образом, бюджетное ограничении №4 характеризует феномен «денежных иллюзий» покупателя. Переход из точки E_3 в точку E_4 максимума полезности потребителя при вспомогательном бюджетное ограничении №4 отражает эффект дохода в узком смысле как изменение покупательной способности исходной величины ликвидных активов индивидуума.

Соответственно, перемещение с бюджетного ограничения №4 на итоговое, фактическое бюджетное ограничение №2 показывает эффект «реальных кассовых остатков», когда индивидуум осознаёт, что становится беднее, поскольку при возросших ценах его ликвидные активы в реальном выражении дешевеют, тогда как их номинальная ценность остается прежней.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий эффекты замещения, дохода и реальных кассовых остатков при повышении общего уровня цен в модели выбора между доходом и досугом для предпочтений Кобба-Дугласа. Пусть функция полезности индивидуума имеет вид: $U = \sqrt{CH}$. Индивидуум располагает первоначальным запасом денег $\omega_M = 10$. Предположим, что уровень цен повышается от $p_1 = 1$ до $p_2 = 2$. Ставка заработной платы неизменна, ее уровень составляет $w = 5$.

Исходный оптимум потребителя таков: $H_1 = 13, C_1 = 65$. При этом индивидуальная полезность достигает уровня $U = \sqrt{845}$.

Конечный потребительский оптимум характеризуется координатами: $H_2 = 13, C_2 = 32,5$.

Третий, вспомогательный оптимум будет определяться касанием некоторого гипотетического бюджетного ограничения и исходной кривой безразличия: $\sqrt{2,5}H_3 = \sqrt{845}, H_3 = \sqrt{338} \approx 18,38, C_3 = 2,5\sqrt{338} \approx 45,96$. Эффект замещения по Хиксу составит: $\Delta H = 5,38; \Delta C = -19,04$.

Эффект реальных кассовых остатков может быть определен с помощью четвертого оптимума, рассчитываемого на основе бюджетного ограничения: $2,5H_4 = 10 + 24 \bullet 2,5 - 2,5H_4$. Координаты этого оптимума будут таковы: $H_4 = 14, C_4 = 2,5 \bullet 14 = 35$. Валовой эффект дохода будет равен: $\Delta H = -4,38; \Delta C = -10,96$. Эффект реальных кассовых остатков составит: $\Delta H = -1; \Delta C = -2,5$. В совокупности валовой эффект дохода и эффект реальных кассовых остатков дают чистый эффект дохода: $\Delta H = -4,38 - 1 = -5,38 = 18,38 - 13; \Delta C = -10,96 - 2,5 = -13,46 = 32,5 - 45,96$.

---

1. Заметим, что функция спроса характеризуется постоянной ценовой эластичностью при любом значении аргумента тогда и только тогда, когда функция спроса имеет степенной вид: $Q = cP^k$, где c – это произвольная константа. Действительно, если функция спроса обладает постоянной эластичностью, то она описывается дифференциальным уравнением:
$E_p^d = \frac{d\ln|Q|}{d\ln|P|} = k$,
интегрируя которое $\int d\ln|Q| = k\int d\ln|P|$, т.е. $\ln|Q| = k\ln|P| + \ln c$, а затем потенцируя полученное равенство, получаем степенную функцию. См.: Маршалл А. Принципы политической экономии. – М.: Прогресс, 1983. ↩

2. См.: Патинкин Д. Деньги, процент и цены. – М.: Экономика, 2004. ↩

3. При этом эффект богатства, возникающий за счет удорожания товарно-материальных активов, для их обладателя является положительным. ↩

4. Модель выбора между работой по найму, приносящей денежный доход, который расходуется на потребительские товары, и досугом как экономическим благом может рассматриваться в качестве частного случая модели Г. Беккера, включающей производственную деятельность внутри домохозяйства:
$\max_{y_i} U(y_1, \ldots, y_l)$:
$L_i = a_i y_i, x_i = g_i y_i;$
$\sum_{i=1}^{l} p_i x_i = wL + \omega_M;$
$\sum_{i=1}^{l} L_i + L = \omega_T;$
где y_i – производимые внутри домашнего хозяйства продукты конечного потребления, x_i – товары, покупаемые на рынке, $i = 1, \ldots, l; a_i$, g_i – коэффициенты затрат времени и товаров на производство единицы товара y_i внутри домохозяйства; L_i – продолжительность неоплачиваемой трудовой деятельности *i*-го вида в быту, *L* – продолжительность рыночной трудовой деятельности, приносящей денежный доход и оплачиваемой по ставке *w* (Беккер Г.С. Человеческое поведение: экономический подход. – М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 2003). Объединяя финансовое и технологические условия модели, приходим к развернутому бюджетному ограничению:
$\sum_{i=1}^{l} p_i x_i + w\sum_{i=1}^{l} L_i = \sum_{i=1}^{l} (p_i g_i + wa_i) y_i = w\omega_T + \omega_M$. Здесь $\pi_i = p_i g_i + wa_i$ представляет собой полную цену единицы товара y_i. Решая поставленную задачу связанной оптимизации, выписываем функцию Лагранжа: $L = U(y_1, \ldots, y_l) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{l} (p_i g_i + wa_i) y_i - w\omega_T - \omega_M\right)$. Условия оптимума имеют вид:
$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial y_i} = \frac{\partial U}{\partial y_i} - \lambda\pi_i = 0, i = 1, \ldots, l; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\sum_{i=1}^{l} (p_i g_i + wa_i) y_i + w\omega_T + \omega_M = 0. \end{cases}$$
Из первых *l* равенств получаем эквимаржинальное условие: $\frac{MU_i}{MU_j} = \frac{\pi_i}{\pi_j}, i, j = 1, \ldots, l; i \neq j$. Оптимум в базовой модели предложения труда (3.26) окажется следствием модели Беккера, если представить последнюю в агрегированном виде с функцией полезности $U(C, H)$ и значениями технологических коэффициентов $g_C = 1, a_C = 0, g_H = 0, a_H = 1$. Действительно, в таком случае получаем: $\frac{MU_H}{MU_c} = \frac{p_H g_H + wa_H}{p_C g_C + wa_C} = \frac{w}{p}$.
Возможно обобщение модели деятельности домашнего хозяйства как производителя на случай нелинейной технологии (ср.: Рощин С.Ю., Разумова Т.О. Экономика труда. – М.: Инфра-М, 2001):
$\max_{y_1, \ldots, y_l} U(y_1, \ldots, y_l)$:
$y_i = f(x_1, \ldots, x_l, L_1, \ldots, L_l);$
$\sum_{i=1}^{l} p_i x_i = wL + \omega_M;$ ↩
$\sum_{i=1}^{l} L_i + L + H = \omega_T.$

5. Если для трудолюбивого индивида досуг является благом низшего порядка, то действие эффектов дохода и замещения будет противоположно по направлению. ↩

3.5. Двойственность в теории производства: эффекты замещения и выпуска

Соотношения двойственности между задачами связанной максимизации выпуска (2.73) и минимизации издержек (2.78) при условии равенства соответствующих технологий производства и цен на ресурсы аналогичны тем, которые были сформулированы для аналогичных задач в теории потребления. Если рассчитать, используя решение (K, L), оптимальный объем производства Q в задаче (2.73) и рассматривать его в качестве ограничения $\overline{Q}$, то решение задачи (2.78) (K, L) совпадет с ответом в (2.73). Другими словами, если $\min_{K,L} Q(K, L) = \overline{Q}$ при условии $p_K K + p_L L \leq \overline{TC}$, $K \geq 0$, $L \geq 0$, то $\min_{K,L}(p_K K + p_L L) = \overline{TC}$ при выполнении ограничения: $Q(K, L) \geq \overline{Q}$, $K \geq 0$, $L \geq 0$. Симметричной является и двумерная иллюстрация решения задачи связанной минимизации издержек (рис. 4.4), соответствующая пространственному графику, приведенному на рис. 4.3. Кроме того, симметрия между задачами (2.73) и (2.78) отражается соотношением между соответствующими множителями Лагранжа, о чем еще пойдет речь ниже.

Кроме того, симметрию между задачами связанной максимизации объема производства (2.73) и минимизации его издержек (2.78) отражает экономический смысл соответствующих множителей Лагранжа. Множители Лагранжа в этих задачах представляют собой взаимно обратные величины (2.77) и (2.95).

Очевидно, что максимизация прибыли предполагает минимизацию издержек производства. Поэтому если использовать в качестве ограничения по выпуску в задаче минимизации издержек объем производства, максимизирующий прибыль, то оптимальные затраты факторов для данных оптимизационных задач будут совпадать. Если подставить найденный в (2.134) оптимальный выпуск в функции условного спроса на факторы производства, выведенные на первом этапе двухэтапной постановки, то можно получить оптимальную комбинацию факторов производства. Отметим, что данные значения могут быть получены также с помощью леммы Шепарда дифференцированием функции издержек по ценам факторов производства при оптимальной величине выпуска продукции. Полученные таким образом оптимальные объемы использования труда и капитала будут соответствовать оптимальным затратам факторов, полученным в одноэтапной постановке с помощью функций производного спроса на ресурсы.

В свою очередь, получив оптимальные затраты факторов производства из функций производного спроса в одноэтапной постановке, можно подставить их в производственную функцию и получить оптимальный выпуск. Он будет в точности равен выпуску, найденному из соотношения (2.134) на втором этапе двухэтапной постановки. Это является отражением эквивалентности одноэтапной и двухэтапной постановки задачи максимизации прибыли фирмой (рис.3.32).

Таким образом, справедливы следующие тождества условного и производного спроса в точке максимума прибыли:

$$K(p_K, p_L, p) \equiv K^h(p_K, p_L, Q(p_K, p_L, p)); (3.28)$$

$$L(p_K, p_L, p) \equiv L^h(p_K, p_L, Q(p_K, p_L, p)); (3.29)$$

$$K(p_K, p_L, p(p_K, p_L, Q)) \equiv K(p_K, p_L, MC(p_K, p_L, Q)) \equiv K^h(p_K, p_L, Q); (3.30)$$

$$L(p_K, p_L, p(p_K, p_L, Q)) \equiv L(p_K, p_L, MC(p_K, p_L, Q)) \equiv L^h(p_K, p_L, Q). (3.31)$$

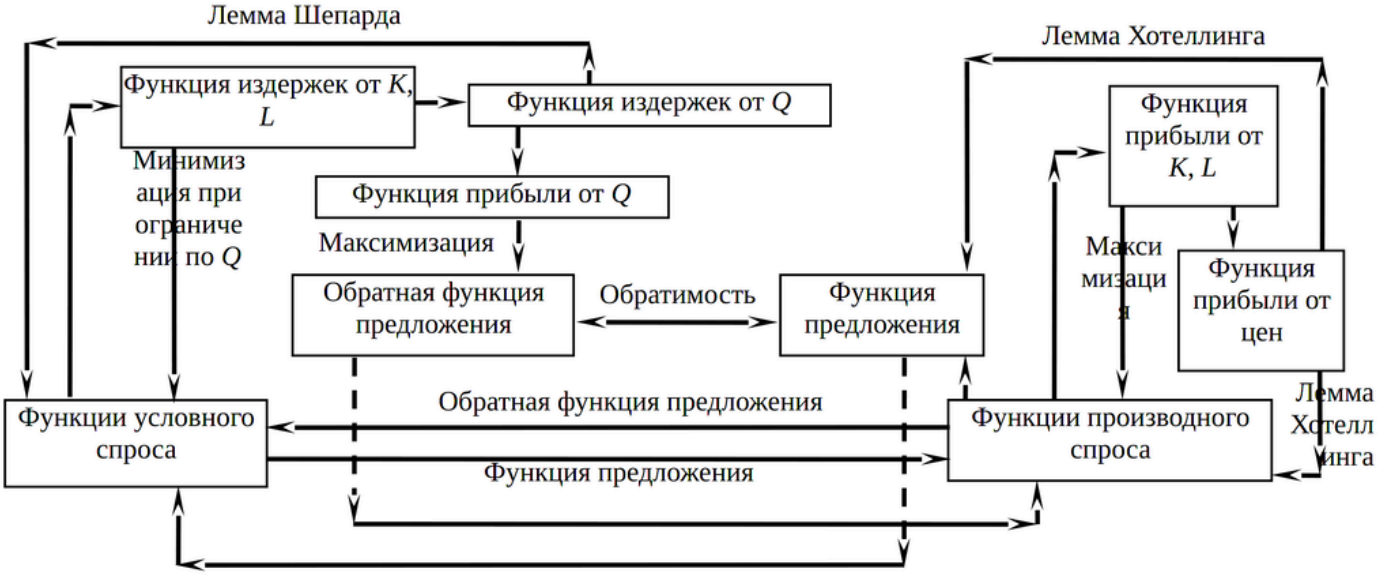


Рисунок 3.32. Двойственность в производстве

С одной стороны, данные тождества условного и производного спроса на факторы позволяют установить эквивалентность между процедурами одноэтапной (2.113), (2.131) и двухэтапной (2.133) максимизации прибыли. С другой стороны, они демонстрируют эквивалентность условий достижения оптимального финансового результата (2.119)-(2.120), (2.81), (2.137) в различных подходах к одноэтапной процедуре поиска максимума прибыли, трактующих ее как задачу условной (2.131) либо безусловной (2.113) оптимизации.

Обратим внимание на то, что при трактовке максимизации прибыли как задачи условной оптимизации (2.131) объем выпускаемой продукции Q выступает в качестве одного из параметров. Применительно к данной задаче и соответствующему лагранжиану (2.140) теорема об огибающей (xii) свидетельствует о том, что производная прибыли по объему производства равняется разности между ценой продукта и множителя Лагранжа:

$$\frac{dPR}{dQ} = p - \lambda.$$

При этом, используя эквивалентность одноэтапной (2.131) и двухэтапной (2.133) процедуры финансовой оптимизации, а также условие максимума прибыли – равенство нулю ее производной (2.134), можно показать экономический смысл множителя Лагранжа в задаче связанной максимизации прибыли в одноэтапной постановке (2.131) как цены выпускаемой продукции и одновременно предельных издержек производства: $\lambda = p = MC$. Это позволяет посредством цепочки равенств (2.137) продемонстрировать совпадение условий оптимальности финансового результата фирмы (2.119) и (2.81) установить эквивалентность альтернативных подходов к максимизации прибыли с точки зрения комбинации факторов производства как экстремальной задачи без ограничений (2.113) и при наличии ограничения (2.131).

Тождества условного и производного спроса позволяют показать механизм воздействия изменения цены фактора производства на величину спроса на него. Продифференцировав тождества (3.28)-(3.29) по ценам соответствующих факторов, можно провести декомпозицию прямого общего эффекта цены фактора на прямые эффекты замещения и выпуска:

$$\frac{\partial K(p_K,p_L,p)}{\partial p_K} = \frac{\partial K^h(p_K,p_L,Q)}{\partial p_K} + \frac{\partial K^h(p_K,p_L,Q)}{\partial Q} \bullet \frac{\partial Q(p_K,p_L,p)}{\partial p_K};$$
$$\frac{\partial L(p_K,p_L,p)}{\partial p_L} = \frac{\partial L^h(p_K,p_L,Q)}{\partial p_L} + \frac{\partial L^h(p_K,p_L,Q)}{\partial Q} \bullet \frac{\partial Q(p_K,p_L,p)}{\partial p_L}.$$

Аналогичным образом, дифференцируя тождества производного и условного спроса для капитала (3.28) и труда (3.29) по цене другого фактора – соответственно, труда и капитала, получаем уравнение декомпозиции перекрестного общего эффекта цены фактора на перекрестные эффекты замещения и выпуска:

$$\frac{\partial K(p_K,p_L,p)}{\partial p_L} = \frac{\partial K^h(p_K,p_L,Q)}{\partial p_L} + \frac{\partial K^h(p_K,p_L,Q)}{\partial Q} \bullet \frac{\partial Q(p_K,p_L,p)}{\partial p_L};$$
$$\frac{\partial L(p_K,p_L,p)}{\partial p_K} = \frac{\partial L^h(p_K,p_L,Q)}{\partial p_K} + \frac{\partial L^h(p_K,p_L,Q)}{\partial Q} \bullet \frac{\partial Q(p_K,p_L,p)}{\partial p_K}.$$

Приведем пример декомпозиции общего эффекта цены фактора на прямые эффекты замещения и выпуска для технологии Кобба-Дугласа $Q = K^{¼} L^{½}$. Поскольку в данном случае функции производного спроса на капитал и труд имеют вид (2.124), постольку общие прямые эффекты цен факторов будут выглядеть так:

$$\frac{\partial K(p_K,p_L,p)}{\partial p_K} = \frac{-p^4}{32p_K^3p_L^2}, \frac{\partial L(p_K,p_L,p)}{\partial p_L} = \frac{-3p^4}{32p_Kp_L^4}.$$

Учитывая полученные выше функции условного спроса на факторы (2.88) и предложения (2.126), можно получить выражения прямых эффектов замещения:

$$\frac{\partial K^h(p_K,p_L,Q(p_K,p_L,p))}{\partial p_K} = \frac{-2^{\frac{1}{3}}p_L^{\frac{2}{3}}Q^{\frac{4}{3}}}{3p_K^{\frac{5}{3}}} = \frac{-2^{\frac{1}{3}}p_L^{\frac{2}{3}}p^4}{3p_K^{\frac{5}{3}}2^{\frac{16}{3}}p_K^{\frac{4}{3}}p_L^{\frac{8}{3}}} = \frac{-p^4}{96p_K^3p_L^2},$$
$$\frac{\partial L^h(p_K,p_L,Q(p_K,p_L,p))}{\partial p_L} = \frac{-2^{\frac{1}{3}}p_K^{\frac{1}{3}}Q^{\frac{4}{3}}}{3p_L^{\frac{4}{3}}} = \frac{-2^{\frac{1}{3}}p_K^{\frac{1}{3}}p^4}{3p_L^{\frac{4}{3}}2^{\frac{16}{3}}p_K^{\frac{4}{3}}p_L^{\frac{8}{3}}} = \frac{-p^4}{96p_Kp_L^4}.$$

Рассчитав производные условного спроса по объему производства с учетом функции предложения (2.126):

$$\frac{\partial K^h(p_K,p_L,Q)}{\partial Q} = \frac{4}{3}\left(\frac{p_L}{2p_K}\right)^{\frac{2}{3}}Q^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\left(\frac{p_L}{2p_K}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{p}{2^{\frac{4}{3}}p_K^{\frac{1}{3}}p_L^{\frac{2}{3}}} = \frac{p}{3p_K},$$
$$\frac{\partial L^h(p_K,p_L,Q)}{\partial Q} = \frac{4}{3}\left(\frac{2p_K}{p_L}\right)^{\frac{1}{3}}Q^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\left(\frac{2p_K}{p_L}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{p}{2^{\frac{4}{3}}p_K^{\frac{1}{3}}p_L^{\frac{2}{3}}} = \frac{2p}{3p_L},$$

а также производные функции предложения по ценам факторов:

$$\frac{\partial Q(p_K,p_L,p)}{\partial p_K} = \frac{-p^3}{16p_K^2p_L^2}, \frac{\partial Q(p_K,p_L,p)}{\partial p_L} = \frac{-p^3}{8p_Kp_L^3},$$

выписываем выражения для прямых эффектов выпуска:

$$\frac{\partial K^h(p_K,p_L,Q)}{\partial Q} \bullet \frac{\partial Q}{\partial p_K} = \frac{-p}{3p_K}\frac{p^3}{16p_K^2p_L^2} = \frac{-p^4}{48p_K^3p_L^2},$$
$$\frac{\partial L^h(p_K,p_L,Q)}{\partial Q} \bullet \frac{\partial Q}{\partial p_L} = \frac{-2p}{3p_L}\frac{p^3}{8p_Kp_L^3} = \frac{-p^4}{12p_Kp_L^4}.$$

Таким образом, получаем декомпозицию прямых общих эффектов цен факторов на эффекты дохода и замещения:

$$\frac{\partial K(p_K,p_L,p)}{\partial p_K} = \frac{-p^4}{32p_K^3p_L^2} = \frac{-p^4}{96p_K^3p_L^2} - \frac{p^4}{48p_K^3p_L^2} = \frac{\partial K^h(p_K,p_L,Q(p_K,p_L,p))}{\partial p_K} + \frac{\partial K^h(p_K,p_L,Q)}{\partial Q} \bullet \frac{\partial Q(p_K,p_L,p)}{\partial p_K},$$
$$\frac{\partial L(p_K,p_L,p)}{\partial p_L} = \frac{-3p^4}{32p_Kp_L^4} = \frac{-p^4}{96p_Kp_L^4} - \frac{p^4}{12p_Kp_L^4} = \frac{\partial K^h(p_K,p_L,Q(p_K,p_L,p))}{\partial p_K} + \frac{\partial L^h(p_K,p_L,Q)}{\partial Q} \bullet \frac{\partial Q(p_K,p_L,p)}{\partial p_L}.$$

Прокомментируем экономический смысл эффекта выпуска, который присутствует в задаче максимизации прибыли наряду с эффектом замещения ([L_1L_3] на рис. 3.33), имеющим место при минимизации издержек. Эффект выпуска состоит в том, что при изменении, допустим, снижении цены одного из факторов производства, например, труда, тот же объем продукта, что и ранее, может быть выпущен с меньшими издержками, или, что то же самое, при прежних затратах в денежном выражении возможно изготовить больше продукции ($\overline{Q}_2$ на рис. 3.33) по сравнению с ее величиной, выступающей в качестве ограничения в задаче ($\overline{Q}_1$ на рис. 3.33). Ведь, если изокванты выпуклы к началу координат, то издержки производства являются возрастающей функцией объема производства Q. Таким образом, в результате снижения цены фактора производства происходит смещение вниз графика издержек (от TC_1 до TC_2 на рис. 3.33).

Опираясь на лемму Шепарда (2.26), предполагая непрерывность соответствующих вторых производных, можно увидеть, что для нормального ресурса

$$\frac{\partial MC}{\partial p_L} = \frac{\partial}{\partial p_L}\left(\frac{\partial TC}{\partial Q}\right) = \frac{\partial}{\partial Q}\left(\frac{\partial TC}{\partial p_L}\right) = \frac{\partial x_L(p_L, p_K, Q)}{\partial Q} > 0.$$

Действительно, для нормального ресурса переход на более высокую изокванту за счет параллельного сдвига изокосты, при фиксированных ценах на факторы производства будет означать увеличение объема его использования. Итак, данное неравенство показывает, что при снижении ставки заработной платы величина предельных издержек сократится при каждом заданном объеме производства Q, т.е. график $MC(Q)$ сместится вниз (рис. 3.33).

Возникающее в результате, скажем, снижения цены одного из факторов производства – труда – смещение графика совокупных издержек производства означает одновременно сдвиг вниз и линии предельных издержек, что будет иметь следствием увеличение оптимального объема продукции, а значит, в свою очередь, и спроса на рабочую силу.

Действительно, пусть $MC_1(Q_1) = P = MC_2(Q_2)$, где изменение функции предельных издержек от $MC_1(Q)$ к $MC_2(Q)$ происходит за счет эффекта выпуска при бесконечно малом снижении, скажем, ставки заработной платы $dw < 0$, а значит, $dMC < 0$, т.е. $MC_2(Q_1) < MC_1(Q_1)$. Пусть $MC_2(Q_1) = P'$. Имеем: $MC_2(Q_1) = P' < P = MC_1(Q_1)$. При переходе к более высокой цене (от $P' = MC_2(Q_1)$ к $P = MC_2(Q_2)$) происходит перемещение вдоль кривой предельных издержек: $dMC_2 > 0$. Следовательно, оптимальный объем производства в соответствии с кривой предельных издержек MC_2 возрастет, ведь, по достаточному условию, в точке максимума прибыли $\frac{dMC}{dQ} > 0$, а значит, $dQ < 0$, т.е. $Q_2 > Q_1$. С увеличением оптимального объема производства растут и выручка, и издержки, и, если предположить, что *L* – нормальный ресурс, то рост Q, а значит, и расходов приведет к увеличению спроса на рабочую силу (от L_3 до L_2 на рис. 3.33).

В отличие от прямых эффектов ([K_1K_3] и [K_3K_2]) перекрестные эффекты замещения и выпуска, возникающие при снижении ставки арендной платы, для нормальных ресурсов противоположно направлены (соответственно, [L_1L_3] и [L_3L_2] на рис. 3.33).

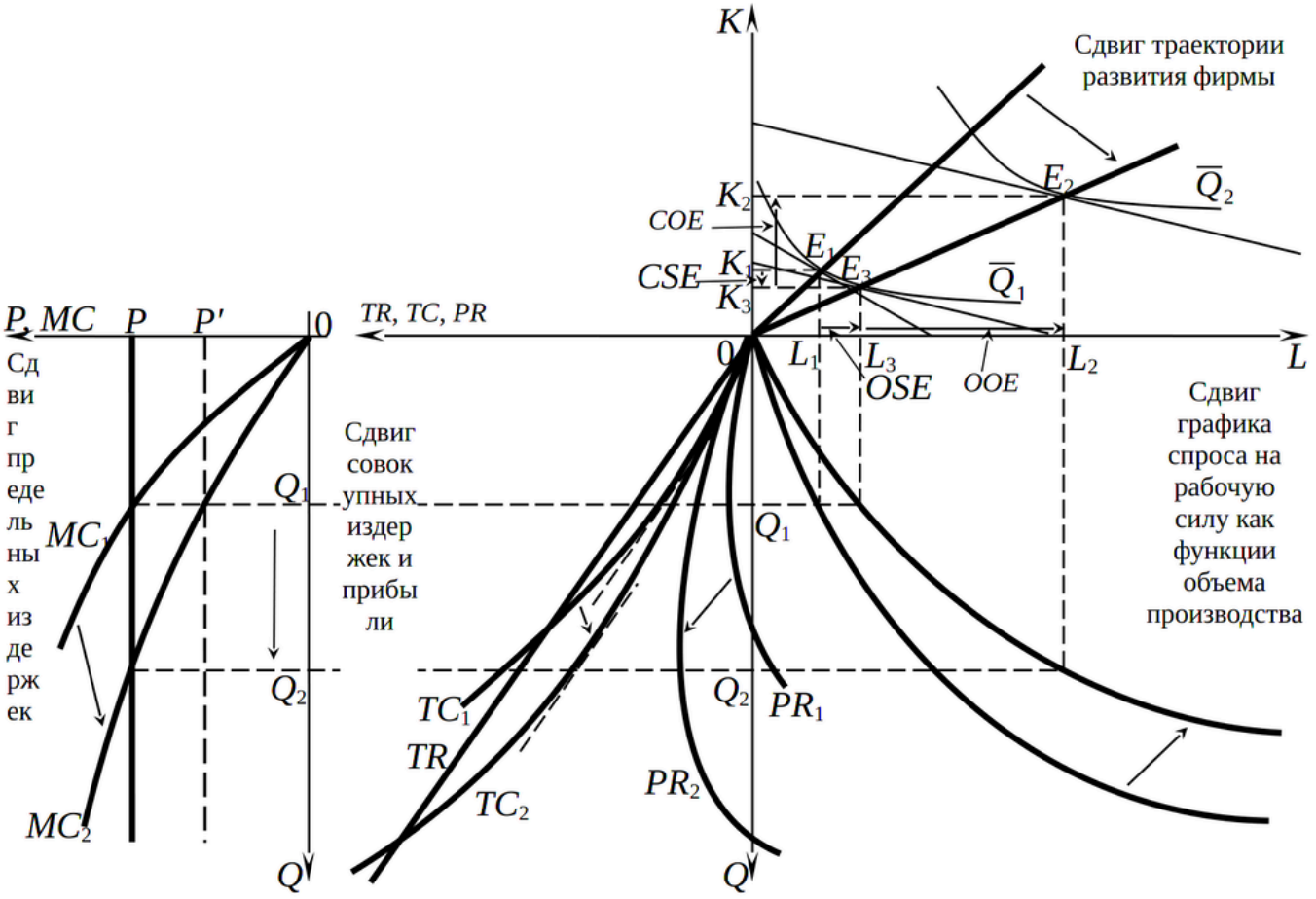


Рисунок 3.33. Эффекты замещения и выпуска при снижении ставки заработной платы

Приведем пример расчета эффектов замещения и выпуска для фирмы с производственной функцией $Q = K^{1/4}L^{1/2}$, действующей в условиях совершенной конкуренции, когда ставка заработной платы сокращается от $p_L^1 = 4$ до $p_L^2 = 2$, тогда как ставка арендной платы и цена готовой продукции неизменны и составляют соответственно $p_K = 1$ и $p = 5$. При этом происходит сдвиг траектории развития (2.86) от $K_1 = 4L$ к $K_2 = 2L$ (рис. 3.34), а значит, и к изменению функций условного спроса на факторы (2.88). Первоначально они выглядели так: $L_1 = \sqrt[3]{\frac{Q^4}{2}}$, $K_1 = \sqrt[3]{4Q^4}$. При новом соотношении цен на факторы производства они становятся такими: $L_2 = K_2 = \sqrt[3]{Q^4}$.

Это вызывает сдвиг функций общих издержек производства (2.106): если исходно они имели вид $TC_1 = 3\sqrt[3]{4Q^4}$, то теперь они растягиваются вниз и становятся равными $TC_2 = 3\sqrt[3]{Q^4}$.Тогда, в соответствии с (2.108), исходная функция предельных издержек $MC_1 = \sqrt[3]{256Q}$ в результате снижения ставки заработной платы изменяется и принимает вид: $MC_2 = 4\sqrt[3]{Q}$. Используя функцию предложения (2.126), получаем, что при этом максимизирующий прибыль объем производства увеличивается от $Q_1 = 16$ до $Q_2 = 64$. Функции условного спроса на труд и капитал по Хиксу, приведенные выше, показывают, что объемы

занятости и капитала на предприятии возрастают соответственно от $L_1 = 32$ и $K_1 = 64$ до $L_2 = K_2 = 256$. Если же подставить в новые функции условного спроса исходный объем производства $Q_1 = 16$, то можно рассчитать вспомогательное количество человеко-часов труда и основных фондов $L_3 = K_3 = 32 \bullet \sqrt[3]{2} \approx 40,3$ $32 \bullet \sqrt[3]{2} \approx 40,3$ (рис. 3.34), которое позволяет рассчитать прямой эффект замещения, приблизительно равный 8,3. Прямой и перекресный эффекты выпуска составят примерно 215,7. Перекрестные эффект замещения будет приблизительно равен -23,7.

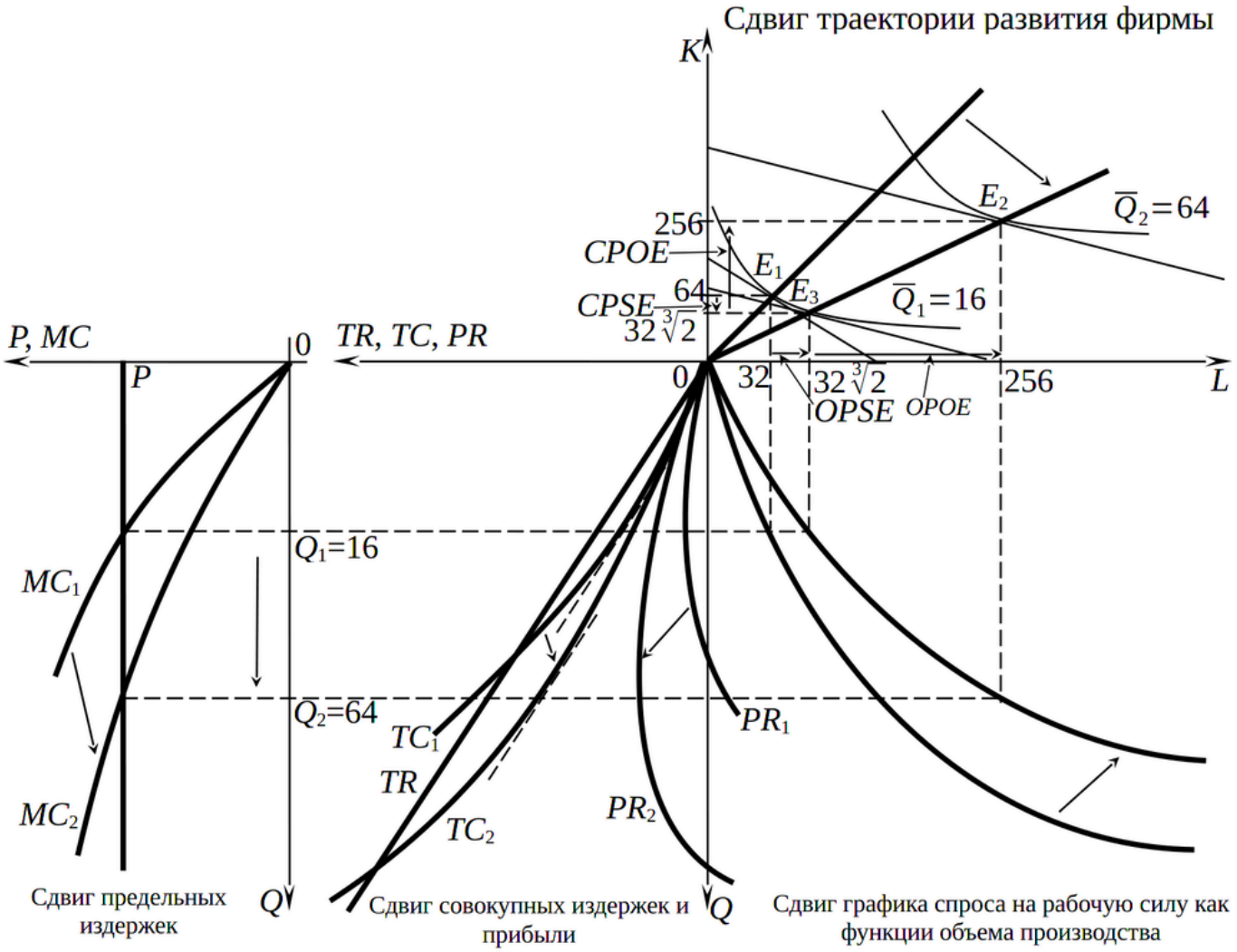


Рисунок 3.34. Эффекты замещения и выпуска при снижении ставки заработной платы: пример

Глава 4. Потребительские и инвестиционные решения в динамике

4.1. Межвременной потребительский выбор: дискретное время
4.2. Потребительский выбор в непрерывном времени
4.3. Максимизация прибыли и накопление капитала
4.4. Накопление индивидуального человеческого капитала
4.5. Накопление человеческого капитала компании
4.6. Оптимальное управление максимизацией прибыли

4.1. Межвременной потребительский выбор: дискретное время

Динамическая максимизация полезности опирается на рассуждения, аналогичные использованным И. Фишером, который, рассматривая взаимосвязь между структурой межвременных предпочтений, распределением потока доходов и расходов экономических агентов во времени, а также ставкой процента, сформулировал ставшую теперь классической модель межвременного потребительского выбора [1]:

$$\max_{c_0,c_1} U(c_0,c_1):$$
$$c_0+\frac{c_1}{1+r}\le M_0+\frac{M_1}{1+r},$$

где M_0, M_1 – доходы экономических агентов соответственно в первоначальный и последующий момент времени; c_0, c_1 – потребительские расходы в этих периодах в реальном выражении $\left(c=\sum_{i=1}^{n}p_{i0}x\right.$, где p_{i0} – цена *i*-го товара базисного, нулевого периода, x – объем потребления *i*-го товара в отчетном, т.е. нулевом либо первом, периоде); *r* – реальная ставка процента. Максимизация полезности здесь связана межвременным бюджетным ограничением, предполагающим, что дисконтированные расходов не должны превышать дисконтированные доходы.

Решая данную задачу связанной максимизации полезности, составляем функцию Лагранжа:
$L=\lambda_0U(c_0,c_1)+\lambda_1\left(M_0+\frac{M_1}{1+r}-c_0-\frac{c_1}{1+r}\right)$. Необходимые условия внутреннего оптимума потребителя $(c_0>0,c_1>0)$ задаются системой:

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial c_0}=\lambda_0\frac{\partial U}{\partial c_0}-\lambda_1=0,\\ \frac{\partial L}{\partial c_1}=\lambda_0\frac{\partial U}{\partial c_1}-\frac{\lambda_1}{1+r}=0,\\ \lambda_1\left(M_0+\frac{M_1}{1+r}-c_0-\frac{c_1}{1+r}\right)=0,\lambda_1\ge0,M_0+\frac{M_1}{1+r}-c_0-\frac{c_1}{1+r}\ge0;\end{cases}$$

Рассмотрим условие дополняющей нежесткости. Предположим, что $\lambda_1=0$. Но тогда из каждого из первых двух условий оптимальности в силу ненасыщаемости потребления $(MU_0>0,MU_1>0)$ получается, что $\lambda_0=0$. Но вектор множителей Лагранжа λ не может быть нулевым, следовательно, $\lambda_1>0$, и бюджетное ограничение является жестким:
$c_0+\frac{c_1}{1+r}=M_0+\frac{M_1}{1+r}$. Кроме того, $\lambda_0\ne0$, ведь если бы это было не так, то и λ_1 был бы нулевым, что противоречит рассуждениям выше. Следовательно, без ограничения общности можно положить $\lambda_0=1$. Итак, система необходимых условий оптимума потребителя принимает вид:

$$\begin{cases}MU_0=\lambda_1,\\ MU_1=\frac{\lambda_1}{1+r},\\ c_0+\frac{c_1}{1+r}=M_0+\frac{M_1}{1+r};\end{cases}$$

из которой делением первого равенства на второе получаем, что соотношение предельных полезностей потребления первоначального и последующего периодов равняется темпу роста финансовых средств: $\frac{MU_0}{MU_1}=1+r$.

Рассчитав полную производную межвременной функции полезности вдоль кривой безразличия $dU|_{U=const}=\frac{\partial U}{\partial c_0}dc_0+\frac{\partial U}{\partial c_1}dc_1=0$, получаем, что отношение предельных полезностей текущего и будущего потребления равняется предельной норме межвременного замещения потребительских расходов, т.е. стоимости добавочного будущего потребления, необходимого для компенсации человеку, отказывающемуся от дополнительной единицы расходов на текущее потребление. Таким образом, выбор домохозяйств между текущим и будущим потреблением подчиняется следующему общему условию:

$$MRS_{01}\equiv\frac{-dc_1}{dc_0}\Big|_{U=const}=\frac{\partial U/\partial c_0}{\partial U/\partial c_1}=\frac{MU_0}{MU_1}=1+r.$$

В задаче межвременного выбора величина ставки процента представляет собой относительную (альтернативную) стоимость текущего потребления по отношению к будущему, т.е. стоимость времени.

По определению, сбережения каждого периода времени представляют собой непотребленный доход:
$s_0\equiv M_0-c_0,s_1\equiv M_1-C_1$. С учетом межвременного бюджетного ограничения получаем равенство $s_0=\frac{-M_1-c_1}{1+r}$. Итак, возросшие на процентную ставку сбережения первого периода потребляются во втором: $s_0(1+r)=-s_2$.

Решая задачу межвременного выбора, каждый потребитель определяет для себя маршаллианские функции спроса на текущее и будущее потребление: $c_0=c_0^m(M_0,M_1,r)$, $c_1=c_1^m(M_0,M_1,r)$.

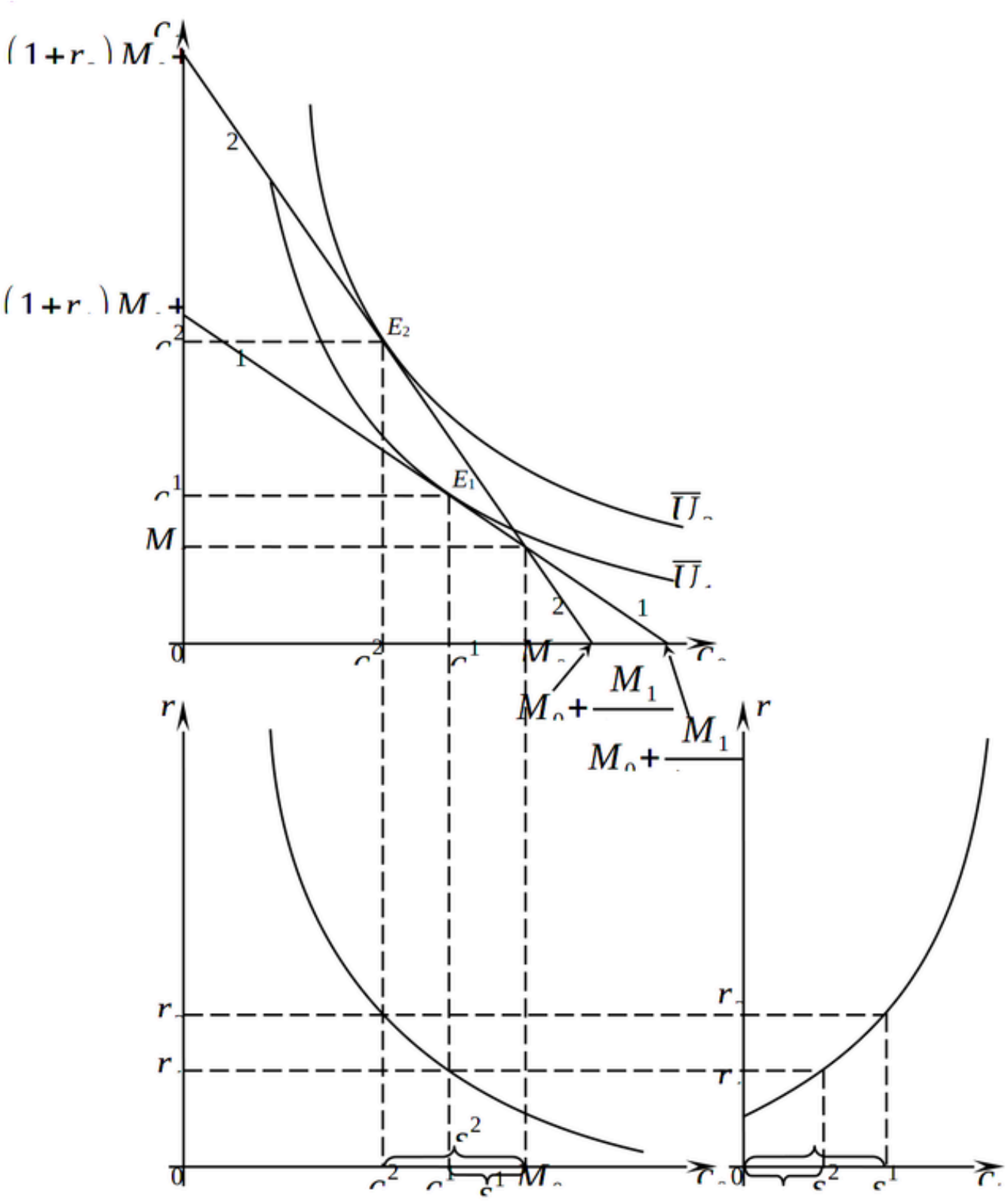


Рисунок 1. Межвременной выбор и предложение сбережений

Подставляя их в тождество сбережений, получаем функции предложения сбережений: $s_0(M_0, M_1, r) = M_0 - c_0^m(M_0, M_1, r)$, $s_1(M_0, M_1, r) = M_1 - c_1^m(M_0, M_1, r)$. Традиционная функция спроса представляет собой убывающую зависимость объемов потребительских товаров от их цены, роль которой в данном случае играет процентная ставка. В таком случае функция сбережений будет являться их возрастающей зависимостью от ставки процента (рис. 1).

Пример 1.

Пусть домашнее хозяйство состоит из одного индивидуума, максимизирующего совокупную полезность на интервале из двух периодов $t = \{0, 1\}$:

$$U = \sum_{t=0}^{1} \frac{u_t}{(1+\rho)^t},$$

где $u_t = 2\sqrt[4]{c_t}$ – полезность в каждый, данный момент времени, c_t – потребление в момент t, ρ – норма межвременных предпочтений, равная 0,02.

Итак, аддитивная межвременная функция полезности имеет вид:

$$U = 2\sqrt[4]{c_0} + \frac{2\sqrt[4]{c_1}}{1+\rho}.$$

Банковская ставка не меняется с течением времени и составляет 0,06. Заработная плата индивидуума составляет 5 (ден.ед.) в каждый момент времени. Предположим, что доходов помимо заработной платы нет.

Межвременное бюджетное ограничение в данной, простейшей задаче потребительского выбора имеет вид:

$$c_0 + \frac{c_1}{1{,}06} \le 5 + \frac{5}{1{,}06} = \frac{10{,}3}{1{,}06}.$$

Выпишем функцию Лагранжа:

$$L = \lambda_0 2\sqrt[4]{c_0} + \frac{\lambda_0\sqrt[4]{c_1}}{0{,}51} - \lambda_1\left(c_0 + \frac{c_1}{1{,}06} - \frac{10{,}3}{1{,}06}\right).$$

Условия динамической оптимизации в данной задаче будут иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial c_0} = \frac{\lambda_0}{2c_0^{\frac{3}{4}}} - \lambda_1 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial c_1} = \frac{\lambda_0}{2{,}04c_1^{\frac{3}{4}}} - \frac{\lambda_1}{1{,}06} = 0; \\ \lambda_1\left(c_0 + \frac{c_1}{1{,}06} - \frac{10{,}3}{1{,}06}\right) = 0, \lambda_1 \ge 0, c_0 + \frac{c_1}{1{,}06} \le \frac{10{,}3}{1{,}06}. \end{cases}$$

Пусть $\lambda_1 = 0$, тогда в соответствии с каждым из первых двух условий оптимальности $\lambda_0 = 0$, чего не может быть, поскольку вектор множителей Лагранжа (λ_0, λ_1) должен быть ненулевым. Следовательно, по условию дополняющей нежесткости бюджетное ограничение является активным: $1,06c_0 + c_1 = 10,3.$

Заметим, что, если $\lambda_0 = 0$, то и $\lambda_1 = 0$, чего не может быть, поскольку вектор множителей Лагранжа (λ_0, λ_1) не может быть нулевым. Следовательно, без ограничения общности можно положить $\lambda_0 = 1$, и условия оптимальности можно переписать так:

$$\begin{cases} \frac{1}{2c_0^{\frac{3}{4}}} = \lambda_1; \\ \frac{1}{2{,}04c_1^{\frac{3}{4}}} = \frac{\lambda_1}{1{,}06}; \\ \lambda_1\left(c_0 + \frac{c_1}{1{,}06} - \frac{10{,}3}{1{,}06}\right) = 0, \lambda_1 \ge 0, c_0 + \frac{c_1}{1{,}06} \le \frac{10{,}3}{1{,}06}. \end{cases}$$

Рассчитаем оптимальное распределение потребления во времени. Поделив первое условие оптимальности на второе, получаем эквимаржинальный принцип:

$$\left(\frac{c_1}{c_0}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{53}{51};$$

т.е. зависимость будущего потребления от первоначального такова: $c_1 = \left(\frac{53}{51}\right)^{\frac{4}{3}} c_0$.

Объединяя полученное соотношение с бюджетным ограничением, находим первоначальный объем потребления: $c_0 = \frac{10{,}3}{1{,}06 + \left(\frac{53}{51}\right)^{\frac{4}{3}}} \approx 4,875 < 5$, значит, индивидуум является кредитором в исходный момент времени. За счет этого он увеличивает свое потребление по отношению к заработанному доходу в будущем: $c_1 \approx 5,13$.

Для того, чтобы вывести функцию предложения сбережений для начального момента времени, оставим ставку процента переменной величиной в межвременном бюджетном ограничении:

$$c_0 + \frac{c_1}{1+r} \le 5 + \frac{5}{1+r}.$$

Выписываем функцию Лагранжа:

$$L = \lambda_0 2\sqrt[4]{c_0} + \frac{\lambda_0\sqrt[4]{c_1}}{0{,}51} - \lambda_1\left(c_0 + \frac{c_1}{1+r} - 5 - \frac{5}{1+r}\right).$$

Необходимые условия экстремума имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial c_0} = \frac{\lambda_0}{2c_0^{\frac{3}{4}}} - \lambda_1 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial c_1} = \frac{\lambda_0}{2{,}04c_1^{\frac{3}{4}}} - \frac{\lambda_1}{1+r} = 0; \\ \lambda_1\left(c_0 + \frac{c_1}{1+r} - 5 - \frac{5}{1+r}\right) = 0, \lambda_1 \ge 0, c_0 + \frac{c_1}{1+r} \le 5 + \frac{5}{1+r}; \end{cases}$$

По доказанному выше, $\lambda_0 \ne 0$ и $\lambda_1 \ne 0$, следовательно, бюджетное ограничение является жестким: $(1+r)c_0 + c_1 = 5\,(2+r)$, а λ_0 можно положить равным единице. Поделив первое условие оптимальности на второе, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} c_1 = \left(\frac{1+r}{1{,}02}\right)^{\frac{4}{3}} c_0; \\ (1+r)c_0 + c_1 = 5\,(2+r). \end{cases}$$

Таким образом, функция потребительского спроса в первоначальный момент времени будет иметь вид:

$$c_0(r) = \frac{5(2+r)}{1+r+\left(\frac{1+r}{1{,}02}\right)^{4/3}} = \frac{5(2+r)1{,}02^{4/3}}{(1+r)\left(\sqrt[3]{1+r}+1{,}02^{4/3}\right)} = \frac{5\bullet 1{,}02^{4/3}}{\sqrt[3]{1+r}+1{,}02^{4/3}} + \frac{5\bullet 1{,}02^{4/3}}{(1+r)\left(\sqrt[3]{1+r}+1{,}02^{4/3}\right)}.$$

Очевидно, что потребительские расходы в первоначальный период представляют собой убывающую зависимость от ставки процента.

Следовательно, предложение сбережений в исходный момент времени – это возрастающая функция процентной ставки:

$$s_0(r) = 5 - c_0(r) = \frac{5\left(\sqrt[3]{1+r} - \frac{1{,}02^{4/3}}{1+r}\right)}{\sqrt[3]{1+r}+1{,}02^{4/3}} = 5 - \frac{5\bullet 1{,}02^{4/3}}{\sqrt[3]{1+r}+1{,}02^{4/3}} - \frac{5\bullet 1{,}02^{4/3}}{(1+r)\left(\sqrt[3]{1+r}+1{,}02^{4/3}\right)}.$$

Рассмотрим теперь усложненную задачу межвременного выбора при наличии в распоряжении домашнего хозяйства некоторой величины активов A. Предположим, кроме того, что домашнее хозяйство состоит из L индивидуумов и его численность прирастает темпом n.

Выпишем балансовое соотношение, описывающего динамику активов домашнего хозяйства:

$$A_t = A_{t-1} + I_{t-1} + R_{t-1} - C_{t-1},$$

где A_t и A_{t-1} – объем активов на начало периодов соответственно t и $t-1$, $C_{t-1} \equiv c_{t-1}L_{t-1}$ – величина потребления, а $I_{t-1} \equiv w_{t-1}L_{t-1}$ и $R_{t-1} \equiv r_{t-1}A_{t-1}$ – соответственно трудовой и рентный доходы на протяжении периода $t-1$. Здесь w_{t-1} и r_{t-1} – ставки соответственно заработной и арендной платы (при совершенном рынке капитала значение последней приближается к величине ставки процента), c_{t-1} – потребление в расчете на одного члена домохозяйства, L_{t-1} – величина использованных трудовых ресурсов в период $t-1$.

Распишем с учетом этих обозначений балансовое соотношение для активов первого и нулевого периодов [2]:

$$A_1 = A_0(1+r_0) + (w_0 - c_0)L_0. \quad (4.1)$$

Условие отсутствия «игры Понци», состоящей в финансировании долга за счет новой эмиссии долговых обязательств, утверждает, что в финальный момент времени – в конце первого периода – стоимость активов домохозяйства не должна быть отрицательной – все долги должны быть выплачены:

$$A_1(1+r_1) + (w_1 - c_1)L_1 \geq 0.$$

Объединяя данное условие с предыдущим соотношением, получаем межвременное бюджетное ограничение домашнего хозяйства:

$$A_0\,(1+r_0)(1+r_1) + (w_0 - c_0)\,(1+r_1)L_0 + (w_1 - c_1)L_1 \geq 0.$$

Поделим его на численность домохозяйства в исходный период, перейдем к величине индивидуальных активов каждого члена домашнего хозяйства $\left(a_0 \equiv \frac{A_0}{L_0}\right)$:

$$a_0\,(1+r_0)(1+r_1) + (w_0 - c_0)(1+r_1) + (w_1 - c_1)(1+n_1) \geq 0,$$

где $n_1 \equiv \frac{L_1}{L_0} - 1$ – темпа прироста численности домохозяйства в первый период.

Итак, в двухпериодовой задаче потребительского выбора при наличии активов в распоряжении домашнего хозяйства межвременное бюджетное ограничение каждого из индивидуумов будет иметь вид:

$$\frac{c_0}{1+n_1} + \frac{c_1}{1+r_1} \leq a_0\left(\frac{1+r_0}{1+n_1}\right) + \frac{w_0}{1+n_1} + \frac{w_1}{1+r_1}.$$

Здесь потоки доходов и расходов приводятся к концу первоначального периода, при этом дисконтирующий множитель оказывается скорректированным на темп роста численности домашнего хозяйства.

Итак, модифицированная задача межвременного потребительского выбора будет иметь вид:ю

$$\max_{c_0,c_1} U\,(c_0, c_1)\,:$$
$$\frac{c_0}{1+n_1} + \frac{c_1}{1+r_1} \leq a_0\left(\frac{1+r_0}{1+n_1}\right) + \frac{w_0}{1+n_1} + \frac{w_1}{1+r_1}.$$

Решая данную задачу, выписываем функцию Лагранжа:

$$L = \lambda_0 U(c_0, c_1) + \lambda_1\left(a_0\left(\frac{1+r_0}{1+n_1}\right) + \frac{w_0}{1+n_1} + \frac{w_1}{1+r_1} - \frac{c_0}{1+n_1} - \frac{c_1}{1+r_1}\right).$$

Внутренний оптимум потребителя $(c_0 > 0, c_1 > 0)$ должен удовлетворять условиям стационарности по потреблению в каждый момент времени и дополняющей нежесткости:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial c_0} = \lambda_0 \frac{\partial U}{\partial c_0} - \frac{\lambda_1}{1+n_1} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial c_1} = \lambda_0 \frac{\partial U}{\partial c_1} - \frac{\lambda_1}{1+r_1} = 0, \\ \lambda_1 \left(a_0 \left(\frac{1+r_0}{1+n_1} \right) + \frac{w_0 - c_0}{1+n_1} + \frac{w_1 - c_1}{1+r_1} \right) = 0, \lambda_1 \geq 0, \\ a_0 \left(\frac{1+r_0}{1+n_1} \right) + \frac{w_0 - c_0}{1+n_1} + \frac{w_1 - c_1}{1+r_1} \geq 0. \end{cases}$$

Если $\lambda_1 = 0$, то из каждого из первых двух условий оптимальности в силу ненасыщаемости потребления $(MU_0 > 0, MU_1 > 0)$ следует, что $\lambda_0 = 0$. Но вектор множителей Лагранжа λ не может быть нулевым, значит, $\lambda_1 > 0$, и бюджетное ограничение является жестким: $a_0 \left(\frac{1+r_0}{1+n_1} \right) + \frac{w_0 - c_0}{1+n_1} + \frac{w_1 - c_1}{1+r_1} = 0$. Кроме того, $\lambda_0 \neq 0$, ведь если бы это было не так, то и λ_1 был бы нулевым, что противоречит рассуждениям выше. Следовательно, без ограничения общности можно положить $\lambda_0 = 1$. Итак, система необходимых условий оптимума потребителя принимает вид:

$$\begin{cases} MU_0 = \frac{\lambda_1}{1+n_1}, \\ MU_1 = \frac{\lambda_1}{1+r_1}, \\ a_0 \left(\frac{1+r_0}{1+n_1} \right) + \frac{w_0 - c_0}{1+n_1} + \frac{w_1 - c_1}{1+r_1} = 0. \end{cases}$$

Делением первого равенства данной системы на второе получаем обобщенное эквимаржинальное условие оптимальности межвременного потребительского выбора, в котором темп роста финансовых средств кореектируется на темп роста численности домашнего хозяйства:

$$\frac{MU_0}{MU_1} = \frac{1+r_1}{1+n_1}.$$

Пример 2.

В развитие задачи, разобранной в примере 1, предположим, что темп прироста численности домохозяйства равен 0,01. Пусть, кроме того, в первоначальный момент (при *t*=0) домашнее хозяйство располагает активами в размере 500 (ден.ед.) в расчете на одного индивидуума. Все остальные условия примера 1 остаются неизменными.

Выпишем функцию Лагранжа:

$$L = \lambda_0 2\sqrt[4]{c_0} + \frac{\lambda_0 \sqrt[4]{c_1}}{0{,}51} - \lambda_1 \left(\frac{c_0}{1{,}01} + \frac{c_1}{1{,}06} - \frac{572{,}15}{1{,}0706} \right).$$

Условия динамической оптимизации в данной задаче будут иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial c_0} = \frac{\lambda_0}{2c_0^{\frac{3}{4}}} - \frac{\lambda_1}{1{,}01} = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial c_1} = \frac{\lambda_0}{2{,}04c_1^{\frac{3}{4}}} - \frac{\lambda_1}{1{,}06} = 0; \\ \lambda_1 \left(\frac{c_0}{1{,}01} + \frac{c_1}{1{,}06} - \frac{572{,}15}{1{,}0706} \right) = 0, \lambda_1 \geq 0, \frac{c_0}{1{,}01} + \frac{c_1}{1{,}06} \leq \frac{572{,}15}{1{,}0706}. \end{cases}$$

Пусть $\lambda_1 = 0$, тогда в соответствии с каждым из первых двух условий оптимальности $\lambda_0 = 0$, чего не может быть, поскольку вектор множителей Лагранжа (λ_0, λ_1) должен быть ненулевым. Следовательно, по условию дополняющей нежесткости бюджетное ограничение является активным: $1{,}06c_0 + 1{,}01c_1 = 572{,}15$.

Заметим, что, если $\lambda_0 = 0$, то и $\lambda_1 = 0$, чего не может быть, поскольку вектор множителей Лагранжа (λ_0, λ_1) не может быть нулевым. Следовательно, без ограничения общности можно положить $\lambda_0 = 1$, и условия оптимальности можно переписать так:

$$\begin{cases} \frac{1}{2c_0^{\frac{3}{4}}} = \frac{\lambda_1}{1{,}01}; \\ \frac{1}{2{,}04c_1^{\frac{3}{4}}} = \frac{\lambda_1}{1{,}06}; \\ \lambda_1 \left(\frac{c_0}{1{,}01} + \frac{c_1}{1{,}06} - \frac{572{,}15}{1{,}0706} \right) = 0, \lambda_1 \geq 0, \frac{c_0}{1{,}01} + \frac{c_1}{1{,}06} \leq \frac{572{,}15}{1{,}0706}. \end{cases}$$

Рассчитаем оптимальное распределение потребления во времени. Поделив первое условие оптимальности на второе, получаем эквимаржинальный принцип:

$$\left(\frac{c_1}{c_0} \right)^{\frac{3}{4}} = \frac{106}{103{,}02} = \frac{53}{51{,}51};$$

т.е. зависимость будущего потребления от первоначального такова: $c_1 = \left(\frac{53}{51{,}51} \right)^{\frac{4}{3}} c_0$.

Объединяя полученное соотношение с бюджетным ограничением, находим объем потребления в первоначальный период: $c_0 = \frac{572{,}15}{1{,}06 + 1{,}01 \left(\frac{53}{51{,}51} \right)^{\frac{4}{3}}} \approx 271{,}272$ и в последующий момент времени: $c_1 \approx 281{,}784$.

Для того, чтобы вывести функцию предложения сбережений для начального момента времени, оставим ставки процента переменными величинами в функции Лагранжа:

$$L = \lambda_0 2\sqrt[4]{c_0} + \frac{\lambda_0\sqrt[4]{c_1}}{0{,}51} - \lambda_1\left(\frac{c_0}{1{,}01} + \frac{c_1}{1+r_1} - \frac{500}{1{,}01}(1+r_0) - \frac{5}{1{,}01} - \frac{5}{1+r_1}\right).$$

Необходимые условия экстремума имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial c_0} = \frac{\lambda_0}{2c_0^{\frac{3}{4}}} - \frac{\lambda_1}{1{,}01} = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial c_1} = \frac{\lambda_0}{2{,}04c_1^{\frac{3}{4}}} - \frac{\lambda_1}{1+r_1} = 0; \\ \lambda_1\left(\frac{c_0}{1{,}01} + \frac{c_1}{1+r_1} - \frac{500}{1{,}01}(1+r_0) - \frac{5}{1{,}01} - \frac{5}{1+r_1}\right) = 0, \\ \lambda_1 \geq 0, \frac{c_0}{1{,}01} + \frac{c_1}{1+r_1} \leq \frac{500}{1{,}01}(1+r_0) + \frac{5}{1{,}01} + \frac{5}{1+r_1}. \end{cases}$$

По доказанному выше, $\lambda_0 \neq 0$ и $\lambda_1 \neq 0$, следовательно, бюджетное ограничение является жестким: $(1+r_1)c_0 + 1{,}01c_1 = 500\,(1+r_0)(1+r_1) + 5(1+r_1) + 5{,}05$, а λ_0 можно положить равным единице. Поделив первое условие оптимальности на второе, избавляемся от множителя Лагранжа λ_1 и получаем систему:

$$\begin{cases} c_1 = \left(\frac{1+r_1}{1{,}0302}\right)^{\frac{4}{3}} c_0; \\ (1+r_1)c_0 + 1{,}01c_1 = 500\,(1+r_0)(1+r_1) + 5(1+r_1) + 5{,}05. \end{cases}$$

Таким образом, функция потребительского спроса в первоначальный момент времени будет иметь вид:

$$c_0(r_0, r_1) = \frac{500(1+r_0)(1+r_1)+5(1+r_1)+5{,}05}{1+r_1+1{,}01\left(\frac{1+r_1}{1{,}0302}\right)^{4/3}} = \frac{5\left(101+100r_0+\frac{1{,}01}{1+r_1}\right)1{,}0302^{4/3}}{1{,}01\sqrt[3]{1+r_1}+1{,}0302^{4/3}}.$$

Очевидно, что потребительские расходы в первоначальный период представляют собой убывающую зависимость от ставки процента первого периода. При этом зависимость от ставки процента нулевого периода – возрастающая: здесь работает эффект богатства.

Для того, чтобы вывести функцию предложения сбережений, в уравнении динамики активов (4.1) перейдем к удельным величинам

$$a_1(1+n_1) = a_0(1+r_0) + w_0 - c_0,$$

или

$$a_1 = \left(\frac{1+r_0}{1+n_1}\right)a_0 + \frac{w_0-c_0}{1+n_1},$$

и рассчитаем приращение активов каждого члена домашнего хозяйства

$$a_1 - a_0 = \left(\frac{r_0-n_1}{1+n_1}\right)a_0 + \frac{w_0-c_0}{1+n_1}.$$

Сбережения как прирост индивидуальный активов – это возрастающая функция процентных ставок r_0 и r_1:

$$s_0(r_0, r_1) = \frac{(r_0-n_1)a_0+w_0-c_0(r_0,r_1)}{1+n_1} = \frac{500r_0}{1{,}01} - \frac{5\left(100+\frac{100r_0}{1{,}01}+\frac{1}{1+r_1}\right)1{,}0302^{4/3}}{1{,}01\sqrt[3]{1+r_1}+1{,}0302^{4/3}}.$$

Рассмотрим теперь обобщение модели межвременного потребительского выбора в дискретном времени при наличии активов в распоряжении домашнего хозяйства на бесконечный горизонт принятия экономических решений.

Аналогично двухпериодовой модели балансовое соотношение, описывающего динамику активов домашнего хозяйства, имеет вид:

$$A_{t+1} = A_t + I_t + R_t - C_t,$$

где A_{t+1} и A_t – объем активов на начало периодов соответственно $t+1$ и t, $C_t \equiv c_t L_t$ – величина потребления, а $I_t \equiv w_t L_t$ и $R_t \equiv r_t A_t$ – соответственно трудовой и рентный доходы на протяжении периода t. Здесь w_t и r_t – ставки соответственно заработной и арендной платы (при совершенном рынке капитала значение последней приближается к величине ставки процента), c_t – потребление в расчете на одного члена домохозяйства, L_t – величина использованных трудовых ресурсов в период t.

Распишем с учетом этих обозначений балансовое соотношение для активов текущего и будущего периодов:

$$A_{t+1} = A_t(1+r_t) + (w_t - c_t)L_t.$$

Проводя очевидные преобразования:

$$\frac{A_{t+1}}{L_{t+1}}\frac{L_{t+1}}{L_t} - \frac{A_{t+1}}{L_{t+1}}\frac{L_t}{L_t} = \frac{A_t}{L_t}(1+r_t) - \frac{A_{t+1}}{L_{t+1}} + w_t - c_t,$$

переходим к удельным величинам:

$$a_{t+1}\frac{L_{t+1}-L_t}{L_t} = a_{t+1}n_{t+1} = a_t(1+r_t) - a_{t+1} + w_t - c_t.$$

Здесь $n_{t+1} = \frac{L_{t+1}-L_t}{L_t}$ – это темп прироста численности домохозяйства в момент $t+1$, $a_t = \frac{A_t}{L_t}$ – индивидуальные активы каждого члена домашнего хозяйства в момент t.

Таким образом, разностное уравнение, характеризующее динамику активов каждого члена домашнего хозяйства, имеет следующий вид:

$$a_{t+1}(1+n_{t+1}) = a_t(1+r_t) + w_t - c_t,$$

или

$$a_{t+1} - a_t\left(\frac{1+r_t}{1+n_{t+1}}\right) = \frac{w_t - c_t}{1+n_{t+1}}, t = 0, 1, \ldots (4.2)$$

Для решения данного неоднородного уравнения требуется сначала рассмотреть соответствующее однородное разностное уравнение:

$$a_{t+1} = a_t\left(\frac{1+r_t}{1+n_{t+1}}\right).$$

Применяя итеративную процедуру:

$$a_1 = a_0\left(\frac{1+r_0}{1+n_1}\right), a_2 = a_1\left(\frac{1+r_1}{1+n_2}\right) = a_0\left(\frac{1+r_0}{1+n_1}\right)\left(\frac{1+r_1}{1+n_2}\right), a_3 = a_2\left(\frac{1+r_2}{1+n_3}\right) = a_0\left(\frac{1+r_0}{1+n_1}\right)\left(\frac{1+r_1}{1+n_2}\right)\left(\frac{1+r_2}{1+n_3}\right)\ldots$$

и предполагая известной величину располагаемых активов домашнего хозяйства в расчете на одного индивидуума в первоначальный момент (при *t*=0), приходим к общему решению анализируемого однородного уравнения:

$$a_{t+1} = a_0\prod_{\tau=0}^{t}\left(\frac{1+r_\tau}{1+n_{\tau+1}}\right), t = 0, 1, \ldots$$

Применяем метод вариации постоянной

$$a_{t+1} = k_{t+1}\prod_{\tau=0}^{t}\left(\frac{1+r_\tau}{1+n_{\tau+1}}\right)$$

и подставляем полученное общее решение однородного уравнения в исходное неоднородное уравнение:

$$k_{t+1}\prod_{\tau=0}^{t}\left(\frac{1+r_\tau}{1+n_{\tau+1}}\right) - k_t\prod_{\tau=0}^{t}\left(\frac{1+r_\tau}{1+n_{\tau+1}}\right) = \frac{w_t - c_t}{1+n_{t+1}},$$

или

$$k_{t+1} - k_t = \left(\frac{w_t - c_t}{1+n_{t+1}}\right)\prod_{\tau=0}^{t}\left(\frac{1+n_{\tau+1}}{1+r_\tau}\right).$$

Решая данное разностное уравнение относительно варьируемого множителя

$$k_t = \sum_{\tau=0}^{t-1}\left(\frac{w_\tau - c_\tau}{1+n_{\tau+1}}\right)\prod_{\zeta=0}^{\tau}\left(\frac{1+n_{\zeta+1}}{1+r_\zeta}\right) + k_0, t = 1, 2, \ldots,$$

приходим к следующему решению неоднородного уравнения, характеризующего динамику активов каждого члена домашнего хозяйства:

$$a_t = k_0\prod_{\tau=0}^{t-1}\left(\frac{1+r_\tau}{1+n_{\tau+1}}\right) + \prod_{\tau=0}^{t-1}\left(\frac{1+r_\tau}{1+n_{\tau+1}}\right)\sum_{\tau=0}^{t-1}\left(\frac{w_\tau - c_\tau}{1+n_{\tau+1}}\right)\prod_{\zeta=0}^{\tau}\left(\frac{1+n_{\zeta+1}}{1+r_\zeta}\right), t = 1, 2, \ldots$$

Используя очевидные соображения:

$$a_1 = k_0\left(\frac{1+r_0}{1+n_1}\right) + \left(\frac{1+r_0}{1+n_1}\right)\left(\frac{w_0 - c_0}{1+n_1}\right)\left(\frac{1+n_1}{1+r_0}\right) = k_0\left(\frac{1+r_0}{1+n_1}\right) + \frac{w_0 - c_0}{1+n_1},$$

$$a_1 = a_0\left(\frac{1+r_0}{1+n_1}\right) + \frac{w_0 - c_0}{1+n_1};$$

получаем, что значение константы – это величина удельных активов в исходный момент времени: $k_0 = a_0$.

Таким образом, общее решение исходного неоднородного разностного уравнения динамики индивидуальных активов представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения данного неоднородного уравнения:

$$a_t = a_0\prod_{\tau=0}^{t-1}\left(\frac{1+r_\tau}{1+n_{\tau+1}}\right) + \prod_{\tau=0}^{t-1}\left(\frac{1+r_\tau}{1+n_{\tau+1}}\right)\sum_{\tau=0}^{t-1}\left(\frac{w_\tau - c_\tau}{1+n_{\tau+1}}\right)\prod_{\zeta=0}^{\tau}\left(\frac{1+n_{\zeta+1}}{1+r_\zeta}\right),$$

или

$$a_t\prod_{\tau=0}^{t-1}\left(\frac{1+n_{\tau+1}}{1+r_\tau}\right) = a_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1}\left(\frac{w_\tau - c_\tau}{1+n_{\tau+1}}\right)\prod_{\zeta=0}^{\tau}\left(\frac{1+n_{\zeta+1}}{1+r_\zeta}\right),$$

$$t = 1, 2, \ldots$$

Условие отсутствия так называемой игры Понци, состоящей в финансировании долга за счет новой эмиссии долговых обязательств, утверждает, что в финальный, бесконечно удаленный момент времени стоимость активов домохозяйства не должна быть отрицательной – все долги должны быть выплачены:

$$\lim_{t\to\infty} a_t\prod_{\tau=0}^{t-1}\left(\frac{1+n_{\tau+1}}{1+r_\tau}\right) = a_0 + \lim_{t\to\infty}\sum_{\tau=0}^{t-1}\left(\frac{w_\tau - c_\tau}{1+n_{\tau+1}}\right)\prod_{\zeta=0}^{\tau}\left(\frac{1+n_{\zeta+1}}{1+r_\zeta}\right) = a_0 + \sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{w_t - c_t}{1+n_{t+1}}\right)\prod_{\tau=0}^{t}\left(\frac{1+n_{\tau+1}}{1+r_\tau}\right) \geq 0.$$

Предполагается, что бесконечно долго живущее домашнее хозяйство состоит из *L* индивидуумов, максимизирующих с учетом выведенного выше бюджетного ограничения совокупную полезность:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{u_t}{(1+\rho)^t},$$

где u_t – полезность в каждый, данный момент времени, ρ – норма межвременных предпочтений.

Решая данную задачу динамического программирования, выписываем функцию Лагранжа:

$$L = \lambda_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{u_t}{(1+\rho)^t} + \lambda_1 \left(\frac{w_t - c_t}{1+n_{t+1}} \right) \prod_{\tau=0}^{t} \left(\frac{1+n_{\tau+1}}{1+r_\tau} \right) \right) + \lambda_1 a_0.$$

Условия динамической оптимизации в данной задаче будут иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial c_t} = \lambda_0 MU_t - \frac{\lambda_1}{(1+n_{t+1})} \prod_{\tau=0}^{t} \left(\frac{1+n_{\tau+1}}{1+r_\tau} \right) = 0, t = 0, 1, \dots \\ \lambda_1 \left(a_0 + \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{w_t - c_t}{1+n_{t+1}} \right) \prod_{\tau=0}^{t} \left(\frac{1+n_{\tau+1}}{1+r_\tau} \right) \right) = 0, \lambda_1 \geq 0, \\ a_0 + \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{w_t - c_t}{1+n_{t+1}} \right) \prod_{\tau=0}^{t} \left(\frac{1+n_{\tau+1}}{1+r_\tau} \right) \geq 0. \end{cases}$$

Пусть $\lambda_1 = 0$, тогда в соответствии с первым условием оптимальности в силу ненасыщаемости потребления $(MU_t > 0)$ $\lambda_0 = 0$, чего не может быть, поскольку вектор множителей Лагранжа (λ_0, λ_1) должен быть ненулевым. Следовательно, по условию дополняющей нежесткости бюджетное ограничение является активным:

$$a_0 + \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{w_t - c_t}{1+n_{t+1}} \right) \prod_{\tau=0}^{t} \left(\frac{1+n_{\tau+1}}{1+r_\tau} \right) = 0.$$

Заметим, что, если $\lambda_0 = 0$, то и $\lambda_1 = 0$, а это, как было доказано выше, не соответствует действительности. Следовательно, без ограничения общности можно положить $\lambda_0 = 1$, и условия оптимальности можно переписать так:

$$\begin{cases} MU_t = \frac{\lambda_1}{(1+n_{t+1})} \prod_{\tau=0}^{t} \left(\frac{1+n_{\tau+1}}{1+r_\tau} \right), t = 0, 1, \dots \\ a_0 + \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{w_t - c_t}{1+n_{t+1}} \right) \prod_{\tau=0}^{t} \left(\frac{1+n_{\tau+1}}{1+r_\tau} \right) = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$MU_{t+1} = \frac{\lambda_1}{(1+n_{t+2})} \prod_{\tau=0}^{t+1} \left(\frac{1+n_{\tau+1}}{1+r_\tau} \right), t = 0, 1, \dots,$$

а значит, эквимаржинальный принцип, который вместе с бюджетным ограничением определяет оптимальную траекторию динамики потребления, можно записать в следующем виде:

$$\frac{MU_t}{MU_{t+1}} = \frac{1+r_{t+1}}{1+n_{t+1}}, t = 0, 1, \dots$$

Предполагая, что «мгновенная» полезность представлена функцией с постоянным относительным неприятием риска (v) $u_t = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$, а значит, предельная полезность имеет вид $MU_t = \frac{1}{c_t^\theta (1+\rho)^t}$, рассчитаем оптимальное распределение потребления во времени. Эквимаржинальный принцип задает цепочку равенств:

$$\frac{MU_t}{MU_{t+1}} = \frac{c_{t+1}^\theta (1+\rho)^{t+1}}{c_t^\theta (1+\rho)^t} = (1+\rho) \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^\theta = \frac{1+r_{t+1}}{1+n_{t+1}}, t = 0, 1, \dots;$$

откуда соотношение между величинами потребления в любые два соседних момента времени будет следующим:

$$c_{t+1} = \left(\frac{1+r_{t+1}}{(1+n_{t+1})(1+\rho)} \right)^{\frac{1}{\theta}} c_t, t = 0, 1, \dots$$

Используя итеративную процедуру:

$$c_1 = \left(\frac{1+r_1}{(1+n_1)(1+\rho)} \right)^{\frac{1}{\theta}} c_0,$$

$$c_2 = \left(\frac{1+r_2}{(1+n_2)(1+\rho)} \right)^{\frac{1}{\theta}} c_1 = \left(\frac{1+r_1}{(1+n_1)(1+\rho)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\frac{1+r_2}{(1+n_2)(1+\rho)} \right)^{\frac{1}{\theta}} c_0$$

$$\dots$$

получаем зависимость потребления в момент t от первоначального –

$$c_t = \frac{c_0}{(1+\rho)^{\frac{t}{\theta}}} \prod_{\tau=1}^{t} \left(\frac{1+r_\tau}{1+n_\tau} \right)^{\frac{1}{\theta}}, t = 1, 2, \dots$$

Объединяя полученное соотношение с бюджетным ограничением

$$a_0 + \frac{w_0 - c_0}{1+r_0} + \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{w_t}{1+n_{t+1}} - \frac{c_0}{(1+n_{t+1})(1+\rho)^{\frac{t}{\theta}}} \prod_{\tau=1}^{t} \left(\frac{1+r_\tau}{1+n_\tau} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right) \prod_{\tau=0}^{t} \left(\frac{1+n_{\tau+1}}{1+r_\tau} \right) = 0,$$

или

$$a_0(1+r_0)+w_0+\sum_{t=1}^{\infty} w_t \prod_{\tau=1}^{t}\left(\frac{1+n_\tau}{1+r_\tau}\right)=c_0\left(1+\sum_{t=1}^{\infty}(1+\rho)^{\frac{-t}{\theta}}\prod_{\tau=1}^{t}\left(\frac{1+r_\tau}{1+n_\tau}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}\right).$$

находим объем потребления в первоначальный период:

$$c_0=\frac{a_0(1+r_0)+w_0+\sum_{t=1}^{\infty} w_t \prod_{\tau=1}^{t}\left(\frac{1+n_\tau}{1+r_\tau}\right)}{1+\sum_{t=1}^{\infty}(1+\rho)^{\frac{-t}{\theta}}\prod_{\tau=1}^{t}\left(\frac{1+r_\tau}{1+n_\tau}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}}.$$

а значит, и всю траекторию динамики потребительских расходов:

$$c_t=\frac{\left(a_0(1+r_0)+w_0+\sum_{t=1}^{\infty} w_t \prod_{\tau=1}^{t}\left(\frac{1+n_\tau}{1+r_\tau}\right)\right)\prod_{\tau=1}^{t}\left(\frac{1+r_\tau}{1+n_\tau}\right)^{\frac{1}{\theta}}}{(1+\rho)^{\frac{t}{\theta}}\left(1+\sum_{t=1}^{\infty}(1+\rho)^{\frac{-t}{\theta}}\prod_{\tau=1}^{t}\left(\frac{1+r_\tau}{1+n_\tau}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}\right)}, t=1,2,\ldots (4.3)$$

Пример 3.

В развитие задачи, разобранной в примере 2, предположим, что полезность домашнего хозяйства, предполагающего существовать бесконечно долго, в каждый, данный момент времени задана функцией $u_t=2\sqrt[4]{c_t}$. Норма межвременных предпочтений равна 0,02. Банковская ставка не меняется с течением времени и составляет 0,06. Заработная плата индивидуума составляет 5 (ден.ед.) в каждый момент времени. Темп прироста численности домохозяйства равен 0,01. В первоначальный момент (при *t*=0) домашнее хозяйство располагает активами в размере 500 (ден.ед.) в расчете на одного индивидуума. Все остальные условия примера 3 остаются неизменными.

Поскольку $n_t=n=const$, $r_t=r=const$, постольку разностное уравнение (4.2), характеризующее динамику удельных активов упрощается:

$$a_{t+1}-a_t\left(\frac{1+r}{1+n}\right)=\frac{w_t-c_t}{1+n}, t=0,1,\ldots$$

Решим данное уравнение, следуя той же логике, что и выше, при анализе более общего случая переменных величин ставки процента и темпа прироста численности домашнего хозяйства.

Решая соответствующее однородное уравнение $a_{t+1}=a_t\left(\frac{1+r}{1+n}\right)$, получаем итеративную цепочку соотношений между величиной удельных активов каждого из двух соседних периодов:

$$a_1=a_0\left(\frac{1+r}{1+n}\right),$$

$$a_2=a_1\left(\frac{1+r}{1+n}\right)=a_0\left(\frac{1+r}{1+n}\right)^2,$$

$$a_3=a_2\left(\frac{1+r}{1+n}\right)=a_0\left(\frac{1+r}{1+n}\right)^3,$$

$$\ldots$$

$$a_t=a_{t-1}\left(\frac{1+r}{1+n}\right)=a_0\left(\frac{1+r}{1+n}\right)^t, t=1,2,\ldots$$

Варьируя постоянную $a_t=k_t\left(\frac{1+r}{1+n}\right)^t$, подставляем общее решение однородного уравнения в исходное неоднородное уравнение:

$$k_{t+1}\left(\frac{1+r}{1+n}\right)^{t+1}-k_t\left(\frac{1+r}{1+n}\right)^{t+1}=\frac{w_t-c_t}{1+n},$$

или

$$k_{t+1}-k_t=(w_t-c_t)\frac{(1+n)^t}{(1+r)^{t+1}}, t=0,1,\ldots$$

Решение данного разностного уравнения относительно варьируемого множителя будет таким:

$$k_t=\sum_{\tau=0}^{t-1}(w_\tau-c_\tau)\frac{(1+n)^\tau}{(1+r)^{\tau+1}}+k_0, t=1,2,\ldots$$

Итак, получаем общее решение исходного неоднородного разностного уравнения как сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и некоторого частного решения данного неоднородного уравнения:

$$a_t=k_0\left(\frac{1+r}{1+n}\right)^t+\left(\frac{1+r}{1+n}\right)^t\sum_{\tau=0}^{t-1}(w_\tau-c_\tau)\frac{(1+n)^\tau}{(1+r)^{\tau+1}}, t=1,2,\ldots$$

Константу $k_0=a_0$ находим, приравняв выражения a_1, полученные из исходного неоднородного уравнения и из его решения:

$$a_0\left(\frac{1+r}{1+n}\right)+\frac{w_0-c_0}{1+n}=a_1=k_0\left(\frac{1+r}{1+n}\right)+\left(\frac{1+r}{1+n}\right)\frac{(w_0-c_0)}{(1+r)}=k_0\left(\frac{1+r}{1+n}\right)+\frac{w_0-c_0}{1+n}.$$

Следовательно, общее решение нашего неоднородного разностного уравнения имеет вид:

$$a_t=a_0\left(\frac{1+r}{1+n}\right)^t+\left(\frac{1+r}{1+n}\right)^t\sum_{\tau=0}^{t-1}(w_\tau-c_\tau)\frac{(1+n)^\tau}{(1+r)^{\tau+1}}, \text{или}$$

$$a_t\left(\frac{1+n}{1+r}\right)^t = a_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1}(w_\tau - c_\tau)\frac{(1+n)^\tau}{(1+r)^{\tau+1}}, t = 1, 2, \ldots$$

Используя условие отсутствие игры Понци, получаем динамическое бюджетное ограничение потребителя:

$$\lim_{t\to\infty} a_t\left(\frac{1+n}{1+r}\right)^t = a_0 + \lim_{t\to\infty}\sum_{\tau=0}^{t-1}(w_\tau - c_\tau)\frac{(1+n)^\tau}{(1+r)^{\tau+1}} = a_0 + \sum_{t=0}^{\infty}(w_t - c_t)\frac{(1+n)^t}{(1+r)^{t+1}} \geq 0.$$

Лагранжиан для рассматриваемой задачи межвременного потребительского выбора будет выглядеть так:

$$L = \lambda_0\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{u_t}{(1+\rho)^t} + \lambda_1(w_t - c_t)\frac{(1+n)^t}{(1+r)^{t+1}}\right) + \lambda_1 a_0.$$

Система необходимых условий оптимальной траектории изменения потребительских расходов будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial c_t} = \lambda_0 MU_t - \lambda_1\frac{(1+n)^t}{(1+r)^{t+1}} = 0, t = 0, 1, \ldots \\ \lambda_1\left(a_0 + \sum_{t=0}^{\infty}(w_t - c_t)\frac{(1+n)^t}{(1+r)^{t+1}}\right) = 0, \lambda_1 \geq 0, \\ a_0 + \sum_{t=0}^{\infty}(w_t - c_t)\frac{(1+n)^t}{(1+r)^{t+1}} \geq 0. \end{cases}$$

Рассуждая так же, как и ранее, можно доказать, что при ненасыщаемости потребления бюджетное ограничение является жестким:

$$a_0 + \sum_{t=0}^{\infty}(w_t - c_t)\frac{(1+n)^t}{(1+r)^{t+1}} = 0.$$

Аналогично тому, как это было проделано выше, можно доказать, что без ограничения общности множитель Лагранжа λ_0 можно положить равным единице:

$$\begin{cases} MU_t = \lambda_1\frac{(1+n)^t}{(1+r)^{t+1}}, t = 0, 1, \ldots \\ a_0 + \sum_{t=0}^{\infty}(w_t - c_t)\frac{(1+n)^t}{(1+r)^{t+1}} = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $MU_{t+1} = \lambda_1\frac{(1+n)^{t+1}}{(1+r)^{t+2}}, t = 0, 1, \ldots$; а значит, с учетом выражения предельной полезности $MU_t = \frac{1}{2c_t^{\frac{3}{4}}(1+\rho)^t}$ приходим к следующему эквимаржинальному условию:

$$\frac{MU_t}{MU_{t+1}} = \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\frac{3}{4}}(1+\rho) = \frac{1+r}{1+n},$$

которое задает соотношение между соседними по времени величинами потребления:

$$c_{t+1} = \left(\frac{1+r}{(1+n)(1+\rho)}\right)^{\frac{4}{3}}c_t, t = 0, 1, \ldots$$

Расписывая данную цепочку соотношений:

$$c_1 = \left(\frac{1+r}{(1+n)(1+\rho)}\right)^{\frac{4}{3}}c_0,$$

$$c_2 = \left(\frac{1+r}{(1+n)(1+\rho)}\right)^{\frac{4}{3}}c_1 = \left(\frac{1+r}{(1+n)(1+\rho)}\right)^{\frac{8}{3}}c_0, \ldots$$

приходим к зависимости потребления в момент t от первоначального –

$$c_t = \left(\frac{1+r}{(1+n)(1+\rho)}\right)^{\frac{4}{3}t}c_0, t = 0, 1, \ldots$$

Объединяя полученное соотношение с бюджетным ограничением

$$a_0 + \sum_{t=0}^{\infty}\left(w_t - \left(\frac{1+r}{(1+n)(1+\rho)}\right)^{\frac{4}{3}t}c_0\right)\frac{(1+n)^t}{(1+r)^{t+1}} = 0,$$

или

$$a_0 + \sum_{t=0}^{\infty}w_t\frac{(1+n)^t}{(1+r)^{t+1}} = \frac{c_0}{(1+r)}\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1+r}{(1+n)(1+\rho)^4}\right)^{\frac{t}{3}},$$

находим объем потребления в первоначальный период [3]:

$$c_0 = \frac{a_0(1+r) + \sum_{t=0}^{\infty}w_t\left(\frac{1+n}{1+r}\right)^t}{\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1+r}{(1+n)(1+\rho)^4}\right)^{\frac{t}{3}}} = \frac{(1+r)\left(\sqrt[3]{(1+n)(1+\rho)^4} - \sqrt[3]{1+r}\right)(a_0(r-n)+w)}{(r-n)\sqrt[3]{(1+n)(1+\rho)^4}} \approx \frac{636\bullet(1{,}030166336 - 1{,}019612822)}{1{,}030166336} \approx 6{,}51,$$

а значит, и всю траекторию динамики потребительских расходов:

$$c_t \approx 6,51 \bullet 1,0289^{\frac{4}{3}t}.$$

Функция потребителького спроса как зависимость от ставки процента будет определяться выражением (4.3):

$$c_t = \frac{5\left(101+100r_0+\sum\limits_{t=1}^{\infty}\left(1{,}01^t\left(\prod\limits_{\tau=1}^{t}(1+r_\tau)\right)^{-1}\right)\right)\prod\limits_{\tau=1}^{t}(1+r_\tau)^{\frac{1}{\theta}}}{1{,}0302^{\frac{t}{\theta}}\left(1+\sum\limits_{t=1}^{\infty}\left(1{,}01^t \bullet 1{,}0302^{\frac{-t}{\theta}}\prod\limits_{\tau=1}^{t}(1+r_\tau)^{\frac{1-\theta}{\theta}}\right)\right)}.$$

---

1. Fisher I. The rate of interest. – New York; London: Garland, 1982. ↩
2. Мы предолагаем, как и прежде, что горизонт принятия решений домашним хозяйством составляет два периода с номерами 0 и 1. ↩
3. Здесь мы суммируем бесконечно убывающие геометрические прогрессии по формуле: $S = \frac{b_1}{1-q}$. ↩

4.2. Потребительский выбор в непрерывном времени

Рассмотрим вначале вопрос о начислении сложных процентов и дисконтировании денежных потоков в непрерывном времени. При непрерывном начислении процентов приращение денежной суммы на банковском счете за бесконечно малую единицу времени составляет, как и в дискретном случае, произведение предшествующего количества денег на ставку процента:

$$M(t+\Delta t) = M(t)(1+r\Delta t) = M(t) + M(t)r\Delta t, \text{ или}$$
$$M(t+\Delta t) - M(t) = M(t)r\Delta t,$$

где r – процентный доход за единицу времени Δt.

Устремляя шаг времени к нулю

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{M(t+\Delta t)-M(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} rM(t),$$

в пределе получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dM(t)}{dt} = rM(t).$$

Его решением будет $M(t) = ce^{rt}$, где c – некоторая константа. Пусть в первоначальный момент времени на счет было положено количество денег в размере $M(t_0) = M_0$. Тогда $c = M_0 e^{-rt_0}$, и зависимость денежной суммы от времени имеет следующий вид [1]:

$$M(t) = M_0 e^{r(t-t_0)}.$$

Процедура дисконтирования обратна механизму начисления сложных процентов:

$$M_0 = M(t)e^{-r(t-t_0)}.$$

Допустим, что инвестиционный проект приносит непрерывный во времени поток чистых доходов $R(t)$ начиная с некоторого момента $\tau = t_0$ вплоть до периода t. Тогда капитализированная стоимость проекта, т.е. его дисконтированный кумулятивный поток чистых доходов в момент времени t_0 составит:

$$P_0(t) = \int_{t_0}^{t} R(\tau)e^{-r(\tau-t_0)}d\tau, (4.4)$$

где r – непрерывно начисляемая ставка процента, τ – переменная интегрирования [2].

В частности, стоимость проекта, приведенная к моменту $t_0 = 0$ будет равна [3]

$$P_0(t) = \int_{0}^{t} R(\tau)e^{-r\tau}d\tau.$$

Допустим далее, что непрерывная ставка процента меняется во времени $(r(t) \neq const)$. Тогда решение дифференциального уравнения, описывающего динамику денежной суммы принимает вид:

$$M(t) = M_0 e^{\int_{t_0}^{t} r(\tau)d\tau}.$$

Выражение в показателе степени экспоненты представляет собой среднюю ставку процента $\overline{r}(t) = \frac{\int_{t_0}^{t} r(\tau)d\tau}{t-t_0}$, начисленную за период от t_0 до t. Итак, при переменной ставке процента первоначальная сумма денег M_0 в момент времени t возрастет до величины $M(t) = M_0 e^{\overline{r}(t-t_0)}$.

Обратная по отношению к начислению непрерывных сложных процентов процедура дисконтирования даст:

$$M_0 = M(t)e^{-\int_{t_0}^{t} r(\tau)d\tau}.$$

С учетом переменной во времени ставки процента процедура капитализации потока доходов $R(t)$ во временно́м интервале $t_0 \leq \tau \leq t$ усложняется [4]:

$$P_0(t) = \int_{t_0}^{t} R(\tau)e^{-\int_{t_0}^{\tau} r(\zeta)d\zeta}d\tau.$$

Проанализируем теперь бюджетное ограничение потребителя в непрерывном времени. Оно вытекает из балансового соотношения, описывающего динамику активов домашнего хозяйства:

$$A(t) = A(t-\Delta t) + I\left(t-\Delta t\right)\Delta t + R\left(t-\Delta t\right)\Delta t - C\left(t-\Delta t\right)\Delta t,$$

где $A(t)$ и $A(t-\Delta t)$ – объем активов на начало периодов соответственно t и $t-\Delta t$, $C(t-\Delta t)$ – величина потребления, а $I(t-\Delta t) \equiv w(t-\Delta t)L(t-\Delta t)$ и $R(t-\Delta t) \equiv r(t-\Delta t)A(t-\Delta t)$ – соответственно трудовой и рентный доходы на протяжении периода $t-\Delta t$. Здесь $w(t-\Delta t)$ и $r(t-\Delta t)$ – ставки соответственно заработной и арендной платы (при совершенном рынке капитала значение последней приближается к величине ставки процента), $L(t-\Delta t)$ – величина использованных трудовых ресурсов в период $t-\Delta t$.

Распишем балансовое соотношение с учетом этих обозначений в следующем виде:

$$A(t) = A(t-\Delta t) + w\left(t-\Delta t\right)L\left(t-\Delta t\right)\Delta t + r\left(t-\Delta t\right)A\left(t-\Delta t\right)\Delta t - C\left(t-\Delta t\right)\Delta t.$$

Разделим его левую и правую части на численность домохозяйства в период t, а правую часть поделим и домножим на количество его членов в момент $t-\Delta t$:

$a(t)=\frac{(A(t-\Delta t)+w(t-\Delta t)L(t-\Delta t)\Delta t+r(t-\Delta t)A(t-\Delta t)\Delta t-C(t-\Delta t)\Delta t)}{L(t)}\times\frac{L(t-\Delta t)}{L(t-\Delta t)}=(a(t-\Delta t)+w\left(t-\Delta t\right)\Delta t+r\left(t-\Delta t\right)a\left(t-\Delta t\right)\Delta t-$

где $a(t)\equiv\frac{A(t)}{L(t)}$ и $a(t-\Delta t)\equiv\frac{A(t-\Delta t)}{L(t-\Delta t)}$ – чистые активы, приходящиеся на одного индивидуума на начало периодов соответственно t и $t-\Delta t$, $c\left(t-\Delta t\right)\equiv\frac{C(t-\Delta t)}{L(t-\Delta t)}$ – «мгновенное» потребление в расчете на одного члена домохозяйства в период $t-\Delta t$.

Преобразуем последнее соотношение:

$$\frac{(L(t)-L(t-\Delta t))}{L(t-\Delta t)}a(t)=a(t-\Delta t)-a(t)+w\left(t-\Delta t\right)\Delta t+r\left(t-\Delta t\right)a\left(t-\Delta t\right)\Delta t-c\left(t-\Delta t\right)\Delta t,\textit{ или}$$

$$\frac{a(t)-a(t-\Delta t)}{\Delta t}=w(t-\Delta t)+r\left(t-\Delta t\right)a(t-\Delta t)-c(t-\Delta t)-a(t)\frac{\frac{(L(t)-L(t-\Delta t))}{\Delta t}}{L(t-\Delta t)}.$$

Устремляя шаг времени к нулю и предполагая существование соответствующих пределов:

$$\lim_{\Delta t\to0}\frac{a(t)-a(t-\Delta t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}\left(w(t-\Delta t)+r\left(t-\Delta t\right)a(t-\Delta t)-c(t-\Delta t)-a(t)\frac{\frac{(L(t)-L(t-\Delta t))}{\Delta t}}{L(t-\Delta t)}\right)=\lim_{\Delta t\to0}w(t-\Delta t)+\lim_{\Delta t\to0}r(t-\Delta t)$$

получаем динамическое бюджетное ограничение потребителя в дифференциальной форме:

$$\dot{a}(t)=w(t)-c(t)+(r(t)-n(t))a(t),\ (4.5)$$

которое показывает, что скорость изменения чистых активов, приходящихся на одного индивидуума $\dot{a}(t)$, определяется увеличением активов на ставку процента и их уменьшением с учетом темпа прироста численности домохозяйства $n(t)\equiv\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}$, а также разностью ставки заработной платы $w(t)$ и подушевого потребления $c(t)$.

Решив данное линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка (4.5), можно записать бюджетное ограничение потребителя при непрерывном ходе времени в интегральной форме. Для этого нужно сначала решить соответствующее однородное уравнение: $\dot{a}(t)-(r(t)-n(t))a(t)=0$. Разделяя переменные $\frac{da}{a}=(r(t)-n(t))dt$ и интегрируя $\int d\ln|a|=\int(r(t)-n(t))dt$, получаем, что $\ln|a|=\int\limits_0^t(r(\tau)-n(\tau))d\tau+\ln c_1$, а значит, общее решение однородного уравнения таково:

$$a(t)=c_1e^{\int\limits_0^t(r(\tau)-n(\tau))d\tau}.$$

Теперь решим неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:

$$a(t)=c_1(t)e^{\int\limits_0^t(r(\tau)-n(\tau))d\tau}.$$

Подставляя это выражение для $a(t)$ в исходное неоднородное уравнение и приводя подобные, получаем линейное однородное дифференциальное уравнение первой степени относительно $c_1(t)$:

$$\frac{dc_1(t)}{dt}=(w(t)-c(t))e^{-\int\limits_0^t(r(\tau)-n(\tau))d\tau}.$$

Разделяя переменные, интегрируем:

$$c_1(t)=\int\limits_0^t(w(\tau)-c(\tau))e^{-\int\limits_0^\tau(r(\zeta)-n(\zeta))d\zeta}d\tau+c_2.$$

Подставляем данное выражение в полученное выше общее решение однородного уравнения:

$$a(t)=e^{\int\limits_0^t(r(\tau)-n(\tau))d\tau}\int\limits_0^t(w(\tau)-c(\tau))e^{-\int\limits_0^\tau(r(\zeta)-n(\zeta))d\zeta}d\tau+c_2e^{\int\limits_0^t(r(\tau)-n(\tau))d\tau}.$$

Используя начальное условие, находим константу $a(0)=a_0=c_2$. Таким образом, можно выписать бюджетное ограничение потребителя в интегральной форме:

$$a(t)=e^{\int\limits_0^t(r(\tau)-n(\tau))d\tau}\int\limits_0^t(w(\tau)-c(\tau))e^{-\int\limits_0^\tau(r(\zeta)-n(\zeta))d\zeta}d\tau+a_0e^{\int\limits_0^t(r(\tau)-n(\tau))d\tau}.$$

В терминах текущей стоимости оно будет выглядеть так:

$$a(t)e^{-\int\limits_0^t(r(\tau)-n(\tau))d\tau}=a_0+\int\limits_0^t(w(\tau)-c(\tau))e^{-\int\limits_0^\tau(r(\zeta)-n(\zeta))d\zeta}d\tau.$$

Отметим, что, поскольку здесь речь идет об активах в расчете на каждого члена домохозяйства, коэффициент дисконтирования учитывает темп роста его численности – он должен быть уменьшен на соответствующую величину.

Отсюда можно сформулировать терминальное условие по неотрицательности чистой приведенной стоимости активов потребителя при стремлении времени к бесконечности:

$$\lim_{t\to\infty}\left(a(t)e^{-\int\limits_0^t(r(\tau)-n(\tau))d\tau}\right)=a_0+\lim_{t\to\infty}\int\limits_0^t(w(\tau)-c(\tau))e^{-\int\limits_0^\tau(r(\zeta)-n(\zeta))d\zeta}d\tau\geq 0.(4.6)$$

Это так называемое условие отсутствия игры Понци, состоящей в финансировании долга за счет новой эмиссии долговых обязательств. Данное условие утверждает, что приведенная к настоящему времени стоимость активов неограниченно долго живущего домохозяйства в пределе, когда время стремится к бесконечности, не должна быть отрицательной – все долги должны быть выплачены. В частности, оно будет выполняться, если заработная плата в каждый момент времени будет превышать удельное потребление: $w(t)\geq c(t)$, т.е. сбережения, понимаемые как непотребленный трудовой доход в каждый момент времени, будут положительными в каждый момент времени; либо дисконтированная стоимость положительных сбережений должна компенсировать их отрицательные значения, которые могут иметь место в определенные промежутки времени.

С учетом динамического бюджетного ограничения и граничного условия, накладываемого на хозяйственную жизнедеятельность человека, – невозможности использования схемы Понци – оптимизационная задача потребителя имеет следующий вид:

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_0^t u(c(\tau))e^{-\rho\tau}d\tau\to\max:$$

$$a_0+\lim_{t\to\infty}\int\limits_0^t(w(\tau)-c(\tau))e^{-\int\limits_0^\tau(r(\zeta)-n(\zeta))d\zeta}d\tau\geq 0,$$

т.е.

$$\int\limits_0^\infty u\left(c(t)\right)e^{-\rho t}dt\to\max:\qquad(4.7)$$

$$a_0+\int\limits_0^\infty(w(t)-c(t))e^{-\int\limits_0^t(r(\tau)-n(\tau))d\tau}dt\geq 0.(4.8)$$

Функция Лагранжа для данной задачи связанной максимизации полезности потребителя в непрерывном времени будет иметь вид [5]:

$$L=\int\limits_0^\infty\left(\lambda_0 u\left(c(t)\right)e^{-\rho t}+\lambda_1\left(w(t)-c(t)\right)e^{-\int\limits_0^t(r(\tau)-n(\tau))d\tau}\right)d\tau+\lambda_1 a_0.$$

Выпишем лагранжиан:

$$L=\lambda_0 u\left(c(t)\right)e^{-\rho t}+\lambda_1\left(w(t)-c(t)\right)e^{-\int\limits_0^t(r(\tau)-n(\tau))d\tau}.$$

Необходимым условием максимизации полезности является прежде всего уравнение Эйлера:

$$\lambda_0 u^{'}(c)e^{-\rho t}=\lambda_1 e^{-\int\limits_0^t(r(\tau)-n(\tau))d\tau}.$$

В число необходимых условий экстремума задачи условной максимизации полезности в непрерывном времени также входит условие дополняющей нежесткости:

$$\lambda_1\left(a_0+\int\limits_0^\infty(w(t)-c(t))e^{-\int\limits_0^t(r(\tau)-n(\tau))d\tau}dt\geq 0\right)=0.$$

Если $\lambda_1=0$, то из уравнения Эйлера будет следовать, что и $\lambda_0=0$, ведь в силу ненасыщаемости потребления $u^{'}(c)e^{-\rho t}\neq 0$. Но, по необходимому условию экстремума, вектор множителей Лагранжа (λ_0,λ_1) не может быть нулевым. Следовательно, условие дополняющей нежесткости утверждает, что условие отсутствия игры Понци (4.6) должно выполняться в виде равенства:

$$a_0+\int\limits_0^\infty(w(t)-c(t))e^{-\int\limits_0^t(r(\tau)-n(\tau))d\tau}dt=0.(4.9)$$

По тем же соображениям и множитель Лагранжа λ_0 не может быть нулевым, поэтому без ограничения общности в уравнении Эйлера можно положить его равным единице:

$$u^{'}(c)e^{-\rho t}=\lambda_1 e^{-\int\limits_0^t(r(\tau)-n(\tau))d\tau}.$$

Продифференцируем по времени уравнение Эйлера:

$$\tfrac{d}{dt}\left(u^{'}(c)e^{-\rho t}\right)=u^{''}(c)\dot{c}e^{-\rho t}-u^{'}(c)e^{-\rho t}\rho=-\lambda_1\left(r(t)-n(t)\right)e^{-\int\limits_0^t(r(\tau)-n(\tau))d\tau}.$$

Поделим полученное соотношение на уравнение Эйлера:

$$\frac{u''(c)\dot{c}e^{-\rho t}-\rho u'(c)e^{-\rho t}}{u'(c)e^{-\rho t}}=\frac{u''(c)\dot{c}-\rho u'(c)}{u'(c)}=\frac{\lambda_1(n(t)-r(t))e^{-\int_0^t(r(\tau)-n(\tau))d\tau}}{\lambda_1 e^{-\int_0^t(r(\tau)-n(\tau))d\tau}}=n-r.$$

Получаем условие Рамсея оптимальности траектории потребления:

$$r-n=\rho-\left(\frac{u''(c)}{u'(c)}c\right)\frac{\dot{c}}{c}. \quad (4.10)$$

Поскольку $\frac{u''(c)}{u'(c)}c<0$, потребление растет во времени $\left(\frac{\dot{c}}{c}>0\right)$, если отдача от активов в расчете на одного члена домохозяйства превышает норму межвременных предпочтений, и падает – в противоположном случае. Другими словами, потребители станут переносить потребление из настоящего в будущее, если доходность активов каждого из них будет выше степени предпочтительности, с их точки зрения, текущего потребления по отношению к будущему.

Для того чтобы существовало стационарное состояние $r=const$, $n=const$, $\frac{\dot{c}}{c}=const$, необходимо постоянство множителя перед $\frac{\dot{c}}{c}$ в соотношении (4.10):

$$\frac{-u''(c)}{u'(c)}c=\theta=const.$$

Перед нами соотношение (iv), которое задает функцию полезности с постоянным относительным неприятием риска (v), где в качестве независимой переменной рассматривается не доход x, а потребительские расходы c:

$$u(c)=\frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta}. \quad (4.11)$$

Для «мгновенной» функции полезности (4.11) интегральная полезность будет иметь вид:

$$\int_0^\infty\left(\frac{c^{1-\theta}(t)-1}{1-\theta}\right)e^{-\rho t}dt.$$

Используя функцию полезности (4.11) в соотношении (4.10), приходим к следующему условию оптимального темпа прироста потребления:

$$\frac{\dot{c}}{c}=\frac{r-n-\rho}{\theta}.$$

Решая данное дифференциальное уравнение, с учетом начального условия по объему потребления можно получить оптимальную траекторию его динамики:

$$c(t)=c_0e^{\frac{(r-n-\rho)}{\theta}t},$$

где $c_0=c(0)$ – удельное потребление в начальный момент времени.

К тем же результатам, что были получены с помощью аппарата вариационного исчисления, можно прийти с использованием теории оптимального управления. В нашем случае управляемым параметром, который представляет собой менее гладкую по сравнению с дифференцируемыми фазовыми переменными – кусочно-непрерывную функцию, являются объемы удельного потребления c. Уравнение Эйлера является следствием принципа максимума Понтрягина – оптимальности по c лагранжиана.

Подставляя полученную траекторию динамики удельного потребления в бюджетное ограничение (4.9) с учетом стационарности ставки процента и темпа прироста численности домашнего хозяйства

$$a_0+\int_0^\infty\left(w(t)-c(0)e^{\frac{(r-\rho-n)}{\theta}t}\right)e^{-(r-n)t}dt=0,$$

после очевидных преобразований

$$a_0+\int_0^\infty w(t)e^{-(r-n)t}dt=c(0)\int_0^\infty e^{\frac{(1-\theta)}{\theta}(r-n-\frac{\rho}{1-\theta})t}dt$$

можно определить величину потребления в начальный момент времени:

$$c(0)=\frac{a_0+\int_0^\infty w(t)e^{-(r-n)t}dt}{\int_0^\infty e^{\frac{(1-\theta)}{\theta}(r-n-\frac{\rho}{1-\theta})t}dt}=\frac{a_0+\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t w(\tau)e^{-(r-n)\tau}d\tau}{\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t e^{\frac{(1-\theta)}{\theta}(r-n-\frac{\rho}{1-\theta})\tau}d\tau}. \quad (4.12)$$

Проанализируем вначале ситуацию стационарного во времени подушевого трудового дохода $w(t)=w=const$. Тогда выражение (4.12) упрощается:

$$c(0)=\frac{a_0+w\int_0^\infty e^{-(r-n)t}dt}{\int_0^\infty e^{\frac{(1-\theta)}{\theta}(r-n-\frac{\rho}{1-\theta})t}dt}=\frac{a_0+w\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t e^{-(r-n)\tau}d\tau}{\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t e^{\frac{(1-\theta)}{\theta}(r-n-\frac{\rho}{1-\theta})\tau}d\tau}. \quad (4.13)$$

Очевидно, что данное выражение имеет смысл при конечных, ненулевых значениях числителя и знаменателя последней дроби. Покажем, что это возможно лишь при $n<r<n+\frac{\rho}{1-\theta}$.

Если $n<r<n+\frac{\rho}{1-\theta}$, то потребление в первоначальный момент (4.13) можно записать в следующем виде:

$$c(0)=\frac{a_0-\frac{w}{(r-n)}\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^t de^{-(r-n)\tau}}{\frac{\theta}{((r-n)(1-\theta)-\rho)}\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^t de^{\frac{(1-\theta)}{\theta}(r-n-\frac{\rho}{1-\theta})\tau}}=\frac{a_0-\frac{w}{(r-n)}\lim\limits_{t\to\infty}e^{-(r-n)\tau}\Big|_0^t}{\frac{\theta}{((r-n)(1-\theta)-\rho)}\lim\limits_{t\to\infty}e^{\frac{(1-\theta)}{\theta}(r-n-\frac{\rho}{1-\theta})\tau}\Big|_0^t}=\frac{a_0+\frac{w}{r-n}-\frac{w}{(r-n)}\lim\limits_{t\to\infty}e^{-(r-n)t}}{\frac{\theta}{((r-n)(1-\theta)-\rho)}\lim\limits_{t\to\infty}e^{\frac{(1-\theta)}{\theta}(r-n-\frac{\rho}{1-\theta})t}-\frac{\theta}{((r-n)(1-\theta)-\rho)}}. \quad (4.14)$$

В данном случае $\lim\limits_{t\to\infty}e^{-(r-n)t}=\lim\limits_{t\to\infty}e^{\frac{(1-\theta)}{\theta}(r-n-\frac{\rho}{1-\theta})t}=0$, а значит,

$$c(0)=\frac{a_0+\frac{w}{r-n}}{\frac{\theta}{((r-n)(1-\theta)-\rho)}}=(a_0+w)\left(\frac{1-\theta}{\theta}-\frac{\rho}{\theta(r-n)}\right).$$

Получаем индивидуальную траекторию потребления как зависимость от ставки процента:

$$c(t,r)=c(0)e^{\frac{(1-\theta)}{\theta}(r-n-\frac{\rho}{1-\theta})t}=(a_0+w)\left(\frac{1-\theta}{\theta}-\frac{\rho}{\theta(r-n)}\right)e^{\frac{(1-\theta)}{\theta}(r-n-\frac{\rho}{1-\theta})t}. \quad (4.15)$$

При $r>n+\frac{\rho}{1-\theta}$ первоначальное потребление имеет вид (4.14), и поскольку при этом $\lim\limits_{t\to\infty}e^{\frac{(1-\theta)}{\theta}(r-n-\frac{\rho}{1-\theta})t}=+\infty$, постольку знаменатель данной дроби стремится к бесконечности.

При $r=n+\frac{\rho}{1-\theta}$

$$c(0)=\frac{a_0+w\int\limits_0^\infty e^{-(r-n)t}dt}{\int\limits_0^\infty e^{\frac{(1-\theta)}{\theta}(r-n-\frac{\rho}{1-\theta})t}dt}=\frac{a_0+w\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^t e^{-(r-n)\tau}d\tau}{\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^t d\tau}=\frac{a_0-\frac{w}{(r-n)}\lim\limits_{t\to\infty}e^{-(r-n)\tau}\Big|_0^t}{\lim\limits_{t\to\infty}\tau\Big|_0^t},$$

а значит, знаменатель так же равен $+\infty$.

Итак, при $r\geq n+\frac{\rho}{1-\theta}$ знаменатель (4.13) уходит в бесконечность, следовательно, данный диапазон ставок процента исключается.

Обратим внимание на то, что рост потребления будет наблюдаться при $r>\rho+n$, когда ставка процента превышает сумму темпа прироста численности домашнего хозяйства и нормы межвременных предпочтений.

При $r=\rho+n$ потребление будет постоянным во времени на уровне $c(0)$, а значит, межвременное бюджетное ограничение выглядит так:

$$a_0+\int\limits_0^\infty(w-c(t))e^{-\rho t}dt=a_0+\int\limits_0^\infty(w-c(0))e^{-\rho t}dt=a_0+(w-c(0))\int\limits_0^\infty e^{-\rho t}dt=a_0-\frac{(w-c(0))}{\rho}\int\limits_0^\infty de^{-\rho t}=a_0-\frac{(w-c(0))}{\rho}e^{-\rho t}\Big|_0^\infty$$

откуда получаем $c(0)=c(t)=a_0\rho+w$, т.е. потребление в каждый момент превышает заработанный доход $w(t)-c(t)=-a_0\rho$, и разность покрывается за доходов от первоначальных активов.

При $n<r<\rho+n$ потребление будет сокращаться с течением времени, в пределе – до нуля.

При $r=n$ чистая (за вычетом темпа прироста населения) ставка процента будет нулевой, и межвременное бюджетное ограничение вырождается:

$$a_0+\int\limits_0^\infty(w-c(t))e^{-(r-n)t}dt=a_0+\int\limits_0^\infty(w-c(0)e^{\frac{-\rho t}{\theta}})dt=0,$$

следовательно, числитель дроби (4.13) равен

$$a_0+w\int\limits_0^\infty dt=a_0+w\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^t d\tau=a_0+w\lim\limits_{t\to\infty}\tau\Big|_0^t=+\infty.$$

При $r<n$ потребление в начальный момент времени имеет выражение (4.14), в котором, т.к. $\lim\limits_{t\to\infty}e^{-(r-n)t}=+\infty$, числитель так же уходит в бесконечность.

Итак, диапазон ставок процента $r\leq n$ исключен.

Таким образом, допустимыми остаются значения ставки процента, лежащие на интервале $n<r<n+\frac{\rho}{1-\theta}$, когда траектория динамики потребления имеет вид (4.15).

Протестируем теперь расчет первоначального потребления, а значит, и всей траетктории потребительских расходов на крайнем режиме очень быстрого, экспоненциального роста подушевого трудового дохода $w(t)=w_0e^{\omega t}$. Тогда выражение для потребления в первоначальный момент (4.12) принимает вид:

$$c(0)=\frac{a_0+w_0\int\limits_0^\infty e^{-(r-n-\omega)t}dt}{\int\limits_0^\infty e^{\frac{(1-\theta)}{\theta}(r-n-\frac{\rho}{1-\theta})t}dt}=\frac{a_0+w_0\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^t e^{-(r-n-\omega)\tau}d\tau}{\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^t e^{\frac{(1-\theta)}{\theta}(r-n-\frac{\rho}{1-\theta})\tau}d\tau}. \quad (4.16)$$

Оно осмыслено только при конечных, ненулевых значениях числителя и знаменателя. Покажем, что это имеет место только в случае $n+\omega<r<n+\frac{\rho}{1-\theta}$.

При $r\neq n+\omega$ и $r\neq n+\frac{\rho}{1-\theta}$ начальное потребление (4.15) можно расписать в следующем виде:

$$c(0)=\frac{a_0-\frac{w_0}{(r-n-\omega)}\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^t de^{-(r-n-\omega)\tau}}{\frac{\theta}{((r-n)(1-\theta)-\rho)}\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^t de^{\frac{(1-\theta)}{\theta}(r-n-\frac{\rho}{1-\theta})\tau}}=\frac{a_0-\frac{w_0}{(r-n-\omega)}\lim\limits_{t\to\infty}e^{-(r-n-\omega)\tau}\Big|_0^t}{\frac{\theta}{((r-n)(1-\theta)-\rho)}\lim\limits_{t\to\infty}e^{\frac{(1-\theta)}{\theta}(r-n-\frac{\rho}{1-\theta})\tau}\Big|_0^t}=\frac{a_0+\frac{w_0}{r-n-\omega}-\frac{w_0}{(r-n-\omega)}\lim\limits_{t\to\infty}e^{-(r-n-\omega)t}}{\frac{\theta}{((r-n)(1-\theta)-\rho)}\lim\limits_{t\to\infty}e^{\frac{(1-\theta)}{\theta}(r-n-\frac{\rho}{1-\theta})t}-\frac{\theta}{((r-n)(1-\theta)-\rho)}}. \quad (4.17)$$

При $n+\omega<r<n+\frac{\rho}{1-\theta}$, когда $\omega<\frac{\rho}{1-\theta}$,

$$\lim_{t\to\infty}e^{-(r-n-\omega)t}=\lim_{t\to\infty}e^{\frac{(1-\theta)}{\theta}(r-n-\frac{\rho}{1-\theta})t}=0,$$

а значит,

$$c(0)=\frac{a_0+\frac{w_0}{r-n-\omega}}{\frac{\theta}{((r-n)(1-\theta)-\rho)}}=\frac{((r-n)(1-\theta)-\rho)(a_0(r-n-\omega)+w_0)}{\theta(r-n-\omega)}.$$

Получаем индивидуальную траекторию потребления как зависимость от ставки процента:

$$c(t,r)=\frac{((r-n)(1-\theta)-\rho)(a_0(r-n-\omega)+w_0)}{\theta(r-n-\omega)}e^{\frac{(1-\theta)}{\theta}(r-n-\frac{\rho}{1-\theta})t}. \quad (4.18)$$

При $r<n+\omega\lim\limits_{t\to\infty}e^{-(r-n-\omega)t}=\infty$, а значит, числитель (4.17), а значит, и числитель (4.16) уходит в бесконечность.

Аналогичная картина наблюдается и при $r=n+\omega$, когда числитель (4.16) принимает вид

$a_0+w_0\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^t d\tau=a_0+w_0\lim\limits_{t\to\infty}\tau|_0^t=+\infty.$

При $r>n+\frac{\rho}{1-\theta}\lim\limits_{t\to\infty}e^{\frac{(1-\theta)}{\theta}(r-n-\frac{\rho}{1-\theta})t}=+\infty$, и к бесконечности стремится знаменатель (4.17), а значит, и знаменатель (4.16).

Аналогичная ситуация имеет место при $r=n+\frac{\rho}{1-\theta}$, когда знаменатель (4.16) принимает вид $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^t d\tau=\lim\limits_{t\to\infty}\tau|_0^t=+\infty$.

Таким образом, ставка процента не может лежать в сегментах $r\le n+\omega$, $r\ge n+\frac{\rho}{1-\theta}$, и допустимым остается только диапазон ставок процента $n<r<n-\frac{\rho}{1-\theta}$, когда динамика потребления описывается траекторией (4.18).

Пример 4.

В развитие задачи, разобранной в примере 3, предположим, что домашнее хозяйство, предполагающее существовать бесконечно долго, максимизирует интегральную полезность:

$$U=\int\limits_{t=0}^{\infty}u(t)e^{-\rho t}dt,$$

причем в каждый, данный момент времени полезность любого члена домохозяйства подчиняется зависимости $u(t)=2\sqrt[4]{c(t)}$, где $c(t)$ – “мгновенное” подушевое потребление.

Итак, межвременная функция полезности имеет вид:

$$U=2\int\limits_{t=0}^{\infty}\sqrt[4]{c(t)}e^{-\rho t}dt.$$

Величина активов неограниченно долго живущего домохозяйства в пределе, когда время стремится к бесконечности, не должна быть отрицательной – все долги должны быть выплачены.

Все остальные условия примера 3 остаются неизменными.

Балансовое соотношение, характеризующее динамику активов индивидуума, и граничное условие, накладываемое на хозяйственную жизнедеятельность человека – невозможность использования схемы Понци – задают бюджетное ограничение потребителя в непрерывном времени:

$$500+\int\limits_0^{\infty}(5-c(t))e^{-0,05t}dt\ge 0.$$

Функция Лагранжа для данной задачи связанной максимизации полезности потребителя в непрерывном времени будет иметь вид:

$$L=\int\limits_0^{\infty}\left(\lambda_0 2\sqrt[4]{c(t)}e^{-0,02t}+\lambda_1(5-c(t))e^{-0,05t}\right)dt+\lambda_1 500.$$

Выпишем условия динамической оптимизации в данной задаче.

Во-первых, это уравнение Эйлера $\left(\frac{-d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{c}}+\frac{\partial L}{\partial c}=0\right)$ для лагранжиана $L=\lambda_0 2\sqrt[4]{c(t)}e^{-0,02t}+\lambda_1(5-c(t))e^{-0,05t}$:

$$\frac{\lambda_0 2e^{-0,02t}}{4c(t)^{\frac{3}{4}}}-\lambda_1 e^{-0,05t}=0; m.e.\ \lambda_0 e^{0,03t}=\lambda_1 2c(t)^{\frac{3}{4}}.$$

Во-вторых, это условие дополняющей нежесткости:

$$\lambda_1\left(500+\int\limits_0^\infty (5-c(t))e^{-0,05t}dt\right)=0,$$

$$\lambda_1\geq 0, 500+\int\limits_0^\infty (5-c(t))e^{-0,05t}dt\geq 0.$$

Если $\lambda_1=0$, то из уравнения Эйлера будет следовать, что и $\lambda_0=0$, ведь $e^{0,03t}>0$. Но, по необходимому условию экстремума, вектор множителей Лагранжа (λ_0,λ_1) не может быть нулевым. Следовательно, условие дополняющей нежесткости утверждает, что бюджетное ограничение является активным:

$$500+\int\limits_0^\infty (5-c(t))e^{-0,05t}dt=0.$$

Докажем, что множитель Лагранжа λ_0 не может быть нулевым. Будем рассуждать от противного: пусть $\lambda_0=0$. Тогда из уравнения Эйлера будет следовать, поскольку $c(t)>0$, что и $\lambda_1=0$, чего не может быть. Без ограничения общности можно положить $\lambda_0=1$.

Уравнение Эйлера принимает вид: $e^{0,03t}=\lambda_1 2c(t)^{\frac{3}{4}}$.

Подифференцируем его по времени:

$$0,03e^{0,03t}=\frac{3\lambda_1\dot{c}}{2c(t)^{\frac{1}{4}}}$$

и поделим полученную производную на уравнение Эйлера, чтобы избавиться от множителя Лагранжа λ_1:

$$\frac{0,03e^{0,03t}}{e^{0,03t}}=0,03=\frac{3\lambda_1\dot{c}}{2c(t)^{\frac{1}{4}}\lambda_1 2c(t)^{\frac{3}{4}}}=\frac{3}{4}\frac{\dot{c}}{c}.$$

Получаем условие Рамсея для темпа прироста потребления:

$$\frac{\dot{c}}{c}=0,04.$$

Решаем данное дифференциальное уравнение, разделяя переменные $\left(\frac{dc}{c}=0,04dt\right)$, переходя к логарифмической шкале для потребления $(d\ln c=0,04dt)$ и интегрируя $\left(\int d\ln c=\ln c=0,04\int dt+\ln k=0,04t+\ln c\right.$, где $\ln k$ – константа интегрирования). Потенцируя полученное равенство $\left(e^{\ln c}=c(t)=e^{0,04t+\ln k}=e^{\ln k}e^{0,04t}=ke^{0,04t}\right)$ и используя начальное условие $(c(0)=k)$, получаем зависимость потребления в любой момент времени от его значения в нулевой момент:

$$c(t)=c(0)e^{0,04t}.$$

Подставляем полученное выражение в бюджетное ограничение:

$$500+\int\limits_0^\infty (5-c(t))e^{-0,05t}dt=500+\int\limits_0^\infty (5-c(0)e^{0,04t})e^{-0,05t}dt=0,$$

и преобразуем:

$$500+5\int\limits_0^\infty e^{-0,05t}dt=c(0)\int\limits_0^\infty e^{-0,01t}dt;$$

$$500-100\int\limits_0^\infty de^{-0,05t}=-100c(0)\int\limits_0^\infty de^{-0,01t};$$

$$500-100e^{-0,05t}\Big|_0^\infty=-100c(0)e^{-0,01t}\Big|_0^\infty;$$

$$600=100c(0);$$

чтобы найти потребление в начальный момент времени: $c(0)=6$.

Здесь мы использовали тот факт, что $\frac{de^{-\alpha t}}{dt}=-\alpha e^{-\alpha t}$, т.е. $e^{-\alpha t}dt=\frac{-de^{-\alpha t}}{\alpha}$.

В итоге получаем оптимальную траекторию потребления каждого члена домохозяйства (рис. 2):

$$c(t)=6e^{0,04t}.$$

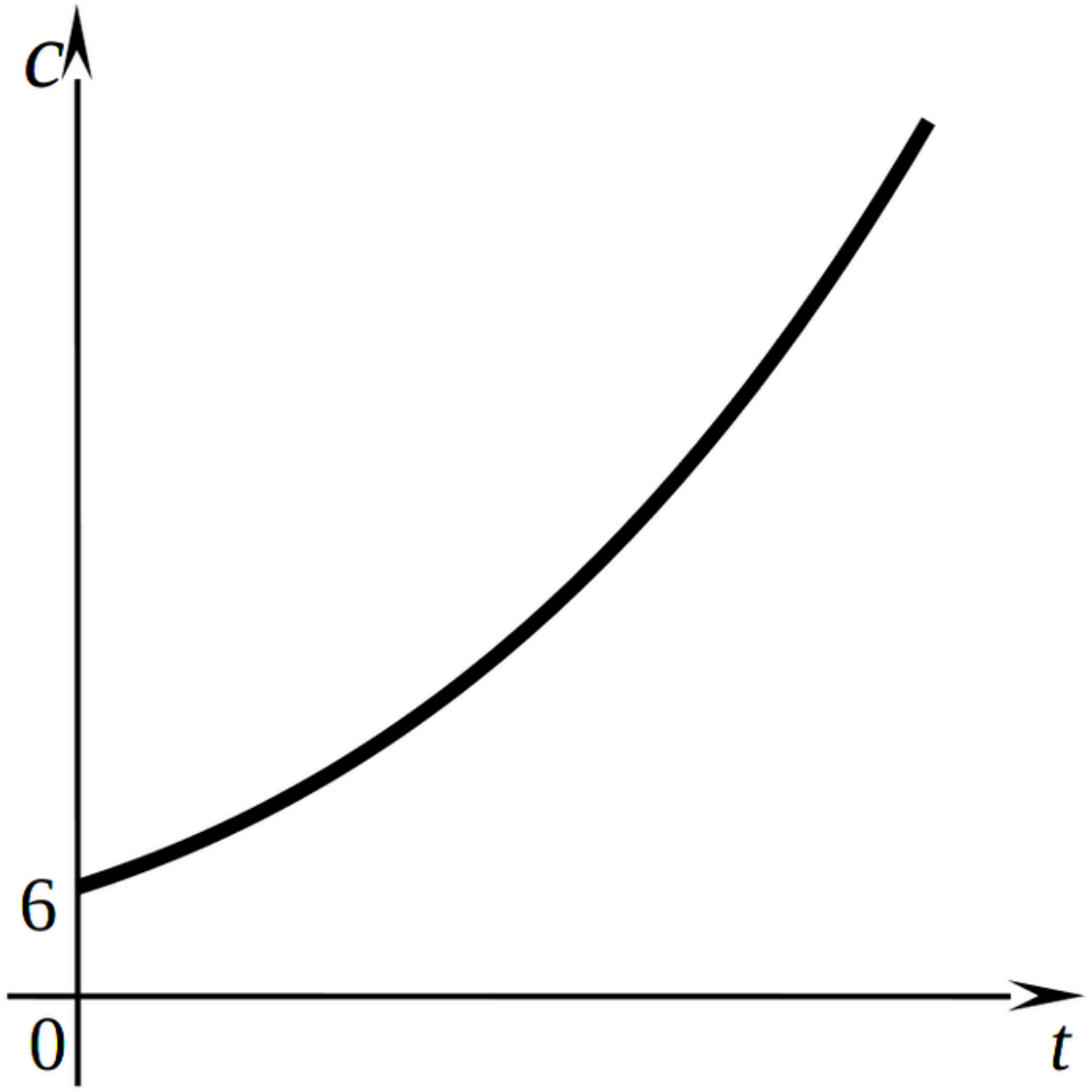


Рисунок 2. Траектория динамики потребления

Повторим все рассуждения, проведенные выше, предполагая ставку процента переменной величиной, чтобы вывести функцию предложения сбережений для каждого момента времени.

Функция Лагранжа для данной задачи связанной максимизации полезности потребителя в непрерывном времени будет иметь вид:

$$L = \int\limits_0^\infty \left(\lambda_0 2\sqrt[4]{c(t)}e^{-0,02t} + \lambda_1(5 - c(t))e^{-\int\limits_0^t (r(\tau)-0,01)d\tau} \right) dt + \lambda_1 500.$$

Лагранжиан при переменной ставке процента выглядит так:

$$L = \lambda_0 2\sqrt[4]{c(t)}e^{-0,02t} + \lambda_1 \left(5 - c(t)\right)e^{-\int\limits_0^t (r(\tau)-0,01)d\tau}.$$

Соответственно, уравнение Эйлера имеет вид:

$$\frac{\lambda_0 2e^{-0,02t}}{4c(t)^{\frac{3}{4}}} - \lambda_1 e^{-\int\limits_0^t (r(\tau)-0,01)d\tau} = 0,$$

или

$$\lambda_0 e^{\int\limits_0^t (r(\tau)-0,03)d\tau} = \lambda_1 2c(t)^{\frac{3}{4}}.$$

Условие дополняющей нежесткости при этом будет таким:

$$\lambda_1 \left(500 + \int\limits_0^\infty (5 - c(t)) e^{-\int\limits_0^t (r(\tau) - 0{,}01)\, d\tau} dt \right) = 0.$$

Если $\lambda_1 = 0$, то из уравнения Эйлера будет следовать, что и $\lambda_0 = 0$, ведь $e^{\int\limits_0^t (r(\tau) - 0{,}03)\, d\tau} \neq 0$. Но по необходимому условию экстремума вектор множителей Лагранжа (λ_0, λ_1) не может быть нулевым. Следовательно, условие дополняющей нежесткости утверждает, что межвременное бюджетное ограничение является активным:

$$500 + \int\limits_0^\infty (5 - c(t)) e^{-\int\limits_0^t (r(\tau) - 0{,}01)\, d\tau} dt = 0. (П 4.1)$$

Докажем, что множитель Лагранжа λ_0 не может быть нулевым. Будем рассуждать от противного: пусть $\lambda_0 = 0$. Тогда из уравнения Эйлера будет следовать, поскольку $c(t) > 0$, что и $\lambda_1 = 0$, чего не может быть. Без ограничения общности можно положить $\lambda_0 = 1$.

Уравнение Эйлера принимает вид:

$$e^{\int\limits_0^t (r(\tau) - 0{,}03)\, d\tau} = \lambda_1 2 c(t)^{\frac{3}{4}}.$$

Подифференцируем его по времени

$$(r(t) - 0{,}03) e^{\int\limits_0^t (r(\tau) - 0{,}03)\, d\tau} = \frac{3 \lambda_1 \dot{c}}{2 c(t)^{\frac{1}{4}}}$$

и поделим полученную производную на уравнение Эйлера, чтобы избавиться от множителя Лагранжа λ_1:

$$\frac{(r(t) - 0{,}03) e^{\int\limits_0^t (r(\tau) - 0{,}03)\, d\tau}}{e^{\int\limits_0^t (r(\tau) - 0{,}03)\, d\tau}} = r(t) - 0{,}03 = \frac{3 \lambda_1 \dot{c}}{2 c(t)^{\frac{1}{4}} \lambda_1 2 c(t)^{\frac{3}{4}}} = \frac{3}{4} \frac{\dot{c}}{c}.$$

Получаем условие Рамсея для темпа прироста потребления:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{4}{3} (r(t) - 0{,}03).$$

Решаем данное дифференциальное уравнение, разделяя переменные

$$\frac{dc}{c} = \frac{4}{3} (r(t) - 0{,}03) dt,$$

переходя к логарифмической шкале для потребления

$$d \ln c = \frac{4}{3} (r(t) - 0{,}03) dt$$

и интегрируя

$$\int d \ln c = \ln c = \frac{4}{3} \int (r(t) - 0{,}03) dt + \ln k,$$

где $\ln k$ – константа интегрирования.

Потенцируя полученное равенство и используя начальное условие $(c(0) = k)$, получаем зависимость потребления в любой момент времени от его первоначального значения:

$$c(t) = c(0) e^{\frac{4}{3} \int\limits_0^t (r(\tau) - 0{,}03)\, d\tau}. (П 4.2)$$

Подставляя полученное выражение в бюджетное ограничение (П4.1)

$$500 + \int\limits_0^\infty (5 - c(0) e^{\frac{4}{3} \int\limits_0^t (r(\tau) - 0{,}03)\, d\tau}) e^{-\int\limits_0^t (r(\tau) - 0{,}01)\, d\tau} dt = 0$$

и преобразуя

$$500 + 5 \int\limits_0^\infty e^{-\int\limits_0^t (r(\tau) - 0{,}01)\, d\tau} dt = c(0) \int\limits_0^\infty e^{\int\limits_0^t \frac{(r(\tau) - 0{,}09)}{3} d\tau} dt,$$

выражаем потребление в начальный момент времени:

$$c(0) = \frac{500 + 5 \int\limits_0^\infty e^{-\int\limits_0^t (r(\tau) - 0{,}01)\, d\tau} dt}{\int\limits_0^\infty e^{\int\limits_0^t \frac{(r(\tau) - 0{,}09)}{3} d\tau} dt}.$$

Данное выражение является осмысленным только при $0{,}01 < r < 0{,}09$, когда числитель и знаменатель дроби принимают конечные значения.

Подставляя начальный уровень в траекторию динамики индивидуального потребления (П4.2), получаем ее зависимость от ставки процента:

$$c(t,r(t)) = \left(\frac{500+5\int\limits_0^\infty e^{-\int\limits_0^t (r(\tau)-0{,}01)d\tau} dt}{\int\limits_0^\infty e^{\int\limits_0^t \frac{(r(\tau)-0{,}09)}{3} d\tau} dt} \right) e^{\frac{4}{3}\int\limits_0^t (r(\tau)-0{,}03)d\tau}.$$

При этом сбережения как прирост индивидуальных активов (4.5) представляют собой следующую функцию ставки процента:

$$s(t,r(t)) = \dot{a}(t,r(t)) = w(t) - c(t,r(t)) + (r(t)-n(t))a(t,r(t)) = 5 - \left(\frac{500+5\int\limits_0^\infty e^{-\int\limits_0^t (r(\tau)-0{,}01)d\tau} dt}{\int\limits_0^\infty e^{\int\limits_0^t \frac{(r(\tau)-0{,}09)}{3} d\tau} dt} \right) e^{\frac{4}{3}\int\limits_0^t (r(\tau)-0{,}03)d\tau} + (r(t)-0,01)e$$

$$\times \left(500 + \int\limits_0^t \left(5 - \left(\frac{500 + 5 \int\limits_0^\infty e^{-\int\limits_0^t (r(\tau) - 0{,}01)\, d\tau}\, dt}{\int\limits_0^\infty e^{\int\limits_0^t \frac{(r(\tau) - 0{,}09)}{3}\, d\tau}\, dt} \right) e^{\frac{4}{3}\int\limits_0^\tau (r(\zeta) - 0{,}03)\, d\zeta} \right) e^{-\int\limits_0^\tau (r(\zeta) - 0{,}01)\, d\zeta}\, d\tau \right).$$

---

1. Если непрерывный темп прироста величины M равен r, то ее дискретный темп роста равен e^r: $\frac{M(t+1)}{M(t)} = e^r$. Разлагая в ряд Тейлора $e^r = 1 + r + o(1)$, получаем, что при малых r данный темп роста близок $(1 + r)$. ↩

2. Samuelson P.A. The collected scientific papers. 6th pr. – Cambridge (Mass.); L.: MIT press, 1985, vol.1. ↩

3. На основе (3.4) при верхнем пределе интегрирования, равном $+\infty$, можно получить в непрерывном времени стоимость пожизненного аннуитета с доходностью $R(t) = R = const$, стартующего в момент времени $t = t_0$:

$$P_{перп} = \int\limits_{t_0}^{+\infty} Re^{-r(t-t_0)}\, dt = R \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-r(t-t_0)}\, dt = \frac{R}{r}.$$

Отметим, что на множестве $t \in R^+$ интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-xt} dx$ сходится [Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. – 2-е изд. – М.: Высшая школа, 2000, кн. 2).
Итак, стоимость перпетуитета не зависит от момента времени, с которого он отсчитывается, и от того, как течет время – дискретно (viii) или непрерывно. ↩

4. При постоянной во времени ставке процента $(r(t) = r = const)$ приходим к полученной выше формуле (3.4). ↩

5. Простейшая задача классического вариационного исчисления состоит в оптимизации (для определенности – минимизации) некоторого интегрального функционала качества системы $S = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\, dt$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$ – обобщенные координаты, т.е. любые *s* величин, вполне характеризующие, положение системы (с *s* степенями свободы), а $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_s)$ – обобщенные скорости; которая в начальный и конечный моменты времени $t = t_0$ и $t = t_1$ занимает определенные положения, характеризуемые двумя наборами значений координат $x(t_0) = x_0$ и $x(t_1) = x_1$:

$$\min \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\, dt :$$

$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1.$$

Проварьируем функционал *S* некоторой функцией $h \in C^1[t_0, t_1]$, такой, что $h(t_0) = h(t_1) = 0$:

$$\sigma(\lambda) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x + \lambda h(t), \dot{x} + \lambda \dot{h}(t))\, dt, где \lambda \in R.$$

Если функция x доставляет минимум в данной задаче вариационного исчисления, то функция $\sigma(\lambda)$ имеет минимум при $\lambda = 0$, значит, по теореме Ферма, вариация интегрального функционала должна аннулироваться:

$$\delta S \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=0} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt = 0.$$

Преобразуем вариацию δS, интегрируя ее второй член по частям:

$$\delta S = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial x} h dt - \int\limits_{t_0}^{t_1} h d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + h \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_0}^{t_1} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial x} h dt - \int\limits_{t_0}^{t_1} h \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\, dt + h \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_0}^{t_1} = 0. (viii)$$

В силу граничных условий, накладываемых на функцию *h*, последнее слагаемое обращается в нуль. Следовательно, вариация принимает вид:

$$\delta S = \int\limits_{t_0}^{t_1} h \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) dt = 0.$$

По лемме Лагранжа, если $\int\limits_{t_0}^{t_1} h(t) y(t)\, dt = 0$ при произвольной непрерывно дифференцируемой функции *h*(*t*), то *y*(*t*) тождественно равняется нулю. Действительно, если это не так, то, положив, например, $h(t) > 0$ при $t \in [a, b] \subset [t_0, t_1]$, получим, что в общем случае $\int\limits_{t_0}^{t_1} h(t) y(t)\, dt \neq 0$ [Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Оптимизация. – М.: Едиториал УРСС, 2000]. Таким образом, необходимое условие экстремума в простейшей задаче классического вариационного исчисления представлено векторным уравнением Эйлера:

$$\frac{-d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial x} = 0. (ix)$$

При наличии связей между переменными вида: $\int\limits_{t_0}^{t_1} f_j(t, x, \dot{x})\, dt + l_j(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0, \dot{x}_j - \varphi_j(t, x) = 0, j = 1, \ldots, k$, исследуется уже не простейшая задача классического вариационного исчисления, а задача Лагранжа, в которой в целевом функционале так же, как и в ограничениях, присутствует терминальное слагаемое: $S = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, \dot{x})\, dt + l_0(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$. Методом неопределенных множителей Лагранжа $(\lambda, p(t))$ задача на условный экстремум:

$$\min \left\{ \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, \dot{x})\, dt + l_0(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \right\} :$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} f_j(t, x, \dot{x})\, dt + l_j(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0, \dot{x}_j - \varphi_j(t, x) = 0, j = 1, \ldots, k.$$

сводится к задаче на безусловный экстремум нового интегрального функционала:

$\Lambda = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\, dt + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$, где лагранжиан принимает вид:

$$L(t, x, \dot{x}) = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j f_j(t, x, \dot{x}) + \sum_{j=0}^{k} p_j(t) \left(\dot{x}_j - \varphi_j(t, x) \right),$$

а терминальное слагаемое выглядит так:

$$l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j l_j(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)).$$

При этом уравнения Эйлера (ix) остаются в силе, но уже относятся к лагранжиану $L(t, x, \dot{x})$. Действительно, функция $\sigma(\lambda) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x + \lambda h(t), \dot{x} + \lambda \dot{h}(t))\, dt + l(t_0, x(t_0) + \lambda h(t_0), t_1, x(t_1) + \lambda h(t_1))$, где $h \in C^1[t_0, t_1]$, имеет минимум при $\lambda = 0$, значит, по теореме Ферма,

$$\delta \Lambda \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=0} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt + \frac{\partial l}{\partial x(t_0)} h(t_0) + \frac{\partial l}{\partial x(t_1)} h(t_1) = 0. (x)$$

Взяв $h(t_0) = h(t_1) = 0$ и проведя преобразование (viii), в силу леммы Лагранжа, получаем, что уравнение Эйлера (ix) является необходимым условием минимума в данной обобщенной задаче вариационного исчисления. Преобразуем теперь вариацию (x), интегрируя второй член по частям:

$$\delta\Lambda = \int\limits_{t_0}^{t_1} h\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t_1) + \frac{\partial l}{\partial x(t_1)}\right)h(t_1) + \left(\frac{-\partial L}{\partial \dot{x}}(t_0) + \frac{\partial l}{\partial x(t_0)}\right)h(t_0) = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t_1) + \frac{\partial l}{\partial x(t_1)}\right)h(t_1) + \left(\frac{-\partial L}{\partial \dot{x}}(t_0) + \frac{\partial l}{\partial x(t_0)}\right)h(t_0) = 0.$$

При этом было использовано уравнение Эйлера (ix). Полагая теперь в последнем равенстве $h(t) = t - t_0$, приходим к первому из условий трансверсальности:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t_1) = \frac{-\partial l}{\partial x(t_1)}.$$

Если же взять $h(t) = t - t_1$, то результатом становится второе условие:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t_0) = \frac{\partial l}{\partial x(t_0)}. \; \hookleftarrow$$

4.3. Максимизация прибыли и накопление капитала

Рассмотрим процедуру динамической максимизации прибыли отдельного хозяйствующего субъекта [1] сначала в дискретном времени. При предположении, что каждый год изнашивается определенная доля (δ) существующих основных фондов, выражение валовых инвестиций фирмы как сумма чистых инвестиций, т.е. чистого прироста запаса капитала, и его амортизации будет таким:

$$I_t^g = K_{t+1} - K_t + \delta K_t.$$

Динамическая функция прибыли предприятия при дискретном ходе времени с учетом технологии производства $q_t = f(K_t, L_t)$ будет иметь вид:

$$PR_t(K_t, L_t) = p_t f(K_t, L_t) - pL_t - p_{Kt}(K_{t+1} - (1-\delta)K_t).$$

Целью деятельности фирмы является максимизация суммарных дисконтированных чистых доходов (*NPV*) – приведенного к начальному моменту времени потока прибыли. При предположении о том, что предприятие будет функционировать бесконечно долго, его оптимизационная задача будет выглядеть так [2]:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{PR_t(K_t,L_t)}{(1+i)^t} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(p_t f(K_t,L_t) - pL_t - p_{Kt}(K_{t+1}-(1-\delta)K_t))}{(1+i)^t} \to \max$$

Необходимые условия максимума прибыли в дискретном времени будут иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{p_t \frac{\partial f(K_t,L_t)}{\partial K_t} + p_{Kt}(1-\delta)}{(1+i)^t} - \frac{p_{K,t-1}}{(1+i)^{t-1}} = 0, t = 1, 2, \dots \\ p_t \frac{\partial f(K_t,L_t)}{\partial L_t} - p = 0, t = 0, 1, \dots; \end{cases}$$

или:

$$\begin{cases} p_t MP_{Kt} + p_{Kt}(1-\delta) = (1+i)p_{K,t-1}, t = 1, 2, \dots & (4.36) \\ p_t MP = p, t = 0, 1, \dots & (4.37) \end{cases}$$

Если цена актива будет расти темпом, равным уровню инфляции $\left(\frac{p_{Kt}-p_{K,t-1}}{p_{K,t-1}} = \pi\right)$, *то* в соотношении (4.36) можно перейти от номинальной к реальной ставке процента:

$$p_t MP_{Kt} - p_{Kt}\delta = p_{K,t-1}i - \left(\frac{p_{Kt}-p_{K,t-1}}{p_{K,t-1}}\right)p_{K,t-1} = p_{K,t-1}(i-\pi) = p_{K,t-1}r.$$

Цена материальных активов через год прирастает на величину предельной доходности капитала $R_t \equiv p_t MP_{Kt}$, но уменьшается по мере износа основных фондов $p_{Kt}\delta$. Стоимость вложений в финансовые активы за год увеличивается за счет процентных начислений $p_{K,t-1}r$. Условие максимизации прибыли по капиталу утверждает, что вложения в финансовые и материальные активы должны обладать одинаковой доходностью: $p_t MP_{Kt} - p_{Kt}\delta = p_{K,t-1}r$. При этом доход от размещения денежной суммы на финансовом рынке выступает в качестве альтернативных издержек производственному применению данного капитала.

В стационарном состоянии, когда $p_{Kt} = p_{K,t-1} = p_K = const$, $p_{Lt} = p_L = const$, $p_t = p = const$, необходимое условие максимизации прибыли (4.36) задает выражение рентной цены капитала [3]:

$$p_K = \frac{p \bullet MP_k}{r+\delta}, (4.38)$$

поскольку номинальная (i) и реальная (r) ставки процента будут совпадать, а система (4.36) – (4.37) принимает вид:

$$\begin{cases} MP_K = \frac{p_K}{p}(r+\delta), & (4.39) \\ MP_L = \frac{p_L}{p}. & (4.40) \end{cases}$$

Данная система задает спрос фирмы на труд и капитал. В частности, если величина трудозатрат зафиксирована на оптимальном уровне, то, поскольку в таком случае выражение $\frac{P}{P_K}MP_K - \delta = r$ будет определять оптимальный запас капитала при каждом заданном значении реальной процентной ставки, постольку разница между стоимостью предельного продукта капитала в реальном выражении (по отношению к цене капитального актива) и нормой амортизации $\frac{P}{P_K}MP_K - \delta$ будет задавать спрос предприятия на капитал на рынке заемных средств (рис. 6).

Соотношения (4.39)-(4.40) можно рассматривать в качестве обобщения статичных условий максимизации прибыли на рынках факторов производства в условиях совершенной конкуренции:

$$\begin{cases} MVP_K = p \bullet MP_K = p_K, \\ MVP_L = p \bullet MP_L = p_L. \end{cases}$$

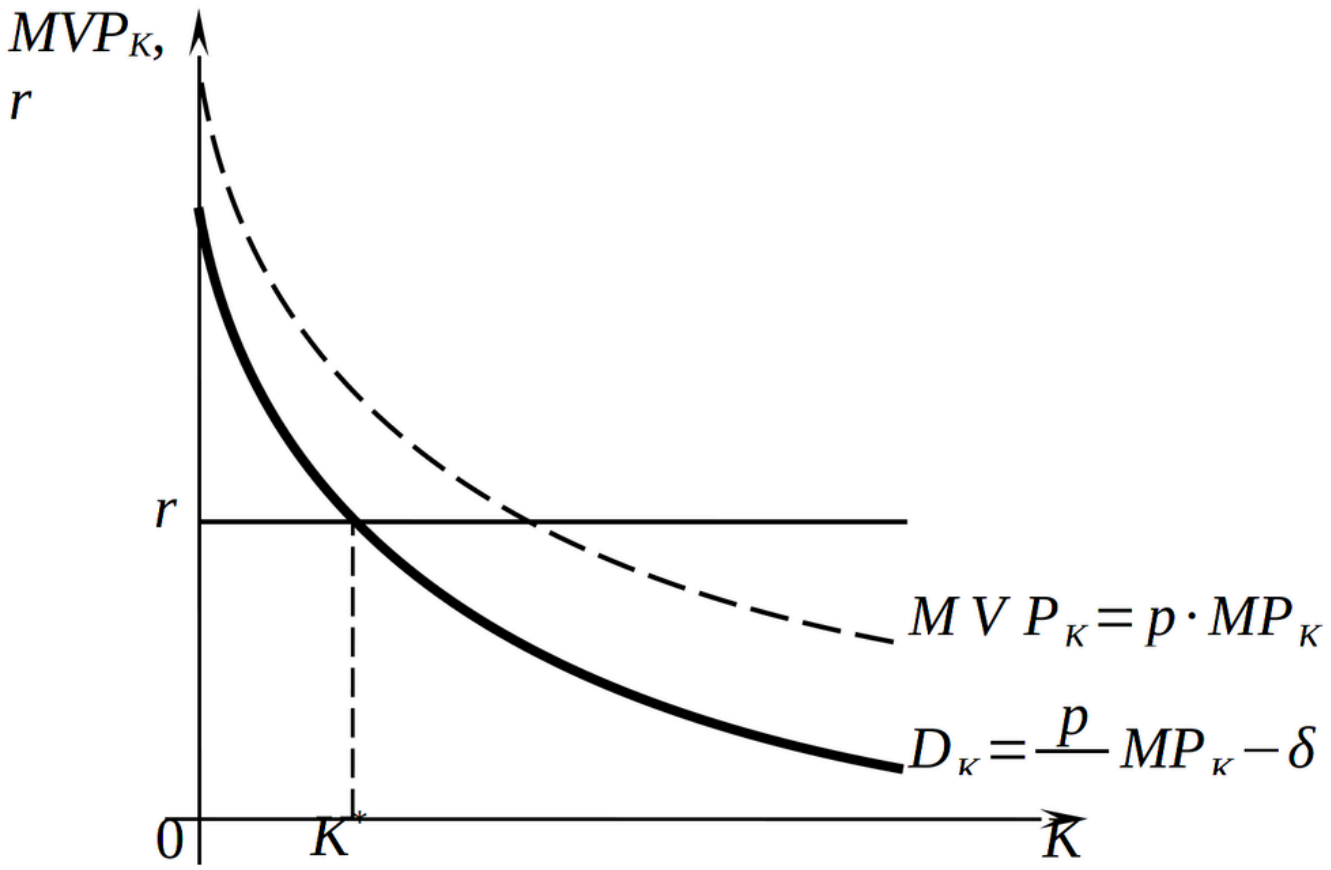


Рисунок 3. Спрос фирмы на капитал при оптимальной величине трудозатрат

Перепишем неоклассическую формулу оптимального запаса капитала (4.39) в следующем виде: $\frac{p \bullet MP_K - p_K \delta}{p_K r} = 1$. Дж. Тобин предложил использовать в качестве индикатора инвестиционной привлекательности предприятия левую часть данного равенства:

$$q_T = \frac{p \bullet MP_K - p_K \delta}{p_K r}.$$

Коэффициент Тобина представляет собой оценку предельной прибыльности предприятия с точки зрения инвестирования в него средств [4].

Действительно, если $q_T > 1$, то $p \bullet MP_K - p_K \delta > p_K r$, и $\frac{\partial PR}{\partial K} > 0$, а значит, при увеличении запаса капитала прибыль будет повышаться. Следовательно, имеющаяся величина основного капитала ниже оптимального $(K < K)$, и требуются инвестиции в развитие данной компании.

Если $q_T < 1$, то, наоборот, $p \bullet MP_K - p_K \delta < p_K r$, $\frac{\partial PR}{\partial K} < 0$, и при снижении запаса капитала прибыль будет расти. Следовательно, фактический запас капитала превышает оптимальный $(K > K)$. В данной ситуации индикатор свидетельствует о необходимости перехода к более низкому уровню капитала. Следует сократить инвестиции – в перспективе будет ожидаться суженное воспроизводство капитала предприятия.

В случае $q_T = 1$, $p \bullet MP_K - p_K \delta = p_K r$, т.е. $\frac{\partial PR}{\partial K} = 0$, и достигается оптимум $(K = K)$; другими словами, ситуация на предприятии не нуждается в корректировке.

Величина $(p \bullet MP_K - p_K \delta)/r$ с учетом формулы пожизненного аннуитета (vi) может рассматриваться как оценка капитализированной предельной прибыльности компании (до выплаты процентов), т.е. капитализированной доходности дополнительных денежных средств, инвестированных в предприятие [5].

Задача максимизации чистой приведенной стоисости инвестиционного проекта может ставиться как с точки зрения поиска оптимальной динамики комбинации факторов производства, так и в контексте нахождения оптимальной траектории динамики объема реализуемой продукции. В качестве примера второй трактовки динамической максимизации прибыли приведем задачу оптимальной эксплуатации невозобновляемого ресурса, запасы которого представляют собой некоторую экзогенно заданную величину $\overline{q}$:

$$\sum_{t=0}^{T} \frac{PR_t(q_t)}{(1+i)^t} = \sum_{t=0}^{T} \frac{(TR_t(q_t) - TC_t(q_t))}{(1+i)^t} \to \max :$$

$$\sum_{t=0}^{T} q_t = \overline{q}.$$

Решая данную задачу, выписываем функцию Лагранжа:

$$L = \sum_{t=0}^{T} \left(\frac{\lambda_0(-TR_t(q_t)+TC_t(q_t))}{(1+i)^t} + \lambda_1 q_t \right) - \lambda_1 \overline{q}.$$

Необходимым условием оптимальности является ее стационарность по объему используемого ресурса:

$$\frac{\partial L}{\partial q_t} = \frac{\lambda_0(-MR_t+MC_t)}{(1+i)^t} + \lambda_1 = 0.$$

Если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda_1 = 0$, чего не может быть, ведь вектор множителей Лагранжа должен быть нулевым. Таким образом, $\lambda_0 = 1$, и условие стационарности функции Лагранжа по объему утилизируемого ресурса принимает вид:

$$\frac{MR_t - MC_t}{(1+i)^t} = \lambda_1, или MR_t - MC_t = \lambda_1 (1+i)^t.$$

Аналогичное соотношение будет справедливо для любого момента времени, в частности для $t-1$:

$$\frac{MR_{t-1} - MC_{t-1}}{(1+i)^{t-1}} = \lambda_1, или MR_{t-1} - MC_{t-1} = \lambda_1 (1+i)^{t-1}.$$

Поделив условия стационарности функции Лагранжа по q для соседних периодов времени t и $t-1$ одно на другое, избавляемся от множителя Лагранжа

$$\frac{MR_t - MC_t}{MR_{t-1} - MC_{t-1}} = 1 + i$$

и приходим к условию оптимальности в темповой записи:

$$\frac{(MR_t - MC_t) - (MR_{t-1} - MC_{t-1})}{MR_{t-1} - MC_{t-1}} = i,$$

которое утверждает, что эксплуатация невозобновляемого ресурса должна осуществляться таким образом, чтобы темп прироста предельной прибыли был равен рыночной ставке процента.

В частности, в условиях совершенной конкуренции, когда $MR_t = p_t$, данное условие упрощается:

$$\frac{(p_t - MC_t) - (p_{t-1} - MC_{t-1})}{p_{t-1} - MC_{t-1}} = i.$$

Следствием данного правила является т.н. условие Викселя, характеризующее оптимальный момент реализации актива, не обремененного никакими эксплуатационными расходами $(MC_t = 0)$, которое утверждает, что актив нужно реализовывать целиком тогда, когда темп прироста его цены уравнивается с рыночной ставкой процента:

$$\frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} = i.$$

Перейдем к анализу накопления капитала в непрерывном времени. При этом функцию прибыли можно записать в следующем виде:

$$PR(t) = p(t)q(t) - p_L(t)L(t) - p_K(t)I_g(t),$$

где объем производства характеризуется производственной функцией $q(t) = f(K(t), L(t))$, а валовые инвестиции представляют собой чистый прирост запаса капитала (4.32) и возмещение его выбытия:

$$I_g(t) = \dot{K}(t) + \delta K(t). \quad (4.41)$$

Максимизация дисконтированного потока прибыли, т.е. чистой приведенной стоимости предприятия как бизнес-проекта в непрерывном времени при переменной ставке процента $NPV = \int\limits_0^\infty PR(K(t), L(t)) e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau} dt$, будет выглядеть так:

$$\int\limits_0^\infty \left(p(t) f(K(t), L(t)) - p_L(t)L(t) - p_K(t) \left(\dot{K}(t) + \delta K(t) \right) \right) e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau} dt \to \max$$

Уравнения Эйлера по затратам капитала $K(t)$ и труда $L(t)$ для интегранта

$$L = \left(p(t) f(K(t), L(t)) - p_L(t)L(t) - p_K(t) \left(\dot{K}(t) + \delta K(t) \right) \right) e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau} \quad (4.42)$$

в данной задаче вариационного исчисления будут иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(p_K(t) e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau} \right) + p(t) MP_K(t) e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau} - p_K(t)\delta e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau} = \dot{p}_K(t) e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau} - i(t) p_K(t) e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau} + p(t) MP_K(t) e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau} - \\ p(t) MP_L(t) e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau} - p_L(t) e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau} = 0; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} p(t) MP_K(t) + \dot{p}_K(t) = p_K(t)(i(t) + \delta), & (4.43) \\ p(t) MP_L(t) = p_L(t). & (4.44) \end{cases}$$

Следует отметить, что достаточным условием максимума в данной задаче вариационного исчисления [6] является отрицательная определенность на экстремалях (4.43)-(4.44) гессиана $p(t)\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial K^2}(t) & \frac{\partial^2 f}{\partial K \partial L}(t) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial L \partial K}(t) & \frac{\partial^2 f}{\partial L^2}(t) \end{bmatrix}$ – матрицы вторых частных производных интегранта (4.42):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial K^2}(t) < 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial K^2}(t) \bullet \frac{\partial^2 f}{\partial L^2}(t) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial K \partial L}(t)\right)^2 > 0. \end{cases}$$

Таким образом, функция выручки $TR(t) = p(t)q(t) = p(t)f\left(K(t), L(t)\right)$, а значит, в силу положительности цены $\left(p(t) > 0\right)$ и производственная функция $q(t) = f\left(K(t), L(t)\right)$ должны быть строго вогнутыми. Это предполагает действие закона убывающей производительности факторов и (при традиционной предпосылке $f(0) = 0$) убывающую отдачу от масштаба производства [7].

Если цена капитальных активов изменяется темпом равным уровню инфляции $\left(\frac{\dot{p}_K}{p_K} = \pi\right)$, то в силу уравнения Фишера $(r = i - \pi)$ условие оптимальности по капиталу (4.43) дает выражение рентной цены капитала (4.38) в непрерывном времени, а сама система (4.43)-(4.44) приобретает вид, аналогичный (4.39)-(4.40):

$$\begin{cases} MP_K(t) = \frac{p_K(t)}{p(t)}(r + \delta), \\ MP_L(t) = \frac{p_L(t)}{p(t)}. \end{cases}$$

Пример 5.

Предположим, что производственная функция фирмы, существующей бесконечно долго и действующей в условиях совершенной конкуренции на рынках ресурсов и продукции, имеет вид: $Q(t) = 3K(t)^{\frac{1}{3}}L(t)^{\frac{1}{2}}$.

В начальный момент на предприятии имеется 27 единиц основных фондов со сроком службы 10 лет и 16 рабочих. Каждая единица оборудования изнашивается равномерными долями на протяжении всего срока своей эксплуатации.

Цена на готовую продукцию равна 2, цена основных фондов так же равна 2, ставка заработной платы равна 3, банковская ставка составляет 10 процентов годовых. Все данные стоимостные величины стационарны (не меняются во времени).

Оценим перспективность дополнительных инвестиций в предприятие, опираясь на значение коэффициента Тобина.

Каждый год изнашивается 10 процентов установленного капитала: $\delta = 0,1$. Поскольку $MP_K = \frac{\sqrt{L}}{K^{\frac{2}{3}}}$, постольку (предельный) коэффициент Тобина при первоначальных величинах запаса капитала и занятости равен $q_T = \frac{\frac{p}{p_K}MP_K - \delta}{r} = \frac{\frac{4}{9} - 0,1}{0,1} = \frac{31}{9} > 1$, что свидетельствует о необходимости дополнительных инвестиций в предприятие.

Определим оптимальную величину капитала и занятости на данном предприятии. В состоянии оптимума должна выполняться система равенств:

$$\begin{cases} MP_K = \frac{\sqrt{L}}{K^{\frac{2}{3}}} = \frac{p_K}{p}(r + \delta) = 0,2; \\ MP_L = \frac{3\sqrt[3]{K}}{2\sqrt{L}} = \frac{w}{p} = 1,5; \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} \frac{3p}{2wK^{\frac{1}{3}}} = \frac{p_K}{p}(r + \delta) = 0,2; \\ \sqrt{L} = \frac{3p}{2w}K^{\frac{1}{3}} = K^{\frac{1}{3}}; \end{cases}$$

которая позволяет определить оптимальную величину капитала и занятости на каждом предприятии: K^*=125, L^*=25.

Поскольку все стоимостные величины, характеризующие систему, являются стационарными – не меняются во времени – данное решение будет справедливым как в случае, когда время меняется дискретными шагами, так и когда оно течет непрерывно.

Очевидно, что (предельный) коэффициент Тобина при оптимальных величинах запаса капитала и занятости равен единице: $q_T = \frac{\frac{p}{p_K}MP_K - \delta}{r} = \frac{\frac{5}{25^{\frac{2}{3}}} - 0,1}{0,1} = 1$.

Из последней системы условий вытекает, что функции спроса предприятия на капитал и труд от рыночной ставки процента и реальных цен на факторы производства при стационарной цене на продукцию соответственно имеют вид:

$$K = \frac{27}{8\left(\frac{w}{p}\right)^3\left(\frac{p_K}{p}\right)^3(r+\delta)^3}, L = \frac{9K^{\frac{2}{3}}}{4\left(\frac{w}{p}\right)^2} = \frac{81}{16\left(\frac{p_K}{p}\right)^2\left(\frac{w}{p}\right)^4(r+\delta)^2}.$$

Решение дифференциального уравнения (4.43) позволяет получить выражение стоимости капитального актива, являющееся обобщением формулы приведенной к начальному моменту времени стоимости актива как суммы его дисконтированного потока чистых доходов. Для того чтобы показать это, решим вначале соответствующее однородное уравнение:

$$\frac{dp_K(t)}{dt} - p_K(t)(i(t) + \delta) = 0.$$

Разделяя переменные

$$\frac{dp_K}{p_K} = d\ln|p_K| = (i + \delta)dt,$$

интегрируя

$$\int d\ln|p_K| = \int (i(t)+\delta)dt + \ln c$$

и затем потенцируя полученное равенство, получаем общее решение данного однородного уравнения:

$$p_K(t) = ce^{\int_0^t (i(\tau)+\delta)d\tau}.$$

Варьируя постоянную $p_K(t) = c(t)e^{\int_0^t (i(\tau)+\delta)d\tau}$ и используя это равенство в неоднородном уравнении (4.43):

$$(i(t)+\delta)c(t)e^{\int_0^t (i(\tau)+\delta)d\tau} - \frac{dc(t)}{dt}e^{\int_0^t (i(\tau)+\delta)d\tau} - (i(t)+\delta)c(t)e^{\int_0^t (i(\tau)+\delta)d\tau} =$$
$$p(t)MP_K(t) \equiv R(t),$$

получаем дифференциальное уравнение относительно $c(t)$:

$$dc(t) = R(t)e^{-\int_0^t (i(\tau)+\delta)d\tau}dt.$$

Интегрируя его, затем подставляя искомый множитель

$$c(t) = -\int_0^t R(\tau)e^{-\int_0^\tau (i(\xi)+\delta)d\xi}d\tau + c_0$$

в общее решение однородного уравнения

$$p_K(t) = c_0 e^{\int_0^t (i(\tau)+\delta)d\tau} - e^{\int_0^t (i(\tau)+\delta)d\tau}\int_0^t R(\tau)e^{-\int_0^\tau (i(\xi)+\delta)d\xi}d\tau$$

и принимая во внимание начальное условие $p_K(0) = c_0$, получаем обобщение формулы приведенной к начальному моменту времени стоимости актива как суммы его дисконтированной цены в момент t и дисконтированного потока чистых доходов с учетом положительной нормы амортизации (износа) данного актива:

$$p_K(0) = p_K(t)e^{-\int_0^t (i(\tau)+\delta)d\tau} + \int_0^t R(\tau)e^{-\int_0^\tau (i(\xi)+\delta)d\xi}d\tau. \quad (4.45)$$

В качестве следствия условия оптимума по капиталу (4.43) может рассматриваться условие К. Викселя эффективных инвестиций в актив, не приносящий рентный доход ($R(t) \equiv p(t)MP_K(t) = 0$) и не подверженный износу ($\delta = 0$). Реализация актива становится выгодной, когда темп прироста его стоимости [8], оказывается равным рыночной ставке процента:

$$\frac{\dot{p}_K}{p_K} = i.$$

Действительно, в таком случае $I_g(t) = \dot{K}(t)$, и задача максимизации дисконтированных капитализированных инвестиций в непрерывном времени при переменной ставке процента имеет вид:

$$-\int_0^\infty p_K(t)\dot{K}(t)e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau}dt \to \max$$

Уравнение Эйлера для данной задачи вариационного исчисления имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(p_K(t)e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau}\right) = \dot{p}_K(t)e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau} - i(t)p_K(t)e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau} = e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau}\left(\frac{dp_K(t)}{dt} - ip_K(t)\right) = 0.$$

Отсюда вытекает условие Викселя, которое по-другому можно сформулировать так: выгодный момент реализации актива наступает тогда, когда предельные альтернативные издержки вложения средств в проект, представляющие собой ставку процента, сравниваются с предельной доходностью инвестирования в виде темпа прироста стоимости актива.

Фактически здесь речь идет о максимизации дисконтированной стоимости актива, которая на исходный момент принятия решения о его перспективах t_0 составит $p_K(t_0) = p_K(t)e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau}$ (рис. 7).

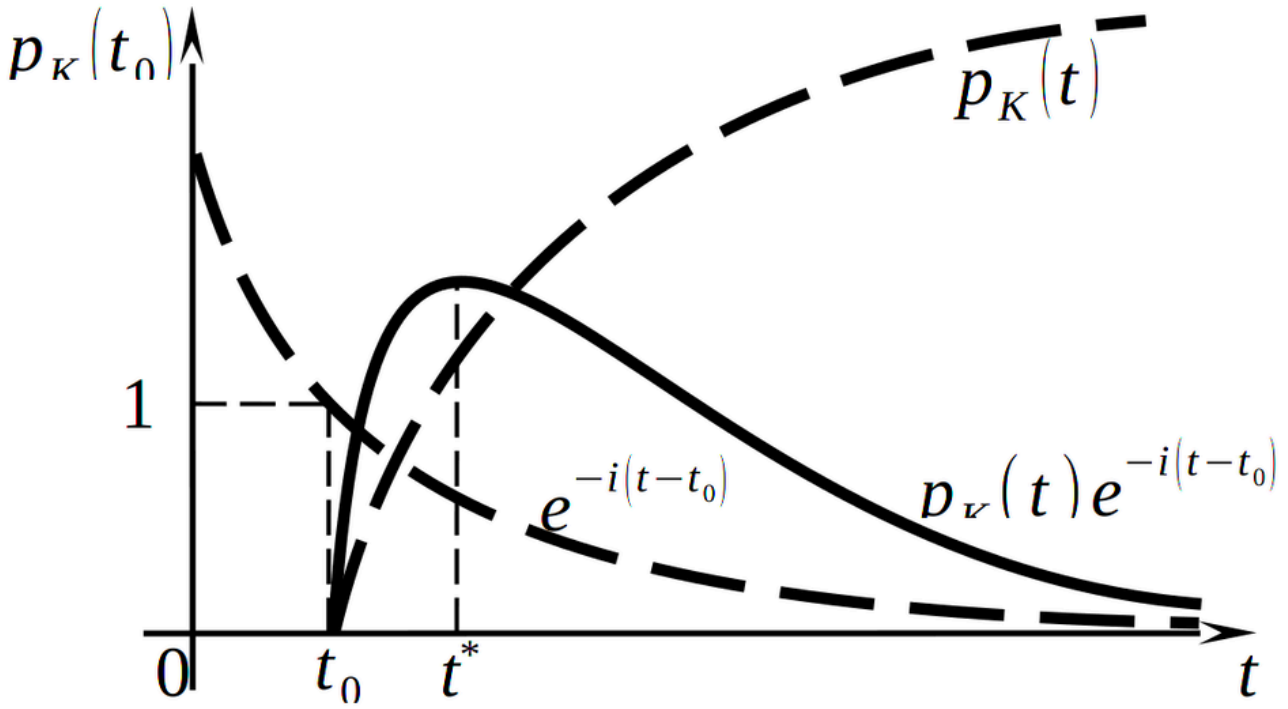


Рисунок 4. Условие Викселя

Достаточным условием оптимальности условия Викселя является строгая вогнутость траектории динамики стоимости актива $\left(\ddot{p}_K(t) < 0\right)$. Действительно, в таком случае в момент времени, удовлетворяющий условию Викселя, вторая производная дисконтированной стоимости актива по времени будет отрицательной:

$$\frac{d^2 p_K(t_0)}{dt^2} = p_K(t)e^{-r(t-t_0)}\left(\frac{\ddot{p}_K(t)}{p_K(t)} - r^2\right) < 0.$$

Следовательно, в данный момент достигается максимальное значение дисконтированной стоимости актива (рис. 7).

Пример 6.

Допустим, что бутылка элитного вина стоит 100 (денежных единиц), и динамика ее стоимости после выдержки в *t* периодов времени описывается траекторией: $p_K(t) = 100\sqrt{t}$ (время течет непрерывно). Ставка процента не меняется во времени и равна 10%. Рассчитаем, сколько следует выждать, прежде чем продать бутылку вина.

Задача состоит в максимизации стоимости актива, приведенной к исходному, первому периоду: $p_K(1) = 100\sqrt{t}e^{-r(t-1)}$. Для ее решения продифференцируем дисконтированную стоимость актива по времени и приравняем производную нулю:

$$\frac{dp_K(1)}{dt} = \frac{50e^{-r(t-1)}}{\sqrt{t}} - r100\sqrt{t}e^{-r(t-1)} = 50e^{-r(t-1)}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - 2r\sqrt{t}\right) = 0.$$

Очевидно, что оптимальный момент реализации актива наступит, когда темп прироста его стоимости сравняется с рыночной ставкой процента:

$$\frac{\dot{p}_K}{p_K} = \frac{1}{2t} = r = 0,1.$$

Условие Викселя выполняется при $t = 5$. Поскольку траектория динамики стоимости актива является строго вогнутой $\left(\ddot{p}_K(t) < 0\right)$, постольку данный момент времени – это точка максимума $p_K(1)$:

$$\frac{d^2 p_K(1)}{dt^2} = \frac{-r50e^{-r(t-1)}}{\sqrt{t}} - \frac{25e^{-r(t-1)}}{t^{\frac{3}{2}}} - \frac{r50e^{-r(t-1)}}{\sqrt{t}} + r^2 100\sqrt{t}e^{-r(t-1)} = 25e^{-r(t-1)}\left(\frac{-4r}{\sqrt{t}} - \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} + 4r^2\sqrt{t}\right) = \frac{25e^{-r(t-1)}\left(4r^2t^2 - 4rt - 1\right)}{t^{\frac{3}{2}}} = \frac{25e^{-r}}{}$$

$$nput = 5, r = 0,1.$$

Аналогично задаче в дискретном времени максимизация прибыли в непрерывном времени может осуществляться как по объемам используемых факторов производства, так и по количеству реализуемой продукции. Проиллюстрируем второй из данных подходов задачей оптимальной эксплуатации невозобновляемого ресурса в непрерывном времени:

$$\int_0^T PR(t)e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau}dt = \int_0^T \left(TR(q(t)) - TC(q(t))\right)e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau}dt \to \max :$$

$$\int_0^T q(t)dt = \overline{q}.$$

Выпишем соответствующую функцию Лагранжа:

$$L = \int_0^T \left(\lambda_0 \left(TC(q(t)) - TR\left(q(t)\right)\right) e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau} + \lambda_1 q(t) \right) dt - \lambda_1 \overline{q}.$$

Уравнение Эйлера (1.7) применительно к данной задаче имеет вид:

$$\lambda_0 \left(MC(q(t)) - MR\left(q(t)\right)\right) e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau} + \lambda_1 = 0.$$

Пусть $\lambda_0 = 0$, тогда $\lambda_1 = 0$, и вектор множителей Лагранжа оказывается нулевым, чего не может быть, следовательно, без ограничения общности можно положить $\lambda_0 = 1$, и уравнение Эйлера принимает вид:

$$\left(MR(q(t)) - MC(q(t))\right) e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau} = \lambda_1.$$

Продифференцируем его по времени

$$\left(\dot{MR}(q(t)) - \dot{MC}(q(t))\right) e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau} - ie^{-\int_0^t i(\tau)d\tau} \left(MR(q(t)) - MC(q(t))\right) = 0$$

и поделим данную производную на уравнение Эйлера:

$$\frac{\left(\dot{MR}(q(t)) - \dot{MC}(q(t))\right) e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau} - ie^{-\int_0^t i(\tau)d\tau} \left(MR(q(t)) - MC(q(t))\right)}{\left(MR(q(t)) - MC(q(t))\right) e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau}} = 0.$$

Таким образом, оптимальная траектория динамики утилизации невозобновляемого ресурса определяется правилом равенства темпа прироста предельной прибыли рыночной ставке процента:

$$\frac{\dot{MR}(q(t)) - \dot{MC}(q(t))}{MR(q(t)) - MC(q(t))} = i.$$

В условиях совершенной конкуренции, когда $MR(q(t)) = p(t)$, данное условие оптимальности принимает вид:

$$\frac{\dot{p}(t) - \dot{MC}(q(t))}{p(t) - MC(q(t))} = i.$$

В частности, при $MC(q(t)) = 0$ из данного правила вытекает условие Викселя.

---

1. Sandmo A. Investment and the rate of interest // Journal of political economy. 1971. Vol. 79. № 6. ↩

2. В данной постановке задачи предполагается, что номинальная ставка процента *i* на финансовом рынке постоянна на протяжении всего срока службы капитала. ↩

3. При $\delta = 0$ выражение для рентной цены капитала (3.38) дает стоимость пожизненного аннуитета, или перпетуитета, т.е. актива, пожизнено приносящего ежегодную ренту, величина которой составляет $R \equiv p \bullet MP_K$:
$P_{перп} = \frac{R}{1+r} + \frac{R}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+r)^t} + \ldots = \frac{R}{r}. (viii)$ ↩

4. Тобин Дж. Денежная политика и экономический рост. – М.: Либроком, 2010. ↩

5. Если предположить, что предельная прибыльность (до выплаты процентов) $\frac{\partial(PR + rp_K K)}{\partial K} = p \bullet MP_K - p_K \delta$ совпадает с аналогичной средней величиной $(PR + rp_K K)/K$, то, считая дисконтированную сумму потока доходов реальных активов предприятия его капитализированным дивидендом, коэффициент Тобина можно трактовать как отношение рыночной стоимости компании, ($P_ф$), к восстановительной стоимости капитала предприятия $(p_K K)$: $q_T = \frac{P_ф}{p_K K}$. Одновременно данный показатель может рассматриваться как курс акций компании на фондовом рынке, т.е. рыночная цена акции ($P_{рын}$), отнесенная к ее номиналу ($P_{ном}$): $q_T = \frac{P_{рын}}{P_{ном}}$. ↩

6. В соответствии с достаточным условием максимума для некоторого функционала (1.1) должно выполняться неравенство, противоположное (i). В нашем случае для интегранта (3.42) второе и третье слагаемое под знаком интеграла в неравенстве, противоположном (i), аннулируются, поэтому для максимизации прибыли достаточно, чтобы был отрицательно определен гессиан
$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}.$
По критерию Сильвестра, это условие будет выполняться тогда и только тогда, когда ее главные миноры по мере нарастания их порядка будут менять знак с отрицательного на положительный: $\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} < 0, \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} \bullet \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 > 0.$ ↩

7. Отметим, что строгая вогнутость технологии предполагает ее строгую квазивогнутость в данный момент времени, т.е. строгую вогнутость на изокванте $\{(K(t), L(t)) | f(K(t), L(t)) = \overline{q}, \overline{q} \in R\}$. Достаточным условием для строгой квазивогнутости дважды непрерывно дифференцируемой производственной функции $q(t) = f\left(K(t), L(t)\right) \in C^2$ при убывании предельной производительности факторов $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial K^2}(t) < 0, \frac{\partial^2 f}{\partial L^2}(t) < 0 \right)$ будет выполнение предпосылки о комплементарности факторов производства в том смысле, что предельный продукт каждого из них является возрастающей функцией от объема другого:
$\frac{\partial^2 f}{\partial K \partial L}(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial L \partial K}(t) > 0.$ ↩

8. Который Дж.Р. Хикс трактует как относительную предельную отдачу от (оправдавшихся) ожиданий [Хикс Дж.Р. Стоимость и капитал. – М.: Прогресс-Универс, 1993]. ↩

4.4. Накопление индивидуального человеческого капитала

Проблемы человеческого капитала выделились в отдельное направление экономической науки во второй половине XX столетия. Можно обозначить два фундаментальных направления в анализе внутренних активов человеческой личности. Первое, макроэкономическое направление исследований, идеологом которого можно считать Т.В. Шульца [1], делает акцент на неравновесных аспектах функционирования человеческих активов. Факторами неравновесия выступают многообразные синергетические внутренние и внешние эффекты, в том числе, общая положительная результативность хозяйственных процессов, которые связаны с воспроизводством созидательных способностей человека.

Одной из ветвей среди макроэкономических исследований, связанных с концепцией человеческого капитала, стал анализ эндогенной механики экономического роста. Основополагающими здесь являются работы Р. Лукаса [2] и П. Ромера [3], предполагающие возрастания отдачи от масштаба производства на макроуровне в результате возникновения синергетических эффектов при накоплении человеческого капитала.

Второе, микроэкономическое направление исследований внутренних человеческих активов, знаковой фигурой в котором является Г.С. Беккер [4], разрабатывает оптимизационные модели их воспроизводства. Ключевой предпосылкой здесь в противоположность первому исследовательскому направлению выступает убывание отдачи от человеческого капитала как фундаментальный фактор, обеспечивающий возможность его сбалансированного воспроизводства и равновесия экономической системы в целом.

Человеческий капитал представляет собой совокупность созидательных способностей личности, используемых в целесообразной форме в процессе жизнедеятельности как отдельного индивидуума, так и всего общества. Всю совокупность созидательных качеств и свойств человека – его активов – можно подразделить на следующие основные группы в зависимости от их функции в жизнедеятельности людей [5]:

- человеческая живая система – общие физические и нервно-психические, в том числе интеллектуальные, возможности человека, в частности, потенциал его здоровья;
- способность к индивидуальному воспроизводству в широком смысле, в том числе специфические знания и умения, необходимые человеку для формирования и совершенствования собственных живых творческих сил, а также способность вести домашнее хозяйство, воспитывать и учить детей, проводить активный здоровый отдых и т.п.;
- уровень образования и профессиональная подготовка, в том числе общеобразовательные и социо-культурные знания и умения, общие и специальные профессиональные навыки, трудовой опыт и производственное мастерство;
- когнитивные возможности, касающиеся получения, переработки, сохранения и использования экономически значимой информации и, как следствие, информированность, то есть обладание знаниями, востребованными в общественной, в том числе, производственной жизнедеятельности человека;
- мобильность – способность к перемене места и рода профессиональной деятельности, степень привязанности человека к месту и среде обитания, семье и трудовому коллективу; свобода доступа к системе образования; готовность и возможность изменения социального статуса индивидуума;
- комплекс факторов социально-экономического характера, связанных с системой ценностей и мотивацией человека к труду; его важнейшие личностные качества.

В современной экономике производственные отношения по поводу создания человеческого капитала крайне дифференцированы и диверсифицированы [6]. Субъекты и объект этого вида общественного производства исключительно комплексны и многоплановы. Инвестиции в человеческий капитал могут осуществляться как в рамках семьи, образовательных учреждений, так и в процессе трудовой деятельности человека путем совершенствования мастерства и участия в программах переподготовки и повышения квалификации [7]. Особенности воспроизводственного процесса накладывают отпечаток на структуру отношений собственности по поводу человеческого капитала. В частности, формальные или реальные права собственности на человеческий капитал могут принадлежать как его носителю, так и фирме, в которой работает данный человек. В последнем случае это достигается, например, за счет установления ограничений на возможность увольнения работника из фирмы по собственному желанию, которое будет означать для него наложение определенных санкций, стоить ему значительных денежных и других потерь.

Исходным предметом анализа в теории человеческого капитала был механизм индивидуальных инвестиций в повышение образовательного уровня и профессиональной квалификации. Основополагающим принципом исследований в данном направлении было то, что вложения в человеческий капитал сродни инвестициям в основные фонды [8]. Так же, как и инвестиции в другие активы, капиталовложения в квалифицированную рабочую силу приносят отсроченную во времени отдачу. Поэтому принцип принятия решений при осуществлении инвестиций в человеческий капитал оказывается во многом аналогичным – сопоставление дисконтированных затрат, в том числе, прямых издержек на получение образования, а также упущенных заработков; и результатов в виде возросших доходов по окончанию учебного заведения.

Когда речь идет о микроуровне, то обычно моделируется поведение индивида, максимизирующего свою полезность. Функция полезности является функцией от нескольких факторов, в том числе и величины накопленного человеческого капитала. В этом случае можно рассматривать эффективность инвестиций в человеческий капитал (отдача, период окупаемости).

Одним из важнейших направлений анализа индивидуальных инвестиций в активы человеческой личности стало моделирование оптимального распределения времени между работой, досугом и образованием, т.е. накоплением человеческого капитала. Пионерной здесь стала статья И. Бен-Пората [9], идеи которой получили развитие в работах Дж. Хэкмана [10], А. Блайндера, И. Вайсса [11], Дж. Минцера [12] и др. В данном параграфе мы проанализируем модель накопления индивидуального человеческого капитала, разработанную Дж. Хэкманом.

Накопление человеческого капитала $H(t)$ характеризуется скоростью его изменения

$$\dot{H}(t) = h(I(t)H(t), D(t)) - \delta H(t), (4.46)$$

как разностью между его созданием, описываемым нейтральной по Харроду производственной функцией $h\left(I(t)H(t), D(t)\right)$, и выбытием δH, где δ – норма обесценения (амортизации) человеческого капитала за единицу времени. Аргументами технологии создания человеческого капитала являются личный вклад индивидуума $I(t)$ – время жизнедеятельности, посвященное накоплению человеческих активов, с учетом накопленного человеческого капитала и эффективности образовательного процесса;

а также затраты материальных ресурсов $D(t)$, направляемых на инвестиции в человеческий капитал. Будем использовать начальное условие: $H(0) = H_0$.

Предпочтения индивидуума в возрасте t характеризуются мгновенной функцией полезности: $u\left(X(t), L(t)H(t)\right)$, где $X(t)$ – поток потребляемых в семье благ (предметов длительного пользования и продуктов питания), $L(t)$ – продолжительность досуга.

Предполагается, что на кредитном рынке действует ставка процента *r* и выполняется требование, чтобы конечная ценность индивидуальных активов была неотрицательной. Если рыночная ценность единицы услуг человеческого капитала равна *R*(*t*) в единицу времени, то максимальная величина заработка человека в данный момент времени равна: $W(t) = R(t)H(t)$, где максимальный объем времени, располагаемый потребителем в момент t, нормализован к единице.

Суммарные расходы равны денежным затратам на потребление товаров $X(t)$ по цене $P(t)$, прямым расходам на образование [13] $D(t)$ по ценам $P_d(t)$, стоимостью досуга $L(t)$ и времени, потраченного на инвестиции в человеческий капитал [14] $I(t)$. Затраты времени измеряются в долях единицы и оцениваются упущенными заработками $W(t)$. При отсутствии налоговой системы и переоценки капитальных вкладов суммарные сбережения в возрасте t (т.е. общее изменение чистого финансового богатства) можно записать в виде балансового соотношения, описывающего получение и использование доходов, а значит, накопление и расходование активов (богатства) человека:

$$A(t+\Delta t) = A(t) + rA(t)\Delta t + W(t)[1 - L(t) - I(t)]\Delta t - P_d(t)D(t)\Delta t - P(t)X(t)\Delta t,$$

где $rA(t)\Delta t$ представляет собой процентный доход, приносимый активами $A(t)$ за временной интервал Δt.

Переходя к пределу, т.е. рассчитывая изменение активов за бесконечно малый отрезок времени Δt

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} = rA(t) + W(t)[1 - L(t) - I(t)] - P_d(t)D(t) - P(t)X(t),$$

получаем дифференциальное уравнение, характеризующее динамику активов индивидуума:

$$\dot{A}(t) = rA(t) + R(t)H(t)[1 - L(t) - I(t)] - P_d(t)D(t) - P(t)X(t). \quad (4.47)$$

Начальное условие имеет вид: $A(0) = A_0$.

Будем предполагать, что потребитель максимизирует дисконтированную по норме межвременных предпочтений ρ интегральную, пожизненную полезность на временно́м горизонте T: $\int_0^T u(X(t), L(t)H(t))e^{-\rho t}dt + B\left(A(T)\right)$, при условиях (4.46)-(4.47). Здесь $B\left(A(T)\right)$ – полезность, получаемая от конечных, посмертных активов, т.е. от передаваемого потомкам наследства [15].

Каноническая постановка данной задачи предполагает минимизацию:

$$-\int_0^T u\left(X(t), L(t)H(t)\right)e^{-\rho t}dt - B\left(A(T)\right) \to \min :$$

$$\dot{H}(t) = h(I(t)H(t), D(t)) - \delta H(t),$$

$$\dot{A}(t) = rA(t) + R(t)H(t)[1 - L(t) - I(t)] - P_d(t)D(t) - P(t)X(t),$$

$$H(0) = H_0, A(0) = A_0.$$

Выпишем функцию Лагранжа:

$$\Lambda = \int_0^T L\left(t, A(t), H(t), L(t), I(t), D(t), X(t)\right)dt + l\left(H(0), A(0), A(T)\right).$$

Здесь лагранжиан и терминант соответственно имеют вид:

$$L(\bullet) = -\lambda_0 u(\bullet)e^{-\rho t} + p_1(t)\Big(\dot{A} - rA - R(t)H(t)[1 - L(t) - I(t)] + P_d(t)D(t) + P(t)X(t)\Big) + p_2(t)\Big(\dot{H}(t) - h(\bullet) + \delta H(t)\Big),$$

$$l(\bullet) = -\lambda_0 B(A(T)) + \lambda_1(H(0) - H_0) + \lambda_2\left(A(0) - A_0\right).$$

Уравнения Эйлера по A, L, I и H соответственно имеют вид [16]:

$$-\dot{p}_1 - rp_1 = 0,$$

$$-\lambda_0 \frac{\partial u}{\partial (LH)} He^{-\rho t} + RHp_1(t) = 0,$$

$$RHp_1(t) - p_2(t)\frac{\partial h}{\partial (IH)}H = 0,$$

$$-\dot{p}_2 - \lambda_0 \frac{\partial u}{\partial (LH)} L(t)e^{-\rho t} - p_1(t)R(1 - L(t) - I(t)) - p_2(t)\frac{\partial h}{\partial (IH)}I(t) + \delta p_2(t) = 0.$$

Условия трансверсальности по A и H соответственно выглядят так:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{A}}(0) = p_1(0) = \frac{\partial l}{\partial A(0)} = \lambda_2,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{A}}(T) = p_1(T) = \frac{-\partial l}{\partial A(T)} = \lambda_0 \frac{\partial B}{\partial A(T)};$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{H}}(0) = p_2(0) = \frac{\partial l}{\partial H(0)} = \lambda_1, \frac{\partial L}{\partial \dot{H}}(T) = p_2(T) = \frac{-\partial l}{\partial H(T)} = 0.$$

Если $\lambda_0 = 0$, то из уравнения Эйлера по L следует, что $p_1(t) = 0$. Это означает в силу уравнения Эйлера по I, что $p_2(t) = 0$, ведь $H \neq 0$ и $\frac{\partial h}{\partial (IH)} \neq 0$. Следовательно, по условиям трансверсальности $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Получаем нулевой вектор множителей

Лагранжа $(\lambda, p(t))$, что исключается условиями оптимальности. Таким образом, $\lambda_0 \neq 0$, и без ограничения общности можно положить $\lambda_0 = 1$.

Итак, систему уравнений Эйлера можно переписать в более простой форме:

$$\dot{p}_1 = -rp_1,$$
$$\frac{\partial u}{\partial(LH)} e^{-\rho t} = Rp_1(t),$$
$$p_1(t)R = p_2(t)\frac{\partial h}{\partial(IH)},$$
$$\dot{p}_2 = \frac{-\partial u}{\partial(LH)} L(t)e^{-\rho t} - p_1(t)R(1 - L(t) - I(t)) - p_2(t)\frac{\partial h}{\partial(IH)} I(t) + \delta p_2(t).$$

Объединяя уравнения Эйлера по L, I и H, получаем:

$$\dot{p}_2 = \delta p_2(t) - Rp_1(t). \quad (4.48)$$

Поскольку множители Лагранжа показывают, насколько меняется значение целевой функции при бесконечно малом ослаблении ограничения, постольку множитель Лагранжа $p_1(t)$ представляет собой предельную полезность доходов в момент времени t, или ценность неодушевленных активов. В силу тех же соображений множитель Лагранжа $p_2(t)$ будет представлять собой ценность человеческого капитала.

Обозначим через $p_k(t) \equiv \frac{p_2(t)}{p_1(t)}$ относительную ценность человеческого капитала. Тогда $p_2(t) = p_k(t) \bullet p_1(t)$, а значит,

$$\dot{p}_2(t) = \dot{p}_k(t)p_1(t) + p_k(t)\dot{p}_1(t).$$

Подставляя в данное соотношение дифференциальное уравнение (4.48), а также уравнение Эйлера по A, можно увидеть, что динамика относительной ценности человеческого капитала описывается соотношением (4.43), если использовать в ней обозначение для предельной доходности капитала $R(t) \equiv p(t)MP_K(t)$.

Следовательно, выражение относительной ценности человеческого капитала будет иметь вид (4.45).

---

1. Schultz T.W. Investment in human capital: the role of education and of research. – New York; London: Free press; Macmillan, 1971. ↩
2. Lucas R.E.Jr. On the mechanics of economic development // Journal of monetary economics. 1988. Vol.22. №3. ↩
3. Romer P.M. Increasing returns and long-run growth // Journal of political economy. 1986. Vol.94. №5. ↩
4. Беккер Г.С. Человеческое поведение: экономический подход (избранные труды по экономической теории). – М.: ГУ ВШЭ, 2003; Becker G.S. Human capital: a theoretical and empirical analysis, with special reference to education. 3rd ed. – Chicago, London: Univ. of Chicago press, 1993. ↩
5. Becker G.S. Investment in human capital: a theoretical analysis // Journal of political economy. 1962. Vol.70. №5. Part 2; Mushkin S.J. Health as an investment // Journal of political economy. 1962. Vol.70. №5. Part 2; Sjaastad L.A. The costs and returns of human migration // Journal of political economy. 1962. Vol.70. №5. Part 2; Weisbrod B.A. Education and investment in human capital // Journal of political economy. 1962. Vol.70. № 5. Part 2. ↩
6. Экономика знаний: коллективная монография / Под ред. Колесова В.П. – М.: ИНФРА-М, 2008. ↩
7. Becker G.S. Human capital: a theoretical and empirical analysis, with special reference to education. 3rd ed. – Chicago, London: Univ. of Chicago press, 1993. ↩
8. Можно отметить, что еще А. Смит рассматривал созидательные возможности человека в качестве части основного капитала общества: “Приобретение таких способностей, считая также содержание их обладателя в течение его воспитания, обучения или ученичества, всегда требует дополнительных издержек, которые представляют собой основной капитал, как бы реализующийся в его личности...” [Смит А. Исследование о природе и причинах богатства народов. М.: Соцэкгиз, 1962, с.208]. Исторический экскурс в теорию человеческого капитала см. в работе [Kiker B.F. The historical roots of the concept of human capital // Journal of political economy. 1966. Vol.74. №5]. ↩
9. Ben-Porath Y. The production of human capital and the life cycle of earnings // Journal of political economy. 1967. Vol.75. №4. Part 1. ↩
10. Heckman J.J. A Life-Cycle Model of Earnings, Learning, and Consumption // Journal of political economy. 1976. Vol.84. №4. Part 2. ↩
11. Blinder A.S., Wiess Y. Human capital and labor supply: a synthesis // Journal of political economy. 1976. Vol.84. №3. ↩
12. Mincer J. The production of human capital and the life cycle of earnings: variations on a theme // Journal of labor economics. 1997. Vol.15. №1. Part 2. ↩
13. Возникающие, том числе, и при обучении на производстве, когда работодатель выплачивает пониженную заработную плату работнику, повышающему квалификацию. ↩
14. Включающего время обучения на рабочем месте. ↩
15. Решая данную задачу, оставим бюджетное ограничение (3.47) в виде уравнения дифференциальной связи, чтобы проиллюстрировать альтернативную технику анализа, по сравнению с той, которая была использована в параграфе 3.2. ↩
16. Уравнения Эйлера по *X* и *D* в дальнейшем анализе не потребуются. ↩

4.5. Накопление человеческого капитала компании

В развитие анализа, проведенного в параграфе 4.3, в данном параграфе речь пойдет о модели оптимальной хозяйственной деятельности предприятия, для которого важнейшим фактором производства, наряду с физическим, выступает человеческий капитал.

Функционируя в качестве составной части коллективного капитала предприятия, человек неизбежно включается в процессы адаптации к остальным сотрудникам организации, переподготовки и повышения квалификации, которые требуют определенных вложений времени, сил и средств со стороны не только самого индивидуума, но и всего производственного коллектива в целом. Осуществление подобных затрат организацией одновременно фактически означает приобретение ею определенных правомочий на прирост человеческого капитала, возникающий в результате этих процессов. В реальной хозяйственной практике это проявляется в том, что руководство фирмы, как правило, располагает правами и возможностями накладывать определенные ограничения как на мобильность человеческого капитала – например, заключая с работником контракт на определенный, часто довольно продолжительный срок времени, оговаривая определенные условия пенсионного обеспечения [1] или ограничивая либо, наоборот, стимулируя его служебное перемещение внутри организации, а также карьерный рост – так и на вознаграждение за трудовой вклад по отношению к альтернативным местам занятости.

Рассматривая создание человеческого капитала на микроэкономическом уровне [2], можно выделить в рамках этого капитала компоненты, либо относящиеся к фирме, либо принадлежащие самому работнику. Первая часть будет в большей степени влиять на поведение в области принудительных увольнений, а вторая – на поведение в области увольнений по собственному желанию. Бóльшая экономическая ценность работника на том предприятии, на котором он работает, по сравнению с альтернативными источниками приложения его рабочей силы порождается индивидуальными навыками и знаниями, которые могут быть использованы только на данной фирме. “Специализированные тренинг и обучение на рабочем месте при производственных операциях – наглядные иллюстрации ... практики” инвестиций в человеческий капитал, осуществляемых фирмой [3], хотя здесь довольно сложно отделить их от усилий самого работника в повышении квалификации на данном предприятии, которые относятся к индивидуальному человеческому капиталу. Своеобразным водоразделом между человеческим капиталом, принадлежащим фирме и индивидууму, может служить рыночная ставка заработной платы [4]. Доходы в пределах ее уровня относятся к персональному человеческому капиталу, в то время как их превышение над средним по отрасли уровнем может служить отражением капиталовложений, осуществленных на данной фирме в конкретного работника.

Разделение инвестиций между работником и фирмой позволяет диверсифицировать риск вложений в человеческий капитал. Инвестирование в человеческий капитал, осуществляемые либо фирмой в форме расходов на профессиональную подготовку и переподготовку персонала, а также в целом на кадровую политику, либо работником в виде как усилий по адаптации к трудовому коллективу и приобретению соответствующих профессиональных навыков на рабочем месте, так и материальных расходов на повышение квалификации, понижают трудовую мобильность рабочей силы [5]. Это связано с тем, что возрастают экономические издержки расторжения работником трудового договора, а также снижается вероятность принудительного увольнения его фирмой, так как ее руководству очень трудно и дорого будет найти ему замену.

Предприятие, очевидно, рассчитывает на получение отдачи от сделанных инвестиций, а увольнение означало бы декапитализацию фирмы. Это является одной из причин того, что администрации предприятий стараются избежать сокращений персонала, адекватных конъюнктурному спаду, поскольку, ожидая в ближайшем или отдаленном будущем оживления спроса, они стремятся избежать издержек, связанных с поиском квалифицированных кадров. Увольнение одного квалифицированного работника и замена его новым оцениваются западными специалистами расходами в размере от 7 до 20% его годовой заработной платы [6]. Аналогично, вероятность того, что квалифицированный работник уволится по собственному желанию, будет меньше в том случае, если он получает заработную плату выше той, которую бы платили за его мастерство в других местах, то есть если он получает отдачу от специфических инвестиций в виде более высоких доходов.

Теперь перейдем к анализу модели оптимального поведения предприятия на рынке с учетом того, что в процессе производства используется человеческий капитал.

Человеческий капитал компании, представляет собой амортизируемый актив длительного пользования, процесс накопления которого аналогичен процессу накопления обычного капитала. Этот актив включает в себя человеческий капитал всех сотрудников фирмы (умения, знания, навыки), а так же их способность кооперироваться при работе над совместными проектами, получая тем самым больший эффект, и плюс все остальные знания и новые технологии (возможно оставшиеся от старых сотрудников), наполняющие фирму.

В этом случае необходимо отметить, что человеческий капитал компании трактуется как особый вид знаний, пригодных для производственного процесса на данном предприятии, носителем которых выступает как и персонал компании, так и сама компания, во-первых, усвоившая знания её предыдущих сотрудников (в виде, например, патентов и лицензий на производство), во-вторых, создавшая условия нынешним сотрудникам по доступу ко всем накопленным ранее знаниям и для коммуникаций между ними внутри неё. Согласно такой трактовке, человеческий капитал уже аналогичен не труду, а именно капиталу, а потому расходы на человеческий капитал имеют приростной характер.

Особенность человеческого капитала по отношению к неодушевленным, вещественным факторам производства заключается в его способности к самонакоплению. Человеческие активы в отличие от овеществленного капитала на достаточно продолжительном периоде своего функционирования на производстве продолжают накапливаться за счет повышения знаний и навыков работника, тогда как основные фонды практически сразу после своего выхода на проектные мощности начинают изнашиваться. Впоследствии, по мере старения носителя человеческого потенциала [7], ценность отдельных его активов может снижаться. Однако при этом общественная роль человеческих активов в системе производственных отношений, как правило, сохраняется и даже может продолжать возрастать. Исследование возрастного строения, временнóй неоднородности хозяйственных активов не только указывает на “негативные” тенденции старения и износа основных фондов, но и обнаруживает “позитивные” характеристики процессов социально-экономического “взросления” человеческого капитала, обретения им “зрелости” [8] и приращения его общественной значимости.

Анализируя воспроизводство человеческого капитала, можно отметить, что если в процессе специализированной подготовки сложная рабочая сила приобретает необходимый уровень профессиональной квалификации, то система общего образования обладает свойством создания “метаквалификации”, “метанавыков” обучения, которые позволяют приобретать новые, недостающие умения [9]. При этом системы образования порождает синергетические эффекты, когда усвоенные знания облегчают получение дополнительной информации в будущем [10].

Итак, накопленный человеческий капитал облегчает и стимулирует дальнейшее накопление человеческого капитала. В аналитическом виде данную идею можно представить в виде $\dot{H} = h\left(H(t)\right)$, где $h\left(H(t)\right)$ – производственная функция человеческого капитала, описывающая механизм его накопления. Заметим, что накопление человеческого капитала зависит от уже накопленного человеческого капитала $H(t)$.

Множество примеров влияния уже накопленного человеческого капитала на дальнейшее его накопление можно найти в деятельности различных университетов, научных институтов, исследовательских центров и т.п.

Стоит добавить, что человеческий капитал самовоспроизводится на базе накопленных запасов материально-вещественных факторов производства, т.е. физического капитала. Капитальные вложения, повышающие сложность оборудования, ставят перед работниками новые задачи, решение которых способствует накоплению новых знаний, приобретению дополнительных навыков, т.е. увеличению активов человеческого капитала.

Таким образом, аналитически идею самонакопления можно представить в виде функции $h\left(H(t), K(t)\right)$, аргументами которой является накопленный человеческий $H(t)$ и физический $K(t)$ капитал.

С учетом вложений фирмы в человеческие активы, рассматриваемых как разновидность затрат на капитальные факторы производства, функцию прибыли фирмы можно записать в следующем виде:

$$PR(t) = p(t)f(H(t), K(t)) - p_H(t)I_H(t) - p_K(t)I_K(t).$$

Процесс накопления физического капитала здесь так же, как и ранее, описывается соотношением (4.41) [11].

Основную роль в накопление человеческого капитала компании, в отличии от индивидуального человеческого капитала, анализу которого был посвящен предыдущий параграф, играет инвестиционная составляющая: $\dot{H} = I_H(t) - \delta_H H(t)$, где δ_H – выбытие человеческого капитала (устаревание знаний и технологий, сокращение численности трудовых коллективов из-за увольнений, выхода на пенсию сотрудников и т.п.). В нашей постановке модели будем трактовать процесс накопления человеческого капитала шире, дополнив инвестиционный блок неинвестиционным, т.е. учитывая процесс самонакопления:

$$\dot{H} = I_H(t) - \delta_H H(t) + h\left(H(t), K(t)\right). \quad (4.49)$$

Запишем оптимизационную задачу фирмы с учетом накопления физического (4.41) и человеческого (4.49) капитала [12]:

$$\int\limits_0^T \left(p(t)f(H(t), K(t)) - p_H(t)\Big(\dot{H} + \delta_H H(t) - h\left(H(t), K(t)\right)\Big) - p_K(t)\left(\dot{K} + \delta_K K(t)\right)\right)e^{-\int\limits_0^t i(\tau)d\tau}dt \to \max.$$

Уравнение Эйлера для лагранжиана

$$L = \left(p(t)f(H(t), K(t)) - p_H(t)\Big(\dot{H} + \delta_H H(t) - h\left(H(t), K(t)\right)\Big) - p_K(t)\left(\dot{K} + \delta_K K(t)\right)\right)e^{-\int\limits_0^t i(\tau)d\tau}, \quad (4.50)$$

по человеческому капиталу будет выглядеть так:

$$\frac{d}{dt}\left(p_H e^{-\int\limits_0^t i(\tau)d\tau}\right) + \left(p(t)\frac{\partial f}{\partial H(t)} - p_H(t)\delta_H + p_H(t)\frac{\partial h}{\partial H(t)}\right)e^{-\int\limits_0^t i(\tau)d\tau} = 0,$$

т.е.

$$\dot{p}_H e^{-\int\limits_0^t i(\tau)d\tau} - i(t)p_H e^{-\int\limits_0^t i(\tau)d\tau} + (p(t)MP_H(t) - p_H(t)\delta_H + p_H(t)MH_H(t))e^{-\int\limits_0^t i(\tau)d\tau} = 0,$$

где $MH_H = \frac{\partial h}{\partial H}$ – это предельная отдача от человеческого капитала в процессе его самонакопления.

Уравнение Эйлера по физическому капиталу будет иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\left(p_K e^{-\int\limits_0^t i(\tau)d\tau}\right) + \left(p(t)\frac{\partial f}{\partial K(t)} + p_H(t)\frac{\partial h}{\partial K(t)} - p_K\delta_K\right)e^{-\int\limits_0^t i(\tau)d\tau} = 0,$$

т.е.

$$\dot{p}_K e^{-\int\limits_0^t i(\tau)d\tau} - i(t)p_K e^{-\int\limits_0^t i(\tau)d\tau} + (p(t)MP_K(t) + p_H(t)MH_K(t) - p_K\delta_K)e^{-\int\limits_0^t i(\tau)d\tau} = 0,$$

где $MH_K = \frac{\partial h}{\partial K}$ – это предельная отдача от материально-вещественного капитала в процессе самонакопления человеческого капитала.

Итак, уравнения Эйлера по человеческому и физическому капиталу представляют собой систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} p(t)MP_K(t) + \dot{p}_K(t) = p_K(t)(i + \delta_K) - p_H(t)MH_K(t), & (4.51) \\ p(t)MP_H(t) + \dot{p}_H(t) = p_H(t)(i + \delta_H) - p_H(t)MH_H(t). & (4.52) \end{cases}$$

Достаточным условием максимума прибыли здесь является отрицательная определенность матрицы вторых частных производных лагранжиана (4.50):

$$\begin{bmatrix} p(t)\frac{\partial^2 f}{\partial K^2}+p_H(t)\frac{\partial^2 h}{\partial K^2} & p(t)\frac{\partial^2 f}{\partial K\partial H}+p_h(t)\frac{\partial^2 h}{\partial K\partial H} \\ p(t)\frac{\partial^2 f}{\partial H\partial K}+p_h(t)\frac{\partial^2 h}{\partial H\partial K} & p(t)\frac{\partial^2 f}{\partial H^2}+p_h(t)\frac{\partial^2 h}{\partial H^2} \end{bmatrix}.$$

В отличие от задачи максимизации накопленной дисконтированной прибыли, проанализированной в параграфе 4.4, функция выручки здесь наполняется расширенным содержанием, включая в себя, наряду с доходами от реализации продукции (оказания услуг) также приращение стоимости человеческого капитала компании. Строго вогнутой, а значит, (при предпосылке о том, что $f(0)=h(0)=0$) обладающей характеристикой убывающей отдачи от масштаба воспроизводственных процессов теперь уже должна быть данная расширенная функция выручки фирмы [13]. Хотя это предполагает убывание предельной доходности факторов производства в расширенном понимании, т.е. включающей в себя как стоимость их предельного продукта, так и их предельную результативность в процессах самонакопления человеческого капитала, появляется возможность анализировать воспроизводство человеческих активов, характеризуемое возрастающей предельной отдачей от каждого из факторов в отдельности.

Это позволяет учесть, в том числе, и многочисленные проявления синергии, присутствующей в воспроизводстве знаний и проистекающей из свойств информации в ее различных проявлениях. В частности, передавая информацию друг другу, контрагенты не только не уменьшают собственный ее запас, но, как правило, сторицей оправдывают свои услуги за счет положительных обратных информационных связей [14].

Таким образом, допуская возрастание предельной доходности факторов в процессах воспроизводства нематериальных активов компании, анализируемая модель представляет собой развитие традиционной неоклассической парадигмы.

Если цены физических и человеческих капитальных активов изменяются темпом равным уровню инфляции $\left(\frac{\dot{p}_K}{p_K}=\frac{\dot{p}_H}{p_H}=\pi\right)$, то в силу уравнения Фишера $(r=i-\pi)$ система необходимых условий максимума прибыли (4.51)-(4.52) приобретает вид:

$$\begin{cases} MP_K(t)+\frac{p_H(t)}{p(t)}MH_K(t)=\frac{p_K(t)}{p(t)}(r+\delta_K), \\ MP_H(t)=\frac{p_H(t)}{p(t)}(r+\delta_H-MH_H(t)). \end{cases}$$

Перепишем данную систему условий оптимальных размеров физического и человеческого капитала на предприятии в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{p\bullet MP_K+p_H MH_K-p_K\delta_K}{p_K r}=1, \\ \frac{p\bullet MP_H+p_H MH_H-p_H\delta_H}{p_H r}=1. \end{cases}$$

Левые части данных равенств можно рассматривать в качестве индикаторов инвестиционной и инновационной привлекательности предприятия. В частности модифицированный коэффициент Тобина применительно к неодушевленным материальным активам фирмы с учетом процессов накопления человеческого капитала будет выглядеть так:

$$q_T^K=\frac{p\bullet MP_K+p_H MH_K-p_K\delta_K}{p_K r}.$$

Предельная прибыльность предприятия, стоящая в числителе коэффициента Тобина, по сравнению со стандартной оптимизационной схемой, когда принимаются во внимание только материальные факторы производства, здесь корректируется в сторону увеличения на предельную доходность использования ресурсов в процессе самонакопления человеческого капитала $p_H MH_K$. Соответственно возрастает оценка капитализированной [15] предельной прибыльности компании (до выплаты процентов), т.е. капитализированной доходности дополнительных денежных средств, инвестированных в предприятие $\frac{p\bullet MP_K+p_H MH_K-p_K\delta_K}{r}$. Здесь становится очевидным, что рыночная стоимость компании [16] определяется не только и даже не столько ожидаемым потоком его прямых денежных доходов от реализации продукции и оказания услуг, сколько его инновационным потенциалом, воплощенным в нематериальных активах, преобладающая часть которых сконцентрирована в его человеческом капитале. В частности, отражением этого факта становится все возрастающая доля среди активов современных динамично развивающихся компаний так называемого “гудвила” т.е. деловой репутации, “имиджа” фирмы в глазах инвесторов, партнеров, клиентов [17].

Наряду с рассмотренным коэффициентом Тобина q_T^K, характеризующим инвестиционную привлекательность фирмы с точки зрения ее рыночной капитализации, в анализируемой модели возникает его аналог применительно к вложениям в нематериальные, личностные активы компании:

$$q_T^H=\frac{p\bullet MP_H+p_H MH_H-p_H\delta_H}{p_H r}.$$

По аналогии с q_T^K, коэффициент q_T^H можно трактовать как отношение капитализированной предельной прибыльности человеческого капитала (до выплаты процентов) и его цены. Если размеры человеческого капитала отклоняются от оптимальной величины, то потенциальные капитализированные чистые доходы от дополнительной единицы человеческих активов будут расходиться с их текущей стоимостью. Для оптимального размера человеческого капитала данные оценки будут совпадать. Доказательством этому будет служить выражение для цены человеческого капитала (4.53), которое будет выведено ниже.

Если фирма функционирует оптимально $(K=K, H=H)$, то коэффициенты Тобина по натурально-вещественному и человеческому капиталу должны быть равными единице одновременно: $q_T^K=q_T^H=1$. Инвестирование в натурально-вещественные и человеческие активы представляет собой неразрывно связанные между собой процессы.

Предположим, например, что фактические размеры физического $(K<K)$ и человеческого $(H<H)$ капитала меньше оптимальных с точки зрения данного бизнеса: $q_T^K>1$, $q_T^H>1$. Увеличение затрат физического капитала, в силу убывания его предельного продукта, будет уменьшать предельную прибыльность (до выплаты процентов) $(p\bullet MP_K+p_K MH_K-p_K\delta_K)$, приближая значение соответствующего коэффициента Тобина q_T^K к единице. Но одновременно, если придерживаться предпосылки о комплементарности факторов производства в том смысле, что предельный продукт каждого из них является возрастающей функцией от объема другого (vi), то увеличение затрат физического капитала будет повышать значение

предельной прибыльности человеческого капитала $(p \bullet MP_H + p_H MH_H - p_H \delta_H)$, еще более отдаляя значение соответствующего коэффициента Тобина q_T^H от единицы. Это значит, что дополнительные вложения в человеческие активы окажутся теперь более значительными, в сравнении с ситуацией, когда q_T^H рассматривался бы сам по себе, в отрыве от q_T^K. То же самое относится и к вложениям в физический капитал при увеличении объемов человеческих активов.

Выводы остаются в силе и в случае, когда, например, фирма недоинвестирует в человеческие активы $\left(H < H, q_T^H > 1\right)$, тогда как текущие вложения в физический капитал избыточны $(K > K, q_T^K < 1)$. Увеличение размеров человеческого капитала еще более снизит потребность в натурально-вещественных активах, запуская механизмы структурной реорганизации производства. Таким образом, кумулятивные эффекты взаимодействия между инвестициями в разные виды активов стимулируют более интенсивное развитие данной компании.

Вложения фирмы в человеческий и физический капитал ($I_H(t) = \dot{H} + \delta_H H(t) - h(H(t), K(t))$ и $I_K(t) = \dot{K} + \delta_K K(t)$ соответственно) – это инвестиционный спрос фирмы, который представляет собой функцию цены соответствующего фактора производства. Планирование инвестиций в капитальные активы и поддержание объема инвестиций на стабильном уровне зависит, таким образом, от стабильности цен на сами капитальных активов. На основе данной системы мы можем найти динамику цен на эти активы, которая определяет и динамику инвестиций в эти активы, и, в конечном счете, динамику их запасов.

Решение дифференциального уравнения (4.52) позволяет получить выражение стоимости человеческого капитала.

Решим вначале соответствующее однородное уравнение:

$$\frac{dp_H(t)}{dt} - p_H(t)(i + \delta_H - MH_H(t)) = 0.$$

Разделяя переменные $\frac{dp_H}{p_H} = d\ln|p_H| = (i + \delta_H - MH_H(t))dt$, интегрируя $\int d\ln|p_H| = \int (i(t) + \delta_H - MH_H(t))dt + \ln c$ и потенцируя полученное равенство, получаем общее решение данного однородного уравнения: $p_H(t) = ce^{\int_0^t (i(\tau)+\delta_H - MH_H(\tau))d\tau}$.

Варьируя постоянную

$$p_H(t) = c(t)e^{\int_0^t (i(\tau)+\delta_H - MH_H(\tau))d\tau}$$

и используя это равенство в исходном неоднородном уравнении

$$\frac{dc(t)}{dt}e^{\int_0^t (i(\tau)+\delta_H - MH_H(\tau))d\tau} + (i(t) + \delta_H - MH_H(t))c(t)e^{\int_0^t (i(\tau)+\delta_H - MH_H(\tau))d\tau} - c(t)e^{\int_0^t (i(\tau)+\delta_H - MH_H(\tau))d\tau}(i(t) + \delta_H - MH_H(t)) = -p$$

получаем дифференциальное уравнение относительно $c(t)$:

$$dc(t) = -R_H(t)e^{-\int_0^t (i(\tau)+\delta_H - MH_H(\tau))d\tau}dt,$$

где $R_H(t) = p(t)MP_H(t)$ – стоимость предельного продукта человеческого капитала. Интегрируя и подставляя искомый множитель

$$c(t) = -\int_0^t R_H(\tau)e^{-\int_0^\tau (i(\xi)+\delta_H - MH_H(\xi))d\xi}d\tau + c_0$$

в общее решение однородного уравнения

$$p_H(t) = c_0 e^{\int_0^t (i(\tau)+\delta_H - MH_H(\tau))d\tau} - e^{\int_0^t (i(\tau)+\delta_H - MH_H(\tau))d\tau}\int_0^t R_H(\tau)e^{-\int_0^\tau (i(\xi)+\delta_H - MH_H(\xi))d\xi}d\tau,$$

и принимая во внимание начальное условие $p_H(0) = c_0$, получаем выражение стоимости человеческого капитала как суммы его дисконтированной цены в момент t и дисконтированного потока чистых доходов с учетом положительной нормы амортизации (износа), а также процессов самонакопления данного актива:

$$p_H(0) = p_H(t)e^{\int_0^t (i(\tau)+\delta_H - MH_H(\tau))d\tau} + \int_0^t R_H(\tau)e^{-\int_0^\tau (i(\xi)+\delta_H - MH_H(\xi))d\xi}d\tau. \quad (4.53)$$

Из сравнения полученного выражения и (4.45) видно, что (4.53) корректирует в сторону снижения норму дисконтирования, по которой осуществляется сопоставление компонент потока доходов во времени. Действительно, обесценению некоторых компонент человеческого капитала с течением времени, отражением чего служит норма амортизации δ_H, противодействуют перманентные процессы его самонакопления, повышающие будущую ценность активов трудового коллектива предприятия. Итак, процессы воспроизводства человеческих активов снижают текущую стоимость владения ими для данного предприятия.

По сравнению с классическим случаем учет процесса самонакопления позволяет также выявить ту долю рыночной стоимости компании, которая приходится на её человеческий капитал (неосязаемые активы): $p_H(t)MH_K(t)$. Для обоснования этого утверждения решим дифференциальное уравнение (4.51), описывающее динамику цены физического капитала. Оно представляет собой усложнение уравнения (4.43), в котором стоимость предельного продукта физического капитала, присутствующая в левой части, увеличивается на его предельную доходность в процессе самонакопления человеческих активов $p_H(t)MH_K(t)$.

Тем не менее, соответствующее однородное уравнение, а значит, и его общее решение остаются неизменными.

В выражении стоимости физического капитала (4.45) его чистый доход теперь включает уже не только предельную доходность с точки зрения выпускаемой продукции, но и в процессе самонакопления человеческих активов:

$$R(t) = p(t)MP_K(t) + p_H(t)MH_K(t), m.e.$$

$$p_K(0) = p_K(t)e^{-\int_0^t (i(\tau)+\delta_K)d\tau} + \int_0^t R(\tau)e^{-\int_0^\tau (i(\xi)+\delta_K)d\xi}d\tau = p_K(t)e^{-\int_0^t (i(\tau)+\delta_K)d\tau} + \int_0^t (p(\tau)MP_K(\tau) + p_H(\tau)MH_K(\tau))e^{-\int_0^\tau (i(\xi)+\delta_K)d\xi}d\tau$$

Итак, процесс самонакопления человеческого капитала придает дополнительную ценность материально-вещественным активам, внося свой вклад в увеличение капитализации фирмы.

---

1. Беккер Г.С. Человеческое поведение: экономический подход. – М.: ГУ ВШЭ, 2003. ↩
2. Беккер Г.С. Человеческое поведение: экономический подход. – М.: ГУ ВШЭ, 2003; Thurow L. Investment in human capital. Belmont: Wadsworth, 1970. ↩
3. Уильямсон О.И. Экономические институты капитализма: фирмы, рынки, “отношенческая” контрактация. СПб.: Лениздат, CEU Press, 1996. С.119. ↩
4. Parsons D.O. Specific human capital: an application to quit rates and layoff rates // Journal of political economy. 1972. Vol.80. №6. ↩
5. Parsons D.O. Specific human capital: an application to quit rates and layoff rates // Journal of political economy. 1972. Vol.80. №6. ↩
6. Никифорова А.А. Рынок труда: занятость и безработица. – М.: Международные отношения, 1991. ↩
7. Характерным проявлением этого может служить относительная динамика квалификации и возраста сложной рабочей силы. Статистическое обследование ленинградских рабочих-металлистов, проведенное С.Г. Струмилиным еще в 1924 г., показало наличие сначала устойчивого роста квалификации с возрастом работника, к 30-34 годам – определенное “насыщение выучкой”, а затем ее снижение [Струмилин С.Г. Избранные произведения. М.: Наука, 1964, т.3]. Аналогичную картину, правда, с более поздним максимумом около 45 лет дают исследования Л.И. Дублина и А.Дж. Лотки, проведенные на основе американских данных [Dublin L.I., Lotka A.J. The money value of a man. – New York: Ronald press, 1930]. О подобной – состоящей из двух противоположных по монотонности участков с характерным максимумом – зависимости между возрастом и производительностью человеческого капитала говорит и Г.С. Беккер [Becker G.S. Human capital: a theoretical and empirical analysis, with special reference to education. 3rd ed. – Chicago, London: Univ. of Chicago press, 1993]. ↩
8. Баркалов Н.Б. Производственные функции в моделях экономического роста. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981; Arrow K.J. The economic implications of learning by doing // Review of economic studies, 1962. Vol.29. №3; Mathematical methods in the social sciences, 1959: proceedings of the First Stanford Symposium / Ed. by Arrow K.J., Karlin S., Suppes P. – Palo Alto: Stanford univ. press, 1960. ↩
9. Новая технократическая волна на Западе / Под ред. Гуревича П.С. – М.: Прогресс, 1986; Arthur W.B. Increasing returns and path dependence in the economy. – Ann Arbor: Univ. of Michigan press, 1994 ↩
10. В связи с этим можно всецело согласиться с тезисом, что “полученное образование делает человека не только более эффективным работником, но и более эффективным учеником” [Антикризисное управление / Под ред. Короткова Э.М. – М.: ИНФРА-М, 2010]. ↩
11. Для удобства, по аналогии с инвестициями в человеческий капитал (I_H), валовые инвестиции в материально-вещественный капитал, для которых в праграфе 3.4 использовалось обозначение I_g, в данном параграфе будем обозначать через I_K. ↩
12. Для того, чтобы провести различие между нормой амортизации человеческого (δ_H) и физического капитала, для которой в праграфе 3.4 использовалось обозначение δ , будем обозначать в данном параграфе норму амортизации материально-вещественного капитала через δ_K. ↩
13. См. сноску 42. ↩
14. Месарович М., Такахара И. Общая теория систем: математические основы. – М.: Мир, 1978; Новая технократическая волна на Западе / Под ред. Гуревича П.С. – М.: Прогресс, 1986; Arthur W.B. Increasing returns and path dependence in the economy. – Ann Arbor: Univ. of Michigan press, 1994. ↩
15. По формуле пожизненного аннуитета (viii). ↩
16. Аналогично базовой задаче максимизации накопленной дисконтированной прибыли, проанализированной в параграфе 3.4, если предположить, что предельная прибыльность (до выплаты процентов) $\frac{\partial(PR+rK)}{\partial K} = p \bullet MP_K + p_H MH_K - p_K\delta_K$ совпадает с аналогичной средней величиной $(PR+rK)/K$, то, считая дисконтированную сумму потока доходов предприятия его капитализированным дивидендом, модифицированный коэффициент Тобина можно трактовать как отношение рыночной стоимости компании ($P_ф$) к восстановительной стоимости капитала предприятия $(p_K K)$: $q_T = \frac{P_ф}{p_K K}$. Одновременно данный показатель может рассматриваться как курс акций компании на фондовом рынке, т.е. рыночная цена акции ($P_{рын}$), отнесенная к ее номиналу ($P_{ном}$): $q_T = \frac{P_{рын}}{P_{ном}}$. ↩
17. Новая постиндустриальная волна на Западе: антология / Под ред. Иноземцева В.Л. – М.: Academia, 1999. ↩

4.6. Оптимальное управление максимизацией прибыли

Пусть $q(t)$ – объем выпуска продукции предприятием в момент времени t. Предприятие работает в условиях совершенной конкуренции, причем динамика цены на продукт задана функцией $p_0(t)$. Предположим, что в каждый, данный момент времени инвестируется определенная доля $u(t)$ выручки предприятия $TR(t) = p(t) \bullet q(t)$: $I(t) = u(t) \bullet TR(t)$. Допустим, что в соответствии с механизмом акселератора выручка растет пропорционально инвестициям $I(t)$ с постоянным коэффициентом акселерации α. Итак, $\frac{dTR(t)}{dt} = \alpha I(t) = \alpha u(t) TR(t)$. Пусть эксплуатационные (операционные) расходы фирмы $C(t)$ так же пропорциональны выручке, и стационарный во времени коэффициент пропорциональности равен β: $C(t) = \beta TR(t)$. Изначально (при $t = 0$) в распоряжении предприятия находятся денежные средства в размере $TR(0) = TR_0$.

Прибыль в момент времени t составит: $PR(t) = TR(t) - I(t) - C(t) = TR(t)(1 - \beta - u(t))$. Задача заключается в том, чтобы выбрать такую стратегию инвестиций, т.е. так распределить их коэффициент $u(t)$ во времени, чтобы к моменту T совокупная прибыль, полученная предприятием, была максимальной[1]:

$$\int_0^T TR(t)\,(1 - \beta - u(t))e^{-}\,dt \to \max :$$

$$\dot{TR} = \alpha u TR; 0 \le u \le 1 - \beta;\ TR(0) = TR_0;$$

или, что эквивалентно,

$$\int_0^T TR(t)\,(u(t) - 1 + \beta)e^{-}\,dt \to \min :$$

$$\dot{TR} = \alpha u TR; 0 \le u \le 1 - \beta;\ TR(0) = TR_0.$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L = \int_0^T (\lambda_0 TR(t)\,(u(t) - 1 + \beta)e^{-} + p(t)(\dot{TR}(t) - \alpha u(t) TR(t)))\,dt + \lambda_1\,(TR(0) - TR_0).$$

По необходимым условиям оптимальности будет существовать ненулевой вектор множителей Лагранжа $(\lambda_0, \lambda_1, p(\bullet))$, для которого выполнены условия:

а) стационарности по TR – уравнение Эйлера для лагранжиана

$$L = \lambda_0 TR(t)(u(t) - 1 + \beta)e^{-rt} + p(t)(\dot{TR}(t) - \alpha u(t) TR(t)):$$

$$-\dot{p} + \lambda_0\,(u(t) - 1 + \beta)e^{-} - \alpha u(t) p(t) = 0;$$

б) оптимальности по u:

$$\min_{0 \le u \le 1-\beta}(\lambda_0 u(t)\,TR(t)e^{-} - \alpha u(t) p(t)\,TR(t)) = \min_{0 \le u \le 1-\beta} u(t)\,TR(t)\,(\lambda_0 e^{-} - \alpha p(t));$$

в) трансверсальности по TR для терминанта $l = \lambda_1\,(TR(0) - TR_0)$:

$$\frac{\partial L}{\partial TR}(0) = p(0) = \frac{\partial l}{\partial TR(0)} = \lambda_1,\ \frac{\partial L}{\partial TR}(T) = p(T) = \frac{-\partial l}{\partial TR(T)} = 0;$$

г) неотрицательности множителя Лагранжа: $\lambda_0 \ge 0$.

Покажем, что множитель Лагранжа λ_0 не может быть нулевым, рассуждая от противного. Предположим, что $\lambda_0 = 0$. Тогда в соответствии с уравнением Эйлера $\dot{\psi} = -\alpha u(t) p(t)$. Рассмотрим возможные значения $p(t)$. При $p(t) < 0$ из условия оптимальности по u следует, что $u = 0$, а значит, $\dot{p} = 0$, т.е. $p = const = p(T) = 0$, что противоречит предыдущему неравенству. При $p(t) > 0$ оптимальность по u дает $u = 1 - \beta$, а значит, уравнение Эйлера принимает вид $\dot{p} = \alpha(\beta - 1)p$. Следовательно, $p(t) = c_1 e^{\alpha(\beta-1)t} = p(0)e^{\alpha(\beta-1)t} = \lambda_1 e^{\alpha(\beta-1)t}$, в частности, $p(T) = \lambda_1 e^{\alpha(\beta-1)T} = 0$, т.е. $\lambda_1 = 0$, и $p(t) = 0$, что идет в разрез с предположением о положительности данного коэффициента. Наконец, допуская $p(t) = 0$, получаем $\lambda_1 = 0$, а значит, нулевой вектор множителей Лагранжа, что исключается необходимым условием оптимальности.

Итак, $\lambda_0 \ne 0$, и без ограничения общности можно положить $\lambda_0 = 1$. Тогда уравнение Эйлера принимает вид:

$$\dot{p} = (u(t) - 1 + \beta)e^{-} - \alpha u(t) p(t) = u(t)(e^{-} - \alpha p(t)) + (\beta - 1)e^{-}.$$

Условие оптимальности по u будет выглядеть так:

$$\min_{0 \le u \le 1-\beta} u(t)\,TR(t)\,(e^{-} - \alpha p(t)).$$

Из данного условия вытекает, что $u = 1 - \beta$ при $e^{-} - \alpha p(t) < 0$ и $u = 0$ при $e^{-} - \alpha p(t) > 0$, следовательно, оптимальной является стратегия либо инвестирования всей прибыли, либо ее «фиксации» при полном отказе от инвестиций. Найдем точку переключения между данными стратегиями $t = \tau$, когда:

$$e^{-} - \alpha p(t) = 0. (4.54)$$

До момента переключения нужно инвестировать всю прибыль, а после него – ее фиксировать; ведь при обратном порядке стратегий было бы выгодно не инвестировать вовсе, поскольку инвестиции, аннулирующие прибыль, никогда не смогут окупиться.

Существуют две возможности: $\tau = 0$ либо $\tau > 0$. Рассмотрим наиболее интересный второй случай. В точке переключения (4.54) уравнение Эйлера принимает вид: $\frac{dp}{dt} = (\beta - 1)e^{-}$. Решаем его, интегрируем его, разделяя переменные:

$p(t) = \int dp = \int (\beta - 1)e^{-it}dt + c_1 = \frac{(1-\beta)}{i}\int de^{-} + c_1 = \frac{(1-\beta)}{i}e^{-} + c_1$. Используя здесь условие трансверсальности $p(T) = \frac{(1-\beta)}{i}e^{-} + c_1 = 0$, находим значение константы $c_1 = \frac{(\beta-1)}{i}e^{-}$. Таким образом,

$$p(\tau) = \frac{(1-\beta)}{i}e^{-i\tau}\left(1 - e^{i(\tau-T)}\right),$$

откуда с учетом условия (4.54), т.е. при

$$p(\tau) = \frac{e^{-i\tau}}{\alpha},$$

находим сам момент переключения стратегий:

$$\tau = T + \frac{1}{i}\ln\left(1 - \frac{i}{\alpha(1-\beta)}\right). \quad (4.55)$$

Итак, если $T > \frac{1}{i}\ln\frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha(1-\beta)-i}$, то до момента переключения τ, определяемого формулой (4.55), следует инвестировать всю прибыль, а потом – всю прибыль сберегать (рис. 5). Очевидно, что, поскольку в данном случае $1 - \frac{i}{\alpha(1-\beta)} > e^{-} > 0$, постольку момент переключения стратегии τ будет существовать.

Если же $T < \frac{1}{i}\ln\frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha(1-\beta)-i}$, то момент переключения стратегий будет отсутствовать, и сразу нужно сберегать всю получаемую прибыль.

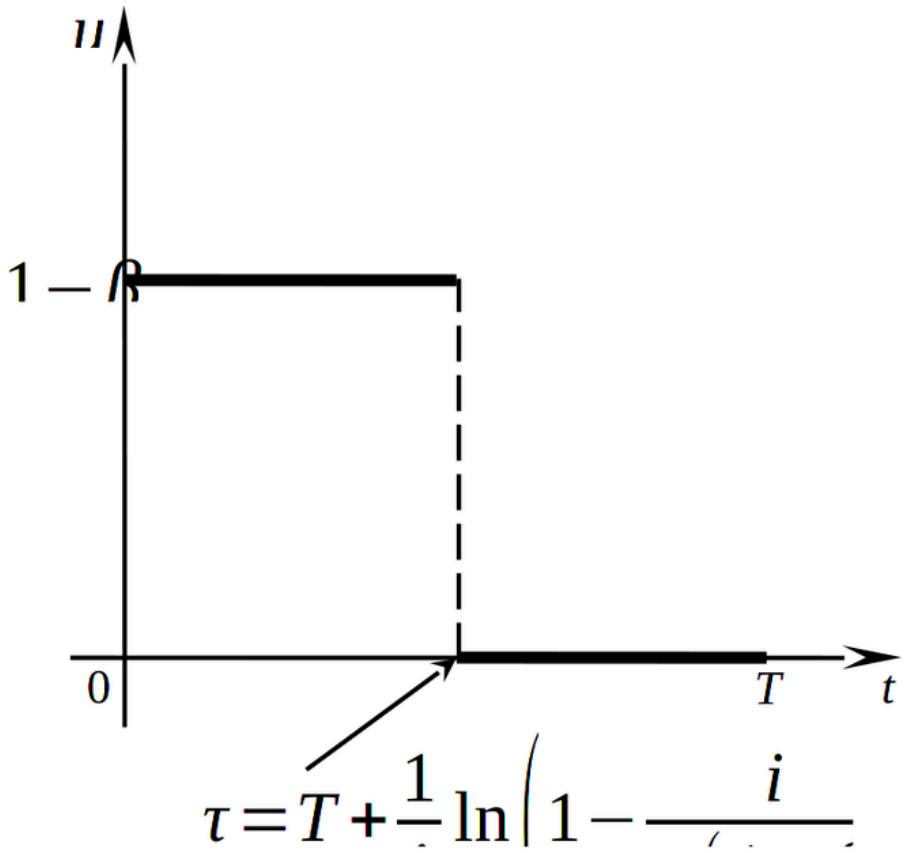


Рисунок 5. Оптимальная стратегия инвестиций

Пример 7.

Пусть, предприятие работает в условиях совершенной конкуренции, причем цена на продукт $p_0 = const = 10$ не меняется во времени, а значит, функция выручки имеет вид: $TR(t) = 10q(t)$, где *q*(*t*) – объем выпуска продукции предприятием в момент времени *t*.

Предположим, что в каждый, данный момент времени инвестируется определенная доля $u(t)$ выручки предприятия: $I(t) = u(t) \bullet TR(t) = 10u(t)q(t)$. Пусть эксплуатационные (операционные) расходы фирмы $C(t)$ пропорциональны выручке: $C(t) = 0,6 \bullet TR(t) = 6q(t)$. Таким образом, функция прибыли фирмы имеет вид:

$$PR(t) = TR(t) - I(t) - C(t) = 10q(t) - 10u(t)q(t) - 6q(t) = 10q(t)\,(0,4 - u(t)).$$

Предприятие облагается налогом на прибыль по ставке $\gamma = 0,1$, а значит, располагаемая прибыль (после уплаты налога) будет описываться следующей зависимостью: $PR_{at}(t) = (1-\gamma)PR(t) = 9q(t)\,(0,4-u(t))$.

Допустим, что в соответствии с механизмом акселератора выручка растет пропорционально инвестициям с постоянным коэффициентом акселерации $\alpha = 1,25$, т.е.

$$\frac{dTR(t)}{dt} = 10\frac{dq(t)}{dt} = 1,25I(t) = 1,25u(t)\,TR(t) = 12,5u(t)q(t), \text{ или } \dot{q} = 1,25u(t)q(t).$$

Процентная ставка не меняется с течением времени и составляет 20%. Изначально (при *t*=0) в распоряжении предприятия находятся запасы продукции в размере $q(0) = 5$ (ед.).

Выберем такую стратегию инвестиций, то есть так распределим их коэффициент $u(t)$ во времени, чтобы к моменту *T*=5 (лет) чистая приведенная стоимость данного бизнес-проекта была максимальной:

$$\max \int_0^5 9q(t)\,(0,4-u(t))e^{-0,2t}dt:$$

$$\dot{q} = 1,25uq; 0 \le u \le 0,4; q(0) = 5;$$

или

$$\min \int_0^5 9q(t)\,(u(t)-0,4)e^{-0,2t}dt:$$

$$\dot{q} = 1,25uq; 0 \le u \le 0,4; q(0) = 5.$$

Решая данную задачу максимизации чистой приведенной стоимости бизнес-проекта, составляем функцию Лагранжа:

$$L = \int_0^5 (\lambda_0 9q(t)\,(u(t)-0,4)e^{-0,2t} + p(t)(\dot{q}(t) - 1,25u(t)q(t)))dt + \lambda_1\,(q(0)-5).$$

Уравнение Эйлера (1.7) для лагранжиана

$$L = 9\lambda_0 q(t)(u(t)-0,4)e^{-0,2t} + p(t)(\dot{q}(t) - 1,25u(t)q(t))$$

в данной задаче имеет вид:

$$-\dot{p} + 9\lambda_0\,(u(t)-0,4)e^{-0,2t} - 1,25u(t)p(t) = 0.$$

Далее выписываем условие оптимальности лагранжиана по управлению:

$$\min_{0\le u\le 0,4}(9\lambda_0 u(t)q(t)e^{-0,2t} - 1,25u(t)p(t)q(t)) = \min_{0\le u\le 0,4} u(t)q(t)\left(9\lambda_0 e^{-0,2t} - 1,25p(t)\right).$$

Наконец, необходимыми для решения рассматриваемой задачи являются условия трансверсальности по q для терминанта $l = \lambda_1\,(q(0)-5)$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(0) = p(0) = \frac{\partial l}{\partial q(0)} = \lambda_1,\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(5) = p(5) = \frac{-\partial l}{\partial q(5)} = 0.$$

Покажем, что множитель Лагранжа λ_0 не может быть нулевым, рассуждая от противного. Предположим, что $\lambda_0 = 0$. Тогда уравнение Эйлера принимает вид: $\dot{p} = -1,25u(t)p(t)$.

Рассмотрим возможные значения $p(t)$.

а) При $p(t) < 0$ из условия оптимальности по u следует, что $u = 0$, а значит, $\dot{p} = 0$, т.е. $p = const = p(5) = 0$, что противоречит предыдущему неравенству.

б) При $p(t) > 0$ оптимальность по u дает $u = 0,4$, а значит, уравнение Эйлера-Лагранжа принимает вид $\dot{p} = -0,5p$. Решаем его: $p(t) = c_1 e^{-0,5t} = p(0)e^{-0,5t} = \lambda_1 e^{-0,5t}$, в частности, $p(5) = \lambda_1 e^{-2,5} = 0$, т.е. $\lambda_1 = 0$, и $p(t) = 0$, что идет в разрез с предположением о положительности данного коэффициента.

в) Наконец, допуская $p(t) = 0$, получаем $\lambda_1 = 0$, а значит, нулевой вектор множителей Лагранжа, что исключается необходимым условием оптимальности.

Итак, $\lambda_0 \ne 0$, и без ограничения общности можно положить $\lambda_0 = 1$.

Переписываем уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\dot{p} = 9\,(u(t)-0,4)e^{-0,2t} - 1,25u(t)p(t) = u(t)\left(9e^{-0,2t} - 1,25p(t)\right) - 3,6e^{-0,2t}.$$

Условие оптимальности по u будет выглядеть так:

$$\min_{0\le u\le 0,4} u(t)q(t)\left(9e^{-0,2t} - 1,25p(t)\right).$$

Оптимальной стратегией инвестиций будет:

$$\begin{cases} u = 0,4 npu 9e^{-0,2t} - 1,25p(t) < 0, \\ u = 0 npu 9e^{-0,2t} - 1,25p(t) > 0; \end{cases}$$

т.е. либо инвестирование всей прибыли, либо ее «фиксация» при полном отказе от инвестиций.

Найдем точку переключения между данными стратегиями $t = \tau$, когда:

$$9e^{-0,2t} - 1,25p(t) = 0.$$

В точке переключения уравнение Эйлера принимает вид:

$$\frac{dp}{dt} = -3,6e^{-0,2t}.$$

Интегрируем его, разделив переменные: $p(t) = \int dp = -3,6\int e^{-0,2t}dt + c_1 = 18\int de^{-0,2t} + c_1 = 18e^{-0,2t} + c_1$. Используя здесь условие трансверсальности $p(5) = 18e^{-1} + c_1 = 0$, находим значение константы $c_1 = -18e^{-1}$. Таким образом, $p(\tau) = 18e^{-0,2\tau} - 18e^{-1}$, откуда с учетом условия $p(\tau) = 7,2e^{-0,2\tau}$ находим момент переключения: $18e^{-0,2\tau} - 18e^{-1} = 7,2e^{-0,2\tau}$; $0,6e^{-0,2\tau} = e^{-1}$, т.е.

$$\tau = 5 + 5\ln 0,6 \approx 2,446.$$

Итак, до момента $\tau \approx 2,446$ следует инвестировать всю прибыль, а потом – всю прибыль сберегать (рис. 6).

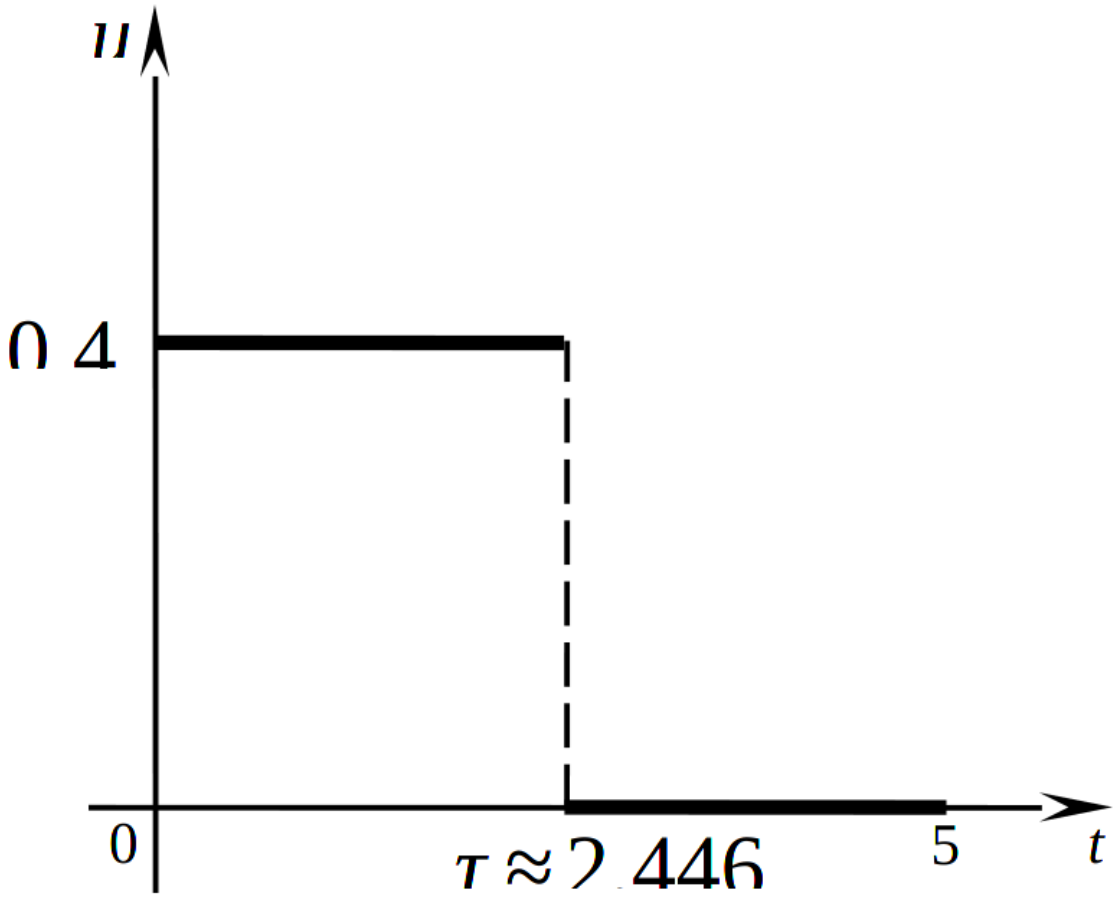


Рисунок 6. «Релейное» управление инвестициями

1. Ср.: Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Принцип максимума Понтрягина. – М.: Факториал, 2006. ↩

Глава 5. Потребительский выбор в условиях неопределенности и ограниченной рациональности

Введение
5.1. Теория ожидаемой полезности
5.2. Денежные лотереи и отношение к риску
5.3. Меры Эрроу-Пратта и теорема Эрроу-Пратта
5.4. Модель выбора в пространстве обусловленных благ
5.5. Покупка информации и цена информации
5.6. Подходы к моделированию выбора с учетом поведенческих аспектов и ограниченной рациональности
Тренировочные задания
Литература

Введение

Основные понятия и определения

Изучение потребительского выбора было бы неполным, если безотказно следовать предпосылке о полной определенности всей необходимой для принятия решений информации, поскольку в реальности рыночный механизм не гарантирует соблюдения этой предпосылки. Поэтому, вследствие широкой распространенности ситуаций неопределенности, микроэкономическая теория включает их в исследование поведения потребителей и принятия ими рациональных решений.

Ситуация называется *неопределенной*, если она имеет несколько возможных *исходов*.

Исход (или *состояние природы*) – это возможное последствие какого-либо действия.

Ситуация *риска* имеет место тогда, когда каждому исходу неопределенной ситуации приписывается объективная *вероятность* его наступления, которая показывает, насколько правдоподобно наступление исходов.

Проводить различие между *риском* и *неопределенностью* в 1921 г. предложил американский экономист Фрэнк Найт [1], который утверждал, что «для обозначения риска и неопределенности соответственно мы можем также пользоваться терминами “объективная” и “субъективная” вероятность».

Объективная вероятность зависит от природы неопределенных событий и известна «либо благодаря априорным расчетам, либо из статистических данных прошлого опыта» [2].

Таким образом, *априорная вероятность* – это «классификация абсолютно однородных случаев, идентичных во всех отношениях», а *статистическая вероятность* – это «эмпирическая оценка частоты связей между предиктами» [3]. Различия между этими двумя видами вероятности Найт демонстрирует на примерах азартной игры с бросанием идеальной игральной кости и пожара, в результате которого может сгореть конкретный дом. Очевидно, что вероятность выпадания каждой грани при бросании кости заранее известна и равна 1/6, а вероятность возникновения пожара в конкретном доме в конкретный момент времени можно выразить определенным числом лишь по результатам эмпирического анализа группы событий.

Субъективная вероятность зависит от веры человека в то, что те или иные события могут произойти, и «именно такие мнения, а отнюдь не научное знание чаще всего управляют нашим целенаправленным поведением» [4]. Теория субъективной вероятности, получившая развитие в 50-60-е годы XX века, дает возможность лишить смысла предложенное Найтом разграничение между неопределенностью и риском, позволяя свести неопределенность к риску с помощью ожиданий, выраженных в вероятностях [5].

Обусловленные (вероятностные, контингентные) блага – это блага, количество которых зависит от исхода.

Если возможно *N* исходов, определяемых экзогенными параметрами, то если пронумеровать исходы с помощью индекса *n*=1, … , *N*, с учетом того, что объективная вероятность наступления *n*-го состояния равна α_n и

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n = 1,$$

вероятностным благом x_{in} будет право на получение *i*-го блага в количестве x_{in} в случае реализации исхода *n*.

Ожидаемая стоимость – это средневзвешенная всех значений возможных исходов, причем вероятность каждого исхода используется в качестве веса соответствующего значения.

Если $X=\{x_1, \dots x_n\}$ – множество исходов, и $\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ – вероятности их наступления, то ожидаемая стоимость (*EV*) равна:

$$EV = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

1. Найт Ф. Риск, неопределенность и прибыль. - М.: Дело, 2003. С. 225. ↩
2. Там же. ↩
3. Там же. С. 218. ↩
4. Там же. С. 226. ↩
5. Подробнее об этом см.: Мас-Колелл А., Уинстон М., Грин Д. Микроэкономическая теория. В 2-х книгах. – М.: Изд. дом «Дело» РАНХиГС, 2016. Кн. 1. С. 274. ↩

5.1. Теория ожидаемой полезности

5.1.1. Предпосылки теории ожидаемой полезности

Теория ожидаемой полезности опирается на следующие предпосылки:

1. Выбор потребителя может привести к одному из множества исходов, но к какому именно, заранее определить невозможно.
2. Исходы могут иметь вид наборов благ или денежных сумм.
3. Множество исходов конечно.
4. Вероятности всех исходов известны.
5. Вместо наборов благ объектом выбора потребителя являются лотереи.
6. Потребитель имеет предпочтения на множестве лотерей.

5.1.2. Аксиомы потребительского выбора в условиях неопределенности

Пусть *G* - множество всех лотерей (простых и сложных) и для упрощения бесконечно вложенные сложные лотереи исключены:

$$G \equiv \left\{ \alpha_1 \circ x_1, \ldots, \alpha_n \circ x_n \vee \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$

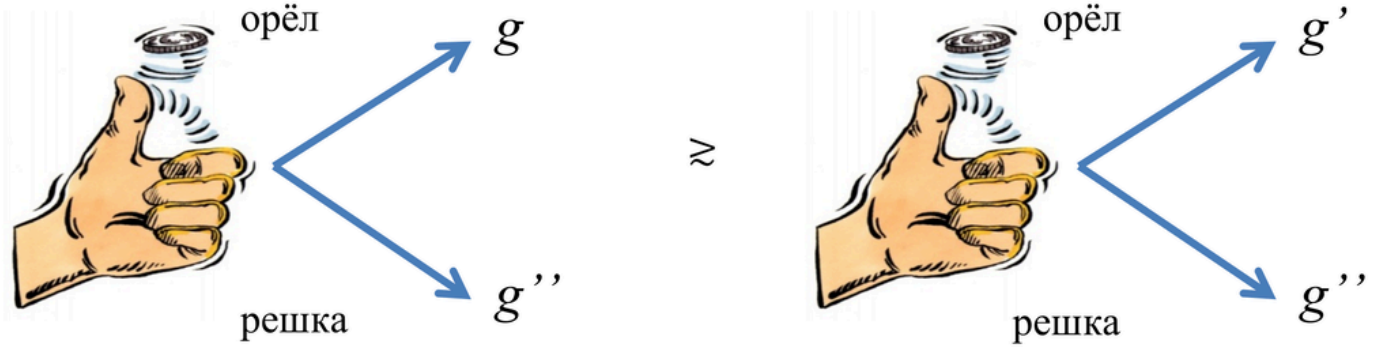
Тогда *аксиомы потребительского выбора в условиях неопределенности* будут следующими:

- *Полнота:* для любых двух лотерей g и g' из множества G либо $g \succsim g'$, либо $g' \succsim g$ (знаки ~ и $\succ$ могут использоваться для обозначения отношений безразличия и строгого предпочтения).
- *Транзитивность:* для любых трех лотерей g, g' и g'' из G, если $g \succsim g'$ и $g' \succsim g''$, то $g \succsim g''$.

Аксиомы полноты и транзитивности позволяют упорядочить элементы множества X так, что $x_1 \succsim x_2 \succsim \ldots \succsim x_n$.

- *Непрерывность:* если для любой лотереи g из G отношение безразличия не имеет места при крайних значениях α (т.е. при $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$), то оно должно выполняться для некоторого промежуточного значения $\alpha \in [0, 1]$, т.е. $g \sim (\alpha x_1, (1-\alpha)x_n)$..
- *Монотонность:* если каждая из простых лотерей потенциально приводит только к наилучшему ((x_1) и наихудшему ((x_n) исходам, то предпочтительной является та из них, которая приводит к наилучшему исходу с большей вероятностью. То есть, для всех вероятностей $\alpha, \beta \in [0, 1] \quad (\alpha x_1, (1-\alpha)x_n) \geq (\beta x_1, (1-\beta)x_n)$ тогда и только тогда, когда $\alpha > \beta$.
- *Замещение:* две лотереи эквивалентны для потребителя, если для него эквивалентны их исходы и эти исходы реализуются с одинаковыми вероятностями. Или: если $g = (\alpha_1 g_1, \ldots, \alpha_n g_n)$ и $h = (\alpha_1 h_1, \ldots, \alpha_n h_n)$ принадлежат G и $h_i \sim g_i$ для каждого i, то $h \sim g$.
- *Сведение к простым лотереям:* сложная лотерея и порождаемая ею простая лотерея эквивалентны. Иными словами, сложная лотерея, которая с вероятностью *α* приводит к исходу x_1, а с вероятностью $(1-\alpha)$ дает лотерейный билет, который является простой лотереей и приводит к исходу x_1 с вероятностью β и к исходу x_2 с вероятностью $(1-\beta)$, эквивалентна простой лотерее $((\alpha + (1-\alpha)\beta)x_1, (1-\alpha)(1-\beta)x_2)$.
- *Независимость:* при любых g, g' и g'' из G и любых $\alpha \in [0, 1]$ отношение предпочтения $g \succsim g'$ имеет место тогда и только тогда, когда $ag + (1-a)g' \approx ag' + (1-a)g''$. Или: если каждую из двух лотерей смешать с третьей, то порядок предпочтения этих смешанных лотерей будет таким же, как и для исходных (рис. 5.1).

Аксиома независимости занимает центральное место в теории выбора в условиях неопределенности, поскольку отражает фундаментальный смысл неопределенности. Потребитель не потребляет лотерею g или g' вместе с лотереей g'', как это могло бы происходить в условиях определенности в случае, если бы вместо лотерей потребитель совершал выбор между наборами благ. В отличие от теории выбора в условиях определенности, потребителю достанется лотерея g или g' вместо лотереи g''. Следовательно, его предпочтения в отношении лотерей g и g' не зависят от его отношения к лотерее g''.



тогда и только тогда, когда $g \succsim g'$
Рисунок 5.1. Аксиома независимости

Аксиомы позволяют представить предпочтения потребителя с помощью линейной по вероятностям функции полезности, которая называется *функцией ожидаемой полезности*.

5.1.3. Функция ожидаемой полезности

Функция полезности $U : G \to \boldsymbol{R}$ обладает *свойством ожидаемой полезности*, если любой лотерее *gϵG* соответствует:

$$U(g) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(x_i),$$

где $(\alpha_i \circ x_i, \ldots, \alpha_n \circ x_n)$ – простая лотерея, порожденная g, $u(x_i)$ – полезность исхода x_i, которой приписывается α_i - эффективная вероятность ее получения.

Таким образом, функция ожидаемой полезности сопоставляет каждой лотерее ожидаемое значение полезности, которое она может дать.

Функция полезности, обладающая свойством ожидаемой полезности, называется *функцией полезности фон Неймана-Моргенштерна* в честь Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна – авторов опубликованной 1944 году книги «Теория игр и экономическое поведение» [1], в которой была предложена эта функция.

Теорема о существовании функции полезности фон Неймана-Моргенштерна: если предпочтения $\succsim$ на лотереях из *G* удовлетворяют аксиомам, то существует функция полезности $U : G \to \boldsymbol{R}$, которая представляет эти предпочтения и обладает свойством ожидаемой полезности.

Доказательство теоремы о существовании функции полезности фон Неймана-Моргенштерна [2]

Пусть на множестве G существуют наилучшая $\overline{\mathrm{g}}$ *и наихудшая* $\underline{\mathrm{g}}$ *лотереи, так что для любой лотереи* $\mathrm{g} \in \mathrm{G}$: $\overline{\mathrm{g}} \succsim \mathrm{g} \succsim \underline{\mathrm{g}}$.

$$g = \alpha g + (1-\alpha)g \succ \alpha g + (1-\alpha)g' \succ \alpha g' + (1-\alpha)g' = g'.$$

При этом выполняется следующее соотношение:

$$\beta\overline{g} + (1-\beta)\underline{g} = \gamma\overline{g} + (1-\gamma)[\alpha\overline{g} + (1-\alpha)\underline{g}],$$

где $\gamma = \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha} \in (0,1]$.

Согласно утверждению $g \succ g'$, *имеем:* $\overline{g} \succ \alpha\overline{g} + (1-\alpha)\underline{g}$.

Предположим, что $\beta > \alpha$, *тогда:*

$$\gamma\overline{g} + (1-\gamma)\left[\alpha\overline{g} + (1-\alpha)\underline{g}\right] \succ \alpha\overline{g} + (1-\alpha)\underline{g}.$$

Откуда: $\beta\overline{g} + (1-\beta)\underline{g} \succ \alpha\overline{g} + (1-\alpha)\underline{g}$.

Для доказательства обратного предположим, что $\beta \leq \alpha$. *Тогда, если* $\beta = \alpha$, *то:*

$$\beta\overline{g} + (1-\beta)\underline{g} \qquad \alpha\overline{g} + (1-\alpha)\underline{g}.$$

Если $\beta < \alpha$ *и если поменять местами* α *и* β, *то:*

$$\alpha\overline{g} + (1-\alpha)\underline{g} \succ \beta\overline{g} + (1-\beta)\underline{g}.$$

$$[\alpha g\overline{g} + (1-\alpha_g)\underline{g}] \qquad g.$$

Существование такого числа α_g *следует из аксиомы непрерывности и того, что* $\overline{g}$ *и* $\underline{g}$ *- наилучшая и наихудшая лотереи. Единственность* α_g *можно доказать, воспользовавшись подходом, изложенным в п.2.*

Согласно утверждению п.3, для любых двух лотерей g, g'$\in G$ *имеем:* $\mathrm{g} \succcurlyeq \mathrm{g}'$ *тогда и только тогда, когда:*

$$\alpha_g\overline{g} + (1-\alpha_g)\underline{g} \succcurlyeq \alpha_{g'}\overline{g} + (1-\alpha_{g'})\underline{g}.$$

Таким образом, из п.2 следует, что $g \succcurlyeq g'$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha_g \geq \alpha_{g'}$.

Мы хотим показать, что для любых двух лотерей g, g'$\in G$ *и* $\beta \in [0,1]$ *выполнено:*

$$U(\beta g + (1-\beta)g') = \beta U(g) + (1-\beta)U(g').$$

По определению:

$$g \qquad U(g)\overline{g} + (1-U(g))\underline{g}$$

и

$$g' \qquad U(g')\overline{g} + (1-U(g'))\underline{g}.$$

Тогда, дважды применив аксиому независимости, имеем:

$$\beta g + (1-\beta)g' \qquad \beta\left[U(g)\overline{g} + (1-U(g))\underline{g}\right] + (1-\beta)g'$$

$$\beta\left[U(g)\overline{g} + (1-U(g))\underline{g}\right] + (1-\beta)[U(g')\overline{g} + \left(1-U\left(g'\right)\right)\underline{g}].$$

Преобразуем последнюю лотерею:

$$\beta U(g)\overline{g} + \beta\left(1-U(g)\right)\underline{g} + (1-\beta)U\left(g'\right)\overline{g} + (1-\beta)\left(1-U\left(g'\right)\right)\underline{g} =$$

$$\left[\beta U(g) + (1-\beta)U\left(g'\right)\right]\overline{g} + \left[\beta(1-U(g)) + (1-\beta)\left(1-U\left(g'\right)\right)\right]\underline{g} =$$

$$\left[\beta U(g) + (1-\beta)U\left(g'\right)\right]\overline{g} + \left[1-\beta U(g) - (1-\beta)U\left(g'\right)\right]\underline{g}.$$

Таким образом:

$$\beta g + (1-\beta)g' \qquad [\beta U(g) + (1-\beta)U\left(g'\right)]\overline{g} + [1 - \beta U(g) - (1-\beta)U\left(g'\right)]\underline{g}.$$

Отсюда по построению функции $U(\bullet)$ в п.4 имеем:

$$U(\beta g + (1-\beta)g') = \beta U(g) + (1-\beta)U(g').$$

Следовательно, функция полезности, представляющая предпочтения $\succsim$ и имеющая форму ожидаемой полезности, существует. ■

Свойство ожидаемой полезности придает функции фон Неймана-Моргенштерна существенное отличие от функции полезности, с помощью которой поведение потребителей исследуется в условиях определенности. Если функция полезности, отражающая предпочтения потребителей в отношении товарных наборов, может быть подвергнута любому строго монотонному преобразованию без нарушения порядка предпочтений, то в отношении функции фон Неймана-Моргенштерна этого утверждать нельзя. Дело в том, что вероятности, использующиеся при построении функции полезности на множестве лотерей, имеют самостоятельный смысл. Они отражают предпочтения потребителя и определяются ими.

Пусть *X*={*a*,*b*,*c*} – множество исходов произвольной лотереи, где $a \succ b \succ c$, предпочтения $\succsim$ удовлетворяют аксиомам выбора в условиях неопределенности, а *u* представляет их в виде функции ожидаемой полезности. Тогда существует такое *α*ϵ[0,1], что:

$$u(b) = \alpha u(a) + (1-\alpha)u(c).$$

Или:

$$\frac{u(a)-u(b)}{u(b)-u(c)} = \frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

Так как вероятность *α* единственным образом определяется предпочтениями потребителя, то это верно и для отношения разностей между значениями полезности, которое также однозначно определяется *α*. Это означает, что отношение разностей значений полезности должно принимать одно и то же значение для каждой функции фон Неймана-Моргенштерна, представляющей предпочтения $\succsim$.

Следовательно, в отличие от функции полезности в условиях определенности, функция фон Неймана-Моргенштерна содержит информацию не только о порядке предпочтений, но и об отношении разностей полезностей, которое также должно сохраняться в ходе монотонных преобразований.

Теорема о единственности функции фон Неймана-Моргенштерна: функция ожидаемой полезности $v(\cdot)$ представляет те же самые предпочтения, что и $u(\cdot)$, тогда и только тогда, когда для некоторого числа μ и некоторого числа $\beta > 0$

$$v(g) = \mu + \beta u(g)$$

для всех лотерей g.

Или: функция ожидаемой полезности единственна с точностью до положительных *аффинных преобразований*.

Доказательство теоремы о единственности функции фон Неймана-Моргенштерна

Пусть $g = (\alpha x_1, (1-\alpha)x_2), g \in G$, а функция полезности $u(\cdot)$ обладает свойством ожидаемой полезности. Тогда:

$v(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \mu + \beta u(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \mu + \beta(\alpha u(x_1) + (1-\alpha)u\left(x_2\right)) = \mu + \beta\alpha u(x_1) + \beta u(x_2) - \beta\alpha u(x_2) +$

Таким образом, функция ожидаемой полезности единственна с точностью до положительных аффинных преобразований.■

Отсюда, возможным монотонным преобразованием функции ожидаемой полезности может быть только положительное линейное преобразование: умножение на положительное число и/или прибавление константы.

Теоремы о существовании и единственности функции полезности фон Неймана-Моргенштерна позволяют сделать нормативный вывод: если предпочтения индивида представимы функцией полезности, обладающей свойством ожидаемой полезности, и если этот индивид всегда выбирает наиболее предпочитаемую из имеющихся альтернатив, то он отдаст предпочтение одной лотерее перед другой тогда и только тогда, когда ожидаемая полезность одной превосходит ожидаемую полезность другой.

Следовательно, *осуществляя выбор среди лотерей, рациональный экономический субъект максимизирует функцию ожидаемой полезности*.

Конкретный вид функции ожидаемой полезности зависит от отношения экономического субъекта к риску.

---

1. Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. - М.: Наука, 1970. ↩
2. Использована стратегия доказательства, приведенная в учебнике: Мас-Колелл А., Уинстон М., Грин Д. Микроэкономическая теория. В 2-х книгах. – М.: Изд. дом «Дело» РАНХиГС, 2016. Кн. 1. С. 234-236. ↩

5.2. Денежные лотереи и отношение к риску

5.2.1. Денежные лотереи и отношение к риску: дискретный случай

Рассмотрим простые денежные лотереи, множество исходов которых *A* составляют различные неотрицательные значения денежного богатства (или дохода): $A = \boldsymbol{R}_+$.

Пусть каждая простая лотерея g имеет вид $(\alpha_1 \circ x_1, \ldots, \alpha_n \circ x_n)$, где $\alpha_i \geq 0$ – вероятности исходов, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $x_i \geq 0$ - денежные суммы богатства (или дохода), $n > 0$ – целое число. Пусть также $u(x)$ – непрерывная и возрастающая индивидуальная функция полезности, которая дифференцируема и $u^{'}(x) > 0$ для всех x.

Функцию полезности $u(\bullet)$, определенную на значениях денежного богатства (или дохода), принято называть *элементарной функцией полезности* или *функцией полезности Бернулли* [1], в отличие от функции полезности фон Неймана-Моргенштерна $U(\bullet)$, определенной на множестве лотерей.

По аксиоме сведения к простым лотереям, функция полезности фон Неймана-Моргенштерна на множестве простых лотерей даст полное описание предпочтений потребителя.

Тогда, если в результате лотереи g сумму денег x_i потребитель может получить с вероятностью α_i, его ожидаемый выигрыш (случайное богатство (или доход)) равен:

$$E(g) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

Если у потребителя также есть возможность гарантированно получить ожидаемый выигрыш, то оценки полезностей двух имеющиеся у него альтернатив будут следующими:

$$U(\mathrm{g}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u\left(x_i\right),$$

$$u(E(g)) = u\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right),$$

где $U(g)$ – ожидаемая полезность в случае участия в лотерее, $u(E(g))$ – полезность ожидаемого выигрыша в случае его гарантированного получения.

Индивида называют:

- *Склонным к риску относительно лотереи g*, если $u(E(g)) < U(g)$;
- *Не склонным к риску относительно лотереи g*, если $u(E(g)) > U(g)$;
- *Нейтральным к риску относительно лотереи g*, если $u(E(g)) = U(g)$.

Если приведенные условия выполняются для *любой* невырожденной (приписывающей положительные вероятности хотя бы двум различным уровням богатства) простой лотереи g, то индивида называют *склонным, не склонным* или *нейтральным к риску* на всем пространстве лотерей G.

Теорию отношения к риску разработали в 1948 г. совместно американский экономист Милтон Фридмен (Нобелевский лауреат 1976 г.) и математик Леонард Сэвидж [2]. Согласно их теории, отношение потребителя к риску отражают конкретные свойства функции полезности.

Исходя из линейного вида функции ожидаемой полезности, все возможные ее значения будут расположены на отрезке *AB*, где точка *A* соответствует полезности, получаемой индивидом от богатства x_1, а точка B – от богатства x_2 (рис. 5.2, 5.3, 5.4).

Отметим на горизонтальной оси величину случайного богатства индивида $E(g)$. При помощи вертикальной (до пересечения с функцией) и горизонтальной проекции (до пересечения с вертикальной осью) покажем: во-первых, значение функции ожидаемой полезности $U(g)$, соответствующее точке C [3], и, во-вторых, величину полезности $u(E(g))$, которую приносит потребителю эквивалент его случайного богатства.

Гарантированный эквивалент любой простой денежной лотереи g – это такая сумма денег CE, полученная с определенностью, которая приносит индивиду такую же полезность, как и данная лотерея, т.е.: $U(g) \equiv u(CE)$.

Очевидно, что для склонного к риску индивида значение функции ожидаемой полезности будет больше, чем величина полезности эквивалента его случайного богатства. Именно по этой причине склонный к риску индивид предпочтет ситуацию риска возможности получения гарантированного богатства.

Если индивид склонен к риску, то его функция полезности является строго выпуклой (рис. 5.2). Предельная полезность богатства для такого индивида возрастает с ростом x, т.е. $u^{''}(x) > 0$.

Неравенство $CE > E(g)$ эквивалентно характеристике индивида как рискофила. Действительно, в силу того что функция полезности $U(\bullet)$ является неубывающей, из данного неравенства следует, что $U(CE) > U(E(g))$, откуда, по определению гарантированного эквивалента, получается неравенство Йенсена, которое характеризует экономического агента как рискофила:

$$U(g) > u(E(g))$$

или

$$\alpha u(x_1) + (1-\alpha)u(x_2) > u(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2).$$

При этом денежный эквивалент меры предпочтения неопределенности можно определить как разность $CE - E(g)$, где CE – гарантированный эквивалент лотереи.

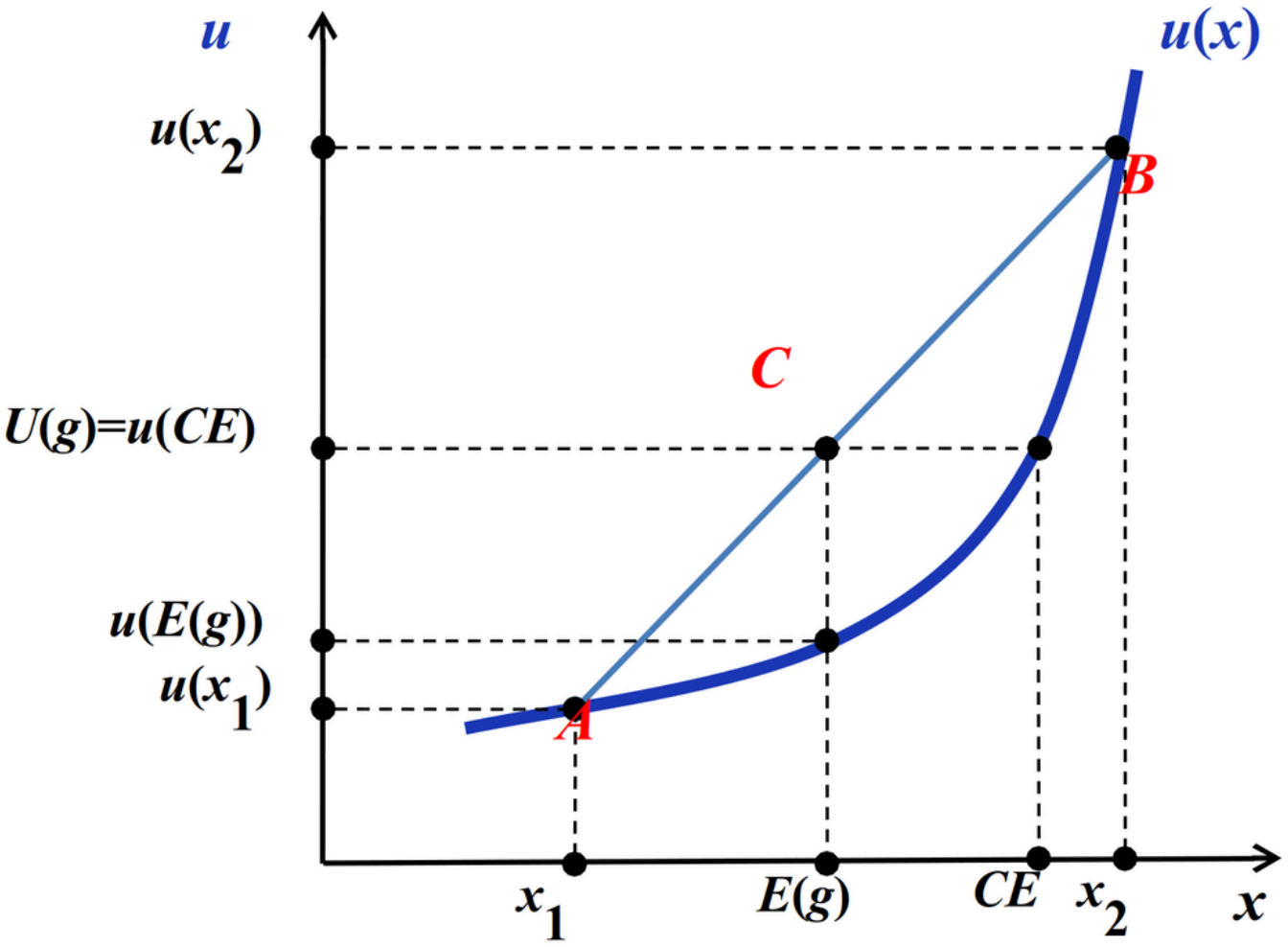


Рисунок 5.2. Функция полезности индивида, склонного к риску

Функция полезности не склонного к риску индивида имеет вид строго вогнутой кривой (рис. 5.3). Предельная полезность богатства для такого индивида убывает с ростом x, т.е. $u''(x) < 0$.

Неравенство $CE < E(g)$ эквивалентно характеристике индивида как уклоняющегося от риска. Действительно, в силу того что функция полезности $U(\bullet)$ является неубывающей, из данного неравенства следует, что $U(CE) < U(E(g))$, откуда, по определению гарантированного эквивалента, получается неравенство Йенсена, которое характеризует экономического агента как рискофоба (знак неравенства меняется на противоположный по сравнению с тем неравенством, которое характеризует рискофила):

$$U(g) < u(E(g))$$

или

$$\alpha u(x_1) + (1-\alpha)u(x_2) < u(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2).$$

Как и в предыдущем случае, отметим на горизонтальной оси величину случайного богатства индивида $E(g)$ и покажем значение функции ожидаемой полезности $U(g)$, соответствующее точке C. Продолжив вертикальную проекцию до пересечения с функцией полезности, получим величину полезности $u(E(g))$, которую приносит индивиду гарантированный эквивалент его случайного богатства. Очевидно, что гарантированный эквивалент случайного богатства приносит индивиду величину полезности, большую, чем величина ожидаемой полезности. Именно поэтому не склонный к риску индивид предпочтет возможность получения гарантированного богатства ситуации риска.

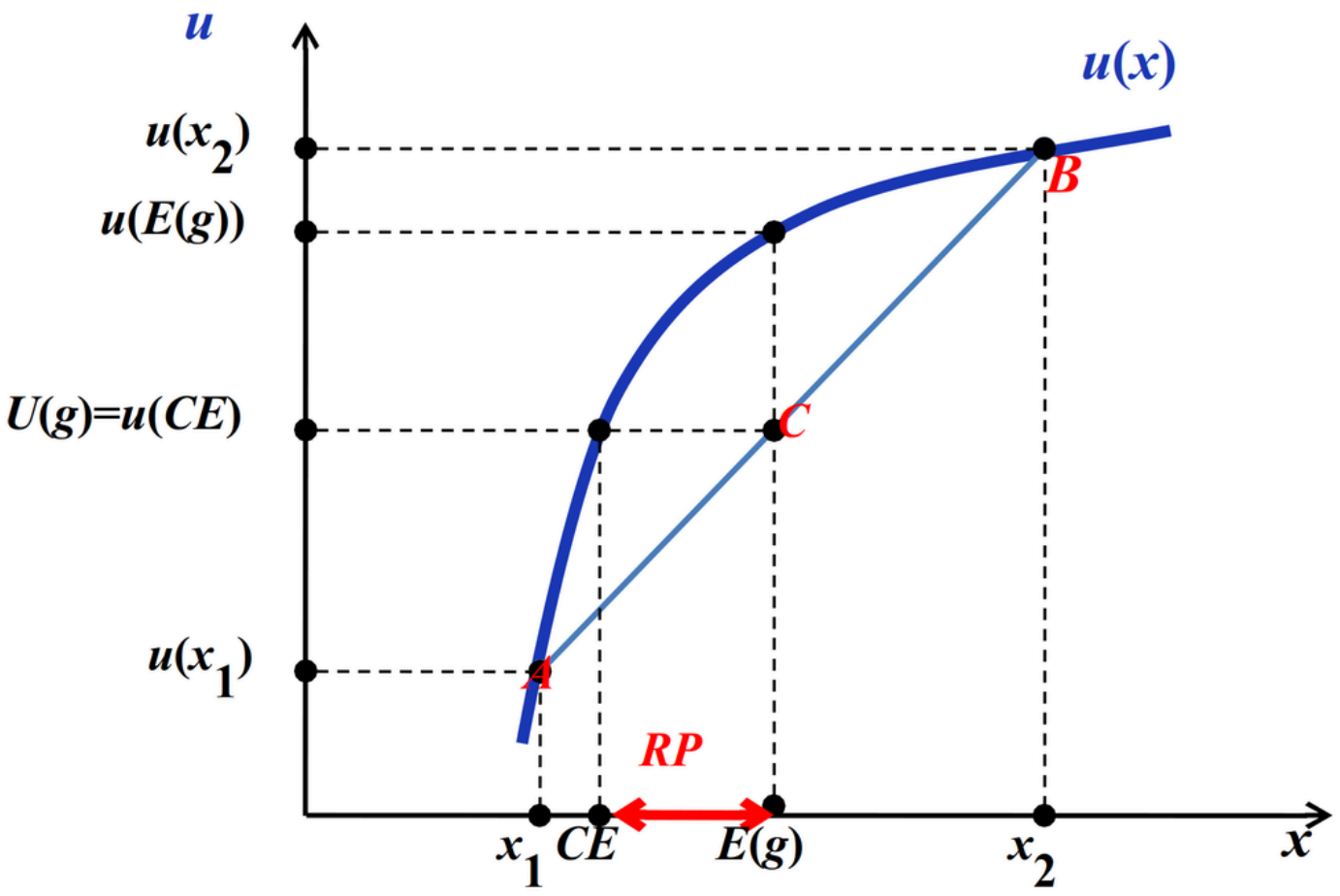


Рисунок 5.3. Функция полезности индивида, не склонного к риску

Однако за гарантию отсутствия риска не склонный к риску индивид будет готов лишиться суммы $E(g) - CE$ при условии, что, по определению, гарантированный эквивалент лотереи приносит ему уровень полезности, равный ожидаемому. В этом случае сумма, равная разности $E(g) - CE$, выступает как своего рода «плата за избежание риска» или «премия за риск».

Таким образом, *премия за риск* – это такая сумма денег RP, что: $U(g) = u(E(g) - RP)$, т.е.:

$$RP = E(g) - CE.$$

Ее не склонный к риску индивид готов «заплатить», чтобы избежать связанного с лотереей риска.

Функция полезности нейтрального к риску индивида - линейная (выпуклая и вогнутая одновременно) функция с положительным наклоном (рис. 5.4). Предельная полезность богатства не изменяется с ростом x, т.е. $u''(x) = 0$. Неравенство Йенсена обращается в равенство:

$$U(g) = u(E(g))$$

или

$$\alpha u(x_1) + (1-\alpha)u(x_2) = u(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2).$$

Для такого индивида значения функции ожидаемой полезности в каждой точке (в том числе и в точке C совпадают со значениями функции полезности для каждого возможного значения случайного богатства и гарантированного эквивалента лотереи. Поэтому безразличный к риску индивид не отдает предпочтения ни ситуации риска, ни возможности получения гарантированного богатства, не видя между ними разницы.

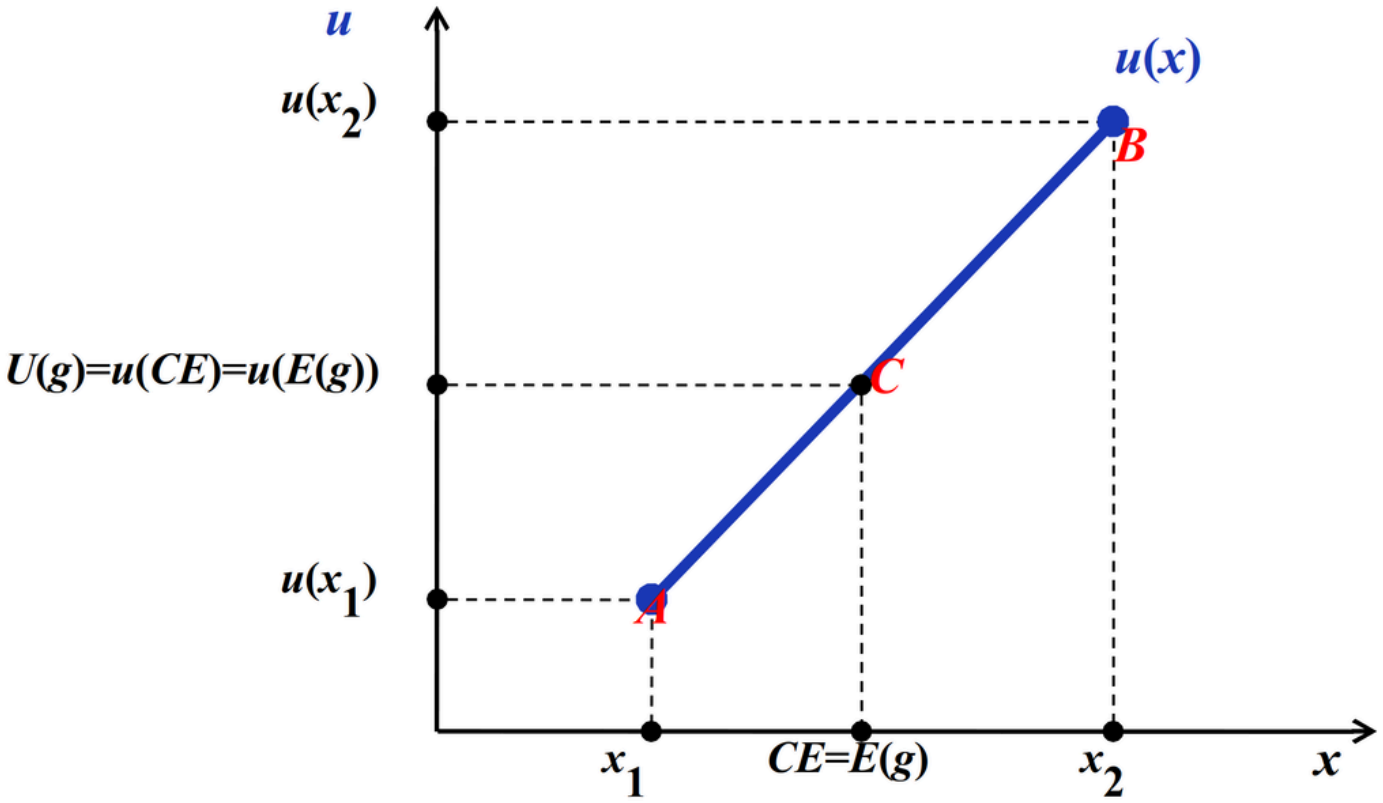


Рисунок 5.4. Функция полезности индивида, нейтрального к риску

5.2.2. Денежные лотереи и отношение к риску: непрерывный случай

Пусть x – непрерывная переменная, обозначающая исходы рассматриваемых денежных лотерей, а $F(x) = Prob(\widetilde{x} \leq x)$ – функция распределения – вероятность того, что реализовавшийся выигрыш $\widetilde{x}$ не превышает величины x. При этом функция распределения $F(x)$ связана с функцией плотности вероятности $f(\bullet)$ следующим образом: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Тогда итоговое распределение денег, порожденное сложной лотереей $(g_1, \ldots, g_k; a_1, \ldots, a_k)$, представляет собой взвешенное среднее распределений, порожденных каждой из лотерей, входящих в данную сложную лотерею:

$$F(x) = \sum_k a_k F_k(x),$$

где $F_k(\bullet)$ – распределение выигрышей в лотерее g_k.

Поэтому под множеством лотерей *G* будет пониматься множество всех функций распределения на неотрицательных суммах денег.

Отсюда функция ожидаемой полезности примет вид:

$U(F) = \int u(x)dF(x)$

или

$U(F) = \int u(x)f(x)dx$

и будет представлять собой распространение формы ожидаемой полезности на непрерывный случай.

Таким образом, функция полезности фон Неймана-Моргенштерна $U(\bullet)$, определенная на лотереях, представляет собой математическое ожидание возрастающей и непрерывной элементарной функции полезности $u(\bullet)$, или функции полезности Бернулли, определенной на конкретных суммах денег.

Следовательно, индивид не склонен к риску, если для него для любой лотереи $F(\bullet)$ вырожденная лотерея, дающая сумму денег $\int xdF(x)$ с определенностью, предпочтительнее, чем сама лотерея, и неравенство Йенсена имеет вид:

$u\left(\int xdF(x)\right) > U(F) = \int u(x)dF(x).$

Строгая несклонность к риску эквивалентна строгой вогнутости элементарной функции полезности.

Индивид склонен к риску, если для него неравенство Йенсена имеет вид:

$u\left(\int xdF(x)\right) < U(F) = \int u(x)dF(x).$

Строгая склонность к риску эквивалентна строгой выпуклости элементарной функции полезности.

Индивид нейтрален к риску, если для него неравенство Йенсена превращается в равенство:

$u\left(\int xdF(x)\right) = U(F) = \int u(x)dF(x).$

Нейтральность к риску эквивалентна линейности элементарной функции полезности.

Гарантированный эквивалент лотереи $F(\cdot)$ представляет собой такую сумму денег $c(F)$, полученную с определенностью, которая приносит индивиду такую же полезность, как и данная лотерея, т.е.:

$u(c(F)) = \int u(x)dF(x).$

Премия за риск $\rho(F)$ – это разница между ожидаемым выигрышем лотереи $F(\cdot)$ и ее гарантированным эквивалентом, т.е.:

$\rho(F) = \int xdF(x) - c(F).$

5.2.3. Социально-экономическая интерпретация отношения к риску

Приобретение страховок как типичное действие индивида не склонного к риску и участие в различного рода азартных играх как типичный поступок индивида склонного к риску могут сочетаться в одном человеке, отражая тот факт, что различное отношение людей к риску является не просто врожденной чертой характера, а проявляется у одних и тех же людей при разных обстоятельствах.

Поэтому индивидуальная функция полезности может иметь вид кривой, несколько раз меняющей вогнутость на выпуклость, как показано на рис. 5.5.

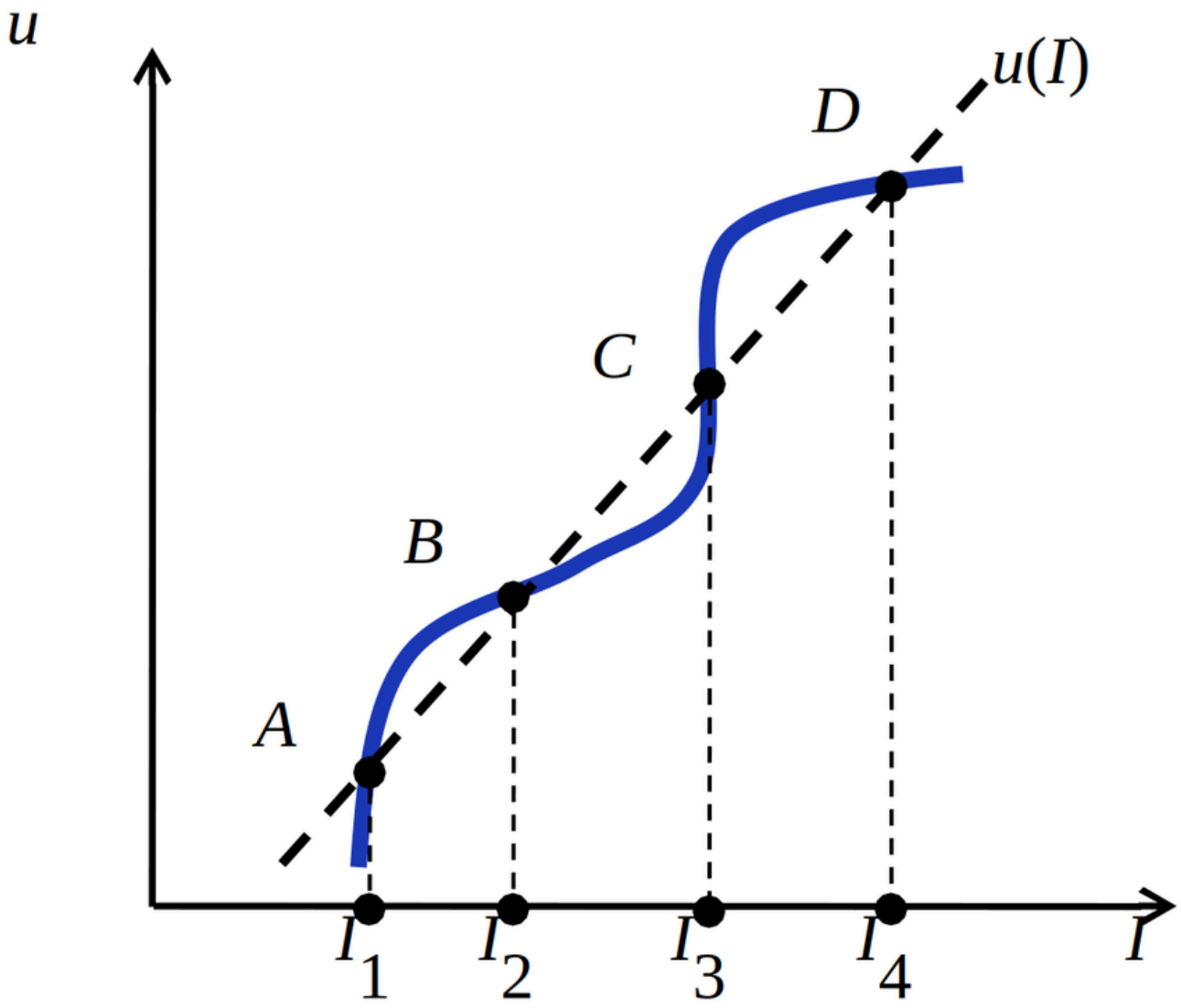


Рисунок 5.5. Социально-экономическая интерпретация отношения к риску

Возможному наличию у функции полезности денежного дохода трех участков - вогнутого, выпуклого и вновь вогнутого - авторы теории отношения к риску М.Фридмен и Л.Сэвидж придали социально-экономическую интерпретацию, утверждая, что функция полезности вогнута на участках, соответствующих интервалам доходов представителей отдельных социально-экономических классов ($I_0 - I_1$ – «низший» класс, $I_2 - I_3$ – «высший» класс) и выпукла на переходном участке ($I_1 - I_3$). Действительно, неквалифицированный рабочий из «низшего» класса скорее всего предпочтет гарантированный доход, приблизительно такой же,

как и у большинства его коллег, по сравнению с выигрышем в азартной игре, которая в лучшем случае сделает его одним из наиболее состоятельных неквалифицированных рабочих, а в худшем случае - одним из наименее состоятельных. Однако гарантированному доходу он может предпочесть азартную игру, которая представляет малую вероятность перехода в «высший» класс. Как отмечают авторы, «люди идут и будут идти на большой риск, чтобы отличиться, даже если они знают, каков этот риск» [4].

5.2.4. Прикладные аспекты теории отношения к риску

5.2.4.1. Спрос на страхование

Страхование - способ избежать риска, к которому часто прибегают не склонные к риску индивиды.

Пусть для не склонного к риску индивида выполняются следующие условия:

- w – богатство индивида;
- $u(w)$ – индивидуальная функция полезности;
- L – возможные потери богатства, например, в результате урагана;
- α – вероятность потерь;
- p – цена единицы страхового покрытия;
- Z – число единиц страхового покрытия, покупаемых индивидом.

Тогда:

- $w_L=w-L+Z-p\cdot Z$ – богатство индивида в случае урагана;
- $w_{NL}=w-p\cdot Z$ – богатство индивида в отсутствие урагана.

Индивид решает вопрос: каков для него оптимальный объем страхового покрытия?

Очевидно, что оптимальным для него объемом страхового покрытия является такая величина Z^*, которая максимизирует функцию ожидаемой полезности:

$$U(w)=\alpha u(w_L)+(1-\alpha)u(w_{NL}).$$

Или:

$$U(w)=\alpha u(w-L+Z-p\cdot Z)+(1-\alpha)u(w-p\cdot Z).$$

Поскольку функция ожидаемой полезности не склонного к риску индивида строго вогнута и $Z^*>0$, условие первого порядка является необходимым и достаточным условием глобального максимума:

$$U'(w)=\alpha u'(w-L+Z^*-p\cdot Z^*)(1-p)+(1-\alpha)u'(w-p\cdot Z^*)(-p)=0.$$

Предположим, что у страховой компании нет административных издержек и она предлагает актуарно справедливые страховые полисы [5] по цене за единицу страхового покрытия $\alpha=p$, которая приносит ей нулевую ожидаемую прибыль ($EPR=p\cdot Z-\alpha Z=0$ при $\alpha=p$). Тогда:

$$\begin{gathered}\alpha(1-\alpha)u'(w-L+Z^*-p\cdot Z^*) - \alpha(1-\alpha)u'(w-p\cdot Z^*)=0,\\ u'(w-L+Z^*-p\cdot Z^*) - u'(w-p\cdot Z^*)=0,\\ w-L+Z^*-p\cdot Z^* - w-p\cdot Z^*=0,\\ Z^*=L.\end{gathered}$$

Таким образом, в случае актуарно справедливой страховки не склонный к риску индивид покупает полную страховку и его богатство равно $w-\alpha L$ вне зависимости от исхода.

Пусть справедливая страховая сумма равна разности w_2-w_1 (покрытие потерь L в результате наступления неблагоприятного исхода), а справедливая цена страхового полиса (P):

$$P=\alpha(w_2-w_1)=w_2-Ew.$$

При покупке справедливой страховки не склонному к риску индивиду гарантирован одинаковый уровень богатства, независимо от того, наступит страховой случай или нет. Однако получаемая им полезность при наличии страховки $u(Ew)$ будет выше, чем ожидаемая полезность без страховки. Следует заметить также, что не склонный к риску индивид будет готов заплатить за страховку сумму, превышающую справедливую цену на величину премии за риск, т.е. вплоть до величины разности w_2-CE, при условии, что страховкой ему будет гарантировано богатство Ew (рис. 5.6).

Таким образом, максимальная цена, которую может назначить страховая компания за страховой полис, составляет:

$$P_{max}=P+RP.$$

Интерактивный рисунок из 3-х частей (Информация для технического специалиста: в качестве образца для оформления рисунка используйте Figure 7.4a, 7.4b по ссылке: https://www.core-econ.org/the-economy/microeconomics/07-firm-and-customers-02-breakfast-cereal.html#figure-7-4ad)

Рисунок 5.6. Страхование

Понятие премии за риск допускает альтернативную трактовку в терминах страховки от потенциального ущерба. Пусть в игре с двумя исходами x_1 и x_2, где $x_2>x_1=x_2-D$, которые могут произойти с вероятностями соответственно p_1 и $p_2=1-p_1$, индивид желает гарантировать себе получение максимального из выигрышей, т.е. x_2. При наступлении неблагоприятного исхода x_1, который представляет собой сокращение дохода на величину D по отношению к максимально возможному выигрышу x_2, страховая компания обещает данному индивиду в обмен на приобретение страхового полиса стоимостью I полностью компенсировать убыток в размере D. Таким образом, при оплате страховой премии I индивид гарантированно получит доход в размере x_2-I независимо от фактического выигрыша в данной игре. Очевидно, что максимальная стоимость страхового полиса, которую согласится заплатить индивид для получения гарантированного дохода x_2-I, удовлетворяет соотношению:

$$EU=p_1U(x_2-D)+(1-p_1)U(x_2)=p_1U(x_2-D-I+D)+(1-p_1)U(x_2-I)=U\left(x_2-I\right).$$

Следовательно, доход в размере $x_2 - I = CE$ представляет собой гарантированный эквивалент игры с исходами $x_1 = x_2 - D$ и x_2. При этом премия за риск страховой компании будет равна разнице между стоимостью страхового полиса I и ожидаемыми платежами по убыткам $p_1 D$:

$$Ex - CE = p_1 x_1 + p_2 x_2 - (x_2 - I) = p_1(x_2 - D) + (1 - p_1)x_2 - (x_2 - I) = I - p_1 D.$$

Числовой пример

Рассмотрим числовой пример, иллюстрирующий нахождение максимальной платы за страховку, которую может назначить страховая компания. Пусть индивид с элементарной функцией полезности $U(x) = \ln x$ располагает богатством в размере 100 денежных единиц, но с вероятностью $p_1 = 0,25$ в результате стихийного бедствия может потерять часть этого богатства на сумму $D = 20$ (ден. ед.). Очевидно, что справедливая плата за страховку, позволяющая страховой компании осуществлять безубыточную деятельность, будет равна ожидаемому платежу, связанному с потенциальными убытками страхователя: $I_{спр} = 0,25 \bullet 20 = 5$ (ден. ед.). Определим максимальную сумму, на которую страховая компания может рассчитывать для покрытия операционных издержек и получения прибыли при заключении страхового контракта.

Индивид не склонен к риску. Его ожидаемая полезность равна:

$$EU = 0,75 \bullet \ln 100 + 0,25 \bullet \ln 80 = 4,5494 = U\,(CE).$$

Максимальная плата за страховку I, которую может назначить страховая компания, должна удовлетворять равенству: $\ln\,(100 - I) = \ln CE = 4,5494.$

Решая полученное уравнение относительно гарантированного эквивалента игры $CE = 100 - I = e^{4,5494}$, найдем максимальную цену страхового полиса: $I = 100 - 94,58 = 5,42$.

5.2.4.2 Совместное несение рисков

Предположим, что существуют два несклонных к риску индивида с одинаковыми функциями полезности $U = (w)$. Пусть каждый из них располагает богатством w_1, стоимость которого сохранится с вероятностью p_1, но с вероятностью $p_2 = 1 - p_1$ возможно снижение стоимости активов до уровня w_2. Наступление этих событий является независимым для данных индивидов. С вероятностью p_1^2 у обоих индивидов богатство сохранит стоимость, с вероятностью $p_1\,(1 - p_1)$ у первого индивида активы сохранятся, в второй – понесет ущерб; наоборот, с вероятностью $(1 - p_1)p_1$ первый из них пострадает в финансовом плане, а второй – избежит потерь; наконец, с вероятностью $(1 - p_1)^2$ понесут убытки оба индивида. При этом у них есть возможность договориться о компенсации убытков друг другу. Иными словами, индивиды могут усреднять свои доходы при каждом из указанных возможных сочетаний событий. Фактически речь здесь идет об организации страхового кооператива.

Ожидаемая полезность каждого из них при совместном несении рисков составит:

$$EU_{гр} = p_1^2 U(w_1) + 2p_1\,(1 - p_1)U\big(\tfrac{w_1 + w_2}{2}\big) + (1 - p_1)^2 U\,(w_2).$$

Поскольку каждый из индивидов не приемлет риск, постольку для него справедливо неравенство Йенсена, характеризующее строго вогнутую элементарную функцию полезности, в котором, в частности, можно положить равновероятными наступление благоприятного и неблагоприятного исходов:

$$U\big(\tfrac{w_1 + w_2}{2}\big) > \tfrac{U(w_1) + U(w_2)}{2}.$$

Домножим обе части неравенства на $2p_1\,(1 - p_1)$:

$$2p_1\,(1 - p_1)U\left(\tfrac{w_1 + w_2}{2}\right) \geq p_1\,(1 - p_1)U(w_1) + p_1\,(1 - p_1)U(w_2) = p_1 U(w_1) - p_1^2 U(w_1) + (1 - p_1)U(w_2) - (1 - p_1)^2 U\,(w_2).$$

Преобразуя неравенство, получаем:

$$EU_{гр} = p_1^2 U(w_1) + 2p_1\,(1 - p_1)U\big(\tfrac{w_1 + w_2}{2}\big) + (1 - p_1)^2 U\,(w_2) \geq p_1 U(w_1) + (1 - p_1)U(w_2) = EU_{неогр}.$$

Таким образом, индивиду выгодно совместное несение рисков (рис. 5.7).

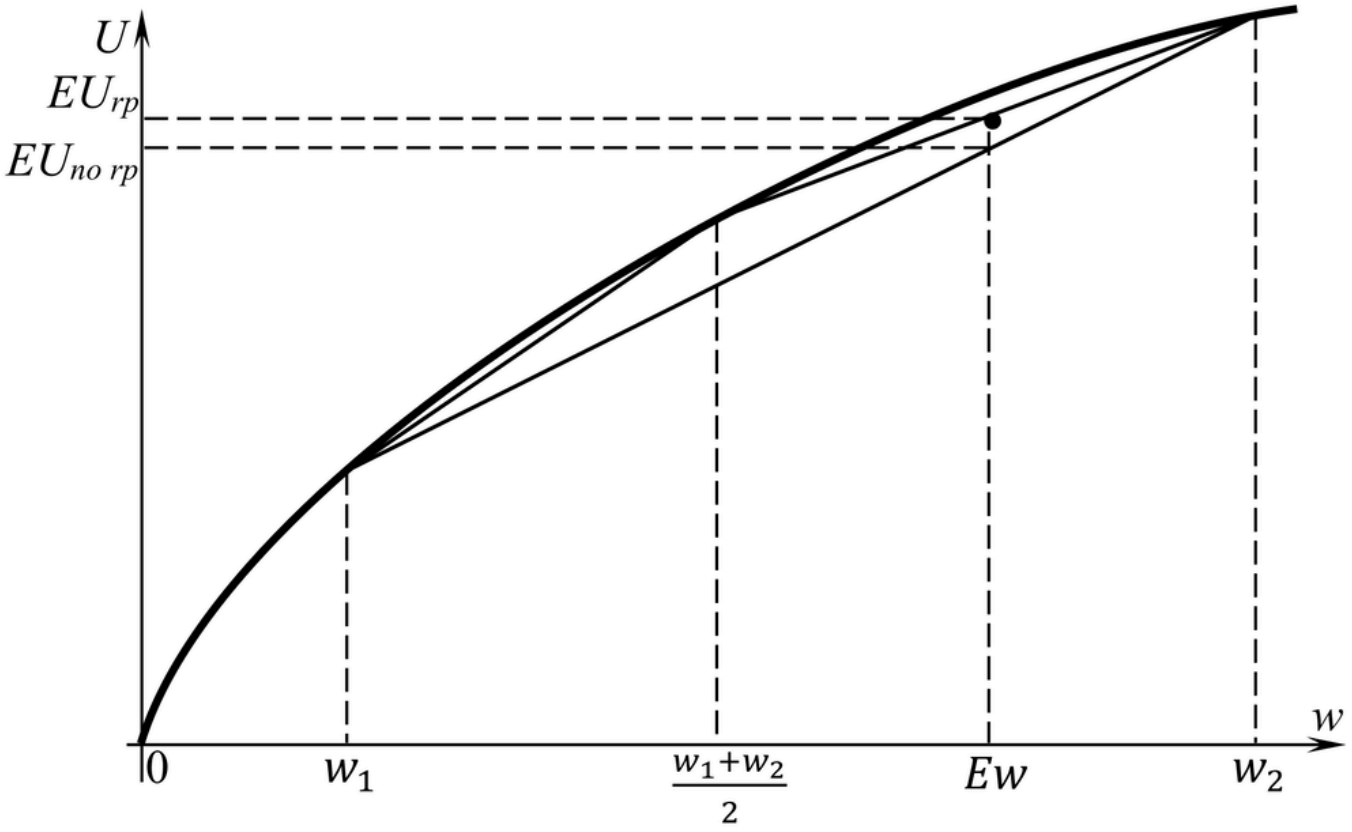


Рисунок 5.7. Выгоды от совместного несения рисков для рискофоба

Очевидно, что с точки зрения рискофила, для которого свойственно неравенство Йенсена, характеризующее строго выпуклую элементарную функцию полезности

$$U\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right) < \frac{U(w_1)+U(w_2)}{2},$$

соглашение о совместном несении рисков будет невыгодным.

Рискофил будет предпочитать ту из игр с одинаковым ожидаемым доходом, которая соответствует большей вариации возможных выигрышей, или, что эквивалентно, игру с более высокими вероятностями «крайних» значений дохода и без дополнительного промежуточного исхода, который близок к ожидаемому доходу (рис. 5.8).

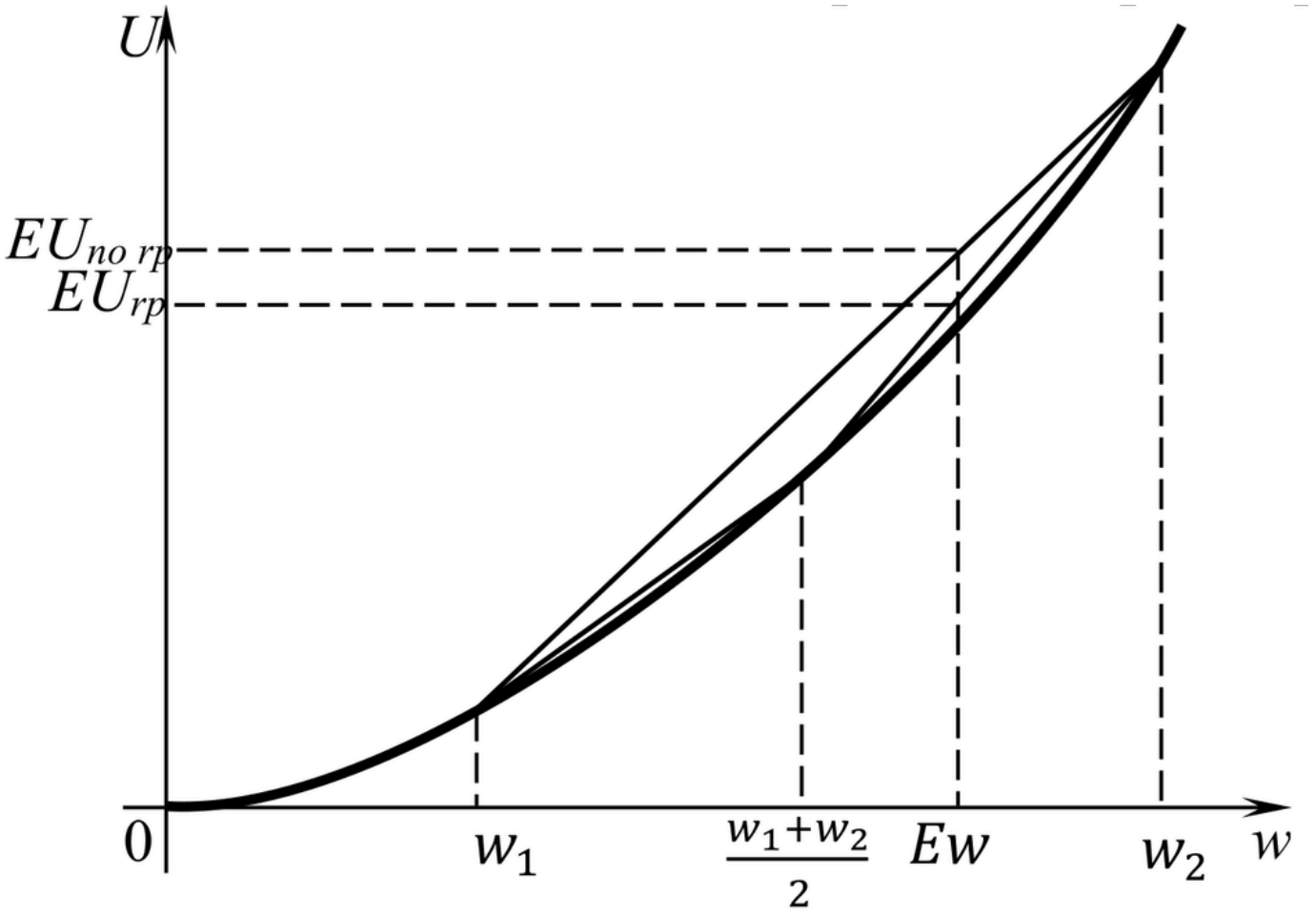


Рисунок 5.8. Невыгодность совместного несения риска для рискофила

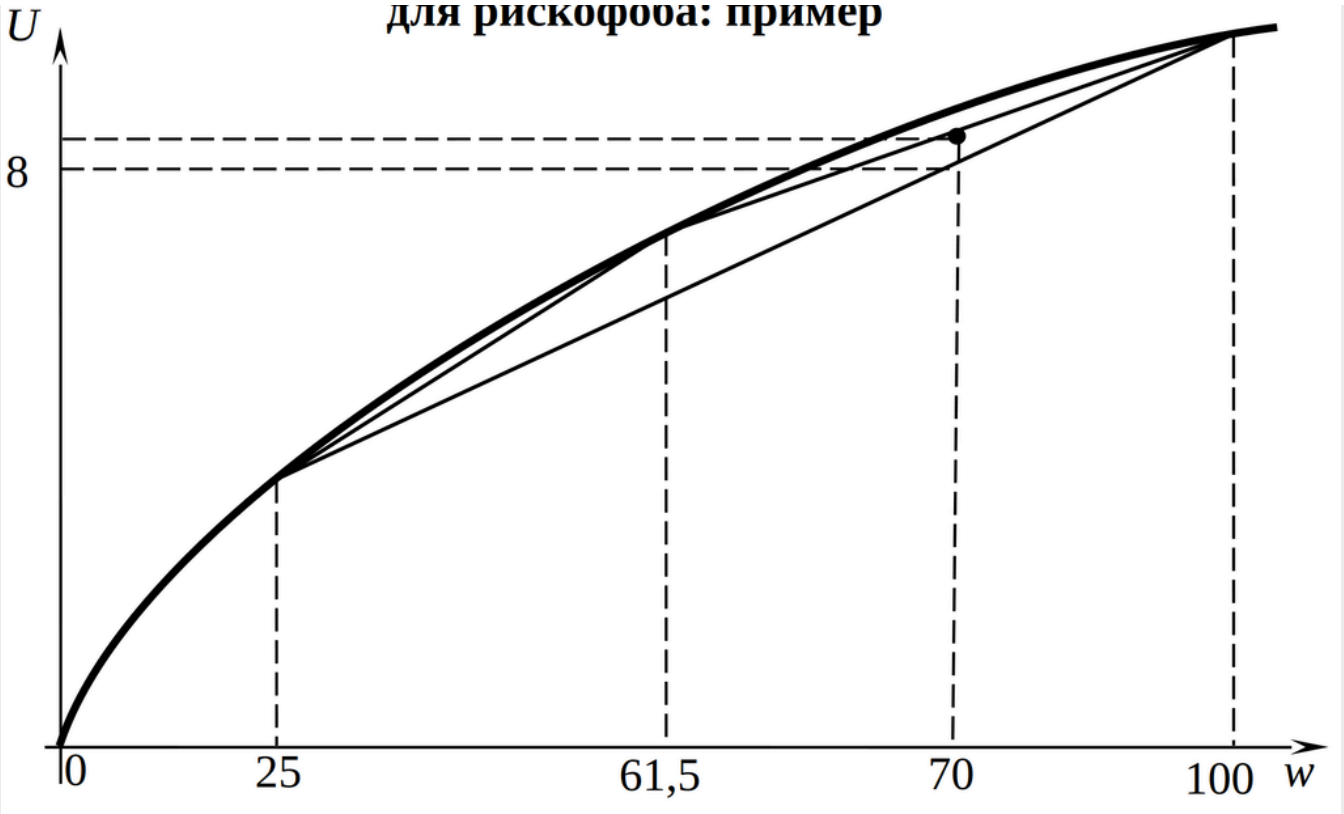
Числовой пример

Приведем пример, иллюстрирующий выгоды от совместного несения рисков для индивида, не склонного рисковать. Пусть его функция полезности по отношению к располагаемому богатству имеет вид: $U = \sqrt{w}$. *Допустим, далее, что данный индивид располагает некоторым активом стоимостью 100 (ден.ед.), которая с вероятностью* $\frac{2}{5}$ *может сократиться до 25 (ден.ед.). Ожидаемая стоимость этой игры при отсутствии совместного несения рисков составит:*
$Ew = \frac{3}{5} \bullet 100 + \frac{2}{5} \bullet 25 = 70.$

Рассчитаем ожидаемую полезность данного индивида при совместном несении рисков и сравним ее с ожидаемой полезностью без соглашения о компенсации убытков:

$$EU_{rp} = \frac{9}{25}\sqrt{100} + \frac{12}{25}\sqrt{61,5} + \frac{4}{25}\sqrt{25} = \frac{22+6\sqrt{10}}{5} > \frac{3}{5}\sqrt{100} + \frac{2}{5}\sqrt{25} = 8 = EU_{norp}.$$

Следовательно, соглашение о совместном несении рисков будет выгодным для данного индивида.



Выгоды от совместного несения рисков для рискофоба: пример

5.2.4.3. Спрос на рисковый актив

Активы – это объекты, которые дают индивиду право на получение финансового дохода. По форме они могут быть материальными, нематериальными или финансовыми.

Пусть у индивида есть возможность распределить свое первоначальное богатство w, приобретая безрисковый актив, гарантирующий полный возврат инвестированных денежных средств, и рисковый актив с доходностью, равной случайной величине z на каждую вложенную денежную единицу. Ожидаемый доход z имеет распределение вероятностей $P(z) = \int\limits_{z_0}^{z_1} p(z)\,dz$, где $p(z)$ – функция плотности вероятности получения соответствующего дохода. Пусть также при этом вложения в актив – актуарно выгодная (привлекательная) игра:

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} zp(z)\,dz > 1, (5.2.1)$$

т.е. математическое ожидание дохода рискового актива превышает отдачу от безрискового.

Если α и β – количества средств, направленных соответственно на рискованные и безрисковые вложения (т.е. $\alpha + \beta = w$), то отдача от инвестиций составит: $\alpha z + \beta$.

Рациональный инвестор, максимизируя ожидаемую полезность, будет стремиться оптимальным образом выбрать размер вложений в рисковый актив:

$$\max_\alpha \int\limits_{z_0}^{z_1} U\left(w + \alpha(z-1)\right)p(z)\,dz:$$
$$\alpha + \beta = w, \alpha \geq 0, \beta \geq 0;$$

или, что эквивалентно,

$$\min_\alpha \int\limits_{z_1}^{z_0} U\left(w + \alpha(z-1)\right)p(z)\,dz:$$
$$-\alpha \leq 0, \alpha - w \leq 0.$$

Выпишем функцию Лагранжа:

$$L = \int\limits_{z_1}^{z_0} \lambda_0 U\left(w + \alpha(z-1)\right)p(z)\,dz - \lambda_1\alpha + \lambda_2\left(\alpha - w\right),$$

где λ_i, $i = \{0, 1, 2\}$ – множители Лагранжа.

Необходимые условия минимума представляют собой уравнение Эйлера $\left(\frac{-d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}+\frac{\partial L}{\partial \alpha}=0\right)$, которое сводится к равенству нулю производной лагранжиана:

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha}=\int\limits_{z_1}^{z_0}\lambda_0 U'\left(w+\alpha\left(z-1\right)\right)\left(z-1\right)p(z)dz-\lambda_1+\lambda_2=0, (5.2.2)$$

с учетом условий дополняющей нежесткости:

$$\lambda_1\alpha=0 при \alpha\geq 0, \lambda_1\geq 0; (5.2.3)$$

$$\lambda_2(\alpha-w)=0 при \lambda_2\geq 0, \alpha\leq w. (5.2.4)$$

В соответствии с (5.2.3) возможны два случая.

Во-первых, если $\lambda_1\geq 0$, то $\alpha=0$. При этом в условии (5.2.4) первый случай, когда $\alpha=w$, $\lambda_2\geq 0$, отпадает; поэтому возможна лишь альтернативная ситуация $\alpha<w$, $\lambda_2=0$. Следовательно, (5.2.2) принимает вид:

$$\int\limits_{z_0}^{z_1}\lambda_0 U'\left(w+\alpha\left(z-1\right)\right)(z-1)p(z)dz=-\lambda_1\leq 0. (5.2.5)$$

Если в условии (5.2.4) все–таки верна альтернатива, когда $\alpha=w$ и $\lambda_2\geq 0$, то при этом обязательно будет $\alpha>0$, значит, $\lambda_1=0$, т.е. должна реализоваться вторая возможность в условии (5.2.3). Тогда (5.2.2) будет выглядеть так:

$$\int\limits_{z_0}^{z_1}\lambda_0 U'\left(w+\alpha\left(z-1\right)\right)(z-1)p(z)dz=\lambda_2\geq 0. (5.2.6)$$

Если $\lambda_0=0$, то в каждой из альтернатив (5.2.5) и (5.2.6) получается, что $\lambda_1=\lambda_2=0$, чего не может быть, поскольку вектор множителей Лагранжа должен быть ненулевым. Следовательно, $\lambda_0>0$, и без ограничения общности можно положить его равным единице, пронормировав относительно него остальные множители Лагранжа. Тогда условия (5.2.5) и (5.2.6) соответственно можно записать в более простом виде:

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} U'\left(w+\alpha\left(z-1\right)\right)(z-1)p(z)dz=-\lambda_1\leq 0, (5.2.7)$$

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} U'\left(w+\alpha\left(z-1\right)\right)(z-1)p(z)dz=\lambda_2\geq 0. (5.2.8)$$

Обозначим через $\varphi\left(\alpha\right)$ левые части в (5.2.7) и (5.2.8):

$$\varphi\left(\alpha\right)\equiv\int\limits_{z_0}^{z_1} U'\left(w+\alpha\left(z-1\right)\right)(z-1)p(z)dz.$$

Отметим, что в силу предположения (5.2.1) и строго возрастания $U(\cdot)$ имеет место неравенство:

$$\varphi(0)=\int\limits_{z_0}^{z_1} U'(w)(z-1)p(z)dz=U'(w)\int\limits_{z_0}^{z_1}(z-1)p(z)dz=U'(w)\int\limits_{z_0}^{z_1}zp(z)dz-U'(w)\int\limits_{z_0}^{z_1}p(z)dz=U'(w)\left(\int\limits_{z_0}^{z_1}zp(z)dz-1\right)>0.$$

Следовательно, (5.2.7) неверно, первый случай в условии (5.2.3) $(\alpha=0)$ отпадает, а значит, возможна только ситуация $\alpha>0$.

Таким образом, если рискованный актив имеет ожидаемую доходность, превышающую отдачу от безрискового актива, то рациональный инвестор обязательно будет вкладывать в него некоторую часть своих средств.

5.2.4.4. Микроэкономическая теория оптимального инвестиционного портфеля

Задачи поведения инвестора, выбирающего оптимальный портфель активов, по своей постановке и свойствам решений во многом аналогичны задачам потребительского выбора (2.6) и (2.47).

Для упрощения анализа будем рассматривать инвестиционные портфели, состоящие из трех активов. Выпишем условие для долей активов $(x_i, i=1,2,3)$ в портфеле:

$$x_1+x_2+x_3=1, x_3=1-x_1-x_2\geq 0.$$

Пока абстрагируемся от возможности коротких продаж и будем рассматривать только приобретение активов за собственные средства. Итак, будем считать, что все доли активов в инвестиционном портфеле неотрицательны $(x_i\geq 0, i=1,2,3)$. Другими словами, множество X долей активов $x=\{x_i\}_{i=1}^3$ является подмножеством $R_3^{+:}$ $X=\left\{x=\{x_i\}_{i=1}^3 | x_i\geq 0\right\}$.

С учетом данной предпосылки $(x_3\geq 0)$ ограничение по долям активов можно переписать в следующем виде: $x_1+x_2\leq 1$.

Первая из двух задач выбора, стоящих перед инвестором [6], представляет собой минимизацию риска портфеля активов

$$V=x_1^2(\sigma_{11}-2\sigma_{13}+\sigma_{33})+x_2^2(\sigma_{22}-2\sigma_{23}+\sigma_{33})+2x_1x_2(\sigma_{12}-\sigma_{13}-\sigma_{23}+\sigma_{33})+2x_1(\sigma_{13}-\sigma_{33})+2x_2(\sigma_{23}-\sigma_{33})+\sigma_{33}$$

в условиях ограничения по уровню его доходности

$$E=\mu_3+x_1(\mu_1-\mu_3)+x_2\left(\mu_2-\mu_3\right)\geq\overline{E}:$$

$$\begin{cases} x_1^2(\sigma_{11}-2\sigma_{13}+\sigma_{33})+x_2^2(\sigma_{22}-2\sigma_{23}+\sigma_{33})++2x_1x_2(\sigma_{12}-\sigma_{13}-\sigma_{23}+\sigma_{33})+2x_1(\sigma_{13}-\sigma_{33})+2x_2(\sigma_{23}-\sigma_{33})+\sigma_{33}\to 1 \\ \mu_3+x_1(\mu_1-\mu_3)+x_2\left(\mu_2-\mu_3\right)\geq\overline{E}, x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_1+x_2\leq 1. \end{cases}$$

Докажем, что в силу непрерывности вариации доходности портфеля и компактности допустимого для инвестора множества $S \equiv$ решение данной задачи связанной максимизации полезности – оптимальный инвестиционный портфель *x* – существует. Допустимое множество *S* в данной задаче инвестиционного выбора – компакт. Поэтому по теореме Вейерштрасса[7] непрерывная (по предположению) функция вариации доходности портфеля $V : x \longmapsto V(x), x \in S$ достигает минимума на допустимом множестве *S*. Таким образом, задача связанной минимизации риска имеет решение, т.е. оптимальный портфель активов *x* существует.

На рис. 5.9 приводится пространственная иллюстрация решения задачи выбора инвестиционного портфеля.

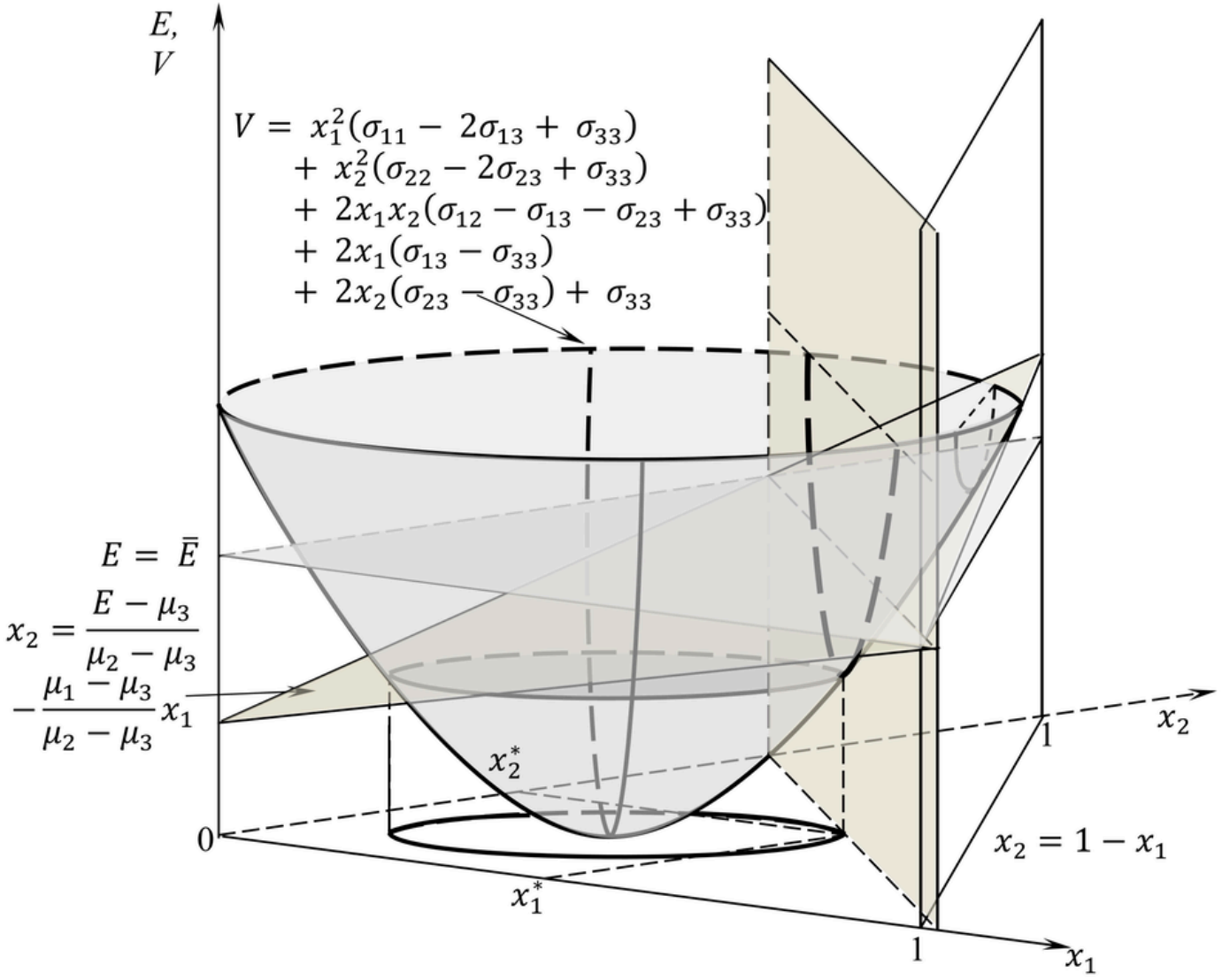


Рисунок 5.9. Минимизация риска при ограничении по доходности (ограничение по долям активов нежесткое)

Поскольку вариация является строго выпуклой функцией, постольку решение задачи условной минимизации риска, т.е. оптимальный инвестиционный портфель x, является единственным. Будем доказывать единственность оптимального портфеля активов от противного. Пусть найдется другой, не равный полученной нами комбинации активов *x* портфель x', который также является решением данной задачи. Допустимое множество *S* является выпуклым. Поэтому весь интервал, соединяющий точки x и x' и состоящий из точек вида $\alpha x + (1-\alpha)x'$, $\alpha \in (0,1)$, содержится в *S*. Поскольку вариация является строго выпуклой функцией, постольку $V\left(\alpha x + (1-\alpha)x'\right) < \alpha V(x) + (1-\alpha)V\left(x'\right) = V(x) = V(x')$. Но данное неравенство противоречит условию, гласящему, что x и x' – решения задачи связанной минимизации риска, т.е. оптимальные комбинации активов. Полученное противоречие показывает, что гипотеза о неединственности оптимального инвестиционного портфеля является ложной. Следовательно, оптимальный портфель *x* является единственным решением данной задачи.

Итак, доказав единственность оптимального инвестиционного портфеля, мы показали, что локальный максимум в задаче связанной минимизации риска совпадает с глобальным.

Решение задачи связанной минимизации риска – оптимальный инвестиционный портфель x – обладает таким свойством, что ограничение по уровню доходности на нем выполняется в виде равенства:

$$\sum_{i=1}^{3} \mu_i x_i = \overline{E}.$$

Покажем это, пользуясь методом доказательства от противного. Предположим, что данное утверждение неверно: $\sum_{i=1}^{3}\mu_i x_i > \overline{E}$.

Поскольку $x \neq 0$, постольку найдется инвестиционный портфель $\widetilde{x} = \left\{\widetilde{x}_i\right\}_{i=1}^{3}$, такой, что

$\widetilde{x}_i = x_i, i = \{1,2,3\}, i \neq k; \widetilde{x}_k = x_k - \varepsilon, \varepsilon > 0, k \in \{1,2,3\}$ и $\sum_{i=1}^{3}\mu_i x_i \geq \overline{E}$, поскольку линейная функция, в данном случае $\sum_{i=1}^{3}\mu_i x_i$, является непрерывной [8]. Поскольку, по предположению, абсолютный минимум вариации $\breve{x}$ располагается вне допустимого множества S, постольку внутри S вариация будет убывающей функцией по доле вложений в каждый из активов. Следовательно, вектор $\widetilde{x}$, содержащий каждого актива не меньше, а *k*-го – больше, чем портфель x, должен быть менее рискованным: $V(\widetilde{x}) < V(x)$. Значит, инвестиционный портфель x, лежащий во внутренности ограничения по доходности, не является оптимальным. Полученное противоречие показывает, что выдвинутая гипотеза неверна, и ограничение по доходности при решении задачи связанной минимизации риска выполняется как равенство.

С учетом жесткого ограничения по доходности, предполагая, что оптимум является внутренним, т.е. доли каждого из активов положительны $(x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0)$, задачу связанной минимизации риска можно поставить в более простом виде:

$$\begin{cases} x_1^2(\sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33}) + x_2^2(\sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33}) + +2x_1x_2(\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2x_1(\sigma_{13} - \sigma_{33}) + 2x_2(\sigma_{23} - \sigma_{33}) + \sigma_{33} \to 1 \\ x_1(\mu_1 - \mu_3) + x_2(\mu_2 - \mu_3) + \mu_3 = \overline{E}. \end{cases}$$

В силу того, что выражения доходности и вариации являются дифференцируемыми, для решения данной задачи следует составить функцию Лагранжа:

$$L = x_1^2(\sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33}) + x_2^2(\sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2x_1x_2(\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2x_1(\sigma_{13} - \sigma_{33}) + 2x_2(\sigma_{23} - \sigma_{33}) + \sigma_{33} -$$

где λ – множитель Лагранжа [9].

Необходимым условием экстремума является равенство нулю ее дифференциала:

$$dL = dV(x_1, x_2) - d\Big(\lambda\left(x_1(\mu_1 - \mu_3) + x_2(\mu_2 - \mu_3) + \mu_3 - \overline{E}\right)\Big) = \tfrac{\partial V}{\partial x_1}dx_1 + \tfrac{\partial V}{\partial x_2}dx_2 - \lambda((\mu_1 - \mu_3)dx_1 + (\mu_2 - \mu_3)dx_2) - \Big($$

Здесь мы предполагаем доходности активов μ_1, μ_2, μ_3 и портфеля в целом $\overline{E}$ постоянными величинами.

Дифференциал функции Лагранжа может быть нулевым при любых значениях дифференциалов независимых переменных, только если множители при данных дифференциалах являются нулевыми:

$$\begin{cases} MV_1 = \lambda\,(\mu_1 - \mu_3), \\ MV_2 = \lambda\,(\mu_2 - \mu_3), \\ x_1(\mu_1 - \mu_3) + x_2(\mu_2 - \mu_3) + \mu_3 = \overline{E}. \end{cases} \qquad (5.2.10)$$

Поделив первое равенство в системе (5.2.10) на второе, получаем, что инвестор оптимизирует свой портфель, когда отношение предельного риска по каждому из двух активов равняется отношению его маржи доходности по отношению к третьему активу. По-другому условие (5.2.10) можно оформить в виде второго закона Госсена в том смысле, что прирост риска в расчете на единицу маржинальной доходности для каждого из двух активов, должен быть одинаков:

$$\tfrac{MV_1}{\mu_1 - \mu_3} = \tfrac{MV_2}{\mu_2 - \mu_3} = \lambda.$$

Таким образом, с учетом выражения для предельной нормы замещения активов можно выписать обобщающее условие оптимального инвестиционного портфеля:

$$MRS_{12} \equiv \tfrac{-dx_2}{dx_1}\Big|_{V=const} = \tfrac{\partial V/\partial x_1}{\partial V/\partial x_2} = \tfrac{MV_1}{MV_2} =$$

$$\tfrac{x_1(\sigma_{11}-2\sigma_{13}+\sigma_{33})+x_2(\sigma_{12}-\sigma_{13}-\sigma_{23}+\sigma_{33})+\sigma_{13}-\sigma_{33}}{x_2(\sigma_{22}-2\sigma_{23}+\sigma_{33})+x_1(\sigma_{12}-\sigma_{13}-\sigma_{23}+\sigma_{33})+\sigma_{23}-\sigma_{33}} = \tfrac{\mu_1-\mu_3}{\mu_2-\mu_3}. \quad (5.2.11)$$

Итак, в точке оптимума изомина (линия равной доходности)

$$x_2 = \tfrac{\overline{E}-\mu_3}{\mu_2-\mu_3} - \tfrac{\mu_1-\mu_3}{\mu_2-\mu_3}x_1$$

является касательной к изовариации (линии равного риска) (рис. 2.32).

Вариациями решения задачи (5.2.9) формирования инвестиционного портфеля по доходностям отдельных активов и портфеля в целом являются функции спроса на активы (по Маршаллу):

$$x_i^m = x_i\,(\mu_1, \mu_2, \mu_3, E), i = 1,2,3.$$

Для того, чтобы получить данные функции, воспользуемся траекторией роста доходности портфеля, которая представляет собой множество оптимальных пропорций между активами, соответствующих различным ограничениям по уровню доходности портфеля в целом, и выводится на основе сформулированного выше эквимаржинального принципа:

$x_1 = ax_2 + b$, где

$$a = \tfrac{\mu_1(\sigma_{22}-2\sigma_{23}+\sigma_{33})-\mu_2(\sigma_{12}-\sigma_{13}-\sigma_{23}+\sigma_{33})+\mu_3(\sigma_{12}-\sigma_{13}-\sigma_{22}+\sigma_{23})}{-\mu_1(\sigma_{12}-\sigma_{13}-\sigma_{23}+\sigma_{33})+\mu_2(\sigma_{11}-2\sigma_{13}+\sigma_{33})+\mu_3(-\sigma_{11}+2\sigma_{13}+\sigma_{12}-\sigma_{23})},$$

$$b = \tfrac{\mu_1(\sigma_{23}-\sigma_{33})-\mu_2(\sigma_{13}-\sigma_{33})+\mu_3(\sigma_{13}-\sigma_{23})}{-\mu_1(\sigma_{12}-\sigma_{13}-\sigma_{23}+\sigma_{33})+\mu_2(\sigma_{11}-2\sigma_{13}+\sigma_{33})+\mu_3(-\sigma_{11}+2\sigma_{13}+\sigma_{12}-\sigma_{23})}.$$

Используя данное соотношение в ограничении по доходности портфеля, можно получить искомые функции спроса на активы (ср. рис. 2.6-2.7):

$\overline{E} = x_1(\mu_1 - \mu_3) + x_2(\mu_2 - \mu_3) + \mu_3 = (ax_2 + b)(\mu_1 - \mu_3) + x_2(\mu_2 - \mu_3) + \mu_3 = x_2(a\mu_1 + \mu_2 - (1+a)\mu_3) + b\mu_1 + (1-b)$

или

$$x_2 = \frac{\overline{E} - b\mu_1 + (b-1)\mu_3}{a\mu_1 + \mu_2 - (1+a)\mu_3},$$

$$x_1 = ax_2 + b = \frac{a\left(\overline{E} - b\mu_1 + (b-1)\mu_3\right)}{a\mu_1 + \mu_2 - (1+a)\mu_3} + b = \frac{a\overline{E} + b\mu_2 - (a+b)\mu_3}{a\mu_1 + \mu_2 - (1+a)\mu_3}.$$

Построим теперь косвенную функцию вариации:

$$V(x_1, x_2) = V\left(x_1\left(\mu_1, \mu_2, \mu_3, E\right), x_2\left(\mu_1, \mu_2, \mu_3, E\right)\right). \quad (5.2.12)$$

$V = x_1^2(\sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33}) + x_2^2(\sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2x_1x_2(\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2x_1(\sigma_{13} - \sigma_{33}) + 2x_2(\sigma_{23} - \sigma_{33}) + \sigma_{33} =$

где

$$c = \sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33}, d = \sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33}, e = \sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33},$$
$$f = 2\left(\sigma_{13} - \sigma_{33}\right), g = 2\left(\sigma_{23} - \sigma_{33}\right).$$

Опираясь на теорему об огибающей (xii) применительно к задаче связанной минимизации риска (5.2.9) и соответствующей функции Лагранжа, можно доказать, что по экономическому смыслу множитель Лагранжа в задаче оптимизации инвестиционного портфеля (5.2.9) представляет собой предельный риск увеличения доходности, или угловой коэффициент касательной к линии инвестиционных альтернатив:

$$\lambda = \frac{dV}{dE}. \quad (5.2.13)$$

Рассмотрим теперь теорему об огибающей (xii) применительно к изменению доходности одного из активов:

$$\frac{dV}{d\mu_i} = -\lambda x_i\left(\mu_1, \mu_2, \mu_3, E\right), i = 1, 2, 3.$$

Учитывая в данном соотношении экономический смысл множителя Лагранжа (5.2.13), можно получить тождество Роя:

$$x_i(\mu_1, \mu_2, \mu_3, E) = \frac{-\frac{dV}{d\mu_i}}{\frac{dV}{dE}}, i = 1, 2, 3.$$

Симметричным по отношению к задаче минимизации риска при условии обеспечения заданного уровня доходности портфеля активов (5.2.9) является поведение инвестора, ориентирующегося на максимизацию ожидаемой доходности портфеля

$$E = x_1(\mu_1 - \mu_3) + x_2(\mu_2 - \mu_3) + \mu_3$$

при ограничении по риску

$V = x_1^2(\sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33}) + x_2^2(\sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2x_1x_2(\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2x_1(\sigma_{13} - \sigma_{33}) + 2x_2(\sigma_{23} - \sigma_{33}) + \sigma_{33} \leq$

$$\begin{cases} x_1(\mu_1 - \mu_3) + x_2(\mu_2 - \mu_3) + \mu_3 \to \max_{x_1, x_2} \\ x_1^2(\sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33}) + x_2^2(\sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33}) + \\ \quad + 2x_1x_2(\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2x_1(\sigma_{13} - \sigma_{33}) + 2x_2(\sigma_{23} - \sigma_{33}) + \sigma_{33} \leq \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1. \end{cases}$$

Аналогично задаче связанной минимизации риска (5.2.9) оптимум портфеля в задаче условной максимизации доходности (5.2.14) достигается на ограничении по заданному уровню риска, что позволяет упростить постановку последней задачи (рис. 5.10):

$$\begin{cases} x_1(\mu_1 - \mu_3) + x_2(\mu_2 - \mu_3) + \mu_3 \to \max_{x_1, x_2} \\ x_1^2(\sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33}) + x_2^2(\sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33}) + \\ \quad + 2x_1x_2(\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2x_1(\sigma_{13} - \sigma_{33}) + 2x_2(\sigma_{23} - \sigma_{33}) + \sigma_{33} = \end{cases}$$

Здесь, как и ранее, предполагается, что оптимум в задаче является внутренним: $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$.

Двойственность между задачами связанной минимизации риска (5.2.9) и максимизации доходности (5.2.14) портфеля при условии неизменности доходностей активов и их волатильности состоит в следующем. Если рассчитать, используя решение (x_1, x_2), минимальный уровень риска V в задаче (5.2.9) и рассматривать его в качестве ограничения $\overline{V}$, то решение задачи (5.2.14) (x_1, x_2) совпадет с ответом в (5.2.9). При этом величина доходности портфеля в (5.2.14) совпадет с данным ограничением в (5.2.9).

Другими словами, если $\min_{x_1, x_2} V\left(x_1, x_2\right) = \overline{V}$ при условии $x_1(\mu_1 - \mu_3) + x_2(\mu_2 - \mu_3) + \mu_3 \geq \overline{E}, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1$, то $\max_{x_1, x_2}((\mu_1 - \mu_3)x_1 + (\mu_2 - \mu_3)x_2 + \mu_3) = \overline{E}$ при выполнении ограничения: $V\left(x_1, x_2\right) \geq \overline{V}, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1$.

Решение задачи максимизации доходности при условии достижения заданного уровня риска (5.2.14) аналогично задаче минимизации риска при ограничении по доходности портфеля (5.2.9) можно свести к исследованию на безусловный экстремум функции Лагранжа:

$L = x_1(\mu_1 - \mu_3) + x_2(\mu_2 - \mu_3) + \mu_3 - \lambda\left(x_1^2(\sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33}) + x_2^2(\sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2x_1x_2(\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2x\right.$

Необходимым условием экстремума функции Лагранжа является равенство нулю ее дифференциала:

$$dL = dE - d\Big(\lambda\left(V(x_1,x_2) - \overline{V}\right)\Big) = dE - \left(V(x_1,x_2) - \overline{V}\right)d\lambda - \lambda dV(x_1,x_2)$$

$$(\mu_1 - \mu_3)dx_1 + (\mu_2 - \mu_3)dx_2 - \left(V(x_1,x_2) - \overline{V}\right)d\lambda - \lambda\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}dx_2\right)$$

$$\left(\mu_1 - \mu_3 - \lambda\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)dx_1 + \left(\mu_2 - \mu_3 - \lambda\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)dx_2 - \left(V(x_1,x_2) - \overline{V}\right)d\lambda = \frac{\partial L}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial L}{\partial \lambda}d\lambda = 0.$$

Дифференциал функции Лагранжа может быть нулевым при любых значениях дифференциалов независимых переменных, только если множители при данных дифференциалах являются нулевыми:

$$\begin{cases} \mu_1 - \mu_3 = \lambda MV_1 = 2\lambda\left(x_1(\sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33}) + x_2(\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33}) + \sigma_{13} - \sigma_{33}\right), \\ \mu_2 - \mu_3 = \lambda MV_2 = 2\lambda\left(x_2(\sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33}) + x_1(\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33}) + \sigma_{23} - \sigma_{33}\right), \\ x_1^2(\sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33}) + x_2^2(\sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2x_1x_2\left(\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33}\right) \\ \qquad +2x_1(\sigma_{13} - \sigma_{33}) + 2x_2(\sigma_{23} - \sigma_{33}) + \sigma_{33} = \overline{V}; \end{cases}$$

из чего аналогично задаче условной минимизации риска (5.2.9) вытекает эквимаржинальный принцип (5.2.11).

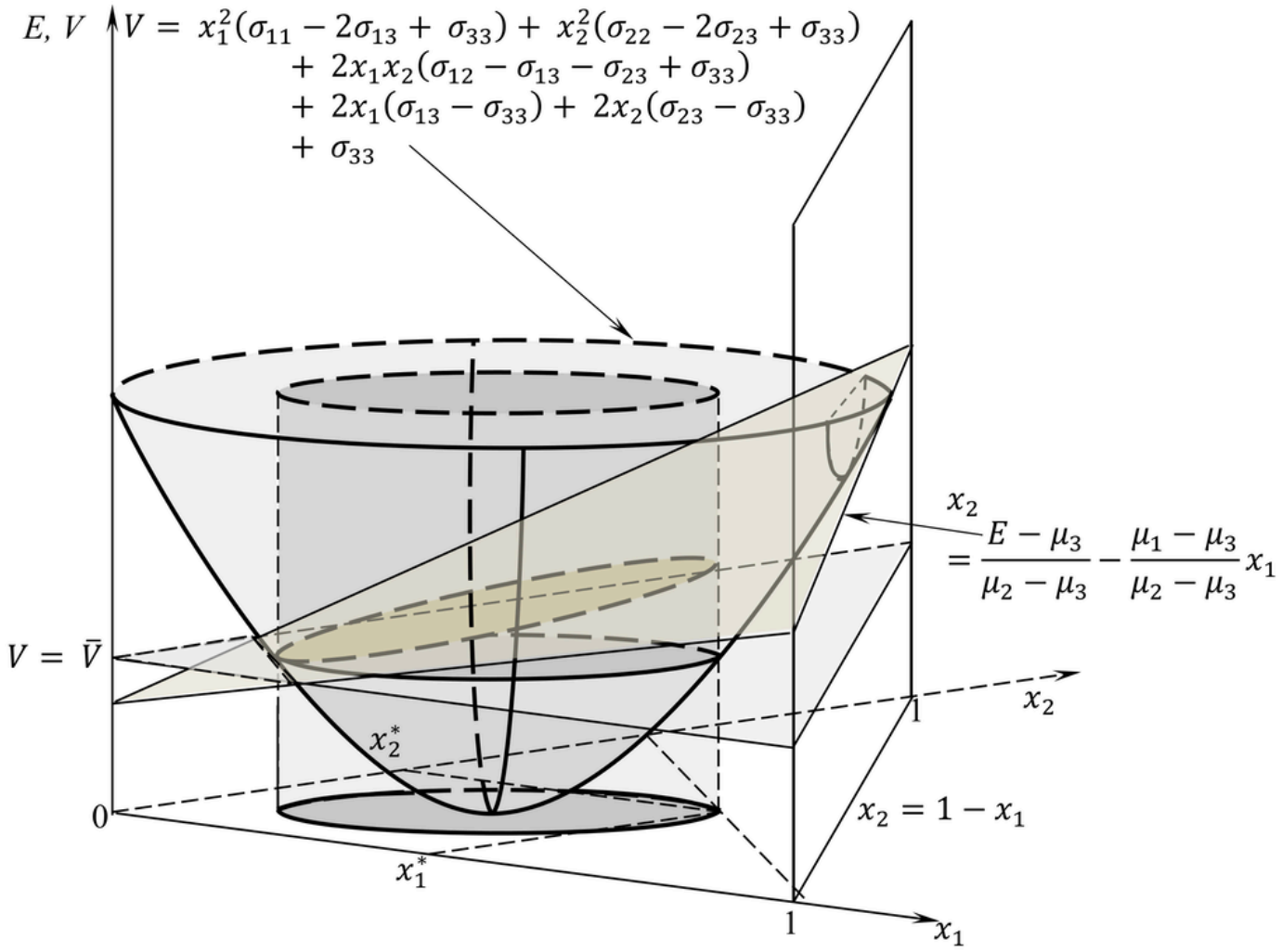


Рисунок 5.10. Максимизация доходности при ограничении по риску (ограничение по долям активов нежесткое)

Эквимаржинальное условие оптимальности инвестиционного портфеля будет совпадать с тем, которое было сформулировано при решении задачи (5.2.9):

$$x_1 = ax_2 + b, \text{ где}$$

$$a = \frac{\mu_1(\sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33}) - \mu_2(\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33}) + \mu_3(\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{22} + \sigma_{23})}{-\mu_1(\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33}) + \mu_2(\sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33}) + \mu_3(-\sigma_{11} + 2\sigma_{13} + \sigma_{12} - \sigma_{23})},$$

$$b = \frac{\mu_1(\sigma_{23} - \sigma_{33}) - \mu_2(\sigma_{13} - \sigma_{33}) + \mu_3(\sigma_{13} - \sigma_{23})}{-\mu_1(\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33}) + \mu_2(\sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33}) + \mu_3(-\sigma_{11} + 2\sigma_{13} + \sigma_{12} - \sigma_{23})}$$

Решая задачу (5.2.14), можно получить зависимости между оптимальными долями активов и их доходностями, а также уровнем риска $\overline{V}$, выступающим в качестве ограничения:

$$x_i^h = x_i\left(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \overline{V}\right), i = 1,2,3; (5.2.15)$$

которые называются функциями условного спроса на активы (по Хиксу), или компенсированного спроса.

Выведем их в явном виде для анализируемого случая, когда портфель состоит из трех активов:

$$x_1^2(\sigma_{11}-2\sigma_{13}+\sigma_{33})+x_2^2(\sigma_{22}-2\sigma_{23}+\sigma_{33})+2x_1x_2(\sigma_{12}-\sigma_{13}-\sigma_{23}+\sigma_{33})+2x_1(\sigma_{13}-\sigma_{33})+2x_2(\sigma_{23}-\sigma_{33})+\sigma_{33}=cx_1^2$$

где

$$c=\sigma_{11}-2\sigma_{13}+\sigma_{33}, d=\sigma_{22}-2\sigma_{23}+\sigma_{33}, e=\sigma_{12}-\sigma_{13}-\sigma_{23}+\sigma_{33},$$
$$f=2\left(\sigma_{13}-\sigma_{33}\right), g=2\left(\sigma_{23}-\sigma_{33}\right).$$

После очевидных преобразований

$$c(ax_2+b)^2+dx_2^2+e\left(ax_2+b\right)x_2+f(ax_2+b)+gx_2+\sigma_{33}=\overline{V},$$
$$(ca+d+ea)x_2^2+(2abc+eb+af+g)x_2+cb^2+bf+\sigma_{33}-\overline{V}=0$$

приходим к выражению:

$$hx_2^2+ix_2+j-\overline{V}=0,$$

где

$$h=(c+e)a+d, i=2abc+eb+af+g, j=cb^2+bf+\sigma_{33}.$$

Получаем:

$$x_2=\frac{-i\pm\sqrt{i^2-4h(j-\overline{V})}}{2h}, x_1=\frac{-i\pm\sqrt{i^2-4h(j-\overline{V})}}{2h}a+b.$$

Очевидно, что при отсутствии коротких продаж следует выбрать положительные значения x_1 и x_2.

Построим функцию доходности портфеля подстановкой функций компенсированного спроса (5.2.15) в выражение отдачи от инвестиционного портфеля:

$$E\left(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\overline{V}\right)=(\mu_1-\mu_3)x_1\left(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\overline{V}\right)+(\mu_2-\mu_3)x_2\left(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\overline{V}\right)+\mu_3.$$

Линия *E–V* имеет вид:

$$E=b\mu_1+(1-b)\mu_3+\frac{-i\pm\sqrt{i^2-4h\left(j-\overline{V}\right)}}{2h}\left(a\mu_1+\mu_2-(1+a)\mu_3\right),$$

где

$$a=\frac{\mu_1(\sigma_{22}-2\sigma_{23}+\sigma_{33})-\mu_2(\sigma_{12}-\sigma_{13}-\sigma_{23}+\sigma_{33})+\mu_3(\sigma_{12}-\sigma_{13}-\sigma_{22}+\sigma_{23})}{-\mu_1(\sigma_{12}-\sigma_{13}-\sigma_{23}+\sigma_{33})+\mu_2(\sigma_{11}-2\sigma_{13}+\sigma_{33})+\mu_3(-\sigma_{11}+2\sigma_{13}+\sigma_{12}-\sigma_{23})},$$
$$b=\frac{\mu_1(\sigma_{23}-\sigma_{33})-\mu_2(\sigma_{13}-\sigma_{33})+\mu_3(\sigma_{13}-\sigma_{23})}{-\mu_1(\sigma_{12}-\sigma_{13}-\sigma_{23}+\sigma_{33})+\mu_2(\sigma_{11}-2\sigma_{13}+\sigma_{33})+\mu_3(-\sigma_{11}+2\sigma_{13}+\sigma_{12}-\sigma_{23})}$$
$$h=(c+e)a+d, i=2abc+eb+af+g, j=cb^2+bf+\sigma_{33}, c=\sigma_{11}-2\sigma_{13}+\sigma_{33},$$
$$d=\sigma_{22}-2\sigma_{23}+\sigma_{33}, e=\sigma_{12}-\sigma_{13}-\sigma_{23}+\sigma_{33}, f=2\left(\sigma_{13}-\sigma_{33}\right), g=2\left(\sigma_{23}-\sigma_{33}\right).$$

Функции компенсированного спроса могут быть получены с использованием леммы Шепарда, в соответствии с которой полная производная функции доходности портфеля в целом по доходности каждого из активов представляет собой компенсированный спрос на данный актив:

$$\frac{dE}{d\mu_i}=x_i^h\left(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\overline{V}\right), i=1,2. (5.2.16)$$

Лемму Шепарда можно доказать, применив теорему об огибающей к задаче связанной максимизации доходности портфеля (5.2.14) и соответствующей функции Лагранжа.

Множитель Лагранжа λ в задаче максимизации доходности (5.2.14) представляет собой предельную величину отдачи от вложений в данный портфель, связанную с изменением его уровня риска. Для того чтобы обосновать этот факт, вновь применим теорему об огибающей к задаче условной максимизации доходности (5.2.14) и соответствующей функции Лагранжа:

$$\frac{dE}{d\overline{V}}=\lambda.$$

Вернемся к вопросу о влиянии изменения доходности, скажем, снижения отдачи от вложений в первый актив от μ_1^1 до μ_1^2 (рис. 5.11), на риск инвестирования средств в данный портфель.

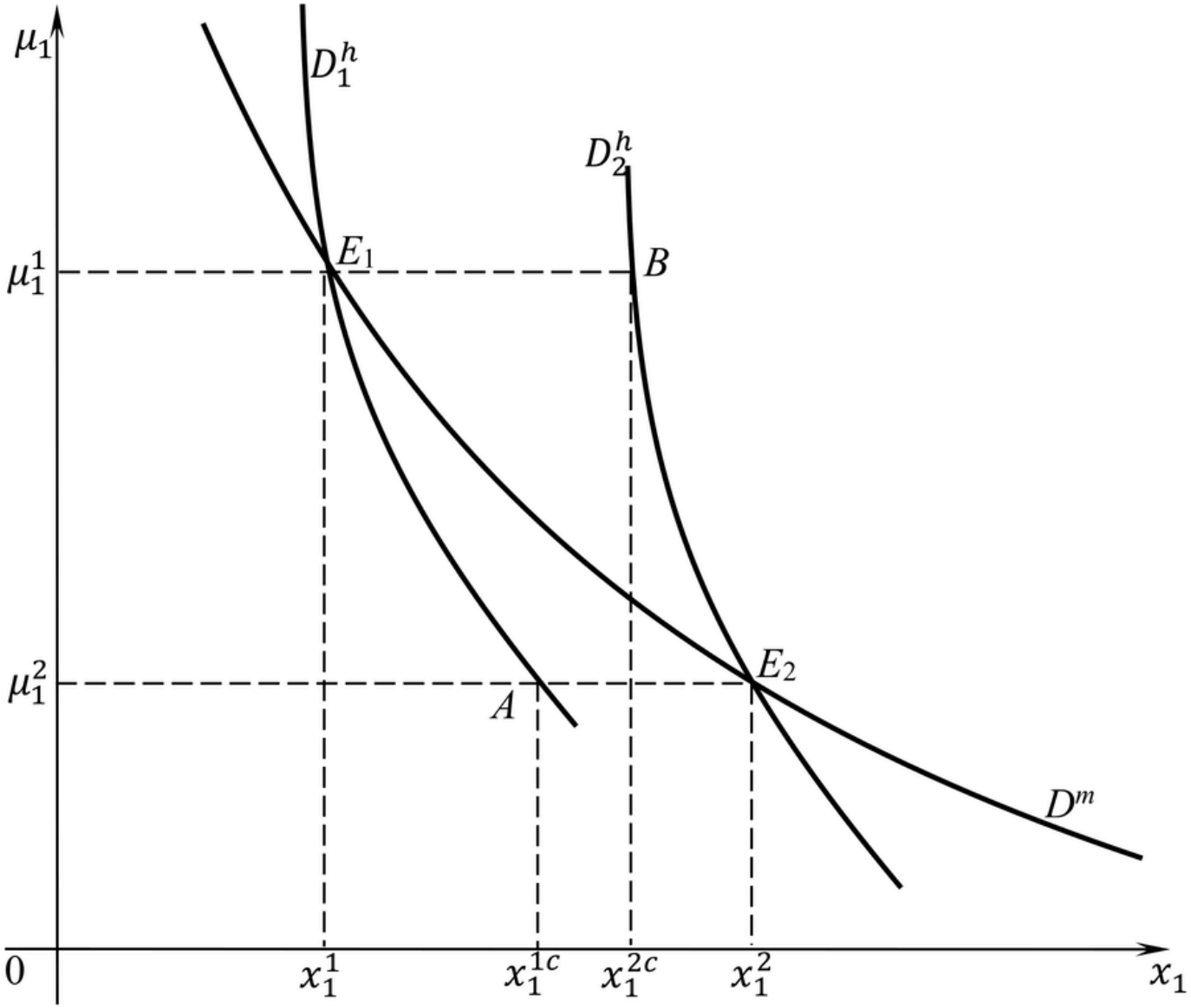


Рисунок 5.11. Компенсирующая и эквивалентная вариации дохода применительно к выбору инвестиционного портфеля

Компенсирующая вариация доходности (*CV*) показывает, на какую величину должна измениться (в нашем случае – снизиться) отдача от вложения средств в данный портфель, чтобы при новых значениях доходности отдельных активов риск остался бы на неизменном уровне. Эквивалентная вариация дохода (*EV*) показывает, на какую величину нужно скорректировать (в нашем случае – повысить) доходность портфеля, чтобы (при фиксированных на исходном уровне доходностях активов) его риск изменился на ту же величину, что и при данном снижении (или росте) доходности отдельных активов.

Компенсирующую и эквивалентную вариации доходности портфеля можно подсчитать, опираясь на лемму Шепарда. Очевидно, что, подставив в функцию доходности портфеля косвенную функцию вариации (5.2.12), получаем значение доходности, тождественно совпадающее с ее величиной, обеспечивающей инвестору заданный уровень риска:

$$E\left(\mu_1, \mu_2, \mu_3, V\left(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \overline{E}\right)\right) \equiv \overline{E}.$$

Выражение, стоящее в левой части данного тождества, можно назвать функцией доходности риска.

Обозначим через $V_0 = V\left(\mu_1^1, \mu_2, \mu_3, \overline{E}_0\right)$ исходный уровень риска, соответствующий первоначальной доходности первого актива μ_1^1 и доходности портфеля $\overline{E}_0$, а через $V_1 = V\left(\mu_1^2, \mu_2, \mu_3, \overline{E}_0\right)$ – новый уровень риска, соответствующий изменившейся доходности актива μ_1^2 при той же величине доходности портфеля в целом. Интегрируя функцию компенсированного спроса на первый актив, соответствующую первоначальному уровню риска, по отрезку от μ_1^1 до μ_1^2, получаем разность между величиной доходности портфеля, обеспечивающей исходный риск при новой доходности первого актива, и данной (в постановке оптимизационной задачи (5.2.9)) величиной доходности портфеля, т.е. компенсирующую вариацию доходности (*CV*):

$$\int_{\mu_1^1}^{\mu_1^2} x_1^h\left(\mu_1, \mu_2, \mu_3, V_0\right) d\mu_1 = \int_{\mu_1^1}^{\mu_1^2} \frac{dE(\mu_1, \mu_2, \mu_3, V_0) d\mu_1}{d\mu_1} = E\left(\mu_1^2, \mu_2, \mu_3, U\left(\mu_1^1, \mu_2, \mu_3, \overline{E}_0\right)\right) - E\left(\mu_1^1, \mu_2, \mu_3, U\left(\mu_1^1, \mu_2, \mu_3, \overline{E}_0\right)\right) = E(\mu$$

Таким образом, компенсирующая вариация доходности представляет собой площадь под графиком функции компенсированного спроса, соответствующей изначальному уровню риска, от первого до второго значения доходности актива ($CV = S_{\mu_1^1 \mu_1^2 AE_1}$ на рис. 5.11).

Аналогично, интегрируя функцию компенсированного спроса на первый актив, соответствующую конечному уровню риска, по отрезку от μ_1^1 до μ_1^2, получаем разность между заданной доходностью и ее значением, обеспечивающим новый уровень риска при исходной доходности первого актива, т.е. эквивалентную вариацию доходности (*EV*):

$$\int_{\mu_1^1}^{\mu_1^2} x_1^h(\mu_1, \mu_2, \mu_3, V_1) d\mu_1 = \int_{\mu_1^1}^{\mu_1^2} \frac{dE(\mu_1, \mu_2, \mu_3, V_1) d\mu_1}{d\mu_1} =$$

$$E\left(\mu_1^2, \mu_2, \mu_3, V\left(\mu_1^2, \mu_2, \mu_3, \overline{E}_0\right)\right) - E\left(\mu_1^1, \mu_2, \mu_3, V\left(\mu_1^2, \mu_2, \mu_3, \overline{E}_0\right)\right) =$$

$$\overline{E}_0 - E\left(\mu_1^1, \mu_2, \mu_3, V_1\right) = EV.$$

Таким образом, эквивалентная вариация доходности представляет собой площадь под графиком функции компенсированного спроса, соответствующей конечному уровню риска, от первого до второго значения доходности актива ($EV = S_{\mu_1^1 \mu_1^2 E_1 B}$ на рис. 5.11).

Очевидно, что *CV* при снижении цены равна *EV* при ее повышении, и наоборот.

Одним из важнейших следствий леммы Шепарда (5.2.16) является уравнение Слуцкого:

$$\frac{\partial x_i^m}{\partial \mu_i} = \frac{dx_i^h}{d\mu_i} - x_i \frac{\partial x_i^m}{\partial E}, (5.2.17)$$

где $\frac{dx_i^h}{d\mu_i}$ – эффект замещения, $-x_i \frac{\partial x_i^m}{\partial E}$ – эффект дохода, $\frac{\partial x_i^m}{\partial \mu_i}$ – общий эффект изменения доходности актива, $i = 1, 2, 3$.

Эффект замещения отражает рост спроса на относительно подешевевшие и уменьшение спроса на относительно более доходные активы. Эффект дохода заключается в том, что, в частности, при снижении доходности какого-либо из активов инвестор получает возможность купить больше данного актива, не сокращая объема вложений в другие активы.

Ключевую роль при получении уравнения Слуцкого играет следующее тождественное соотношение между функциями спроса по Хиксу и Маршаллу. В силу рассмотренной выше двойственности между задачами (5.2.9) и (5.2.14) принятия инвестиционных решений, если в функции спроса по Маршаллу в качестве аргумента доходности портфеля E взять такой ее уровень, который соответствует заданному уровню риска $\overline{V}$, выступающему в роли переменной в функции спроса по Хиксу, $E\left(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \overline{V}\right)$, то значениями функций маршаллианского и хиксианского спроса будет являться одна и та же доля средств, инвестированных в данный актив x_i:

$$x_i^h\left(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \overline{V}\right) \equiv x_i^m\left(\mu_1, \mu_2, \mu_3, E\left(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \overline{V}\right)\right), i = 1, 2, 3. (5.2.18)$$

Уравнение Слуцкого (5.2.17) получается дифференцированием тождества (5.2.18) по доходности *i*-го актива:

$$\frac{dx_i^h}{d\mu_i} = \frac{\partial x_i^m}{\partial \mu_i} + \frac{\partial x_i^m}{\partial E} \frac{dE}{d\mu_i}, i = 1, 2, 3, (5.2.19)$$

с последующим применением леммы Шепарда (5.2.16).

Присутствие знака «минус» перед вторым слагаемым в уравнении Слуцкого (5.2.17) можно объяснить, вернувшись к лемме Шепарда (5.2.16) и учитывая, что $\frac{dE}{d\mu_i} > 0$. Например, при снижении доходности *i*-го актива доходность *E* портфеля уменьшатся, что означает для нормального актива сокращение спроса на него. При этом знак «минус» обеспечивает положительность эффекта дохода, что предполагает случай нормального актива. Напротив, для худших активов при снижении доходности μ_i, а значит, и доходности портфеля *E* спрос на данный, *i*-й актив возрастет. В данном случае знак «минус» позволяет добиться отрицательного значения эффекта дохода, свойственного инферирным активам.

Выведем уравнение Слуцкого для перекрестных эффектов изменения доходности актива. Для этого продифференцируем тождество (5.2.18) для *i*-го актива по доходности *j*-го:

$$\frac{dx_i^h}{d\mu_j} = \frac{\partial x_i^m}{\partial \mu_j} + \frac{\partial x_i^m}{\partial E} \frac{dE}{d\mu_j}, i, j = \{1, 2, 3\}.$$

Применяя затем лемму Шепарда (5.2.16), получаем обобщенное уравнение Слуцкого:

$$\frac{\partial x_i^m}{\partial \mu_j} = \frac{dx_i^h}{d\mu_j} - x_j \frac{\partial x_i^m}{\partial E}; i, j = \{1, 2, 3\}.$$

5.2.4.5. Уклонение от уплаты налогов

В качестве примера применения теории отношения к риску и ожидаемой полезности рассмотрим модель индивидуального уклонения от уплаты налогов [10]. Предположим, что некоторый индивид с функцией полезности $U = \sqrt{c}$, где c – это располагаемый доход, направляемый на потребление, имеет валовой доход до уплаты налогов в размере $Y = 160$. Доход облагается налогом по ставке $t = \frac{1}{4}$. Если обнаруживается уклонение от уплаты налога, то налоговая ставка на незадекларированный доход возрастает до уровня $t + f$, где $f = \frac{1}{2}$. Вероятность обнаружения налогового преступления равна p. Выведем зависимость величины декларируемого дохода x от вероятности обнаружения уклонения от уплаты налога.

Если фактическая величина дохода индивида станет известной налоговым органам, то в его распоряжении останется доход

$$c_1 = (1 - t)x + (Y - x)(1 - t - f) = (1 - t - f)Y + xf = 40 + \frac{x}{2}.$$

Если обман не будет разоблачен, то у индивида останется доход в размере

$$c_2 = (1-t)x + (Y-x) = Y - tx = 160 - \tfrac{x}{4}.$$

Предположим, что вероятность обнаружения уклонения от уплаты налогов равна p.

Целеполагание экономического агента предполагает максимизацию ожидаемой индивидуальной полезности:

$$EU = p\sqrt{c_1} + (1-p)\sqrt{c_2} = p\sqrt{40 + \tfrac{x}{2}} + (1-p)\sqrt{160 - \tfrac{x}{4}} \to \max_x,$$

что, в свою очередь, подразумевает нулевую производную:

$$\tfrac{dEU}{dx} = \tfrac{p}{2 \bullet 2\sqrt{40+\frac{x}{2}}} - \tfrac{1-p}{2 \bullet 4\sqrt{160-\frac{x}{4}}} = \tfrac{2p\sqrt{160-\frac{x}{4}} - (1-p)\sqrt{40+\frac{x}{2}}}{2\sqrt{40+\frac{x}{2}}\sqrt{160-\frac{x}{4}}} = 0.$$

Дробь будет нулевой, если ее числитель равен нулю:

$$2p\sqrt{160 - \tfrac{x}{4}} = (1-p)\sqrt{40 + \tfrac{x}{2}}.$$

Избавляясь от радикалов, после очевидных преобразований

$$4p^2\left(160 - \tfrac{x}{4}\right) = p^2 640 - p^2 x = (1-p)^2\left(40 + \tfrac{x}{2}\right) = \left(1 - 2p + p^2\right)\left(40 + \tfrac{x}{2}\right) = 40 + \tfrac{x}{2} - 80p - px + 40p^2 + \tfrac{x}{2}p^2$$

приходим к равенству $600p^2 + 80p - 40 = x\left(\frac{1}{2} - p + \frac{3}{2}p^2\right)$, из которого вытекает зависимость между величиной декларируемого дохода и вероятностью обнаружения уклонения от уплаты налога:

$$x = \tfrac{600p^2 + 80p - 40}{\frac{1}{2} - p + \frac{3}{2}p^2}.$$

По экономическому смыслу очевидно, что $x \le 160$, т.е. максимально индивид может задекларировать весь свой доход. Используя в данном условии полученную выше дробь, характеризующую зависимость между величиной уклонения от налогов и вероятностью его обнаружения, после очевидных преобразований получаем квадратное неравенство $3p^2 + 2p - 1 \le 0$, решением которого является следующий диапазон вероятности: $0 \le p \le \frac{1}{3}$.

Посмотрим, при какой минимальной вероятности обнаружения уклонения у индивида возникает стимул декларировать доход:

$$x = \tfrac{600p^2 + 80p - 40}{\frac{1}{2} - p + \frac{3}{2}p^2} = \tfrac{40\left(15p^2 + 2p - 1\right)}{\left(\sqrt{3}p - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{2}{3}} > 0.$$

Данное условие приводит к квадратному неравенству $15p^2 + 2p - 1 > 0$, из которого следует, что $p > \frac{1}{5}$.

Таким образом, индивид будет склонен не декларировать никаких доходов, если вероятность обнаружения обмана достаточно низка, будет частично декларировать свой доход при определенном диапазоне вероятностей обнаружения уклонения от уплаты налогов и предпочтет задекларировать весь свой доход, если вероятность обнаружения налогового правонарушения становится достаточно высокой:

$$x = \begin{cases} 0 npu p \le \frac{1}{5}, \\ \frac{600p^2 + 80p - 40}{\frac{1}{2} - p + \frac{3}{2}p^2} \ npu \frac{1}{5} < p < \frac{1}{3}, \\ 160 npu p \ge \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Предположим, что данный индивид решается пойти на уклонение от уплаты налога. Покажем, как повлияет увеличение вероятности обнаружения данного факта на величину декларируемого дохода.

Рассчитаем производную декларируемого дохода по вероятности обнаружения уклонения от уплаты налога:

$$\tfrac{dx}{dp} = \tfrac{(1200p + 80)\left(\frac{1}{2} - p + \frac{3}{2}p^2\right) - (3p-1)\left(600p^2 + 80p - 40\right)}{\left(\frac{1}{2} - p + \frac{3}{2}p^2\right)^2} = \tfrac{720p(1-p)}{\left(\frac{1}{2} - p + \frac{3}{2}p^2\right)^2} > 0.$$

Следовательно, увеличение вероятности обнаружения налогового преступления приведет к увеличению декларируемого дохода.

Предположим, что конкретный вид функции полезности индивида, который решается пойти на уклонение от уплаты налога, не известен, но имеется лишь информация, что данный индивид стремится избегать риска и его функция полезности дифференцируема. Покажем, как повлияет увеличение вероятности обнаружения налогового преступления на величину декларируемого дохода.

Выпишем оптимизационную задачу индивида, уклоняющегося от уплаты налога, при произвольной дифференцируемой и строго вогнутой функции полезности:

$$EU = pU\left(40 + \tfrac{x}{2}\right) + (1-p)U\left(160 - \tfrac{x}{4}\right) \to \max_x.$$

Необходимым условием максимума ожидаемой полезности является равенство нулю ее производной, которую будем рассматривать как неявную функцию переменных декларируемого дохода и вероятности обнаружения уклонения от уплаты налога:

$$F(x,p) = \tfrac{p}{2}U'\left(40 + \tfrac{x}{2}\right) - \tfrac{(1-p)}{4}U'\left(160 - \tfrac{x}{4}\right) = 0.$$

Воспользуемся теоремой о неявной функции принимая во внимание несклонность индивида к риску, а значит, строгую вогнутость его элементарной функции полезности $\left(U''(\bullet) < 0\right)$:

$$\tfrac{dx}{dp} = \tfrac{-\frac{\partial F}{\partial p}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \tfrac{-\frac{1}{2}U'\left(40+\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4}U'\left(160-\frac{x}{4}\right)}{\frac{p}{4}U''\left(40+\frac{x}{2}\right) + \frac{(1-p)}{16}U''\left(160-\frac{x}{4}\right)} > 0.$$

Следовательно, в данном, более общем случае так же, как и в предыдущем, можно сделать вывод о том, что увеличение вероятности обнаружения налогового преступления будет приводить к увеличению декларируемого дохода.

---

1. Функция названа в честь швейцарского ученого Даниила Бернулли (1700-1782). ↩
2. Friedman M., Savage L.J. The Utility Analysis of Choices Involving Risk // *Journal of Political Economy*. – 1948. - Vol. LVI, №4. - P. 279-304 [На русском языке: Фридмен М., Сэвидж Л.Дж. Анализ полезности при выборе среди альтернатив, предполагающих риск. – Вехи экономической мысли. Теория потребительского поведения и спроса. Т.1. – СПб.: Экономическая школа, 2000. С. 208-249]. ↩
3. При этом отношение длин отрезков на графике функции ожидаемой полезности *AB* и отношение отрезков, на которые разбивает горизонтальную ось значение случайного богатства индивида *E(g)*, будут пропорциональны отношению вероятностей исходов: $\frac{AC}{CB} = \frac{E(g)-x_1}{x_2-E(g)} = \frac{1-\alpha}{\alpha}$. ↩
4. Фридмен М., Сэвидж Л.Дж. Анализ полезности при выборе среди альтернатив, предполагающих риск. – Вехи экономической мысли. Теория потребительского поведения и спроса. Т.1. – СПб.: Экономическая школа, 2000. С. 240. ↩
5. Это предположение базируется на том, что страховые компании оперируют в достаточно крупных масштабах и исходят из равенства общего количества внесенных страховых взносов общему количеству страховых выплат согласно закону больших чисел, который утверждает, что хотя единичные события могут быть случайными и в основном непредсказуемы, средний результат многих похожих событий можно предсказать. ↩
6. Markowitz H. Portfolio selection **//** Journal of finance. 1952. Vol.7. №1; Markowitz H. Portfolio selection. – N.Y.: Wiley, L.: Chapman & Hall, 1959. ↩
7. Зорич В.А. Математический анализ. – 2-е изд. – М.: ФАЗИС, 1997, ч.1. ↩
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 6-е изд. – М.: Наука, 1989. ↩
9. В задачах оптимизации инвестиционного портфеля (в частности, в задаче связанной минимизации риска (5.2.9)) градиенты целевой функции (вариации – вектор предельного риска) и ограничения (в данном случае – вектор доходностей) являются линейно зависимыми. Множитель Лагранжа λ при этом выступает коэффициентом пропрциональности. ↩
10. См. также: Кац М., Роузен Х. Микроэкономика. – Мн.: Новое знание, 2004, с. 217-220. ↩

5.3. Меры Эрроу-Пратта и теорема Эрроу-Пратта

5.3.1. Меры Эрроу-Пратта [1]

Для полноты анализа важно знать не только отношение экономического субъекта к риску, но и иметь возможность сравнивать экономических субъектов по этому признаку.

С целью измерения индивидуального отношения к риску в середине 1960-х гг. американским экономистом Кеннетом Эрроу (Нобелевский лауреат 1972 г.) и американским математиком и статистиком Джоном Праттом были предложены два показателя, получившие названия - абсолютная мера Эрроу-Пратта и относительная мера Эрроу-Пратта [2].

Абсолютная мера Эрроу-Пратта равна взятому с отрицательным знаком отношению второй производной функции полезности к ее первой производной, или взятому с обратным знаком отношению скорости убывания предельной полезности дохода (*x*) к самой предельной полезности:

$$AP_A = r(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)}. \quad (5.3.1)$$

Она может принимать следующие значения:

- AP_A>0 – для не склонных к риску;
- AP_A<0 – для склонных к риску;
- AP_A=0 – для нейтральных к риску.

Для не склонных к риску экономических субъектов абсолютная мера Эрроу-Пратта принимает положительные значения, поскольку вторая производная функции полезности будет отрицательной вследствие вогнутости функции полезности. Фактически в этом случае она служит мерой вогнутости функции полезности *u*(*x*) при доходе *x*.

Абсолютная мера Эрроу-Пратта служит *локальной мерой неприятия риска* или *локальной склонности к страхованию* при доходе *x* и функции полезности *u*(*x*). Она может быть разной при разных значениях дохода.

В этой связи, согласно Эрроу, *показатель r(x) может быть использован для интерпретации изменения степени отношения индивидов к риску* вслед за изменением дохода:

- AP_A=*const* - *u*(*x*) демонстрирует постоянную степень абсолютной несклонности к риску: *с ростом дохода потребитель не будет чаще соглашаться на небольшие лотереи*;
- AP_A убывает - *u*(*x*) демонстрирует убывающую степень абсолютной несклонности к риску: *с ростом дохода потребитель будет менее не склонен соглашаться на небольшие лотереи*;
- AP_A возрастает - *u*(*x*) демонстрирует возрастающую степень абсолютной несклонности к риску: *с ростом дохода потребитель будет более не склонен соглашаться на небольшие лотереи*.

Эрроу также предложил использовать показатель r(x) для определения оптимальной величины инвестиций, когда часть суммы x должна храниться в виде наличных денег, а остальное инвестируется с определенным актуарно благоприятным риском.

Пусть:

τ – доход на единицу вложенных средств;

a – инвестируемая сумма;

(x+aτ) – актив, к получению которого приведет инвестирование суммы a.

Предположим, что a(x,τ) является оптимальной суммой для инвестиций, то есть при a(x,τ) максимизируется ожидаемая полезность U(x+aτ). Тогда, «если r (x) [строго] убывает, возрастает или постоянна для всех x, то a(x,τ), соответственно, [строго] возрастает, убывает или постоянна за исключением случая, когда a(x,τ)=x», – так Дж. Пратт обобщил идею К. Эрроу [3].

Коэффициент абсолютного неприятия риска Эрроу–Пратта представляет собой скорость изменения гарантированного эквивалента по отношению к малому увеличению риска в условиях, близких к определенности. Покажем это, предположив, что исходами в игре являются величины дохода, представляющие собой отклонения в положительную и отрицательную стороны на произвольную величину ε от некоторой денежной суммы *x*. Используя определение гарантированного эквивалента (*c*), можно записать: $U(c(\varepsilon)) = p_1 U(x+\varepsilon) + (1-p_1)U(x-\varepsilon)$. Дифференцируя это равенство дважды по ε $(U'(c) \bullet c''(\varepsilon) = p_1 U''(x+\varepsilon) + (1-p_1)U''(x-\varepsilon))$ и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} U'(c(\varepsilon)) \bullet \lim_{\varepsilon\to 0} c''(\varepsilon) = p_1 \lim_{\varepsilon\to 0} U''(x+\varepsilon) + (1-p_1)\lim_{\varepsilon\to 0} U''(x-\varepsilon).$$

Поскольку $c(\varepsilon) \to x$ при $\varepsilon \to 0$, отсюда вытекает равенство: $U'(x) \bullet c''(0) = U''(x)$. Следовательно,

$$c''(0) = \frac{U''(x)}{U'(x)} = -r_A(x).$$

Недостатком абсолютной меры Эрроу-Пратта является ее размерность. Действительно, если предположить, что полезность условно измеряется в ютилях, а богатство в рублях, то, к примеру, для функции полезности *u*(*x*)=*ln*(*w*), абсолютная мера Эрроу-Пратта имеет размерность [4] 1/рубль. Тогда, если, к примеру, перейти от измерения богатства в рублях к его измерению в копейках, то абсолютная мера Эрроу-Пратта уменьшится в 100 раз. Подобных трудностей позволяет избежать относительная мера Эрроу-Пратта.

Относительная мера Эрроу-Пратта равна:

$$AP_R = r(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)}x. \quad (5.3.2)$$

Функция (5.3.2) также интерпретируется как локальная мера неприятия риска относительно дохода *x*, и ее монотонность эквивалентна монотонности премии за риск и платы за страховку относительно дохода *x*.

Обозначив через λ соответствующий коэффициент пропорциональности, можно представить элементарную индивидуальную функцию полезности (по Бернулли) как зависимость от изменения текущего уровня дохода (богатства): $\widehat{U}(\lambda) = U(\lambda x)$. Тогда коэффициент относительного неприятия риска Эрроу-Пратта (5.3.2) моежт быть представлен как коэффициент абсолютного неприятия риска (5.3.1), рассчитанный относительно текущего уровня дохода, нормированного к единице $(\lambda = 1)$:

$$r_r(x) = r_a(1) = \frac{-\widehat{U}''(1)}{\widehat{U}'(1)} = \frac{-U''(x)x^2}{U'(x)x} = \frac{-U''(x)}{U'(x)}x.$$

Преимуществом относительной меры Эрроу-Пратта является отсутствие размерности.

Если экономический субъект не склонен к риску, то относительная мера Эрроу-Пратта для него положительна, если склонен к риску - отрицательна, а если нейтрален - равна нулю.

Таким образом, абсолютная и относительная меры Эрроу-Пратта отражают предпочтения индивида.

Показатель *r*(x)* Эрроу использовал для доказательства теоремы об эластичности спроса на наличные по инвестиционным активам, которая утверждает следующее: «Если *r*(x)* [строго] убывает, возрастает или постоянна для всех *x*, то оптимальная доля для инвестиций *a*(x,τ)=a(x,τ)/x*, соответственно, является [строго] возрастающей, убывающей или постоянной, за исключением случая, когда *a*(x,τ)*=1» [5] .

Относительная мера Эрроу-Пратта – более общая характеристика отношения индивида к риску, поэтому, к примеру, «функции полезности, характеризующейся убывающей абсолютной несклонностью к риску, может соответствовать возрастающая или убывающая относительная несклонность к риску или ни та и ни другая» [6] . Однако если предпочтения индивида характеризуются убывающей относительной несклонностью к риску, имеет место и убывающая абсолютная несклонность к риску.

5.3.2. Теорема Эрроу-Пратта

Для целей микроэкономического анализа может потребоваться *глобальная мера неприятия риска*, которая бы могла для всех уровней богатства (*w*), к примеру, охарактеризовать индивида *A* с функцией полезности *A*(*w*) как более не склонного к риску по сравнению с индивидом *B* с функцией полезности *B*(*w*).

Единственной простой глобальной меры неприятия риска не существует, но ее поиск возможен по трем направлениям.

Во-первых, индивид *A* будет сильнее не склонен к риску, если для всех уровней богатства *w* рассчитанная для его функции полезности абсолютная мера Эрроу-Пратта будет больше по сравнению с аналогичным показателем для индивида *B*:

$$-\frac{A''(w)}{A'(w)} > -\frac{B''(w)}{B'(w)}.$$

Во-вторых, индивид *A* будет сильнее не склонен к риску, чем индивид *B*, если его функция полезности представляет собой вогнутую трансформацию функции полезности индивида *B*, т.е. если существует такая возрастающая строго вогнутая функция $\varphi(\bullet)$, что:

$$A(w) = \varphi(B(w)).$$

Иными словами, чем сильнее неприятие риска экономическим субъектом, тем более вогнута будет его функция полезности.

В-третьих, индивид *A* будет сильнее не склонен к риску, чем индивид *B*, если для любого уровня богатства *w* и для любой лотереи *g* его премия за риск больше и, соответственно, достоверный эквивалент лотереи меньше.

Нетрудно сделать вывод о том, что все три обстоятельства эквивалентно характеризуют глобально более сильное неприятие риска индивидом *A* по сравнению с индивидом *B*. Этот вывод обобщает теорема Эрроу-Пратта.

Теорема Эрроу-Пратта: если предпочтения индивидов *A* и *B* представлены возрастающими, дважды непрерывно дифференцируемыми и строго вогнутыми элементарными функциями полезности *A*(*w*) и *B*(*w*), где *w* – денежные величины богатства индивида, то следующие утверждения эквивалентны:

1. $AP_A^B(w)_A^A(w)$ *для всех w;*

A(●) – вогнутая трансформация B(●): A(w)=φ(B(w)), где φ – возрастающая строго вогнутая функция; CE^{AB} *для любой лотереи g(●).*

Доказательство теоремы Эрроу-Пратта [7] (гиперссылка)

(1) подразумевает (2). Пусть функция φ(B) имплицитно задана как $A(w) = \varphi(B(w))$. *Исходя из аксиомы монотонности, для каждого значения B существует единственное значение φ(B). Тогда первая и вторая производные функций по w имеют вид:*

$$A'(w) = \varphi'(B)B'(w),$$

$$A''(w) = \varphi''(B)(B'(w))^2 + \varphi'(B)B''(w).$$

Поскольку $A'(w) > 0, B'(w) > 0$, *также и* $\varphi'(B) > 0$. *Разделив вторую производную на первую, получаем:*

$$\frac{A''(w)}{A'(w)} = \frac{\varphi''(B)}{\varphi'(B)}B'(w) + \frac{B''(w)}{B'(w)}.$$

Или:

$$\frac{\varphi''(B)}{\varphi'(B)}B'(w) = \frac{A''(w)}{A'(w)} - \frac{B''(w)}{B'(w)} < 0.$$

Следовательно, $\varphi''(B) < 0$, *т.е. φ(B) – возрастающая строго вогнутая функция.*

(2) подразумевает (3). Пусть $\widetilde{\varepsilon}$ - случайная переменная, причем $E\widetilde{\varepsilon}$=0, а $RP(\widetilde{\varepsilon})$ – сумма денег, от которой потребитель готов отказаться, чтобы избежать риска, связанного с $\widetilde{\varepsilon}$.

Тогда для A и B будут выполняться равенства:

$$A\left(w - RP_A\left(\widetilde{\varepsilon}\right)\right) = EA\left(w + \widetilde{\varepsilon}\right),$$
$$B\left(w - RP_B\left(\widetilde{\varepsilon}\right)\right) = EB\left(w + \widetilde{\varepsilon}\right).$$

Для следующего шага доказательства воспользуемся неравенством Йенсена: если x – невырожденная случайная переменная и f(x) – строго вогнутая функция, то $Ef(x) < f(Ex)$.

Основываясь на неравенстве Йенсена, получаем:

$$A\left(w - RP_A\left(\widetilde{\varepsilon}\right)\right) = EA\left(w + \widetilde{\varepsilon}\right) =$$
$$E\varphi(B\left(w + \widetilde{\varepsilon}\right)) < \varphi\left(EB\left(w + \widetilde{\varepsilon}\right)\right) =$$
$$\varphi(B\left(w - RP_B\left(\widetilde{\varepsilon}\right)\right) = A(w - RP_B\left(\widetilde{\varepsilon}\right)).$$

Отсюда: $RP_A\left(\widetilde{\varepsilon}\right) > RP_B\left(\widetilde{\varepsilon}\right)$ для любого w и любой случайной переменной при $E\widetilde{\varepsilon}$=0. Следовательно, для достоверного эквивалента любой лотереи справедливо: $CE_A < CE_B$.

(3) подразумевает (1). Рассмотрим семейство случайных переменных, определенных как $t\widetilde{\varepsilon}$, где $t \in [0,1]$ и $E\widetilde{\varepsilon}$=0.

Пусть $\pi(t)$ – премия за риск как функция от t. Разложим ее по формуле Тейлора второго порядка в окрестностях точки t=0:

$$\pi(t) \approx \pi(0) + \pi'(0)t + \tfrac{1}{2}\pi''(0)t^2$$

Из определения премии за риск: $A(w - \pi(t)) = EA\left(w + t\widetilde{\varepsilon}\right)$.

Дважды дифференцируя это выражение по t, получаем:

$$-A'\left(w - \pi(t)\right)\pi'(t) = E[A'(w + t\widetilde{\varepsilon})\widetilde{\varepsilon}]$$

Prime causes double exponent: use braces to clarify

Если t=0, то $\pi'(0) = 0$ и из второго уравнения получаем:

$$\pi''(0) = \frac{-EA''(w)\widetilde{\varepsilon}^2}{A'(w)} = \frac{-A''(w)E\widetilde{\varepsilon}^2}{A'(w)} = \frac{-A''(w)}{A'(w)}\sigma^2,$$

где $\sigma^2 = E(\widetilde{\varepsilon} - E\widetilde{\varepsilon})^2 = E\widetilde{\varepsilon}^2$ - дисперсия $\widetilde{\varepsilon}$.

Отсюда из $\pi(t) \approx 0 + 0 - \frac{A''(w)\sigma^2}{A'(w)2}t^2$ следует, что при сколь угодно малых значениях t премия за риск (а значит и гарантированный эквивалент лотереи) монотонно зависит от степени неприятия риска.

Иллюстрация теоремы Эрроу-Пратта приведена на рис. 5.12, где $U(g)_A=\alpha_1 U_A(w_1)+\alpha_2 U_A(w_2)$ и $U(g)_B=\alpha_1 U_B(w_1)+\alpha_2 U_B(w_2)$.

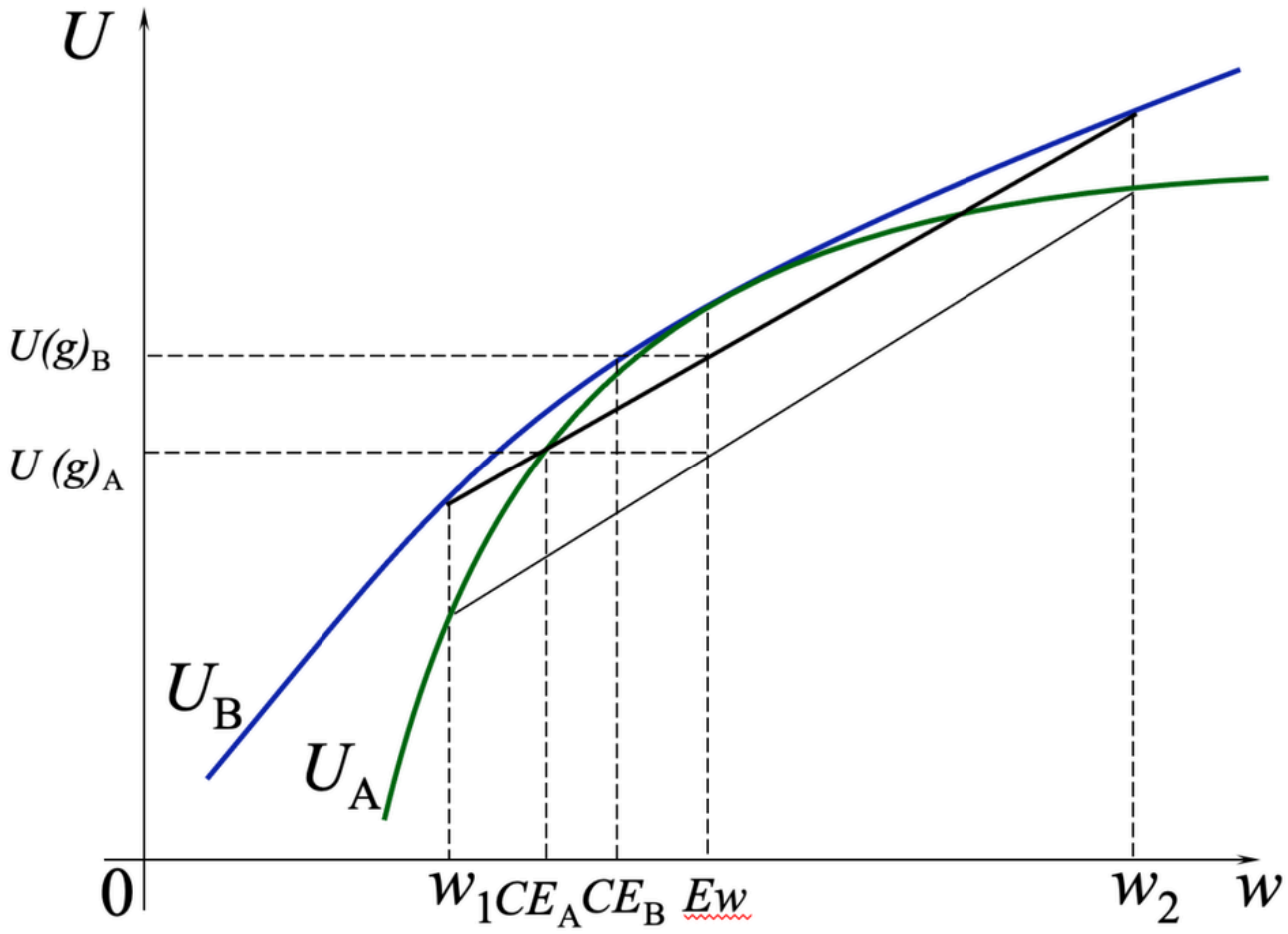


Рисунок 5.12. Иллюстрация теоремы Эрроу-Пратта

5.3.3. Функции полезности с постоянными абсолютной или относительной мерами Эрроу-Пратта

5.3.3.1. Функция полезности с постоянной абсолютной мерой

В различных областях экономической науки часто используются функции полезности, характеризующиеся постоянством абсолютной либо относительной меры Эрроу-Пратта.

Функция полезности, для которой абсолютная мера Эрроу-Пратта остается постоянной величиной независимо от величины дохода индивида (*constant absolute risk aversion*, CARA), определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{-U''(x)}{U'(x)} = \rho = const. \quad (5.3.3)$$

Понизим его степень, вводя вспомогательную функцию $U'(x) = y(x)$: $\frac{-\frac{dy}{dx}}{y} = \rho$. Разделяя переменные $\frac{dy}{y} = -\rho dx$, интегрируем полученное уравнение: $\int d\ln|y| = -\rho\int dx + \ln c_1$, т.е. $\ln|y| = -\rho x + \ln c_1$, где $\ln c_1$ – константа интегрирования; а затем потенцируем полученное решение: $y = c_1 e^{-\rho x}$. Возвращаясь к исходной функции полезности $\frac{dU}{dx} = c_1 e^{-\rho x}$, решаем соответствующее дифференциальное уравнение: $dU = \frac{-c_1}{\rho} de^{-\rho x}$. Интегрируя его, получаем общий вид функции CARA:

$$U(x) = \frac{-c_1}{\rho} e^{-\rho x} + c_2. \quad (5.3.4)$$

Применяя предпосылку об отсутствии «рога изобилия» к функции полезности (5.3.4), получаем соотношение между константами: $\frac{c_1}{\rho} = c_2$. Без ограничения общности можно положить $c_2 = 1$, тогда функция CARA принимает вид (рис. 5.13):

$$U(x) = 1 - e^{-\rho x}. \quad (5.3.5)$$

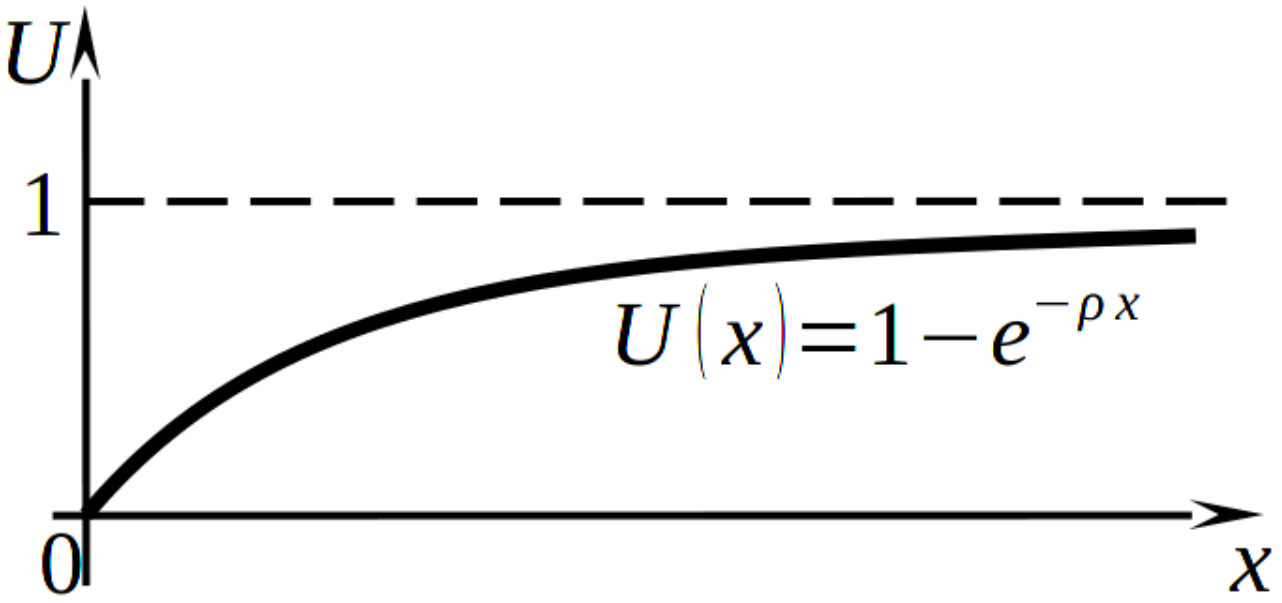


Рисунок 5.13. Функция с постоянным абсолютным неприятием риска

5.3.3.2. Функция полезности с постоянной относительной мерой

Функция полезности с постоянным относительным неприятием риска (*constant relative risk aversion*, CRRA) характеризуется постоянством соответствующей меры Эрроу–Пратта:

$$\frac{-u''(x)}{u'(x)}x = \theta = const,$$

или

$$u''(x)x = -\theta u'(x). \ (5.3.6)$$

Вводя обозначение $u'(x) \equiv y$, понижаем степень уравнения:

$$\frac{dy}{y} = -\theta\frac{dx}{x}. \ (5.3.7)$$

Применяя формулу логарифмической производной $d\ln|y| = -\theta d\ln|x|$, интегрируя и возвращаясь к исходной переменной, получаем линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{du}{dx} = c_1 x^{-\theta}. \ (5.3.8)$$

Будем рассматривать случай $\theta \neq 1$. В этой ситуации уравнение $(5.3.8)$ можно переписать так:

$$du = c_1 x^{-\theta}dx = \frac{c_1}{(1-\theta)}dx^{1-\theta}, \theta \neq 1. (5.3.9).$$

Интегрируя, получаем:

$$u(x) = \frac{c_1 x^{1-\theta}}{1-\theta} + c_2, \theta \neq 1. (5.3.10)$$

Константы интегрирования можно положить такими: $c_1 = 1, c_2 = \frac{-1}{1-\theta}$.

Таким образом, получаем элементарную функцию полезности (Бернулли) с постоянным относительным неприятием риска ($\theta \neq 1$):

$$u(x) = \frac{x^{1-\theta}-1}{1-\theta}. \ (5.3.11)$$

Графики элементарной функции полезности с постоянным относительным неприятием риска при $\theta \neq 1$ приводятся на рис. 5.14-5.15.

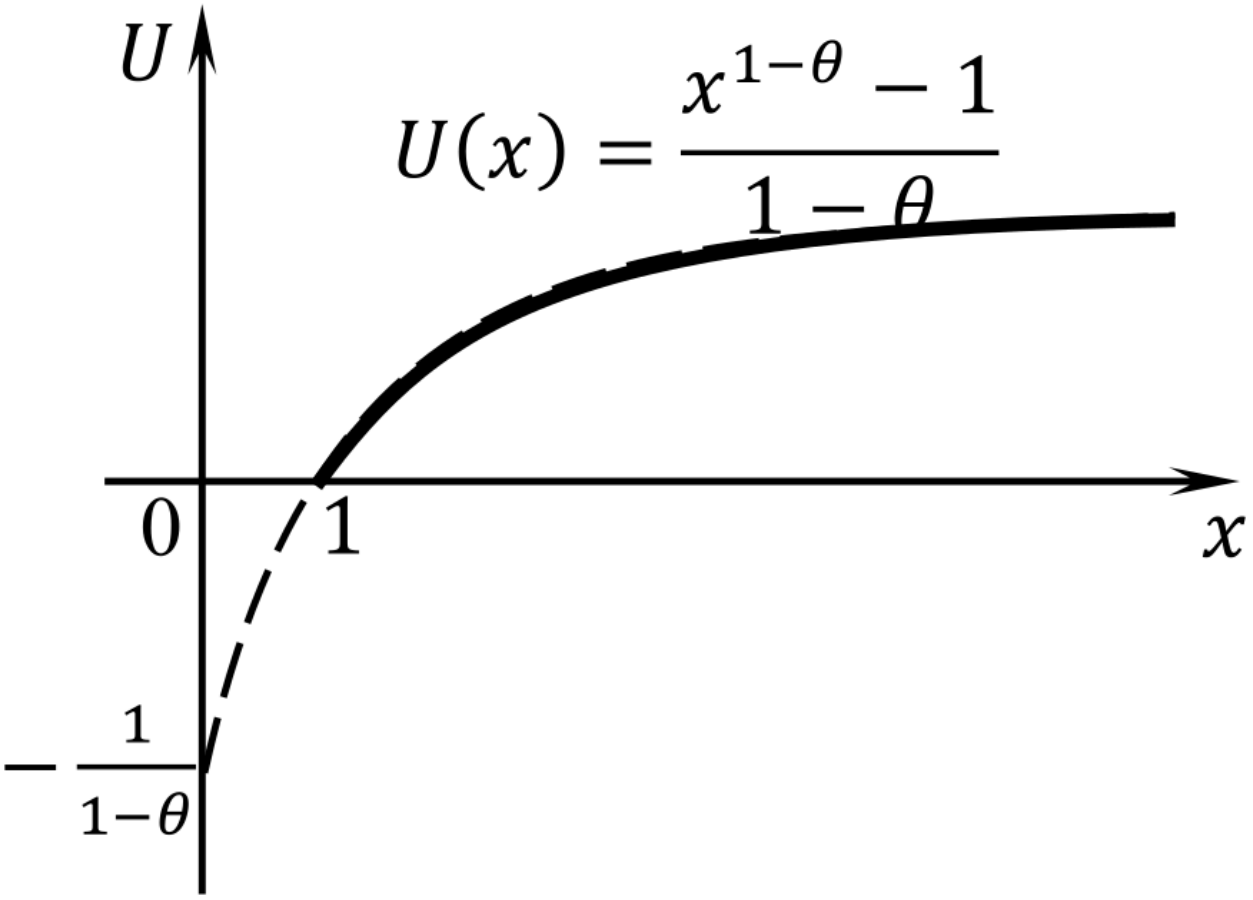


Рисунок 5.14. Функция с постоянным абсолютным неприятием риска, $0 < \theta < 1$

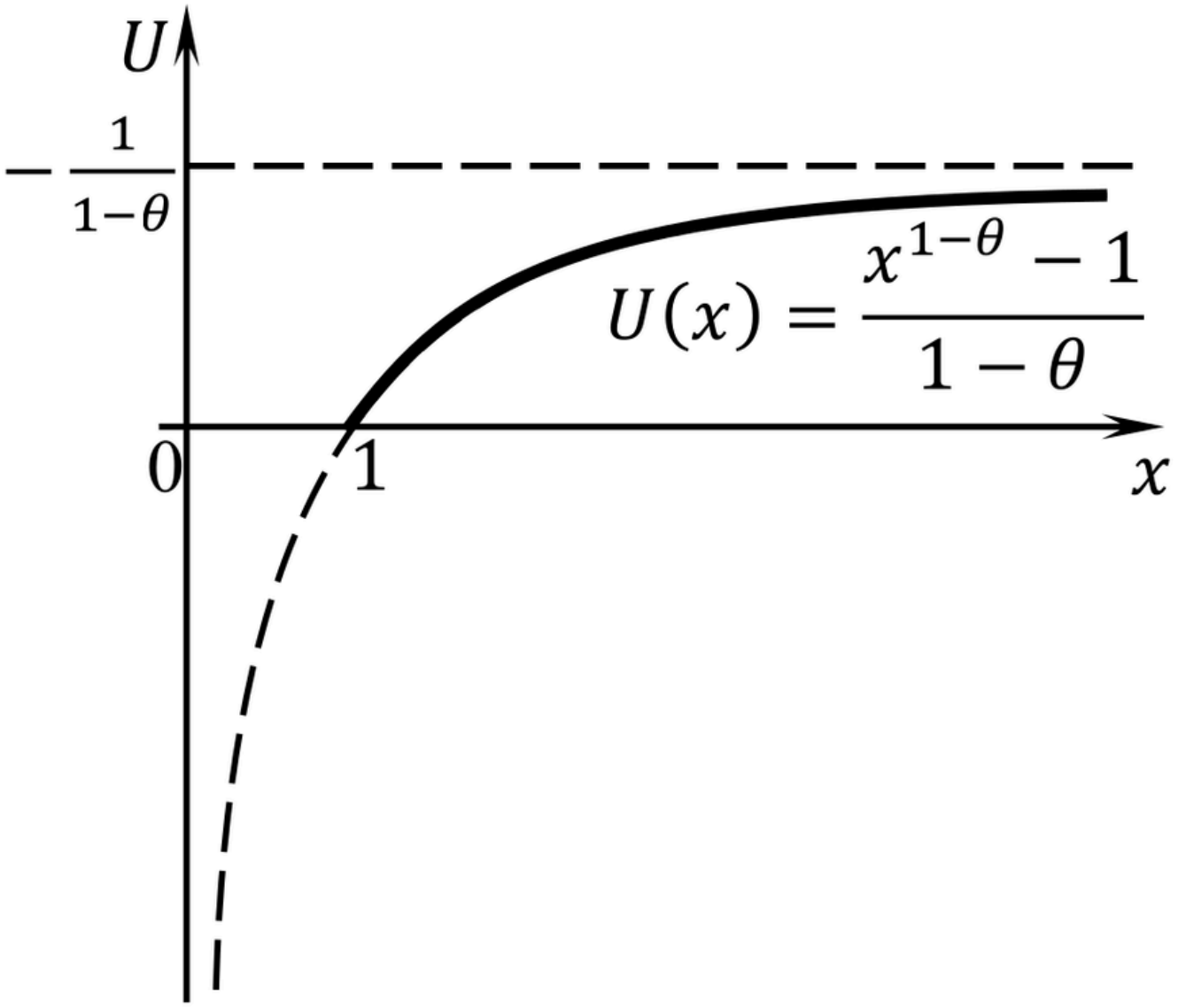


Рисунок 5.15. Функция с постоянным абсолютным неприятием риска, $\theta > 1$

При $\theta = 1$ в уравнении (5.3.8) наблюдается особенность: оно принимает вид $(c_1 = 1)$:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}, \text{ или } du = \frac{dx}{x} = d\ln x. \quad (5.3.12)$$

Его решением является логарифмическая функция полезности: $u = \ln x + c_2$. Константу c_2 без ограничения общности можно положить нулевой: $u = \ln x$. Данный случай является предельным для предыдущего при $\theta \to 1$. Действительно, полагая $\sigma = 1 - \theta$ и применяя правило Лопиталя, получаем (рис. 5.16):

$$\lim_{\theta \to 1} \frac{x^{1-\theta} - 1}{1-\theta} = \lim_{\sigma \to 0} \frac{x^{\sigma} - 1}{\sigma} = \lim_{\sigma \to 0} \frac{x^{\sigma} \ln x}{1} = \ln x. \quad (5.3.13)$$

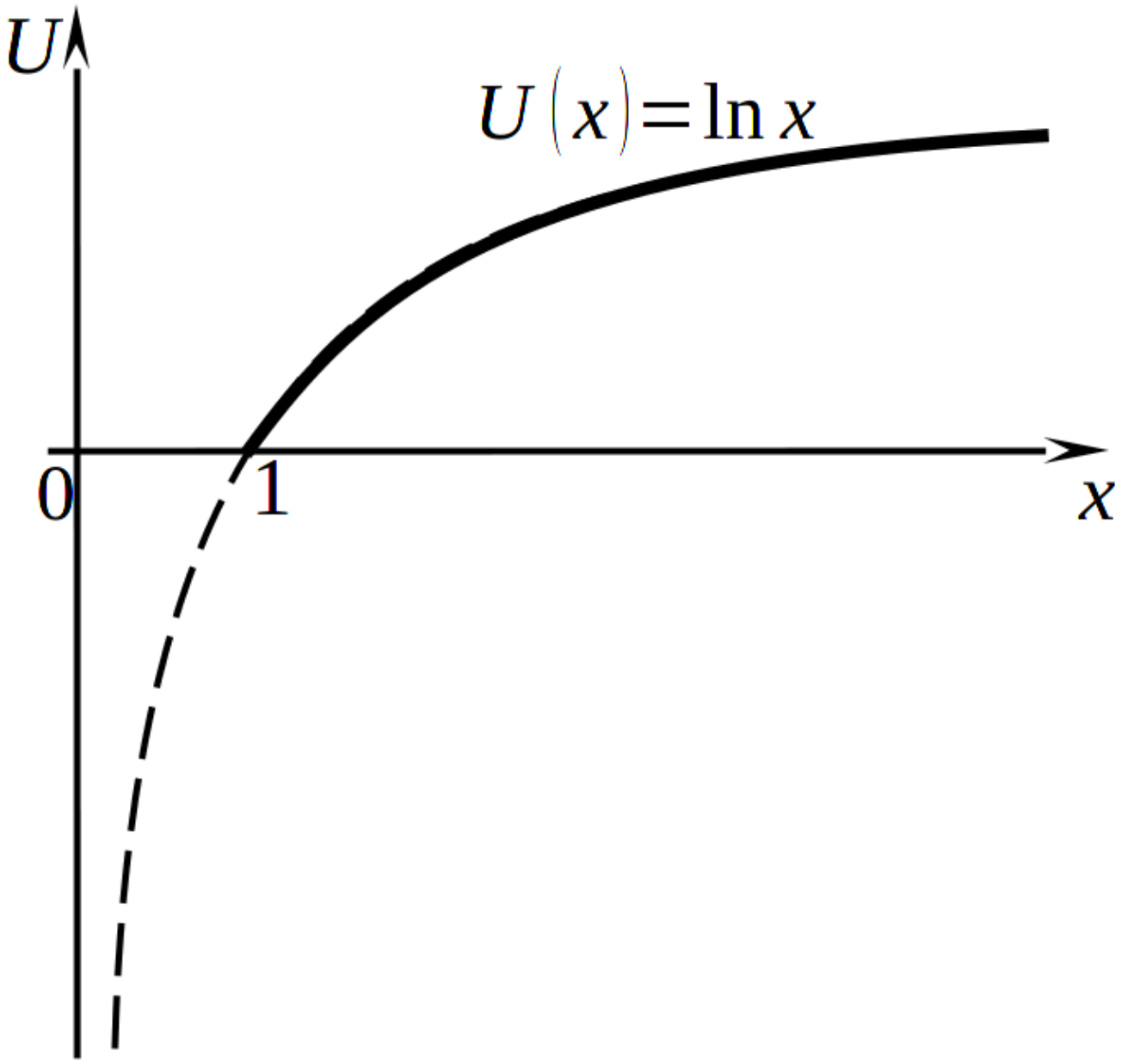


Рисунок 5.16. Функция с постоянным абсолютным неприятием риска, θ = 1

Рассмотрим аддитивную межвременную функцию полезности, построенную на базе динамической функции CRRA $U_t = \frac{x_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}$:

$$u = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{u_t}{(1+\rho)^t} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(x_t^{1-\theta}-1)}{(1-\theta)(1+\rho)^t}, (5.3.14)$$

где $0 < \rho < 1$ – норма межвременных предпочтений.

Рассчитаем предельную норму межвременного замещения для данной функции:

$$MRS_{t,t+1} = \frac{-dx_{t+1}}{dx_t} = \frac{MU_t}{MU_{t+1}} = (1+\rho)\left(\frac{x_t}{x_{t+1}}\right)^{-\theta} = (1+\rho)\left(\frac{x_{t+1}}{x_t}\right)^{\theta}. (5.3.15)$$

Очевидно, что

$$\frac{x_{t+1}}{x_t} = \frac{MRS_{t,t+1}^{\frac{1}{\theta}}}{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}}}.$$

Аддитивная межвременная функция полезности, построенная на базе динамической функции CRRA, характеризуется постоянной межвременной эластичностью замещения:

$$\delta = \frac{d\left(\frac{x_{t+1}}{x_t}\right)}{dMRS_{t,t+1}} \frac{MRS_{t,t+1}}{\left(\frac{x_{t+1}}{x_t}\right)} = \frac{1}{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}}} \frac{dMRS_{t,t+1}^{\frac{1}{\theta}}}{dMRS_{t,t+1}} \frac{MRS_{t,t+1}(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}}}{MRS_{t,t+1}^{\frac{1}{\theta}}} = \frac{1}{\theta}. (5.3.16)$$

БОЛЬШАЯ РОССИЙСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ	*Заглянем в Большую российскую энциклопедию:* Меры Эрроу-Пратта

1. ***См.: Антипина О. Н., Вереникин А. О. Меры Эрроу – Пратта // Большая российская энциклопедия: научно-образовательный портал – URL: https://bigenc.ru/c/mery-errou-pratta-82ca74/?v=9426948. – Дата публикации: 20.09.2023. – Дата обновления: 09.01.2024.*** ↩

2. Arrow K.J. Aspects of the Theory of Risk-Bearing. – Helsinki: Yrjö Jahnssonin Säätiö, 1965. Arrow K.J. Essays in the Theory of Risk-Bearing. – Chicago: Markham Publishing Company, 1971. Pratt J.W. Risk Aversion in the Small and in the Large // *Econometrica*. – 1964. – Vol. 32 (1-2). – P. 122-136. ↩

3. Pratt J.W. Risk Aversion in the Small and in the Large // Econometrica. – 1964. – Vol. 32 (1-2). – P. *135.* ↩

4. $AP_A = \frac{-\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$. ↩

5. Там же. ↩

6. Там же. ↩

7. Использована стратегия доказательства, приведенная в учебнике: Varian H.R. Microeconomic Analysis. - 3rd ed. – N.Y., L.: W.W. Norton & Company, 1992. P. 182-184. ↩

5.4. Модель выбора в пространстве обусловленных благ

5.4.1. Функция полезности, зависящая от состояния

Выбор потребителя в условиях неопределенности может быть представлен с помощью инструментария, используемого для его моделирования в условиях определенности.

Для этого, прежде всего, понятие «товар» заменяется на «обусловленное благо».

Пусть для *N* возможных исходов (состояний природы), определяемых экзогенными параметрами, с индексами *n*=1, … , *N* и с учетом того, что объективная вероятность наступления *n*-го состояния равна α_n и $\sum_{n=1}^{N} a_n = 1$, имеется набор обусловленных благ (x_1, …, x_n) и набор начальных запасов (w_1, …, w_n), который, по сути, также является набором обусловленных благ.

Исходя из того, что получаемая потребителем полезность зависит от состояния природы, в котором ему становится доступным потребление блага (например, удовольствие от прогулки зависит от погодных условий), предпочтения потребителя в пространстве обусловленных благ могут быть представлены функцией полезности, зависящей от состояния природы.

Тогда один набор обусловленных благ $x^A = (x_1^A, \ldots, x_n^A)$ будет не хуже другого набора обусловленных благ $x^B = ($ $x^B = x_1^B, \ldots, x_n^B)$, т.е. $x^A \succsim x^B$, только если для любого состояния природы $n \in N$ существует функция полезности u(x) такая, что:

$$\sum_n \alpha u(x_n^A) \geq \sum_n \alpha u\left(x_n^B\right).$$

Подход к анализу выбора с помощью функции полезности, зависящей от состояния природы, был разработан К. Эрроу в середине 1960-х гг. и с тех пор активно применяется в научных исследованиях1.

Докажем, что кривые безразличия индивида, не приемлющего риск, будут строго выпуклы к началу координат. Будем рассматривать функцию ожидаемой полезности Неймана–Моргенштерна как функцию векторного аргумента $x = (x_1, x_2)$. Покажем, что для не склонного рисковать индивида она будет строго вогнутой. Для этого рассмотрим две пары возможных исходов $\check{x} = (\check{x}_1, \check{x}_2)$ и $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)$. В силу отрицания индивидом риска при каждом из них должно выполняться строгое неравенство Йенсена:

$$U(p_1\check{x}_1 + (1-p_1)\check{x}_2) > p_1U(\check{x}_1) + (1-p_1)U(\check{x}_2),$$
$$U\left(p_1\widehat{x}_1 + (1-p_1)\widehat{x}_2\right) > p_1U\left(\widehat{x}_1\right) + (1-p_1)U\left(\widehat{x}_2\right).$$

Рассмотрим теперь третью, смешанную пару исходов, представляющую собой линейную комбинацию первых двух: $\widetilde{x} = p_1\check{x} + (1-p_1)\widehat{x}$. В качестве весов здесь будем использовать те же вероятности, которые соответствуют возможным исходам в первых двух парах. Выпишем выражение ожидаемой полезности для $\widetilde{x}$, учитывая строгие неравенства Йенсена для $\check{x}$ и $\widehat{x}$:

$$EU\left(\widetilde{x}\right) = EU\left(p_1\check{x} + (1-p_1)\widehat{x}\right) = EU\left(p_1\check{x}_1 + (1-p_1)\widehat{x}_1, p_1\check{x}_2 + (1-p_1)\widehat{x}_2\right) = p_1U\left(p_1\check{x}_1 + (1-p_1)\widehat{x}_1\right) + (1-p_1)U\left(p_1\check{x}_2 +\right.$$

Поскольку величины вероятности p_1, $(1-p_1)$, фигурирующие в качестве весов, могут быть произвольными, приходим к выводу, что функция ожидаемой полезности фон Неймана–Моргенштерна удовлетворяет строгому неравенству Йенсена, следовательно, является строго вогнутой, а значит, и строго квазивогнутой, т.е. ее кривые безразличия строго выпуклы к началу координат.

К данному выводу можно прийти также, продифференцировав зависимость между величинами доходов, отраженную кривой безразличия с учетом предельной нормы замещения между ними:

$$\frac{d}{dx_1}\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)\Big|_{EU=const} = \frac{d}{dx_1}\left(\frac{-p_1U'(x_1)}{(1-p_1)U'(x_2)}\right)\Big|_{EU=const}$$
$$-\frac{p_1}{(1-p_1)} \bullet \frac{U''(x_1)U'(x_2) - U''(x_2)\frac{dx_2}{dx_1}U'(x_1)}{\left(U'(x_2)\right)^2}$$
$$-\frac{p_1}{(1-p_1)^2} \bullet \frac{(1-p_1)U''(x_1)\left(U'(x_2)\right)^2 + p_1U''(x_2)\left(U'(x_1)\right)^2}{\left(U'(x_2)\right)^3} > 0.$$

Положительность второй производной здесь следует из того, что для индивида, (строго) уклоняющегося от риска, $U''(\bullet) < 0$.

5.4.2. Модель выбора с обусловленными благами и спросом на страхование

Для построения модели выбора в условиях неопределенности в пространстве обусловленных благ, продолжим пример, приведенный в п. 5.2.4, в котором представлены два состояния природы: отсутствие урагана (индекс NL) и ураган (индекс L), приводящий к потерям с вероятностью a.

Начальный запас обусловленных благ обозначим $E_0(w-L, w) = E_0(w_L, w_{NL})$.

Поскольку wNL=w $-$ a·Z – богатство индивида в отсутствие урагана, а wL=w—L+Z $-$ a·Z – богатство индивида в случае урагана, набор обусловленных благ имеет вид: $E\left(w - L + Z - a \bullet Z, w - a \bullet Z\right)$.

Выразив Z из wNL и подставив в wL, получаем уравнение бюджетного ограничения:

$$w_L + \frac{1-a}{a}w_{NL} = w - L + \frac{1-a}{a}w.$$

Бюджетное ограничение в модели выбора в пространстве обусловленных благ носит название «линии ясных (справедливых) шансов» или «линии ожидаемой стоимости», поскольку оно объединяет все возможные наборы обусловленных благ, ожидаемая

стоимость которых равна ожидаемой стоимости начального запаса. Построение его в виде прямой линии (рис. 5.14-5.15) предполагает наличие возможностей «торговли» влево-вверх и вправо-вниз от начального запаса. Если возможности «торговли» влево-вверх нет, тогда бюджетное ограничение примет вид линии, ломанной относительно точки начального запаса.

Ожидаемая стоимость всех наборов обусловленных благ, принадлежащих бюджетному ограничению, постоянна, а угол наклона бюджетного ограничения равен:

$$\pi = \frac{-dw_{NL}}{dw_L} = \frac{a}{1-a}.$$

Величина $\pi = \frac{-dw_{NL}}{dw_L} = \frac{a}{1-a}$ может быть интерпретирована как актуарно справедливая цена единицы страхового покрытия или актуарно справедливая пропорция обмена $\frac{a}{1-a}$ единиц богатства в состоянии мира *NL* на дополнительную единицу богатства в состоянии мира *L*.

Поскольку функция полезности не склонного к риску потребителя является возрастающей и вогнутой, множество предпочитаемых наборов будет выпуклым. Это означает, что графически функция полезности будет представлена семейством кривых безразличия, выпуклых к началу координат.

Если $U(w) = \alpha u(w_L) + (1-\alpha)u\,(w_{NL}),$

то предельная норма замещения блага w_{NL} благом w_L равна:

$$MRS_{w_L w_{NL}} = \frac{\alpha U'(w_L)}{(1-\alpha)U'(w_{NL})}.$$

Предельная норма замещения показывает пропорцию, в которой индивид готов заместить благо w_{NL}, количество которого отложено по вертикальной оси, благом w_L, количество которого отложено по горизонтальной оси.

Равновесие потребителя складывается при равенстве угла наклона бюджетного ограничения и предельной нормы замещения, характеризующей угол наклона кривой безразличия:

$$\pi = \frac{\alpha U'(w_L)}{(1-\alpha)U'(w_{NL})}.$$

Если в точке начального запаса угол наклона кривой безразличия превышает угол наклона бюджетного ограничения, т.е.

$$\pi < \frac{\alpha U'(w_L)}{(1-\alpha)U'(w_{NL})},$$

у потребителя возникает спрос на страхование, чтобы обменять некоторую часть блага wNL на некоторую часть блага wL. Тогда, если предпочтения потребителя не зависят от состояния природы, например, в случае актуарно справедливого страхования он будет полностью застрахован от потерь, а его оптимальный набор E* будет находиться в точке касания бюджетного ограничения и кривой безразличия, которая расположена на линии определенности, исходящей из начала координат под углом 45° (рис. 5.17). Потребителю будет безразлично, какое состояние природы наступит, ибо его благосостояние будет одинаковым при любом исходе: wL*=wNL*.

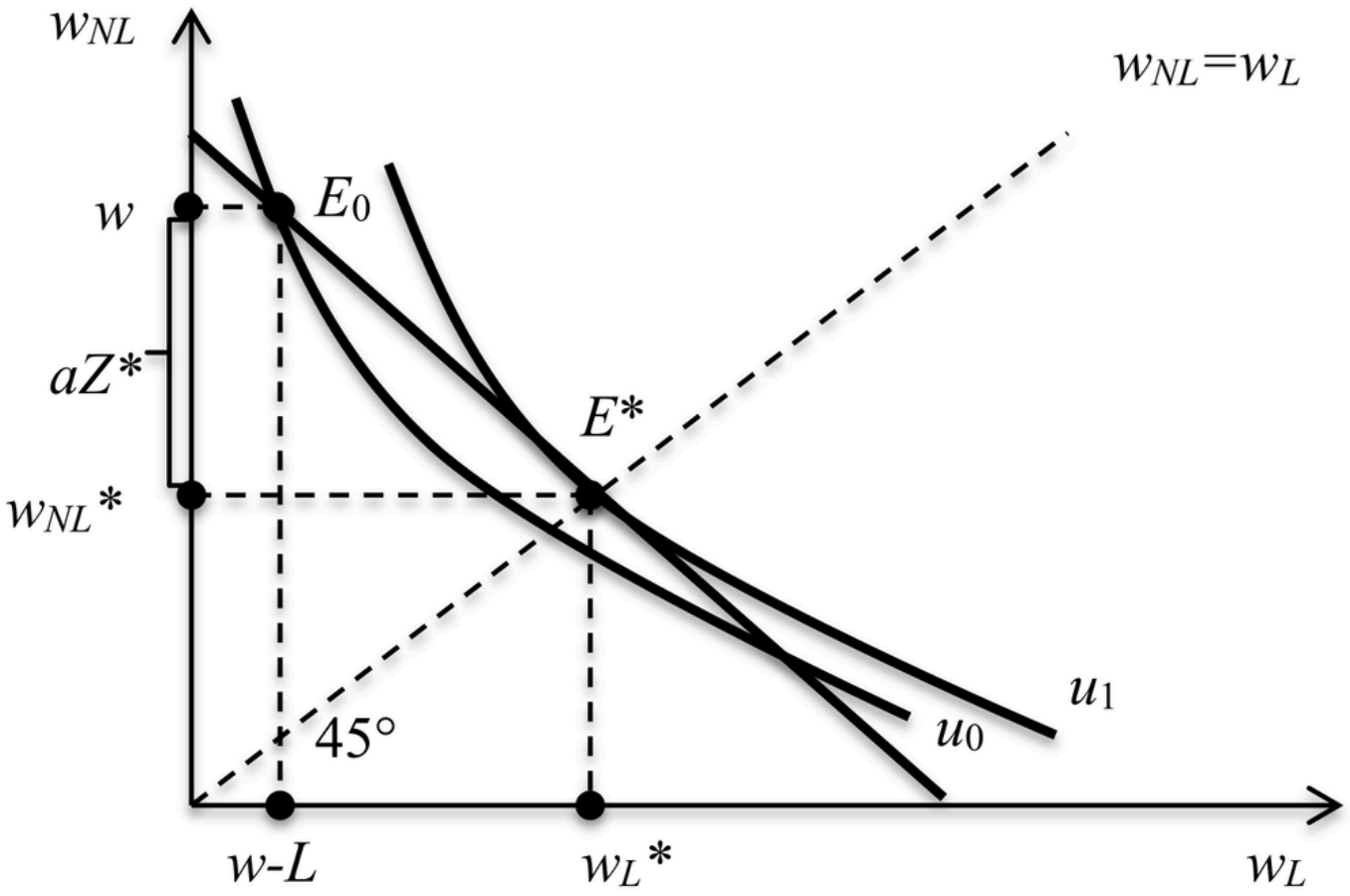


Рисунок 5.17. Покупка страховки в случае функции полезности, не зависящей от состояния

Если предпочтения индивида зависят от состояния, то его оптимум *E** не совпадет с гарантированным исходом, что обусловлено, к примеру, желанием иметь больший выигрыш в состоянии мира *NL* при меньшем выигрыше в состоянии мира *L* по сравнению с предыдущим случаем (рис. 5.18).

При обратном соотношении углов наклона кривой безразличия и бюджетного ограничения у потребителя, напротив, возникает спрос на азартную игру. Относительно этого случая И. Эрлих и Г. Беккер отмечают: «Следует обратить внимание, что азартные игры могут иметь место без увеличения предельной полезности дохода, если имеющиеся возможности достаточно благоприятны. Следовательно, выводы об отношении к риску не могут быть сделаны независимо от существующих рыночных возможностей: человек может казаться «избегающим риска» при одном сочетании цен и потенциальных убытков и «идущим на риск» - при другом. Действительно, столкнувшись с несколькими независимыми опасностями, человек может «играть» и «страховать» одновременно при условии, что разные опасности связаны с разными возможностями. Например, при справедливой цене страхования от кражи он может полностью застраховать свою семью от кражи и в то же время заниматься рискованной деятельностью, если его ожидаемый заработок там больше, чем его заработок в альтернативных «безопасных» видах деятельности» [2] .

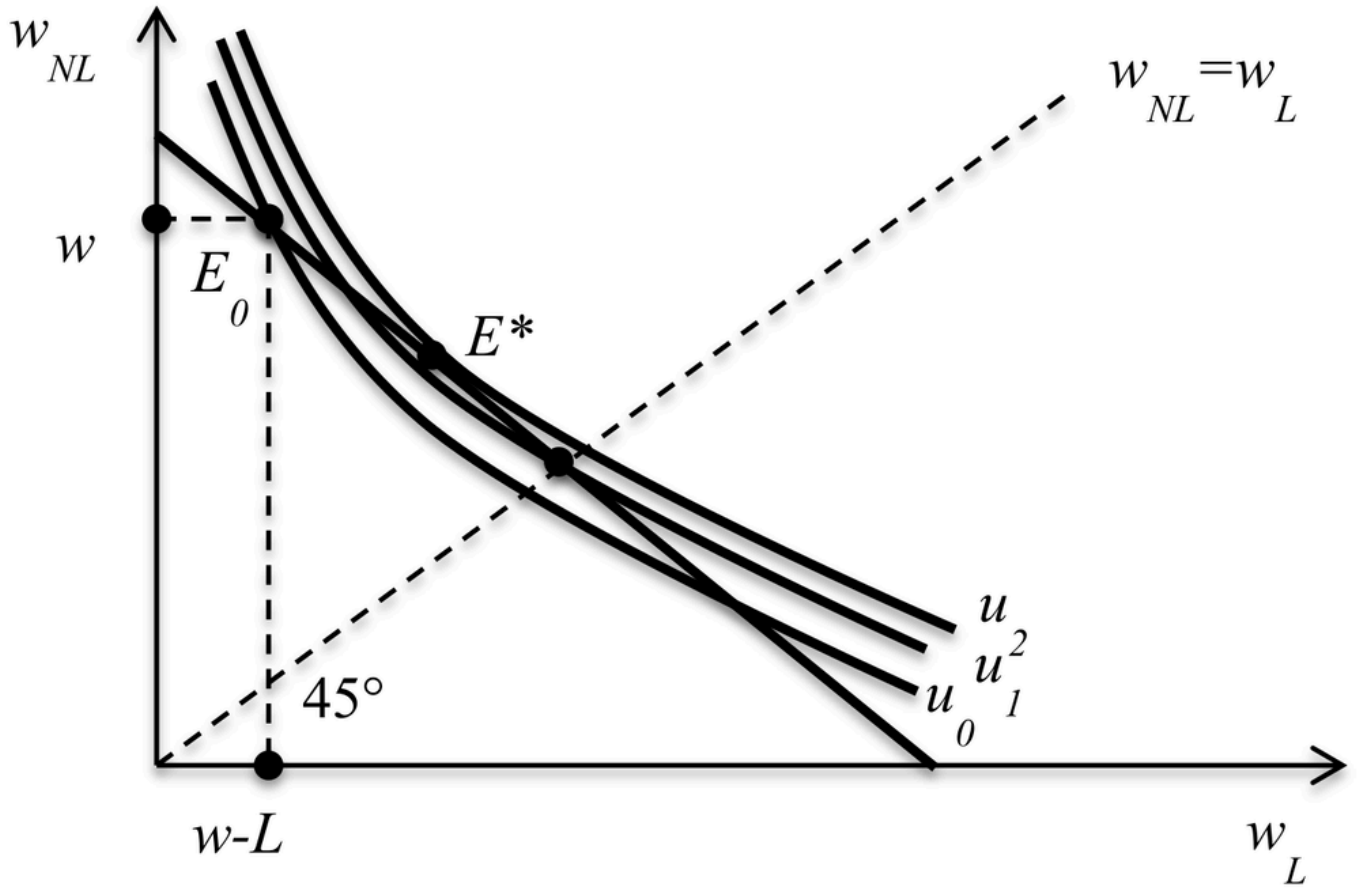


Рисунок 5.18. Покупка страховки в случае функции полезности, зависящей от состояния

Покажем теперь, как прийти к тем же выводам более формально, опираясь на аппарат условной оптимизации. Как и выше, будем рассматривать поведение индивида, строго не приемлющего риск, предпочтения которого удовлетворяют строгому неравенству Йенсена. Допустим, что индивид располагает первоначальным богатством *w*, однако для него существует риск потери суммы *D* с вероятностью *p*. При этом возможна покупка страховки, единица которой стоит *q*.

По объективной логике бизнеса, денежные выплаты по каждой страховке с учетом вероятности наступления страхового случая не могут превышать собранной премии:

$$q \geq p. (5.4.1)$$

В частности, страховку можно считать полностью справедливой, если ее цена будет равной сумме страховых выплат:

$$q = p. (5.4.2)$$

Рациональный индивид будет стараться выбрать оптимальную величину α с таким расчетом, чтобы она максимизировала его ожидаемую полезность [3]:

$$\max_{\alpha} \left((1-p)U(w-\alpha q) + pU(w-\alpha q - D + \alpha)\right) :$$
$$\alpha \geq 0, q \geq p.$$

Условия в данной задаче можно трактовать как бюджетное ограничение страховщика:

$$p(w-\alpha q - D + \alpha) + (1-p)\left(w-\alpha q\right) \leq p(w-D) + (1-p)w.$$

Действительно, после преобразований получаем неравенство $\alpha\left(q-p\right) \geq 0$, которое является следствием условий $\alpha \geq 0$, $q \geq p$ в задаче страхователя.

Будем решать эту задачу, используя метод неопределенных множителей Лагранжа. Выпишем лагранжиан:

$$L = \lambda_0((p-1)U(w-\alpha q) - pU(w-\alpha q - D + \alpha)) - \lambda_1\alpha + \lambda_2\left(p-q\right).$$

Необходимым условием (Куна–Таккера) экстремума в данной задаче является равенство нулю производной функции Лагранжа по α:

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \lambda_0\big((1-p)qU'\left(w-\alpha q\right) - p\left(1-q\right)U'\left(w-\alpha q - D + \alpha\right)\big) - \lambda_1 = 0 (5.4.3)$$

при выполнении условий дополняющей нежесткости:

$$\alpha \geq 0, \lambda_1 \geq 0, (5.4.4)$$
$$\lambda_1\alpha = 0, (5.4.5)$$
$$q \geq p, \lambda_2 \geq 0, (5.4.6)$$

$$\lambda_2(q-p)=0. (5.4.7)$$

Будем рассматривать случай [4] $\lambda_0 \neq 0$. В частности, без ограничения общности можно положить $\lambda_0 = 1$. Из (5.4.3) – (5.4.4) вытекает соотношение:

$$(1-p)qU^{'}(w-\alpha q)-p\,(1-q)U^{'}(w-D+(1-q)\alpha)=\lambda_1 \geq 0. (5.4.8)$$

В силу условия дополняющей нежесткости (5.4.5) при $\alpha > 0$ $\lambda_1 = 0$, а значит, неравенство (5.4.8) перейдет в равенство. Строгое решение данной задачи оптимального поведения индивида возможно лишь для случая абсолютно справедливого страхования (5.4.2).

Для не склонного рисковать индивида, для которого $U'' < 0$, U' является строго монотонной. Поэтому равенство ее значений $U^{'}(w-\alpha p_2)=U^{'}\,(w-D+(1-p_2)\alpha)$ эквивалентно совпадению аргументов $w-\alpha p_2 = w-D+(1-p_2)\alpha$, откуда вытекает полное страховое покрытие $\alpha = D$.

Чтобы показать, что индивид, уклоняющийся от риска, будет страховаться, т.е. им будет куплено положительное количество полисов, проанализируем оставшуюся возможность, предусмотренную условием дополняющей нежесткости (5.4.4) – (5.4.5), когда $\alpha = 0$, $\lambda_1 > 0$. В этом случае ожидаемая величина полезности будет равна $(1-p)U(w)+pU(w-D)$. В отличие от этого, при страховании $(\alpha = D > 0)$ индивид получит гарантированную полезность:

$$(1-p)U(w-\alpha q)+pU(w-\alpha q-D+\alpha)=U\,(w-pD).$$

В силу строгой вогнутости U должно выполняться строгое неравенство Йенсена:

$$U(w-pD)=U(p(w-D)+(1-p)w)>(1-p)U(w)+pU(w-D).$$

Следовательно, решение, связанное с отказом от страхования $(\alpha = 0)$, для индивида, не склонного рисковать, не является оптимальным. Таким образом, если страхование осуществляется честно, то такой индивид будет полностью страховаться, гарантированно обеспечивая себе конечное богатство $w-pD$ независимо от наступления страхового случая.

Конечное богатство $w-pD$ будет таковым для любого α при наступлении страхового случая. Оптимальная стратегия индивида, уклоняющегося от риска, при абсолютно справедливом страховании состоит в том, чтобы выбрать такой размер страховки α, чтобы гарантированно обеспечить себе данное богатство независимо от наступления страхового случая. Экономический агент за счет страхования ликвидирует стохастический характер потока доходов, превращая его в получение гарантированной суммы в размере $w-pD$.

Если ослабить требование абсолютно справедливого страхования (5.4.2) и допустить возможность превышения страховых премий над выплатами (5.4.1) при $\lambda_2 = 0$ в условии дополняющей нежесткости (5.4.7), то:

$$U^{'}(w-\alpha q)=\left(\tfrac{p-pq}{q-pq}\right)U^{'}\,(w-D+\alpha\,(1-q))$$

$$\leq\left(\tfrac{p-pq}{p-pq}\right)U^{'}(w-D+\alpha\,(1-q))=U^{'}\,(w-D+\alpha\,(1-q)).$$

Для индивида, старающегося избегать риска в силу строгой вогнутости U, а значит, строго убывания U' из данного неравенства будет вытекать противоположное неравенство относительно аргументов производной функции полезности:

$$w-\alpha p \geq w-D+\alpha\,(1-p).$$

Следовательно, в данном случае (5.4.1) можно лишь утверждать, что для индивида, предпочитающего уклоняться от риска, оптимальная величина страхования, а значит, и выплат при наступлении страхового случая не может быть больше ущерба с учетом его вероятности: $\alpha \leq D$.

В отличие от абсолютно справедливого страхования (5.4.2) в более общей ситуации (5.4.1) для не приемлющего риск человека возможен даже отказ от страховки, если вероятность наступления страхового случая будет достаточно низкой. В пределе при покупке страховки, когда $\alpha > 0$, ожидаемая полезность индивида будет:

$$\lim_{p\to 0}(1-p)U(w-\alpha q)+pU(w-\alpha q-D+\alpha)=U\,(w-\alpha q);$$

тогда как при отказе от страхования – окажется равной:

$$\lim_{p\to 0}(1-p)U(w)+pU(w-D)=U(w)>U\,(w-\alpha).$$

А значит, по теореме о неравенстве пределов функций [5], найдется такая проколотая окрестность нуля, что для любой попадающей в нее величины вероятности p полезность при страховании будет ниже, чем без него.

Числовой пример

Проиллюстрируем модель справедливого страхования на числовом примере. Предположим, что предприниматель на каждой единице своего производственного оборудования в течение квартала может выпускать два типа продукции – А и В. При благоприятной рыночной конъюнктуре использование одного станка для изготовления единицы продукции типа А принесет чистый доход в размере 3,5 (ден. ед.), а тот же станок, задействованный в производстве продукта В – 1,5 (ден. ед.). При неблагоприятной конъюнктуре отдача от единицы оборудования, использованной в изготовлении товара А, снизится до 1 (ден. ед.), а чистый доход от производства товара В останется без изменений. Вероятность хорошей и плохой конъюнктуры

одинакова. Предприниматель с функцией полезности $U = \sqrt{w}$, где w – это доход от реализации продуктов обоих типов, располагает производственными мощностями, равными 8 единиц оборудования.

Определим оптимальное распределение мощностей между производством A и B. Для этого обозначим через α долю производственных мощностей, задействованных в выпуске продукта A.

Доход предпринимателя при плохой рыночной конъюнктуре составит $w_1 = 8\alpha \bullet 3,5 + 8\,(1-\alpha) \bullet 1,5 = 12 - 8\alpha$, а при хорошей – он достигнет $w_2 = 8\alpha \bullet 3,5 + 8\,(1-\alpha) \bullet 1,5 = 16\alpha + 12$.

Построим бюджетное ограничение предпринимателя, домножая на 2 выражение w_1 и складывая полученное равенство с $w_2 = 36 - 2w_1$.

Целеполагание экономического агента предполагает максимизацию ожидаемой индивидуальной полезности:

$$EU = \tfrac{1}{2}\sqrt{w_1} + \tfrac{1}{2}\sqrt{w_2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{12 - 8\alpha} + \tfrac{1}{2}\sqrt{16\alpha + 12} \to \max_{\alpha},$$

что, в свою очередь, подразумевает нулевую производную:

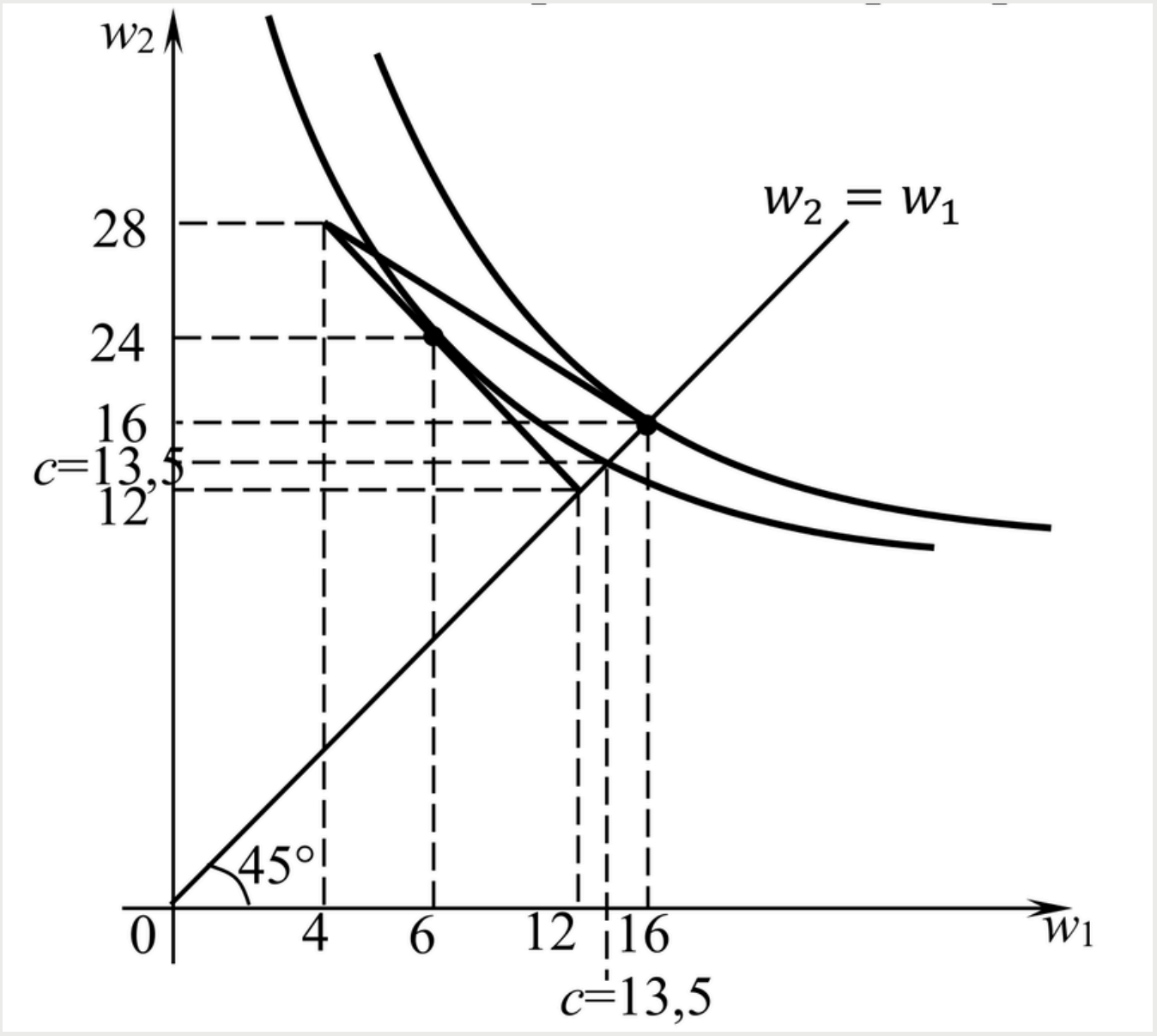
$$\tfrac{dEU}{d\alpha} = \tfrac{-8}{4\sqrt{12-8\alpha}} + \tfrac{16}{4\sqrt{16\alpha+12}} = 0.$$

Решая соответствующее уравнение $2\sqrt{12 - 8\alpha} = \sqrt{16\alpha + 12}$, получаем, что предприниматель отведет под производство A $\alpha = \tfrac{3}{4}$ своих мощностей.

При этом величины дохода предпринимателя при плохой и хорошей конъюнктуре составят соответственно:

$$w_1 = 12 - 8\alpha = 12 - 8 \bullet \tfrac{3}{4} = 6, w_2 = 16\alpha + 12 = 16 \bullet \tfrac{3}{4} + 12 = 24.$$

Ожидаемая величина дохода будет равна: $Ew = \tfrac{1}{2}w_1 + \tfrac{1}{2}w_2 = 15$.



Выгоды от страхования: пример

Предположим, что от крупного сетевого ритейлера предпринимателю поступило предложение перепрофилировать производство и перейти на выпуск продукта собственной торговой марки торговой сети за некоторую фиксированную плату в течение квартала. Определим, за какую минимальную плату предприниматель согласится принять данное предложение.

Минимальная оплата предлагаемого субподрядного контракта должна гарантировать предпринимателю полезность, равную математическому ожиданию полезности дохода от производства на открытый рынок. Рассчитаем гарантированный эквивалент рискованного предприятия, работающего на открытый рынок:

$$EU = \frac{1}{2}\sqrt{w_1} + \frac{1}{2}\sqrt{w_2} = \frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{2}\sqrt{24} = \frac{3}{2}\sqrt{6} = \sqrt{c}.$$

Следовательно, гарантированный эквивалент данной игры с природой составит $c = 13,5$. За данную (или бóльшую) плату предприниматель согласится отказаться от рискованного бизнес-проекта и перепрофилировать свои производственные мощности для работы в рамках субподряда. Данное вознаграждение будет меньше ожидаемого дохода от предпринимательской деятельности на открытом рынке, но, с точки зрения производителя, предпочитающего избегать риска, снижение дохода компенсируется его гарантированным характером.

Рассчитаем величину ожидаемого дохода, соответствующую каждому значению α:

$$Ew = \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2 = \frac{1}{2}(12 - 8\alpha) + \frac{1}{2}(16\alpha + 12) = 12 + 4\alpha.$$

Ожидаемый доход линейно возрастает по α, поэтому его максимальное значение $Ew = 16$ будет достигаться, если все мощности будут отведены под производство А: $\alpha = 1$.

Обратим внимание на то, что максимуму ожидаемой полезности соответствует величина ожидаемого дохода $Ew = 15$, которая меньше его наибольшего значения. Не склонный рисковать индивид жертвует частью ожидаемого дохода, чтобы понизить вероятный разброс его значений, а значит, и уровень риска.

Зафиксируем величину ожидаемого дохода, соответствующую произвольному значению α, чтобы получить линию ясных шансов: $w_2 = 2\overline{Ew} - w_1 = 24 + 8\alpha - w_1$.

Предположим, что у предпринимателя появляется возможность купить страховку от неблагоприятных рыночных условий в размере β единичных страховых полисов, каждый из которых, будучи доступным по цене в 0,5 (ден.ед.), приносит 1 (ден. ед.) страховых выплат в случае конъюнктурного спада. Определим оптимальную величину страхового покрытия и соответствующее соотношение выпуска продукции А и В.

Задача максимизации ожидаемой полезности предпринимателя при наличии страхования принимает вид:

$$EU = \frac{1}{2}\sqrt{w_1} + \frac{1}{2}\sqrt{w_2} = \frac{1}{2}\sqrt{12 - 8\alpha + 0,5\beta} + \frac{1}{2}\sqrt{16\alpha + 12 - 0,5\beta} \to \max_{\beta},$$

что, в свою очередь, подразумевает нулевую производную:

$$\frac{dEU}{d\beta} = \frac{0,5}{4\sqrt{12 - 8\alpha + 0,5\beta}} - \frac{0,5}{4\sqrt{16\alpha + 12 - 0,5\beta}} = 0.$$

Решая соответствующее уравнение $\sqrt{12 - 8\alpha + 0,5\beta} = \sqrt{16\alpha + 12 - 0,5\beta}$, получаем зависимость между величиной страховки и долей мощностей, отведенных под производство А: $\beta = 24\alpha$.

Очевидно, что в условиях справедливого страхования не склонный к риску индивид будет страховать весь риск:

$$w_1 = 12 - 8\alpha + 0,5\beta = 12 + 4\alpha = 16\alpha + 12 - 0,5\beta = w_2.$$

При этом ожидаемая полезность будет гарантированно равна полезности при любом стечении обстоятельств:

$$EU = \frac{1}{2}\sqrt{w_1 + 0,5\beta} + \frac{1}{2}\sqrt{w_2 - 0,5\beta} = \sqrt{12 + 4\alpha}.$$

Она монотонно возрастает по α, поэтому ее максимум будет наблюдаться при наибольшем из возможных значений данного параметра, когда все оборудование будет задействовано в производстве А: $\alpha = 1$. Поскольку весь риск был связан с отдачей от использования оборудования в изготовлении продукта А, постольку, когда он полностью застрахован, на него можно перенаправить все производственные мощности, ведь А является наиболее доходным продуктом. Величина страховки при этом составит $\beta = 24$. Доход при любой рыночной ситуации будет одинаковым и, что очевидно, превышающим его ожидаемую величину при отсутствии страхования: $w_1 = 16 = w_2$. Графическая иллюстрация оптимального справедливого страхового контракта приведена на рисунке.

5.4.3. Диверсификация вложений в активы

Диверсификация – это распределение риска. Пусть речь идет о фирме, оказывающей услуги по аренде спортивного инвентаря в доме отдыха. Перед началом летнего сезона хозяин фирмы задумался о том, какой инвентарь ему следует закупить – шахматы или принадлежности для игры в бадминтон? Очевидно, что если летом будет преобладать хорошая погода, то желающих поиграть в бадминтон на свежем воздухе окажется больше, чем склонных посидеть в комнате за шахматной доской. В случае, если лето окажется дождливым, то количественное преимущество окажется за любителями шахмат. Конечно, хозяин фирмы не может с уверенностью утверждать, какая погода будет преобладать предстоящим летом. Для того, чтобы гарантировать стабильный доход, предприниматель будет заинтересован в диверсификации своих вложений, т.е. распределении имеющиеся у него средства на закупку и шахмат, и бадминтона.

Пусть ожидаемый доход от аренды принадлежностей для бадминтона в случае солнечной погоды составляет 10000 руб., а в случае преобладания дождливых дней равен 2000 руб. Аренда шахмат, напротив, может принести при солнечной погоде 2000 руб., а при дождливой – 10000 руб. Если хозяин фирмы, исходя из вероятности того, что доля солнечных и дождливых дней предстоящим летом составит 50% на 50%, приобретет и шахматы, и бадминтон, то его ожидаемый доход составит в случае солнечной погоды: 0,5●10000+0,5●2000=6000 руб., а в случае преобладания дождливых дней: 0,5●2000+0,5●10000=6000 руб. При любой погоде благодаря диверсификации ему будет гарантирован стабильный доход.

В общем случае получаемый в результате диверсификации доход будет зависеть от вероятности возможных вариантов событий и от того, как они связаны между собой, т.е. являются ли они альтернативой друг другу или могут наступать одновременно. От этого и будет зависеть доля риска, которую можно избежать.

Рассмотрим на модельном уровне диверсификацию вложений в финансовые активы. Пусть существуют два актива – безрисковый, гарантирующий полный возврат инвестированных денежных средств, и рисковый с вероятным доходом, равным z рублей на каждый вложенный рубль. Ожидаемая доходность z может оказаться низкой (в том числе, отрицательной) на уровне z_1 с вероятностью p_1 и высокой положительной на уровне z_2 с вероятностью $p_2 = 1 - p_1$.

Пусть индивид обладает первоначальным богатством w, инвестируемым в два данных актива: α и β – количества средств, направленных, соответственно, на рискованные и безрисковые вложения. Тогда отдача от инвестиций составит $\alpha z + \beta$. Очевидно, что должно выполняться соотношение $\alpha + \beta = w$.

Предполагается, что вложение в актив – актуарно выгодная (привлекательная) игра: $p_1 z_1 + p_2 z_2 > 1$, т.е. математическое ожидание доходности рискового актива превышает отдачу от безрискового, а ожидаемый доход при участии в данной игре превысит w.

Богатство индивида при низкой доходности актива составит $x_1 = w - \alpha + \alpha z_1 = w + \alpha\,(z_1 - 1)$. Эквивалентным образом эту ситуацию можно представить, выразив величину вложений в рисковый актив: $\alpha = \frac{w - x_1}{1 - z_1}$. При высокой положительной доходности актива богатство инвестора будет равняться $x_2 = w - \alpha + \alpha z_2 = w + \alpha\,(z_2 - 1)$. Объединение данных двух возможностей позволяет вывести бюджетное ограничение инвестора в пространстве обусловленных благ: $x_2 = w + \frac{(z_2 - 1)}{(1 - z_1)}(w - x_1) = \frac{(z_2 - z_1)}{(1 - z_1)} w - \frac{(z_2 - 1)}{(1 - z_1)} x_1$ (рис. 5.19).

Ожидаемая полезность индивида, инвестирующего средства в рисковый актив, составит:

$$EU = p_1 U(w + \alpha\,(z_1 - 1)) + p_2 U\,(w + \alpha\,(z_2 - 1)).$$

Рациональный индивид будет стремиться, при очевидных ограничениях, выбрать оптимальную (с точки зрения максимизации ожидаемой полезности) величину вложений в рисковый актив:

$$\max_\alpha\,(p_1 U(w + \alpha\,(z_1 - 1)) + (1 - p_1) U\,(w + \alpha\,(z_2 - 1))) :$$
$$\alpha + \beta = w, \alpha \geq 0, \beta \geq 0;$$

или, что эквивалентно,

$$\min_\alpha\,((p_1 - 1) U(w + \alpha\,(z_2 - 1)) - p_1 U\,(w + \alpha\,(z_1 - 1))) :$$
$$-\alpha \leq 0, \alpha - w \leq 0.$$

Решая данную задачу на условной экстремум, выпишем функцию Лагранжа:

$$L = \lambda_0((p_1 - 1) U(w + \alpha\,(z_2 - 1)) - p_1 U\,(w + \alpha\,(z_1 - 1))) - \lambda_1 \alpha + \lambda_2\,(\alpha - w),$$

где λ_i, $i = \{0, 1, 2\}$ – множители Лагранжа.

Необходимые условия минимума (Куна–Таккера) состоят в равенстве нулю производной функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \lambda_0\big((p_1 - 1)\,(z_2 - 1) U^{'}(w + \alpha\,(z_2 - 1)) - p_1\,(z_1 - 1) U^{'}\,(w + \alpha\,(z_1 - 1))\big) - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad (5.4.9)$$

с учетом условий дополняющей нежесткости:

$$\lambda_1 \alpha = 0 при \alpha \geq 0, \lambda_1 \geq 0; (5.4.10)$$
$$\lambda_2 (\alpha - w) = 0 при \lambda_2 \geq 0, \alpha \leq w. (5.4.11)$$

В соответствии с условием дополняющей нежесткости (5.4.10) возможны два случая. Во-первых, если $\lambda_1 \geq 0$, то $\alpha = 0$. При этом в условии (5.4.11) первый случай, когда $\alpha = w$, $\lambda_2 \geq 0$, отпадает; поэтому возможна лишь альтернативная ситуация $\alpha < w$, $\lambda_2 = 0$. Следовательно, (5.4.9) принимает вид:

$$\lambda_0\big(p_1\,(z_1 - 1) U^{'}(w + \alpha\,(z_1 - 1)) + (1 - p_1)\,(z_2 - 1) U^{'}\,(w + \alpha\,(z_2 - 1))\big) = -\lambda_1 \leq 0. (5.4.12)$$

Если в (5.4.11) все-таки верна альтернатива, когда $\alpha = w$ и $\lambda_2 \geq 0$, то при этом обязательно будет $\alpha > 0$, значит, $\lambda_1 = 0$, т.е. должна реализоваться вторая возможность в условии (5.4.10). Тогда (5.4.9) будет выглядеть так:

$$\lambda_0\big(p_1\,(z_1 - 1) U^{'}(w + \alpha\,(z_1 - 1)) + (1 - p_1)\,(z_2 - 1) U^{'}\,(w + \alpha\,(z_2 - 1))\big) = \lambda_2 \geq 0. (5.4.13)$$

Если $\lambda_0 = 0$, то в каждой из альтернатив (5.4.12), (5.4.13) получается, что $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, чего не может быть, поскольку вектор множителей Лагранжа должен быть ненулевым. Следовательно, $\lambda_0 > 0$, и без ограничения общности можно положить его равным единице, пронормировав относительно него остальные множители Лагранжа. Тогда условия (5.4.12) и (5.4.13), соответственно, можно записать в более простом виде:

$$p_1\,(z_1 - 1) U^{'}(w + \alpha\,(z_1 - 1)) + (1 - p_1)\,(z_2 - 1) U^{'}(w + \alpha\,(z_2 - 1)) = -\lambda_1 \leq 0, (5.4.14)$$
$$p_1\,(z_1 - 1) U^{'}(w + \alpha\,(z_1 - 1)) + (1 - p_1)\,(z_2 - 1) U^{'}(w + \alpha\,(z_2 - 1)) = \lambda_2 \geq 0. (5.4.15)$$

Обозначим через $\varphi\,(\alpha)$ левые части в (5.4.14) и (5.4.15):

$$\varphi\,(\alpha) \equiv p_1\,(z_1 - 1) U^{'}(w + \alpha\,(z_1 - 1)) + (1 - p_1)\,(z_2 - 1) U^{'}\,(w + \alpha\,(z_2 - 1)).$$

Отметим, что в силу предположения об актуарной привлекательности вложений в рисковый актив и строго возрастания $U(\bullet)$:

$$\varphi(0) = p_1\,(z_1 - 1) U^{'}(w) + (1 - p_1)\,(z_2 - 1) U^{'}(w) = U^{'}(w)(p_1 z_1 + (1 - p_1) z_2 - 1) > 0.$$

Это противоречит соотношению (5.4.14), которое, тем самым, неверно. Первый случай в условии (5.4.10) $(\alpha = 0)$ отпадает, а значит, возможна только ситуация $\alpha > 0$.

При этом $\lambda_1 = 0$, и условие (5.4.14) принимает вид:

$$MRS_{12} = -\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{dEU=0} = \frac{p_1 U'(x_1)}{(1-p_1)U'(x_2)} = \frac{z_2 - 1}{1 - z_1} > \frac{p_1}{1-p_1},$$

что означает касание кривой безразличия и бюджетного ограничения в точке, расположенной над линией равных доходов (рис. 5.17).

Из условия (5.4.9) в такой ситуации следует, что и $\lambda_2 = 0$.

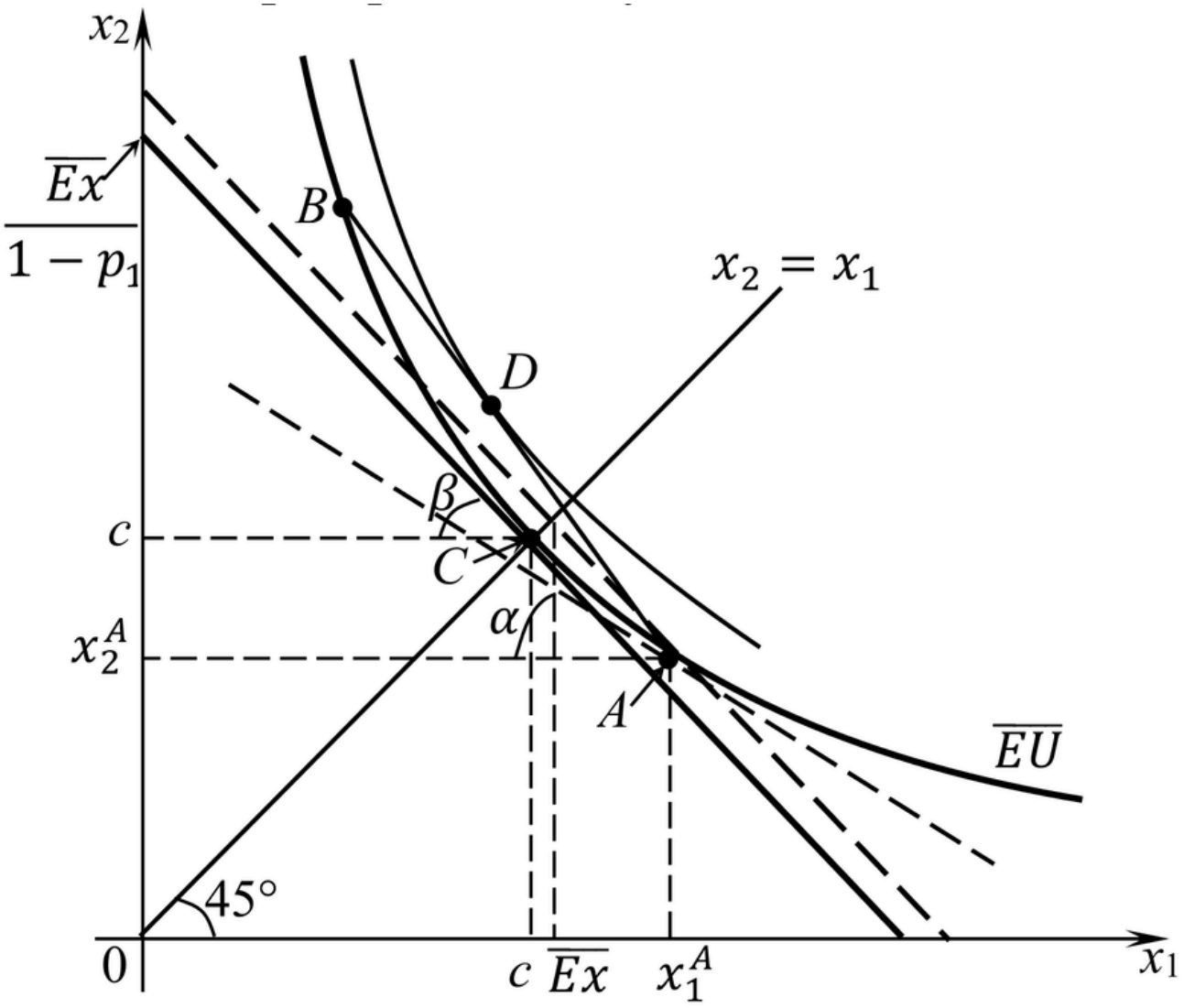


Рисунок 5.19. Выбор инвестора в пространстве обусловленных благ

Достаточное условие максимизации ожидаемой полезности

$$\frac{d^2L}{d\alpha^2} = \frac{-d^2EU}{d\alpha^2} = (p_1 - 1)(z_2 - 1)^2 U''(w + \alpha(z_2 - 1)) - p_1(z_1 - 1)^2 p_1 U''(w + \alpha(z_1 - 1)) > 0$$

при этом будет выполнено в силу строгой вогнутости (элементарной) функции полезности $(U''(\bullet) < 0)$.

Таким образом, $0 < \alpha < w$, т.е. если рисковый актив имеет ожидаемую доходность, превышающую отдачу от безрискового актива, то рациональный инвестор обязательно будет вкладывать в него определенную часть своих средств, при этом оставляя некоторую их долю в виде безрисковых вложений.

5.4.4. Разделение рисков посредством инвестиционной кооперации

Покажем механизм реализации практики разделения рисков между экономическими агентами посредством инвестиционной кооперации с помощью модели выбора в пространстве обусловленных благ. Допустим, что существует некоторый инвестиционный проект, требующий вложения денежных средств в размере I и способный с вероятностью p_1 принести чистый доход, равный R, который, однако, с вероятностью $p_2 = 1 - p_1$ может не окупиться и принести нулевую прибыль. Не склонный к риску индивид, обладающий денежными ресурсами в размере w, имеет возможность инициировать данный проект самостоятельно, за счет только лишь своих собственных средств, и тогда его ожидаемая полезность составит:

$$EU = p_1 U(w - I + R) + (1 - p_1)U(w - I),$$

либо может заключить с другими физическими лицами, обладающими идентичными функциями полезности, соглашение о долевом инвестировании денег в проект, когда ожидаемая полезность каждого из n участников данного финансового партнерства принимает вид:

$$EU = p_1 U\left(w - \frac{I}{n} + \frac{R}{n}\right) + (1 - p_1) U\left(w - \frac{I}{n}\right).$$

Выражая из величины дохода при благоприятном исходе $x_1 = w + \frac{R-I}{n}$ число участников инвестиционного партнерства $n = \frac{I-R}{w-x_1}$ и используя его при расчете дохода при неблагоприятном стечении обстоятельств, получаем бюджетное ограничение инвестора:

$$x_2 = w - \frac{I}{n} = w + \frac{I(w-x_1)}{R-I} = \frac{Rw}{R-I} - \frac{Ix_1}{R-I}.$$

Максимизируя индивидуальную ожидаемую полезность по количеству участников данного проекта

$$\frac{dEU}{dn} = p_1 U'\left(w - \frac{I}{n} + \frac{R}{n}\right) \bullet \left(\frac{I}{n^2} - \frac{R}{n^2}\right) + (1 - p_1) U'\left(w - \frac{I}{n}\right) \bullet \frac{I}{n^2} = 0,$$

с учетом выражения предельной нормы замещения в пространстве обусловленных благ получаем условие оптимума каждого инвестора:

$$MRS_{12} = -\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{dEU=0} = \frac{p_1 U'\left(w - \frac{I}{n} + \frac{R}{n}\right)}{(1-p_1) U'\left(w - \frac{I}{n}\right)} = \frac{I}{R-I}.$$

Графически оно означает касание бюджетного ограничения и кривой безразличия при оптимальной численности инвестиционного партнерства (рис. 5.20).

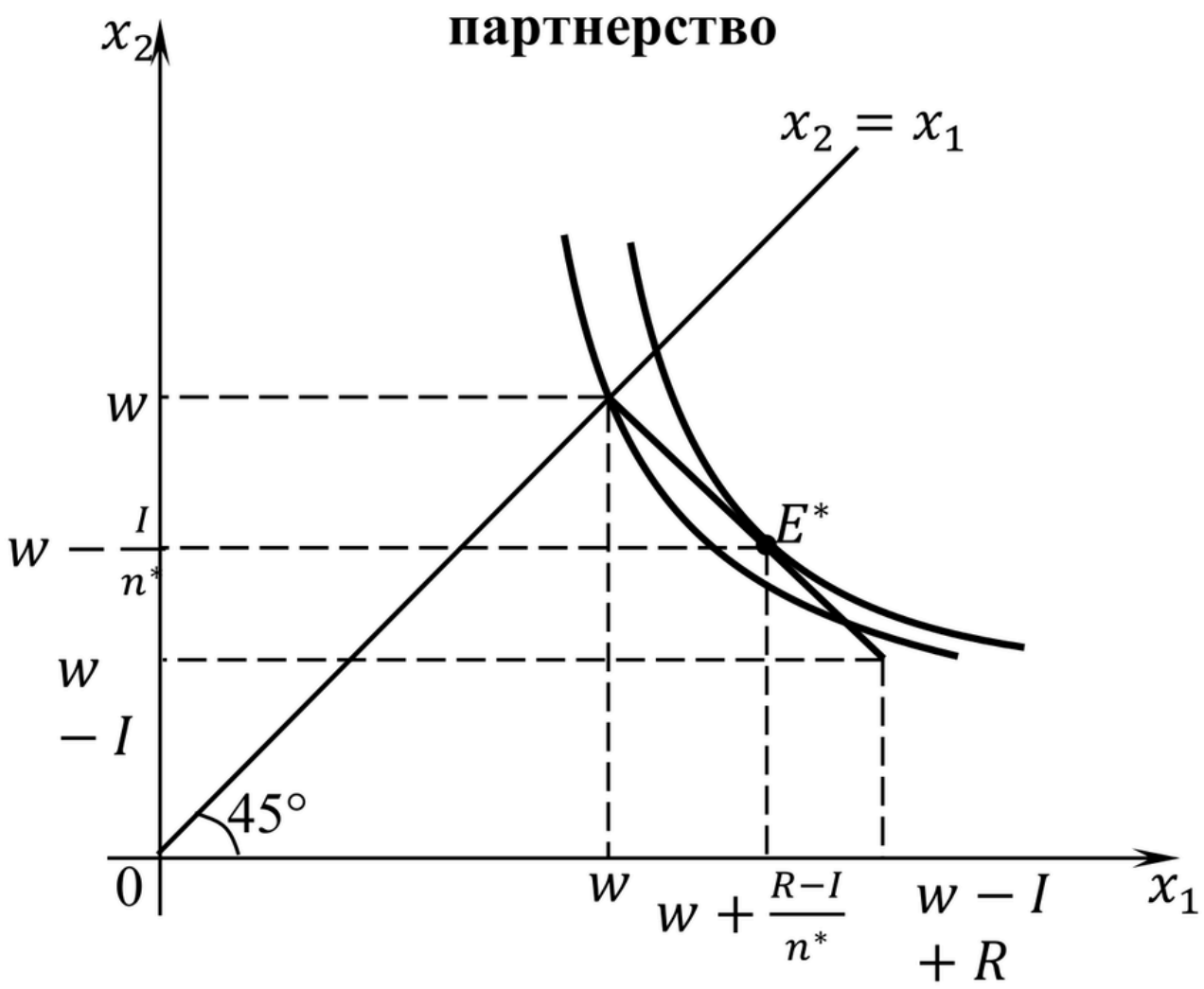


Рисунок 5.20. Оптимальное инвестиционное партнерство

Числовой пример

Рассмотрим числовой пример, иллюстрирующий механизм распределения рисков. Пусть функция полезности индивида по отношению к располагаемому богатству имеет вид $U = \sqrt{w}$. Индивидуальное богатство, изначально составляющее $w = 100$, может быть использовано для покупки актива, который способен принести прибыль в размере 10000 с вероятностью $^1/_{20}$. Однако с вероятностью $^{19}/_{20}$ вложенные в актив средства будут потеряны.

Покажем, что данный индивид будет заинтересован в создании инвестиционного партнерства с такими же, как и он сам, экономическими агентами с целью вложения средств в данный актив.

Для этого рассчитаем ожидаемую полезность и ожидаемый доход каждого из n участников инвестиционного партнерства:

$$EU = \frac{19}{20}\sqrt{100 - \frac{100}{n}} + \frac{1}{20}\sqrt{100 - \frac{100}{n} + \frac{10000}{n}} = \frac{19}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{99}{n}},$$

$$Ex = \frac{19}{20}\left(100 - \frac{100}{n}\right) + \frac{1}{20}\left(100 - \frac{100}{n} + \frac{10000}{n}\right) = 95\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 5\left(1 + \frac{99}{n}\right).$$

Для того чтобы индивид принял участие в игре, должно выполняться соотношение:

$$EU = \frac{19}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{99}{n}} \geq U(w) = \sqrt{100} = 10.$$

Для $n = 1$ оно не выполняется, значит, индивид не рискнет в одиночку инвестировать в данный актив. При этом ожидаемый доход будет равен 500, а гарантированный эквивалент игры, определяемый соотношением $EU = \frac{1}{2} \bullet 10 = 5 = \sqrt{c}$, составит $c = 25$, что меньше первоначального богатства (рис. 1).

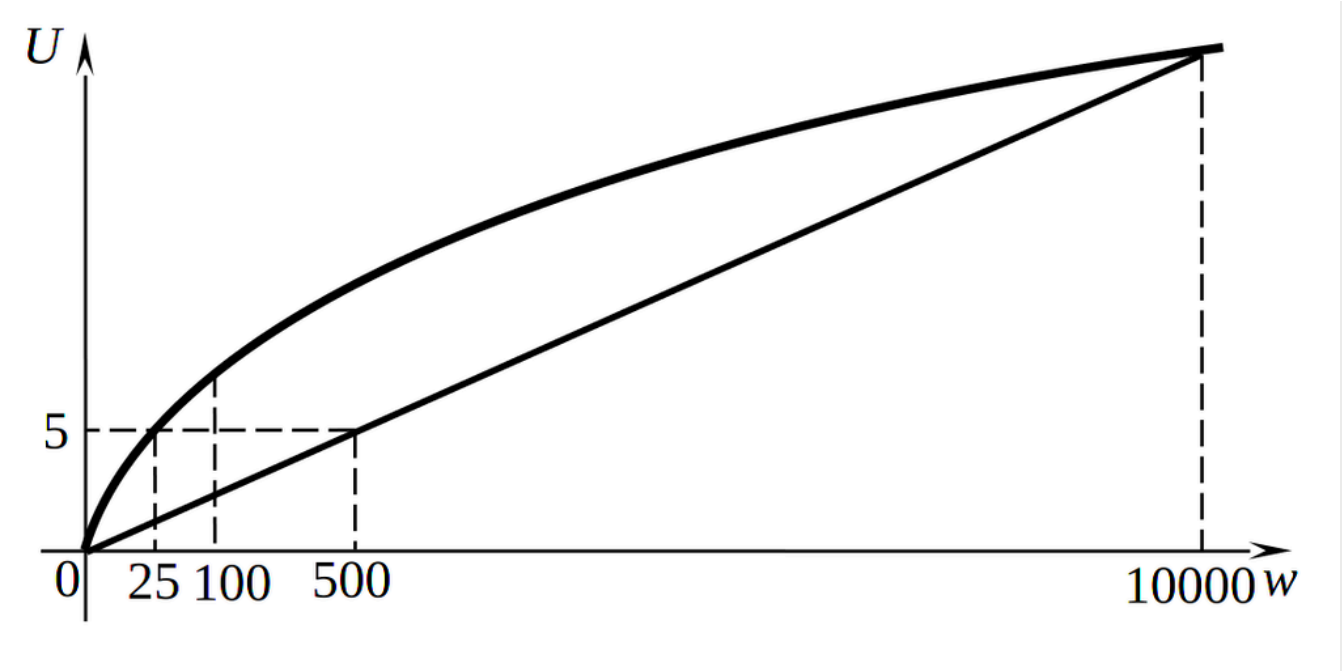


Рисунок 1. Неприятие риска и отказ от инвестиционного проекта: пример

Для $n = 2$ неравенство выше уже выполняется, т.е. индивид пойдет на риск в составе инвестиционного партнерства. При $n = 2$ ожидаемый доход сокращается: $Ex = 300$, но при этом падает и разброс величин дохода, что играет ключевую роль для рискофоба. Ожидаемая полезность игры составит:

$$EU = \frac{19}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{99}{2}} \approx 10,27 \geq U(w) = \sqrt{100} = 10.$$

Гарантированный эквивалент игры, определяемый соотношением $\sqrt{c} = 10,27$, при этом превышает первоначальное богатство: $c \approx 105,5 > 100$ (рис. 2).

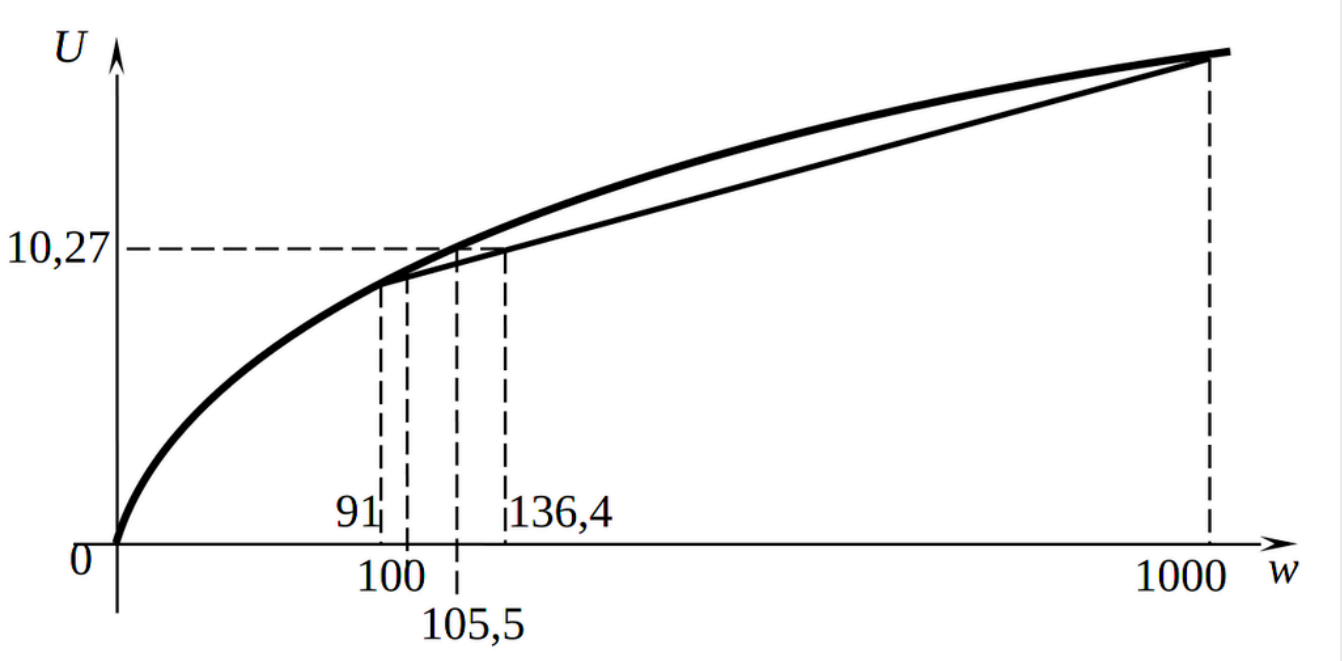


Рисунок 2. Согласие на рискованный проект в рамках инвестиционного партнерства: пример

Определим оптимальную численность инвестиционного партнерства с точки зрения данного индивида, максимизируя его ожидаемую полезность по n:

$$EU = \frac{19}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{99}{n}} \to \max_n.$$

Приравнивая производную ожидаемой полезности по n нулю, получаем равенство: $19\sqrt{1 + \frac{99}{n}} = 99\sqrt{1 - \frac{1}{n}}$, из которого следует $(361(n + 99) = 9801\,(n - 1))$, что оптимальное количество участников инвестиционного партнерства лежит в диапазоне $4 < n = \frac{4491}{944} < 5$.

Сравним соответствующие значения ожидаемой полезности: $EU \approx 13,158$ *при* $n = 4$ *и* $EU \approx 10,774$ *при* $n = 5$. *Следовательно,* $n = 4$, *т.е. индивиду наиболее выгодно привлечь 3 компаньонов.*

---

1. См.: Arrow K.J. Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care // *American Economic Review*. – 1963. - Vol. 53. - P. 941-973. Arrow K.J. The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing // *Review of Economic Studies*. – 1964. – Vol. 31, No. 2. - P. 91-96. Развитие этого подхода представлено, в частности, в работе: Ehrlich I., Becker G.S. Market Insurance, Self-Insurance, and Self-Protection // *Journal of Political Economy*. – 1972. - Vol. 80, No. 4. - P. 623-648. ↩

2. Ehrlich I., Becker G.S. Market Insurance, Self-Insurance, and Self-Protection // *Journal of Political Economy*. – 1972. - Vol. 80, No. 4. - P. 627. ↩

3. Каноническая постановка данной задачи такова:
$\min_{\alpha} \left((p-1)U(w-\alpha q) - pU(w-\alpha q - D + \alpha)\right) :$
$-\alpha \leq 0, p - q \leq 0.$ ↩

4. При $\lambda_0 = 0$ из (5.4.3) будет следовать $\lambda_1 = 0$, а значит, поскольку вектор множителей Лагранжа (λ_1, λ_2) не может быть нулевым, из условия дополняющей нежесткости (5.4.7) будет следовать справедливое страхование (5.4.2). ↩

5. Зорич В.А. Математический анализ. – 2-е изд. – М.: ФАЗИС, 1997, ч. 1. ↩

5.5. Покупка информации и цена информации

5.5.1. Понятия: ценность, полезность и цена информации

«Где существует неопределенность, имеется и возможность ее уменьшить, называемая информацией. Информация – понятие, прямо противоположное термину “неопределенность”» [1], - так подошел к решению проблемы выбора в условиях неопределенности Нобелевский лауреат по экономике 1972 г. К. Эрроу на лекции, прочитанной им в Федерации шведских отраслей промышленности 30 мая 1973 г. Однако поскольку «информация (или сигнал) является товаром, имеющим стоимость» [2], она не может распространяться бесплатно. Следовательно, актуальным является вопрос о цене информации или ее источника, если, к примеру, информация содержится на носителе или может быть получена через платный доступ к Интернету.

Стоимость, а точнее ценность[3] информации, индивид может ощутить через прирост полезности, на который он рассчитывает в результате оптимальной реакции на полученную информацию. Следовательно, полезность информации определяется как разность между ожидаемой полезностью, которую индивид может получить в результате оптимальных действий при наличии информации, и ожидаемой полезностью, которую индивид сможет извлечь в результате наилучших действий, предпринятых в отсутствии информации. Тогда максимальная цена информации будет равна той сумме денег, которая сделает индивида безразличным в выборе между решением при наличии информации и при ее отсутствии.

Таким образом, для определения полезности и цены информации необходимо выполнить следующие действия:

1. определить оптимальные варианты действий при наличии информации и при ее отсутствии;
2. вычислить ожидаемую полезность (или ее денежный эквивалент), которую можно получить в результате оптимальных действий при наличии информации;
3. вычислить ожидаемую полезность (или ее денежный эквивалент), которую можно получить в результате оптимальных действий при отсутствии информации;
4. найти разность между результатами, полученными в п. 2) и 3).

Рассмотрим эти действия на примере определения цены информации как сигнала в простой игре.

5.5.2. Определение цены информации [4]

Пусть индивид может либо выиграть X рублей с вероятностью ρ, либо проиграть 1 рубль с вероятностью (1-ρ). До начала игры у индивида есть возможность получить сигнал о ее исходе: включение зеленой лампочки (g - зеленый сигнал) с вероятностью φ будет означать, что выпадет выигрышный вариант, а включение красной лампочки (r - красный сигнал) с той же вероятностью будет означать, что выпадет проигрышный вариант. Иными словами, φ отражает вероятность (Pr) получения точного сигнала:

$$\Pr[g \vee X] = \Pr[r \vee -1] = \varphi.$$

Данная простая игра под условным названием «Зеленый-Красный» может быть проиллюстрирована с помощью дерева решений (рис. 5.21), которое построено, исходя из того, что природа определяет, выиграет индивид или нет, а ему остается лишь принять верное решение: «играть», если включится зеленая лампочка, и «не играть», если включится красная лампочка. Таким образом, для индивида два узла, соединенные пунктирной линией, принадлежат одному информационному множеству[5].

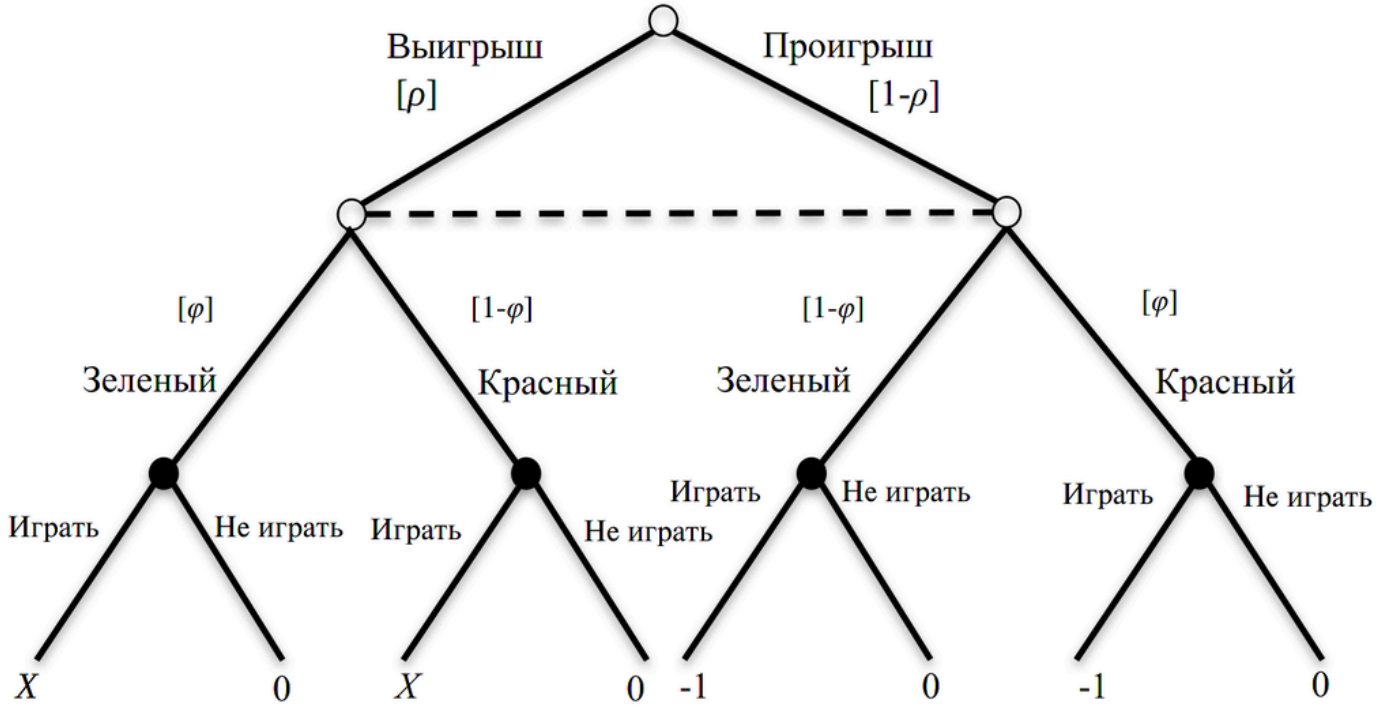


Рисунок 5.21. Дерево решений для игры «Зеленый-красный»

5.5.2.1. Цена совершенного сигнала

Совершенный сигнал с вероятностью φ=1 будет давать индивиду достоверную информацию о том, выиграет он или нет.

Тогда для нейтрального к риску индивида при совпадении значений ожидаемой полезности и ее денежного эквивалента определение цены сигнала будет выглядеть следующим образом:

1. оптимальный вариант действия после включения зеленой лампочки – «играть», после включения красной лампочки – «не играть»;
2. ожидаемая полезность, которую можно получить в результате оптимальных действий при наличии информации:
$$E(X)_i = \rho \bullet X + (1-\rho) \bullet 0 = \rho X;$$
3. ожидаемая полезность, которую можно получить в результате оптимальных действий при отсутствии информации:
$$E(X)_0 = \rho \bullet X + (1-\rho) \bullet (-1) = \rho X - (1-\rho);$$
4. разность между значениями ожидаемой полезности при наличии и при отсутствии информации составляет:
$$E(X)_i - E(X)_0 = 1 - \rho.$$

Следовательно, максимальная цена, которую рациональный индивид согласится заплатить за совершенный сигнал о предстоящем исходе, будет равна:

$$P_i = 1 - \rho.$$

5.5.2.2. Цена несовершенного сигнала

Пусть нейтральный к риску индивид по-прежнему может либо выиграть X рублей с вероятностью ρ, либо проиграть 1 рубль с вероятностью (1-ρ), т.е.:

$$\Pr[X] = \rho,$$
$$\Pr[-1] = 1 - \rho.$$

До принятия решения – «играть» или «не играть» - у индивида есть возможность получить бинарный сигнал, предсказывающий исход игры: включение зеленой лампочки (g - зеленый сигнал) с вероятностью φ будет означать, что выпадет выигрышный вариант, а включение красной лампочки (r - красный сигнал) с той же вероятностью будет означать, что выпадет проигрышный вариант. Таким образом, по-прежнему вероятность получения точного сигнала о выигрыше/проигрыше равна $\Pr[\mathrm{g} \vee X] = \Pr[r \vee -1] = \varphi$, однако $\varphi \neq 1$.

По теореме Байеса, выразим вероятности выигрыша и проигрыша при истинности сигналов g и r:

$$\Pr[X|\mathrm{g}] = \frac{\Pr[X] \bullet \Pr[\mathrm{g} \vee X]}{\Pr[\mathrm{g}]}, \text{ (5.5.1)}$$
$$\Pr[-1|r] = \frac{\Pr[-1] \bullet \Pr[r \vee -1]}{\Pr[r]}. \text{ (5.5.2)}$$

Фактически, они отражают вероятности точности прогноза сигнала и являются зеркальными отражениями соответствующих вероятностей получения точного сигнала.

В выражениях (5.5.1) и (5.5.2) нам известны сомножители в числителях, а знаменатели можно найти, следуя простым логическим рассуждениям. Зеленый сигнал g появится в одном из двух случаев: если в состоянии природы «выигрыш» сигнал верен и если в состоянии природы «проигрыш» сигнал ошибочен; красный сигнал r также появится в одном из двух случаев: если в состоянии природы «проигрыш» сигнал верен и если в состоянии природы «выигрыш» сигнал ошибочен. Следовательно:

$$\Pr[g] = \rho\varphi + (1-\rho)(1-\varphi), \text{ (5.5.3)}$$
$$\Pr[r] = \rho(1-\varphi) + (1-\rho)\varphi. \text{ (5.5.4)}$$

Подставив (5.5.3) и (5.5.4) в (5.5.1) и (5.5.2), получаем:

$$\Pr[X|g] = \frac{\rho\varphi}{\rho\varphi + (1-\rho)(1-\varphi)}, \text{ (5.5.5)}$$
$$\Pr[-1|r] = \frac{(1-\rho)\varphi}{\rho(1-\varphi) + (1-\rho)\varphi}. \text{ (5.5.6)}$$

Нетрудно заметить, что если $\rho = (1-\rho) = 0,5$, то $\Pr[X|g] = \Pr[g \vee X]$ и $\Pr[-1|r] = \Pr[r \vee -1]$.

Если же $\rho > 0,5 > (1-\rho)$, то:

$$\Pr[X|g] = \frac{\rho\varphi}{\rho\varphi + (1-\rho)(1-\varphi)} > \varphi = \frac{\rho\varphi}{\rho\varphi + \rho(1-\varphi)}, \text{ (5.5.7)}$$
$$\Pr[-1|r] = \frac{(1-\rho)\varphi}{\rho(1-\varphi) + (1-\rho)\varphi} < \varphi = \frac{(1-\rho)\varphi}{(1-\rho)(1-\varphi) + (1-\rho)\varphi}. \text{ (5.5.8)}$$

Неравенства (5.5.7) и (5.5.8) означают, что если вероятность события больше (меньше) 0,5, то вероятность точности прогноза сигнала выше (ниже) вероятности получения точного сигнала.

Оптимальные действия индивида будут зависеть от того объема информации, которым он владеет, поскольку именно это обстоятельство будет определять величину денежного эквивалента ожидаемой полезности, получаемой индивидом. Возможны три варианта.

1. При получении зеленого сигнала – «играть», если:

$$E^g(X) = \rho\varphi X + (1-\rho)(1-\varphi)(-1) \geq 0 \text{ или } X \geq \frac{(1-\rho)(1-\varphi)}{\rho\varphi}.$$

2. При отсутствии сигнала – «играть», если:

$$E^n(X) = \rho X + (1-\rho)(-1) \geq 0 \text{ или } X \geq \frac{(1-\rho)}{\rho}.$$

3. При получении красного сигнала – «играть», если:

$$E^r(X) = \rho(1-\varphi)X + (1-\rho)\varphi(-1) \geq 0 \text{ или } X \geq \frac{(1-\rho)\varphi}{\rho(1-\varphi)}.$$

Исходя из этих трех вариантов, можно выделить четыре случая для области значений X и характерных вариантов выбора соответствующих оптимальных действий.

Случай 1:

Если $X < \frac{(1-\rho)(1-\varphi)}{\rho\varphi}$ – «не играть» вне зависимости от сигнала.

Случай 2:

Если $\frac{(1-\rho)(1-\varphi)}{\rho\varphi} \leq X < \frac{(1-\rho)}{\rho}$ – «играть» только при получении зеленого сигнала (при отсутствии сигнала или при получении красного сигнала - «не играть»).

Случай 3:

Если $\frac{(1-\rho)}{\rho} \leq X < \frac{(1-\rho)\varphi}{\rho(1-\varphi)}$ – «играть» при получении зеленого сигнала или при отсутствии сигнала (при получении красного сигнала - «не играть»).

Случай 4:

Если $X \geq \frac{(1-\rho)\varphi}{\rho(1-\varphi)}$ - «играть» вне зависимости от сигнала.

Случаи 1 и 4 довольно тривиальны, поскольку в них для принятия решения не требуется сигнал. Интерес представляют случаи 2 и 3, которые, по сути, выводят на две стратегии поведения.

Стратегия 1: при отсутствии сигнала максимизировать функцию ожидаемой полезности $E(X) = \max\{0, E^n(X)\}$, где $E^n(X) = \rho X - (1-\rho)$.

Возможные результаты этой стратегии:

- $E(X) = 0$, если неинформированному индивиду игра приносит отрицательный денежный эквивалент ожидаемой полезности, и он не вступает в нее;
- $E(X) = E^n(X) > 0$, если неинформированному индивиду игра приносит положительный денежный эквивалент ожидаемой полезности, и он вступает в нее.

Стратегия 2: при получении зеленого сигнала максимизировать функцию ожидаемой полезности $E(X) = \max\{0, E^g(X)\}$, где $E^g(X) = \rho\varphi X - (1-\rho)(1-\varphi)$.

Возможные результаты этой стратегии:

- $E(X) = 0$, если информированному индивиду даже при получении зеленого сигнала игра приносит отрицательный денежный эквивалент ожидаемой полезности, и он не вступает в нее;
- $E(X) = E^g(X) > 0$, если информированному индивиду игра приносит положительный денежный эквивалент ожидаемой полезности, и он вступает в нее.

Обобщив эти стратегии, можно следующим образом определить ценность сигнала для индивида как функцию от X:

$$V_i(X) = \max\{0, \max\{0, E^g(X)\} - \max\{0, E^n(X)\}\}. \text{ (5.5.9)}$$

Интерпретировать функцию (5.5.9) можно следующим образом:

- $V_i(X) = 0$, если денежный эквивалент ожидаемой полезности положителен даже после получения красного сигнала, что означает нулевую ценность сигнала для индивида;
- $V_i(X) = \max\{0, E^g(X)\} - \max\{0, E^n(X)\}$, если разность между значениями ожидаемой полезности при получении зеленого сигнала и при отсутствии сигнала положительна.

Таким образом, индивид будет платить за информацию в виде сигнала в двух случаях.

Во-первых, если индивид вступает в игру только после зеленого сигнала, он будет готов заплатить за информацию о состоянии природы «выигрыш» следующую максимальную сумму:

$$P_i^g = E^g(X) = \rho\varphi X - (1-\rho)(1-\varphi).$$

Во-вторых, если индивид вступает в игру только при отсутствии красного сигнала, то за отсутствие информации о состоянии природы «проигрыш» он будет готов заплатить следующую максимальную сумму:

$$P_i^{gn} = E^g(X) - E^n(X) = \rho\varphi X - (1-\rho)(1-\varphi) - \rho X + (1-\rho) = (1-\rho)\varphi - \rho X(1-\varphi).$$

Второй случай можно представить и с помощью интуиции, позволяющей определить максимальную сумму, которую индивид готов заплатить за красный сигнал, то есть за информацию о состоянии природы «проигрыш», ибо красный сигнал также является релевантным для принятия оптимального решения. Поскольку при получении красного сигнала индивид принимает решение «не играть», он с вероятностью $\Pr[X \vee b]$ теряет шанс выиграть X руб., но с вероятностью $(1 - \Pr[X|b])$ приобретает

шанс не проиграть 1 руб. В таком случае за информацию, которую несет красный сигнал, он будет готов заплатить максимальную сумму, равную:

$$P_i^r = \Pr[b]\{-\Pr[X|b]X + (1 - \Pr[X|b])\} = (1-\rho)\varphi - \rho X(1-\varphi).$$

Очевидно, что индивид готов заплатить одну и ту же сумму денег за решение «играть» при отсутствии информации о состоянии природы «проигрыш» и за решение «не играть» при получении информации об этом состоянии природы.

Может ли информация иметь отрицательную ценность?

Да, в ряде случаев, когда для индивида оказывается предпочтительнее ситуация неопределенности. К примеру, во-первых, это может быть связано с нежелательностью опережения событий и стремления заглянуть вперед: заранее полученная информация о финале сериала может снизить полезность от его просмотра. Во-вторых, превращение информации из индивидуальной в общедоступную может нанести ущерб индивиду: отдельный дачник может быть заинтересован в получении точной информации о возможном ущербе его хозяйству от распространения лесного пожара и покупке соответствующей страховки, но если эта информация станет доступной всем дачникам, то рынок страхования может быть разрушен. В-третьих, сознательное игнорирование последствий наносит ущерб тогда, когда индивид предпочитает сегодня не знать о трудностях, которые его ожидают завтра, чтобы спокойно провести время, а не заниматься подготовкой к встрече с проблемами и благодаря этому избежать ряда потерь.

Ни в одном из этих случаев вопрос об определении цены информации не будет актуален. Однако подобные ситуации представляют интерес для исследования выбора с учетом поведенческих аспектов и ограниченной рациональности индивидов, некоторые из которых будут рассмотрены в следующем разделе.

---

1. Эрроу К. Информация и экономическое поведение // *Вопросы экономики*. – 1995. - №5. – С. 98. ↩
2. Там же. С. 100. ↩
3. Термин «стоимость» имеет строгий смысл в политической экономии. В микроэкономике используется его близкий аналог – «ценность» (value). ↩
4. В разделе использованы материалы книги: Birchler U., Bütler M. Information Economics. – Routledge: L. & N.Y., 2007. P. 31-59. ↩
5. В теории игр под информационным множеством понимается множество узлов, в отношении которых индивиду известно, что он находится в одном из них, но не известно, в каком именно. ↩

5.6. Подходы к моделированию выбора с учетом поведенческих аспектов и ограниченной рациональности

5.6.1. О логике параграфа

Почему мы решили посвятить последний параграф этой главы п***одходам к моделированию выбора с учетом поведенческих аспектов и ограниченной рациональности?***

Для ответа на поставленный вопрос обратимся к обзорной работе И. Гильбоа (2025), в которой есть такие слова: «Мы живем в интересное время. Мы являемся свидетелями серьезного столкновения двух направлений научной литературы. С одной стороны, у нас есть замечательный аппарат моделей рационального выбора… Эти модели включают абстрактные концепции, … каждая из которых может иметь множество интерпретаций в конкретных ситуациях. Эта свобода интерпретации добавляет моделям значительную гибкость… С другой стороны, существует впечатляющий массив литературы, в основном по психологии, показывающий, что классические предпосылки рационального выбора несостоятельны… Как нам следует справляться с разрывом между двумя течениями в литературе?» [1] .

Автор предлагает один из трех путей.

Первый путь – это путь прогресса науки по К. Попперу. Он предполагает, что в свете конфликтов между теорией и фактами теория должна быть адаптирована и доработана, чтобы соответствовать фактам. Наиболее наглядно этим путем следуют естественные науки. По нему же идет и поведенческая экономика, включая выводы психологических исследований в экономическую теорию в попытке сделать ее положения более точными.

Однако общественным наукам доступен и второй путь – они имеют возможность приближения реальности к теории. Для того чтобы люди, которые плохо разбираются в теории вероятностей, могли избежать ошибки базового уровня (когнитивного искажения, в результате которого игнорируются статистические закономерности), их можно обучить этой теории. И. ***Гильбоа приводит*** релевантный пример, как медицинским работникам пришлось объяснять правило Байеса широкой публике в период пандемии COVID-19, чтобы люди правильно отнеслись к необходимости вакцинации, которая снижает вероятность тяжелой формы заболевания.

Разумеется, во многих случаях можно следовать обоими путями: проповедовать теорию как нормативную, одновременно совершенствуя ее, чтобы она могла справляться с вызовами, становясь более позитивной теорией.

Наконец, третий путь – это просто игнорировать доказательства, опровергающие теорию.

Выбор пути зависит от многих факторов, включая личные вкусы ученого и сущность исследуемых проблем.

Мы решили рассмотреть некоторые вопросы ***выбора с учетом поведенческих аспектов и ограниченной рациональности, по которым в современной науке достигнут консенсус, для того чтобы у тех, кто изучил весь изложенный выше материал, была возможность поразмышлять, во-первых, о*** надежности представленной теории; во-вторых, о том, насколько она релевантна экономическому поведению; и, в-третьих, насколько на самом деле рациональны экономические субъекты, принимающие решения.

5.6.2. Психологически достоверные допущения в исследованиях поведения индивидов

Изучение и моделирование поведенческих аспектов потребительского выбора приближает теорию к более реалистичному обобщению экономических закономерностей. Призыв к этому прозвучал еще в 1950-х гг. в статьях Х. Лейбенстайна [2] , предложившего подход к моделированию социальных воздействий на экономическое поведение, и Г. Саймона [3] (Нобелевский лауреат 1978 г.), выдвинувшего концепцию ограниченной рациональности. Однако если теоретическое воплощение ограниченной рациональности является непростой задачей, поскольку никакой общей фундаментальной предпосылки, аналогичной по силе предпосылке о рациональном поведении экономических субъектов, не существует [4] , то идея исследовать поведение индивидов с помощью психологически достоверных допущений оказалась весьма плодотворной. Наиболее яркий отклик она получила в работах Г. Беккера [5] (Нобелевский лауреат 1992 г.), Д. Канемана (Нобелевский лауреат 2002 г.) и А. Тверски [6] , чей подход развивают многие современные экономисты, выполняющие исследования в области поведенческой экономики.

Как заметил основоположник экономического империализма Г. Беккер, «экономический подход не требует, чтобы отдельные агенты непременно осознавали свое стремление к максимизации или чтобы они были в состоянии вербализовать либо как-то иначе внятно объяснить причины устойчивых стереотипов в своем поведении. Таким образом, он совпадает в этом с современной психологией, придающей особое значение подсознанию, и социологией, выделяющей функции явные и латентные» [7] . При этом экономический подход настолько универсален, что с его помощью можно анализировать самые разные области принятия решений – от решения вступить в брак и завести детей – до решения дискриминировать сотрудников при приеме на работу по определенному признаку, не имеющему отношения к их производительности.

Поведенческая экономика, не отвергая, а напротив, отстаивая предпосылку о рациональности выбора, во-первых, рассматривает индивидов, которые максимизируют имеющую специфический вид функцию полезности (или «функцию ценности»), учитывающую нестандартность предпочтений. Действительно, индивид может обладать консистентными (полными и транзитивными) предпочтениями, но эти предпочтения могут быть любыми (например, альтруистическими, а не эгоистическими), а его поведение будет рациональным в случае выбора *наилучшего варианта потребления из всех* доступных при наличии ограничений.

Во-вторых, в процессе принятия решений индивид может быть подвержен неординарным убеждениям и/или иметь специфический подход к оценке вероятности развития ситуации и принятию решений. Тогда его поведение может рассматриваться, к примеру, с позиции ***рациональности реализации стратегии принятия решений.***

Таким образом, если функцию, которая максимизуируется в стандартной модели потребительского выбора, обобщенно представить в следующем виде:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \sum p\left(s_t\right) U\left(x_i^t \vee s_t\right),$$

где:

$\mathrm{x}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{t}}$ – набор стратегий при различных состояниях мира s_t,

$p\left(s_t\right)$ – оценка вероятностей наступления состояний мира s_t,

δ^t – дисконтирующий множитель,

$U\left(x, t, s\right)$ – функция полезности,

то поведенческой экономикой рассматриваются как нестандартные функции полезности, так и необычные форматы стратегий принятия решений, особенности формирования убеждений в вероятности наступления возможных исходов, а также специфические подходы к принятию решений.

5.6.3. Асимметричная функция ценности Канемана-Тверски [8]

В качестве развития теории отношения к риску в 1970-х гг. Даниелом Канеманом и Амосом Тверски в русле поведенческой экономики была разработана теория перспектив, которая, по словам Ричарда Талера, стала «моделью, прогнозирующей реальные решения, принимаемые реальными людьми» [9]. «Это теория о поведении Людей, а не Рационалов» [10], - заключил Нобелевский лауреат 2017 г.

Теория перспектив учитывает следующие допущения, отражающие характерные психологические особенности людей:

1. склонность замечать абсолютные, а не относительные изменения экономических величин, в том числе дохода и богатства;
2. убывающая чувствительность в отношении изменения статус-кво;
3. несклонность к риску при стремлении получить прибыль и склонность к риску при стремлении избежать убытка.

Главную идею теории перспектив передает асимметричная (*S*-образная) функция ценности [11] (рис. 5.22). Верхняя часть этой кривой повторяет вид функции полезности не склонного к риску индивида, отражая убывающую предельную полезность получаемого дохода (ось *I* - «выигрыши»). Например, выигрыш первых 100 рублей будет воспринят индивидом через большее увеличение полезности, чем выигрыш той же суммы в интервале от 100 до 150 тыс. руб. Ее нижняя часть повторяет вид функции полезности склонного к риску индивида, отражая убывающую величину снижения предельной полезности в результате потерь дохода (ось *I* - «потери»). Например, потеря первых 100 рублей будет воспринята индивидом через большее снижение полезности, чем потеря той же суммы в интервале от 100 до 150 тыс. руб.

Таким образом, вогнутость верхнего участка асимметричной функции ценности Канемана-Тверски указывает на стремление индивида избегать риска ради роста дохода, а выпуклость ее нижнего участка свидетельствует о склонности к риску в случае возможности снизить потери. «В этой *S*-образной кривой сосредоточена величайшая мудрость о человеческой натуре» [12], - так Ричард Талер отозвался о ней как о «локомотиве» теории перспектив.

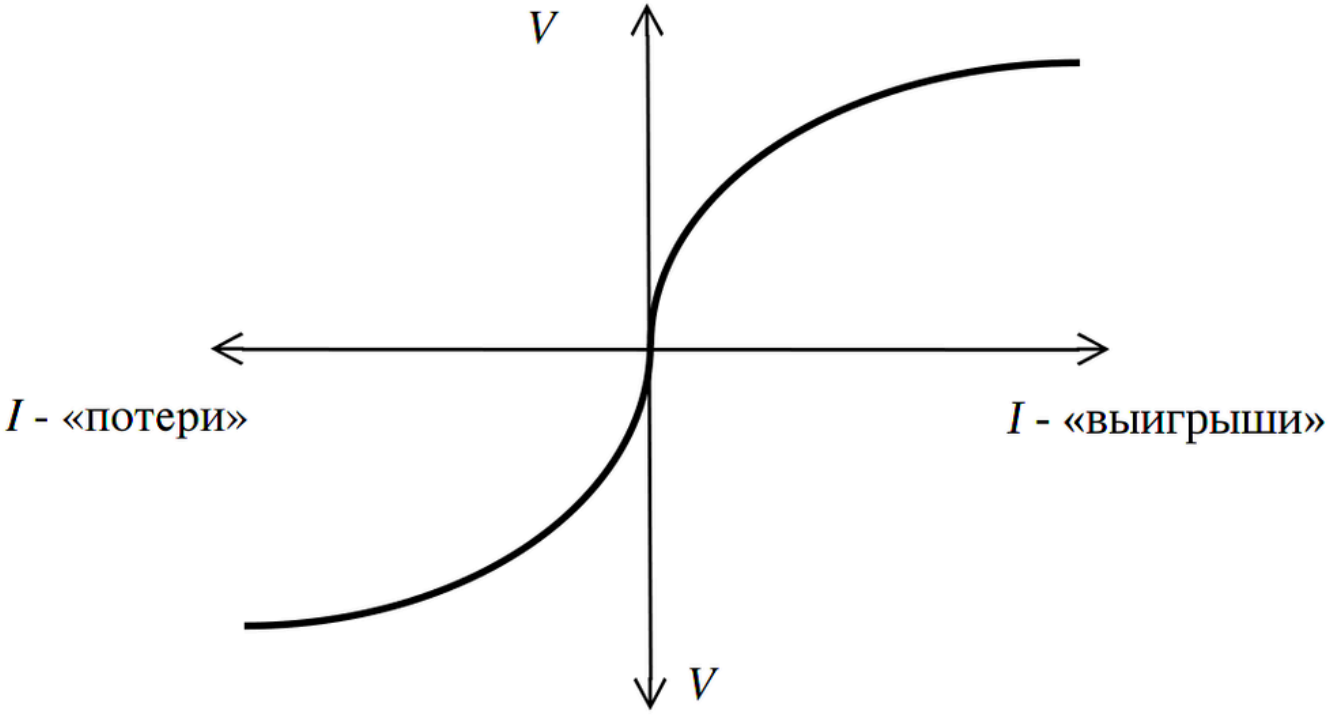


Рисунок 5.22. Асимметричная (S-образная) функция ценности Канемана-Тверски

БОЛЬШАЯ РОССИЙСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ	Заглянем в Большую российскую энциклопедию: Асимметричная функция ценности Канемана – Тверски

5.6.4. Моделирование спроса при наличии социальных воздействий на полезность

Основы моделирования потребительского спроса, формирующегося под влиянием внешнего воздействия на получаемую потребителем полезность, были заложены Х. Лейбенстайном, который классифицировал спрос на потребительские товары как функциональный и нефункциональный в соответствии с вызывающими его мотивами. Если функциональный спрос обусловлен присущими товарам качествами, то нефункциональный спрос вызван внешними воздействиями на полезность, спекулятивными и нерациональными мотивами. По мнению Х. Лейбенстайна, большую часть нефункционального спроса вызывают именно внешние, или социальные, воздействия, которые проявляются как эффект присоединения к большинству, эффект сноба и эффект Веблена [13] .

Эффект присоединения к большинству – это величина, на которую возрастает спрос вследствие того, что другие потребители приобретают этот товар. «Он выражает стремление людей приобретать товар, чтобы не отстать от жизни, чтобы соответствовать тому кругу людей, в котором они хотели бы вращаться, чтобы быть модными и элегантными или для того, чтобы не быть “белой вороной”» [14] .

На рис. 5.23 гипотетические кривые спроса D^a, D^b, D^c, D^d, … D^n показывают рыночный спрос, который имел бы место, если бы все потребители полагали, что общий рыночный спрос составляет соответственно *a*, *b*, *c*, *d*, … *n* единиц. Если потребители обладают полной рыночной информацией об общем рыночном спросе, то теми точками, которые отражают фактические объемы спроса, будут точки E^a, E^b, E^c, E^d, … E^n. Следовательно, кривой фактического спроса на товар будет кривая D_B, которая соединяет эти точки.

При снижении цены товара, к примеру, от P_1 до P_2 за счет эффекта цены величина спроса возрастает на *x*-*a*, а за счет эффекта присоединения к большинству она увеличивается до *c*. Таким образом общее изменение величины спроса составит *c*-*a*. Эффект присоединения к большинству действует в том же направлении, что и эффект цены.

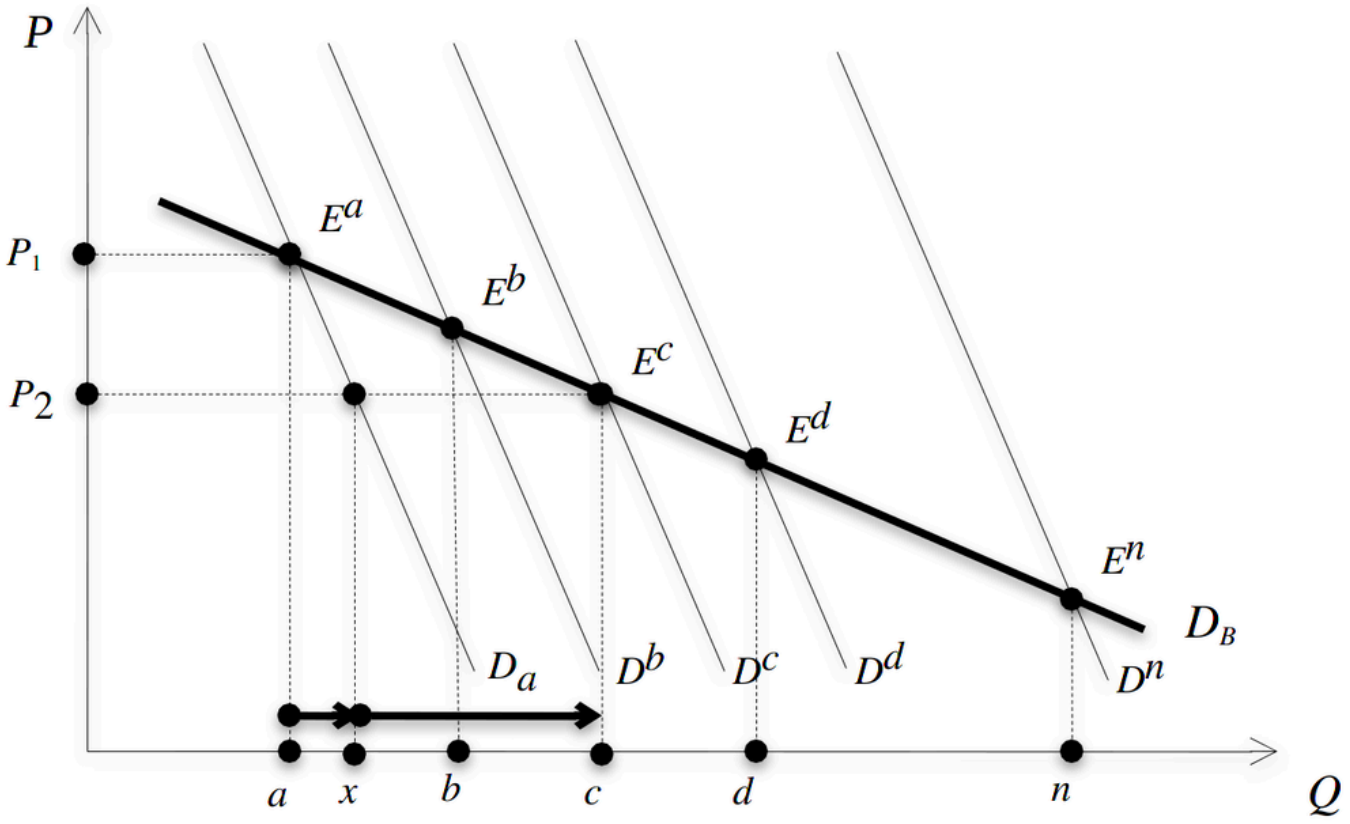


Рисунок 5.23. Эффект присоединения к большинству

Эффект сноба «выражает стремление людей к исключительности, стремление отличаться друг от друга, выделять себя из “толпы”» [15] . Он равен изменению величины спроса в результате того, что другие потребляют этот товар.

Как показано на рис. 5.24, кривые спроса D^a, D^b, D^c, D^d, … D^n соответствуют ожиданиям потребителей, что общий рыночный спрос составляет соответственно *a*, *b*, *c*, *d*, … *n* единиц. Их расположение отражает поведение снобов: чем выше ожидаемая величина рыночного спроса, тем ниже сдвигается кривая. Однако при соблюдении предпосылки о полноте рыночной информации теми точками, которые отражают фактические объемы спроса, будут точки E^a, E^b, E^c, E^d, … E^n, а кривой фактического спроса на товар будет кривая D_S, соединяющая эти точки.

При снижении цены товара, к примеру, от P_1 до P_2 за счет эффекта цены величина спроса возрастает на *x*-*a*, но за счет эффекта сноба она уменьшается до *b*. Таким образом, общее изменение величины спроса составит *b*-*a*. Эффект сноба действует в противоположном эффекту цены направлении, но не превышает эффект цены, поскольку предел поведения сноба – остаться единственным покупателем, а не покинуть рынок.

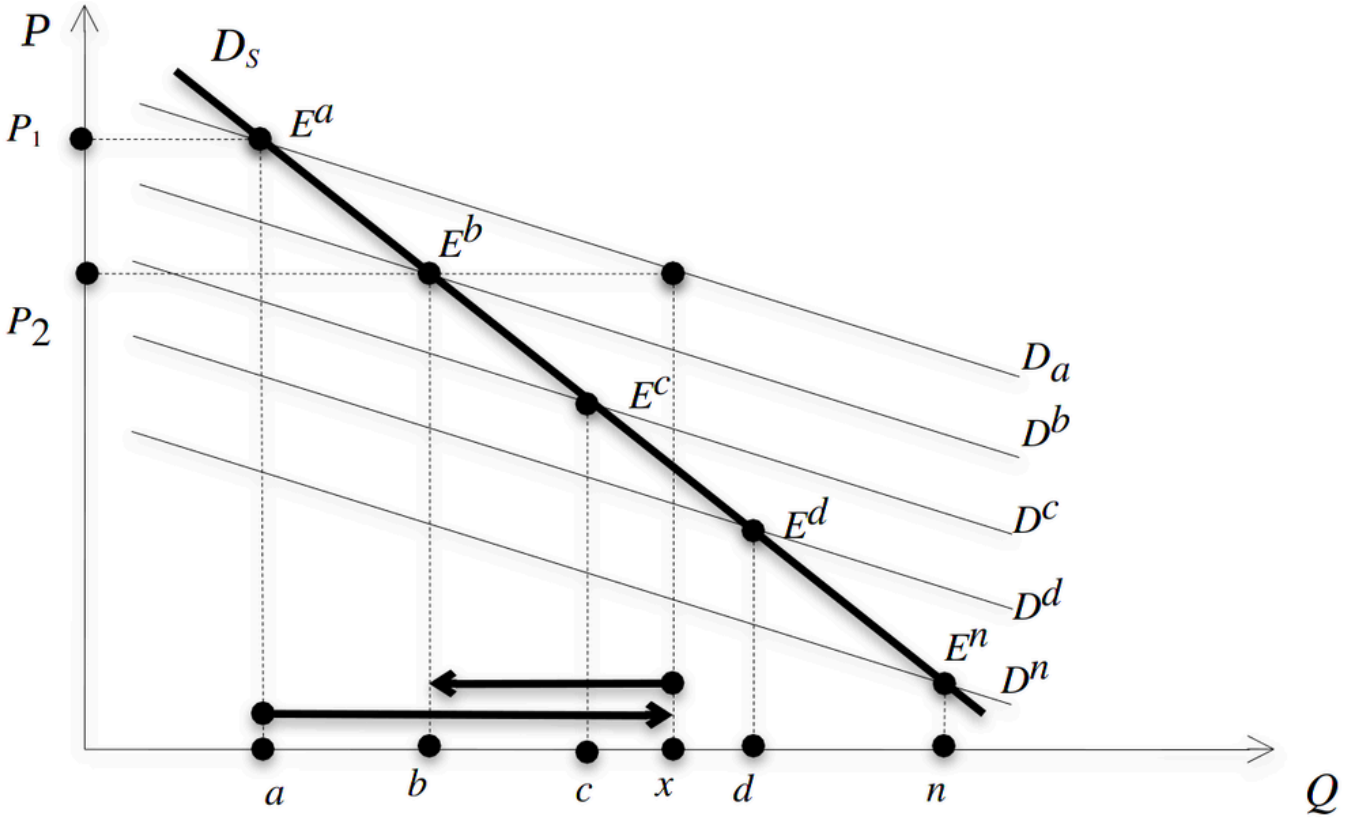


Рисунок 5.24. Эффект сноба

Эффект Веблена отражает явление демонстративного (или показательного) потребления: «Это та величина, на которую возрастает спрос потому, что товар имеет более высокую, а не более низкую цену» [16] . Потребитель при этом извлекает полезность не только из присущих товару свойств, но и из уплачиваемой за товар цены. Поэтому для аналитических целей следует разделить цену на реальную (фактически уплаченную потребителем) и демонстративную, или показательную (уплаченную потребителем по мнению других людей). «Вероятно, эти цены будут одинаковы на высокоорганизованном рынке, где информация о ценах доступна всем. На других рынках, где могут иметь место “выторговывание” или частые скидки, реальная цена и показательная цена не совпадают. В любом случае спрос будет зависеть от реальной и от демонстративной цены» [17] .

На рис. 5.25 по вертикальной оси отложены значения как реальных (P_1, P_2, P_3, P_4, ..., P_n), так и ожидаемых демонстративных цен (P_1^e, P_2^e, P_3^e, P_4^e, ..., P_n^e). Кривые спроса D^a, D^b, D^c, D^d, ... D^n соответствуют ожиданиям потребителей, что демонстративные цены составят P_1^e, P_2^e, P_3^e, P_4^e, ..., P_n^e. Если потребители обладают точной рыночной информацией, то реальные и ожидаемые демонстративные цены совпадают: $P_1=P_1^e$, $P_2= P_2^e$, $P_3=P_3^e$, $P_4=P_4^e$, ..., $P_n=P_n^e$. Кривая D_V, соединяющая точки, в которых равны реальные и ожидаемые демонстративные цены, дает кривую общего рыночного спроса.

При снижении цены товара, к примеру, от P_4 до P_2 за счет эффекта цены величина спроса возрастает на *x*-*a*, но за счет эффекта Веблена она уменьшается до *b*. Таким образом, общее изменение величины спроса составит *a*-*b*, поскольку Эффект Веблена действует в противоположном эффекту цены направлении, и при снижении цены часть покупателей покинет рынок из-за падения получаемой ими полезности вследствие снижения демонстративной цены.

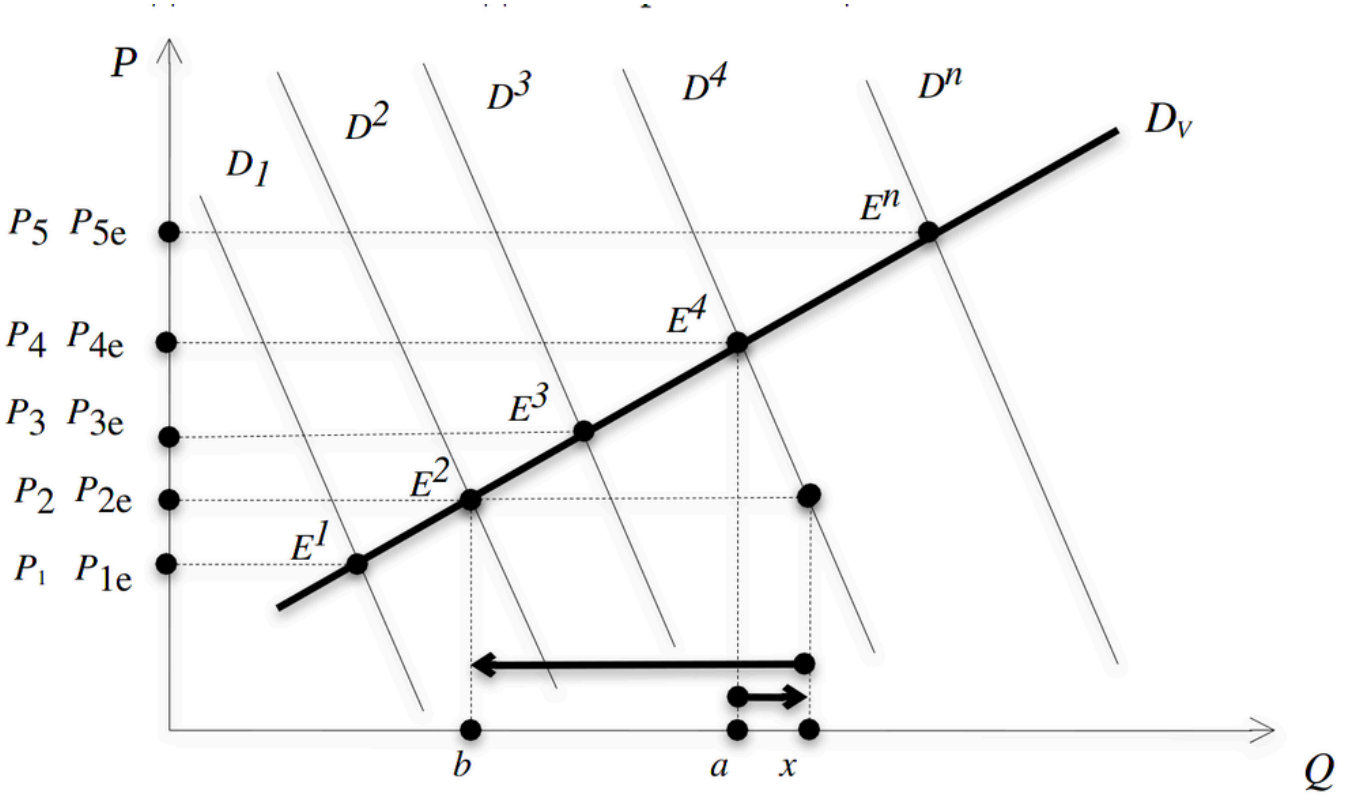


Рисунок 5.25. Эффект Веблена

Наблюдательный микроэкономист: Эффект присоединения к большинству, эффект сноба и эффект Веблена вокруг нас

Эффект присоединения к большинству, эффект сноба и эффект Веблена широко распространены в потребительском поведении, но выделить их не всегда просто.

Эффект присоединения к большинству проявляется в модных трендах и часто встречается седи тех, кто демонстрирует принадлежности к той или иной субкультуре. Так, современных хипстеров отличает определенный имидж, главные признаки которого показаны на рис. 1. Относящие себя к хипстерам добавляют к ним очки «Ray Ban», фотоаппарат «Holga», кеды «Converse», блокнот «Moleskine» и другие атрибуты.



Рисунок 1. Присоединение к большинству: имидж хипстера
Источник рисунка: URL: https://fishki.net/1614862-prevrawaemsja-v-histera-i-delaem-luki-pravilno.html

Ведущий аскетичный образ жизни, но все-таки испытывающий необходимость быть на связи, сноб гордо прибегает к помощи кнопочного телефона. Однако он вполне может быть принят за присоединяющегося к сторонникам набирающего популярность среди молодежи движения «флифонеров». Многие представители поколения Z и некоторые миллениалы, ратующие за цифровой детокс, используют не «навороченные» смартфоны, а «тупые» кнопочные телефоны с ограниченным количеством функций (рис. 2).



Рисунок 2. Сноб или «флифонер»?
Источник рисунка: https://rskrf.ru/tips/eksperty-obyasnyayut/chem-knopochnyy-telefon-luchshe-smartfona/

Для поддержания престижа, элитарности и защиты продукции бренда от подделок французский дом моды Louis Vuitton не устраивает распродаж и не делает скидок в официальных оффлайн- и онлайн-магазинах. Невостребованный товар компания уничтожает, не позволяя его купить с дисконтом даже сотрудникам.

Почему же стоит очередь в бутик Louis Vuitton? Подвержены ли желающие приобрести одежду и аксессуары этого бренда эффекту Веблена? Приглашаем Вас поразмышлять над этими вопросами…



Рисунок 3. Очередь в бутик Louis Vuitton
Источник рисунка: личный фотоархив авторов учебника



О чем свидетельствуют результаты эксперимента? Эффект присоединения к большинству и эффект безбилетника в принятии решений о вакцинации

Эффект присоединения к большинству и эффект безбилетника в принятии решений о вакцинации (гиперссылка)

В 2018 году учеными из Великобритании был проведен онлайн-эксперимент, в котором 1365 взрослых британцев случайным образом были распределены в одну из семи испытуемых групп, получивших сообщения с информацией о разном уровне охвата прививками от гриппа их социальной среды (варьируется от 10% до 95%), и в контрольную группу, которая не получила никаких сообщений.

Результаты эксперимента показали, что сообщения о высоких уровнях охвата населения прививками могут поощрять вакцинацию из-за эффекта присоединения к большинству, но также и препятствовать ей из-за эффекта безбилетника, что делает их влияние на охват вакцинацией неоднозначным. Эффект присоединения к большинству нарастает вплоть до уровня охвата прививками 75% представителей социальной группы. При показателях охвата выше 75% численность вакцинированных либо перестает увеличиваться, либо остается неизменной, либо даже снижается. Таким образом поведение безбилетника вытесняет эффект присоединения к большинству: при высоком уровне охвата вакцинацией люди начинают все больше надеяться на коллективный иммунитет.

Авторы эксперимента также обнаружили значительную неоднородность возникающих поведенческих эффектов в зависимости от индивидуального восприятия рисков инфицирования и показателей охвата вакцинацией.

Об этих и других результатах проведенного эксперимента можно подробнее узнать из текста статьи:

Galizzi, M. M., Lau, K. W., Miraldo, M., Hauck, K. Bandwagoning, Free-Riding and Heterogeneity in Influenza Vaccine Decisions: An Online Experiment // Health Economics. – 2022. – Vol. 31, Iss. 4 – P. 614-646. https://doi.org/10.1002/hec.4467

5.6.5. Процедурная рациональность

Определенный шаг в направлении моделирования принятия поведенческих решений сделан на основе так называемой *процедурной рациональности* [18] .

Процедура принятия решения рациональным индивидом описывается с помощью следующих предположений [19] :

1. *Знание проблемы:* принимающий решение индивид полностью осведомлен обо всех альтернативах.
2. *Четкие предпочтения:* принимающий решение индивид способен четко ранжировать все возможные альтернативы.
3. *Возможность оптимизации:* принимающий решение индивид обладает всеми необходимыми навыками и неограниченными расчетными способностями для совершения оптимального выбора.
4. *Безразличие к логически эквивалентным альтернативам:* замена одной альтернативы на другую логически эквивалентную ей альтернативу не влияет на выбор принимающего решение индивида.
5. *Наличие пространства состояний:* индивид, принимающий решение в условиях неопределенности, имеет представление о пространстве состояний, которые находятся вне его контроля и определяют доступность той или иной альтернативы.

Однако ряд мотивов, лежащих в основе процедуры выбора, могут противоречить перечисленным предположениям. Рассмотрим некоторые из них: «рамочный эффект», «тенденцию к упрощению проблем» и «поиск причин».

«Рамочный эффект» проявляется в том, как описан набор альтернатив, из которых индивиду предстоит сделать выбор.

Этот мотив наилучшим образом иллюстрирует ставший хрестоматийным эксперимент Д. Канемана и А. Тверски. Принявшие участие в эксперименте получили следующее описание задания: *«Предположим, что в некоторой стране ожидается вспышка гепатита. Ожидается, что в результате данного заболевания погибнет 600 человек. Для борьбы с этим заболеванием предлагаются две альтернативные программы»*.

Первой группе испытуемых было предложено выбрать одну из следующих программ:

- *Программа A: в случае реализации программы будет сохранена жизнь 200 человек.*
- *Программа B: в случае реализации программы с вероятностью 1/3 будет сохранена жизнь 600 человек, с вероятностью 2/3 в результате реализации программы не будет спасена ни одна жизнь.*

72% опрошенных предпочло альтернативу *A*.

Второй группе испытуемых было предложено выбрать одну из следующих программ:

- *Программа C: в случае реализации погибнут 400 человек.*
- *Программа D: в случае реализации с вероятностью 1/3 никто не погибнет, с вероятностью 2/3 программа не будет иметь успеха и погибнут 600 человек.*

78% опрошенных выбрало альтернативу *D*.

Однако легко заметить, что *A=C* и *B=D*. Отличие заключается только в формулировке: программы *A* и *B* сформулированы в позитивном духе (количество спасенных жизней), а программы *C* и *D* сформулированы в негативном ключе (число умерших).

«Тенденция к упрощению проблем» также может быть представлена на основе результатов эксперимента Д. Канемана и А. Тверски. Принявшие участие в эксперименте получили задание выбрать одну из предложенных им лотерей, каждая из которых предполагает вращение рулетки и приз в зависимости от выпавшего цвета.

Сначала испытуемым было предложено выбрать одну из лотерей *A* и *B*:

Лотерея A	*Цвет*	Белый	Красный	Зеленый	Желтый
	Вероятность (%)	90	6	1	3

	Приз ($)	0	45	30	-15
Лотерея B	*Цвет*	Белый	Красный	Зеленый	Желтый
	Вероятность (%)	90	7	1	2
	Приз ($)	0	45	-10	-15

Около 58% опрошенных предпочло лотерею *A*.

Затем испытуемым было предложено выбрать одну из лотерей *C* и *D*:

Лотерея C	*Цвет*	Белый	Красный	Зеленый	Синий	Желтый
	Вероятность (%)	90	6	1	1	2
	Приз ($)	0	45	30	-15	-15
Лотерея D	*Цвет*	Белый	Красный	Зеленый	Синий	Желтый
	Вероятность (%)	90	6	1	1	2
	Приз ($)	0	45	45	-10	-15

Все опрошенные выбрали лотерею D. Однако она полностью идентична лотерее B, т.к. красный и зеленый в D объединены в лотерее B в красном. Более того, лотереи A и C также идентичны, т.к. синий и желтый в C объединены в лотерее A в желтом.

Почему эксперимент дал такой результат? А. Рубинштейн привел следующее объяснение: принимающие решения индивиды упрощали проблему. В отношении A и B они рассуждали примерно так:

1. 6% и 7%, а также 2% и 3% примерно равны;
2. данные о вероятностях и призах для цветов белого, красного и желтого примерно одинаковы для *A* и *B*;
3. если исключить «похожие» компоненты, остается лишь сравнить доход в размере $30 с у бытком, равным 10$. Это сравнение в пользу *A* и является решающим фактором в определении, что лотерея *A* предпочтительнее *B*.

Что касается лотерей C и D, то D очевидно доминирует над C.

«Поиск причин», склоняющих индивида к предпочтению той или иной альтернативы, зачатую не позволяет ему сделать рациональный выбор.

Этот аспект процедуры выбора иллюстрирует эксперимент, проведенный А. Тверски и Е. Шафиром[20]. Участникам эксперимента был показан список из 12 карт, каждая из которых соответствовала одному призу. Затем каждому испытуемому было выдано по 2 карты и предоставлена возможность уплатить взнос за получение третьей карты, что означало бы появление шанса выбирать не из двух, а из трех альтернатив.

Выданные испытуемым карты представляли следующие комбинации призов:

1. призы A и B такие, что A>B;
2. призы A и C такие, что A=C.

В итоге значительно меньшая доля обладателей карт A и B выбрали возможность уплатить взнос за третью карту по сравнению с долей тех, кто поступил аналогично, обладая картами A и C. Объясняется это тем, что в первом случае причина совершить выбор была найдена быстрее и заинтересованность в расширении числа опций оказалась слабее.

Рассмотренные эксперименты демонстрируют мотивы выбора, не полностью совместимые с парадигмой рациональности. При этом сам процесс выбора в каждом из описанных случаев не является хаотичным. Данное явление можно интерпретировать с помощью введенных автором идеи ограниченной рациональности Г. Саймоном понятий основной рациональности и процедурной рациональности. Если основная рациональность характеризует поведение, которое приводит к достижению цели при определенных условиях и ограничениях, то процедурная рациональность характеризует поведение, воплощающее некую стратегию мышления как результат внутреннего обсуждения. Процедурная рациональность отличается от иррациональности, которая выражается в импульсивных действиях без какого-либо осмысления. Как подчеркивает А. Рубинштейн, «когда мы моделируем процедурные аспекты принятия решений, мы не обязательно стремимся к конструированию моделей выбора, которые несовместимы с рациональностью. Наши действия включают моделирование формальных процедур выбора, которые представляют собой определенный процедурный элемент, и дальнейший анализ того, совпадает ли эта процедура с рациональностью. Если да, то мы постараемся идентифицировать ограничения в пространстве предпочтений, которые совместимы с этими процедурами»[21].

Для иллюстрации этого подхода А. Рубинштейн рассматривает выбор из двух альтернатив. Одним из путей упрощения проблемы выбора является применение идеи сходства с целью устранения тех компонентов двух альтернатив, которые являются похожими. Таким образом через сокращение количества элементов, включенных в качественные описания двух альтернатив, упрощается сравнение, а значит и выбор.

В качестве примера выбраны результаты эксперимента, представленные Д. Канеманом и А. Тверски [22]. Объектами выбора в этом эксперименте являются простые лотереи (x, p), которые приносят \$$x$ с вероятностью p и \$0 с вероятностью 1-p. Таким образом, каждый объект выбора можно представить как вектор длинной в два элемента.

В ходе эксперимента одну группу испытуемых попросили выбрать между следующими лотереями:

$$L_1=(4000, 0,8) \text{ и } L_2=(3000, 1,0).$$

Подавляющее большинство участников этой группы выбрали L_2.

Другую группу испытуемых попросили выбирать между следующими лотереями:

$$L_3=(4000, 0,2) \text{ и } L_4=(3000, 0,25).$$

Большинство участников этой группы выбрали L_3.

Выбор L_2 из (L_1, L_2) и L_3 из (L_3, L_4) не нарушает законов рациональности. Тем не менее, он нарушает аксиому независимости (объединяющую аксиомы замещения и сведения к простым лотереям).

Очевидно, что лотереи L_3 и L_4 могут быть представлены как сложные лотереи через L_1, L_2 и вырожденную лотерею с гарантированным выигрышем, равным 0:

$$L_3=0,25L_1+0,75(0),$$

$$L_4=0{,}25L_2+0{,}75(0).$$

Отсюда аксиома независимости требует, чтобы выбор между L_3 и L_4 соответствовал выбору между L_1, и L_2, что вступает в противоречие с результатами эксперимента при сравнении простых лотерей, ибо при сравнении сложных лотерей он был совершен в пользу L_4.

Размышления, которыми руководствовалось большинство испытуемых, сравнивая простые лотереи, видимо, были следующими.

Сравнивая L_3 и L_4, тот, кто принимает решения, сталкивается с внутренними противоречиями, вследствие бо'льшего выигрыша в L_3 против бо'льшей вероятности получить положительный выигрыш в L_4. Он пытается упростить проблему выбора так, чтобы одна из альтернатив стала очевидно лучше. С этой целью он сравнивает вероятности и выигрыши, которые представлены в двух лотереях, и приходит к выводу, что вероятности 0,2 и 0,25 схожи, а выигрыши в $4000 и 3000$, наоборот, отличаются. Этот сравнительный анализ «упрощает проблему», исключая из рассмотрения вероятности и оставляя выбор между L_3 и L_4, который базируется только на выборе между $4000 и 3000$.

Сравнивая L_1, и L_2, индивид, принимающий решение, не может упростить проблему, основываясь на упразднении одинаковых компонент, до тех пор, пока ни вероятности, ни выигрыши не будут восприниматься как одинаковые. Тогда он применяет другой принцип, вероятно, неприятие риска, чтобы прибегнуть к предпочтению L_2.

При сравнении сложных лотерей участники эксперимента упрощали проблему, отвлекаясь от одинаковых вероятностей и выбор L_2 означал и выбор L_4.

Следовательно, представлены ли лотереи как простые или сложные, оказывается, что главным шагом в принятии решений является «исключение одинаковых факторов» и, как следствие, сведение изначально многомерного выбора к более простому. Внедрение этого принципа при сравнении L_3 и L_4 как простых лотерей приводит к выбору L_3, а внедрение его тогда, когда лотереи представлены в виде сложных лотерей, приводит к выбору L_4. В целом, порядок применения принципа упрощения проблемы зависит от того, как поставлена задача.

Таким образом, исследование и моделирование экономического поведения с учетом психологически достоверных предпосылок приближает теорию к более реалистичному обобщению закономерностей потребительского выбора.

---

1. Gilboa, I. Decision Under Uncertainty: State of the Science // Annual Review of Economics. – 2025. - Vol. 17, - P.5. https://doi.org/10.1146/annurev-economics-090924-041522 ↩
2. Лейбенстайн Х. Эффект присоединения к большинству, эффект сноба и эффект Веблена в теории покупательского спроса // Вехи экономической мысли. Теория потребительского потребления и спроса. Т.1. Под ред. В.М. Гальперина. – СПб.: Экономическая школа, 2000. С. 304-325. ↩
3. Simon H. A. A Behavioral Model of Rational Choice // *Quarterly Journal of Economics*. - 1955. - Vol. 69. - P. 99–118. Simon H. A. Rational Choice and the Structure of the Environment // *Psychological Review*. - 1956. - Vol. 63. - P. 129–138. ↩
4. Харстад Р., Зельтен Р. Модели ограниченной рациональности: пути достижения интеллектуальной конкурентоспособности // *Вопросы экономики*. – 2014. - №5. – С. 5-26. ↩
5. Беккер Г. Экономический анализ и человеческое поведение // Человеческое поведение: Экономический подход. Избранные труды по экономической теории. – М.: ГУ ВШЭ, 2003. С. 28-48. ↩
6. См. например: Tversky A., Kahneman D. Rational Choice and the Framing of Decisions // *Journal of Business*. - 1986. - Vol. 59. - P. 251–278. ↩
7. Беккер Г. Экономический анализ и человеческое поведение // Человеческое поведение: Экономический подход. Избранные труды по экономической теории. – М.: ГУ ВШЭ, 2003. С. 35. ↩
8. ***См.: Антипина О. Н. Асимметричная функция ценности Канемана – Тверски // Большая российская энциклопедия: научно-образовательный портал – URL: https://bigenc.ru/c/asimmetrichnaia-funktsiia-tsennosti-kanemana-tverski-662ca4/?v=4064281. – Дата публикации: 21.06.2022.*** ↩
9. Талер Р. Новая поведенческая экономика: почему люди нарушают правила традиционной экономики и как на этом заработать. – М.: Эксмо, 2018. – С. 40-41. ↩
10. Там же. С. 41. ↩
11. Kahneman D., Tversky A. Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk // *Econometrica*. – 1979. - Vol. 47, No. 2. - P. 279. ↩
12. Талер Р. Новая поведенческая экономика: почему люди нарушают правила традиционной экономики и как на этом заработать. – М.: Эксмо, 2018. – С. 43. ↩
13. Эффект Веблена назван в честь американского экономиста Торстейна Веблена, который ввел в науку понятие демонстративного (или показательного) потребления. ↩
14. Лейбенстайн Х. Эффект присоединения к большинству, эффект сноба и эффект Веблена в теории покупательского спроса // Вехи экономической мысли. Теория потребительского потребления и спроса. Т.1. Под ред. В.М. Гальперина. – СПб.: Экономическая школа, 2000. С. 306. ↩
15. Там же. ↩
16. Там же. ↩
17. Там же. ↩
18. Ряд фундаментальных идей в этой области принадлежат А. Рубинштейну. Основу этого раздела составили материалы 1 и 2 частей его работы: Rubinstein A. Modeling Bounded Rationality. – The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 1998. [Режим доступа: https://arielrubinstein.tau.ac.il/br/br.pdf]. ↩
19. Rubinstein A. Modeling Bounded Rationality. – The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 1998. P. 8-9. [Режим доступа: https://arielrubinstein.tau.ac.il/br/br.pdf]. ↩
20. Tversky A., Shafir E. Choice Under Conflict: The Dynamics of the Deferred Decision // *Psychological Science*. - 1992. - Vol. 3. P. 358–361. ↩
21. Rubinstein A. Modeling Bounded Rationality. – The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 1998. P. 25. [Режим доступа: https://arielrubinstein.tau.ac.il/br/br.pdf]. ↩
22. Kahneman D., Tversky A. Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk // *Econometrica*. – 1979. - Vol. 47, No. 2. - P. 263-291. ↩

Литература

Основная литература

1. Антипина О.Н., Вереникин А.О. Микроэкономика продвинутого уровня: Учебное пособие. 2-е изд., исправл. и доп. — М.: Экономический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, 2021. М.: Кнорус, 2022, 2023. Часть 2 (2.5), Часть 3 (3.5).
2. Бусыгин В.П., Желободько Е.В., Цыплаков А.А. Микроэкономика – третий уровень. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2003. Гл.7 (с. 235-256, с. 264-268).
3. Джейли Дж. А., Рени Ф. Дж. Микроэкономика. Продвинутый уровень. – М.: Изд. дом ГУ-ВШЭ, 2011. Глава 2 (с. 126-153).
4. Мас-Колелл А., Уинстон М., Грин Д. Микроэкономическая теория. М.: Дело, 2016. Гл. 6. Выбор в условиях неопределенности.
5. Фридман А.А. Лекции по курсу микроэкономики продвинутого уровня. – М.: Изд. дом ГУ-ВШЭ, 2007. Лекции 10, 11, 12 (с. 103-130).
6. Varian H.R. Microeconomic Analysis. - 3rd ed. – N.Y., L.: W.W. Norton & Company, 1992. Ch. 11.

Дополнительная литература

1. *Антипина О.Н. Асимметричная функция ценности Канемана – Тверски // Большая российская энциклопедия: научно-образовательный портал – URL: https://bigenc.ru/c/asimmetrichnaia-funktsiia-tsennosti-kanemana-tverski-662ca4/?v=4064281. – Дата публикации: 21.06.2022.*
2. *Антипина О.Н., Вереникин А.О. Меры Эрроу – Пратта // Большая российская энциклопедия: научно-образовательный портал – URL: https://bigenc.ru/c/mery-errou-pratta-82ca74/?v=9426948. – Дата публикации: 20.09.2023. – Дата обновления: 09.01.2024.*
3. Беккер Г. Экономический анализ и человеческое поведение // Человеческое поведение: Экономический подход. Избранные труды по экономической теории. – М.: ГУ ВШЭ, 2003. С. 28-48.
4. Лейбенстайн Х. Эффект присоединения к большинству, эффект сноба и эффект Веблена в теории покупательского спроса // Вехи экономической мысли. Теория потребительского потребления и спроса. Т.1. Под ред. В.М. Гальперина. – СПб.: Экономическая школа, 2000. С. 304-325.
5. Найт Ф. Риск, неопределенность и прибыль. - М.: Дело, 2003.
6. Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. - М.: Наука, 1970.
7. Талер Р. Новая поведенческая экономика: почему люди нарушают правила традиционной экономики и как на этом заработать. – М.: Эксмо, 2018.
8. Харстад Р., Зельтен Р. Модели ограниченной рациональности: пути достижения интеллектуальной конкурентоспособности // *Вопросы экономики*. – 2014. - №5. – С. 5-26.
9. Эрроу К. Информация и экономическое поведение // *Вопросы экономики*. – 1995. - №5. - С.98-107. (Arrow K. Information and Economic Behavior. Stockholm, 1973).
10. Arrow K.J. Aspects of the Theory of Risk-Bearing. – Helsinki: Yrjö Jahnssonin Säätiö, 1965.
11. Arrow K.J. Essays in the Theory of Risk-Bearing. – Chicago: Markham Publishing Company, 1971.
12. Arrow K.J. The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing // *Review of Economic Studies*. – 1964. – Vol. 31, No. 2. - P. 91-96.
13. Arrow K.J. Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care // *American Economic Review*. – 1963. - Vol. 53. - P. 941-973.
14. Bergemann D., *Bonatti A., Smolin A.* The Design and Price of Information // *American Economic Review*. – 2018. - Vol. 108, No1. – P. 1-48.
15. Birchler U., Bütler M. Information Economics. – Routledge: L. & N.Y., 2007.
16. Ehrlich I., Becker G.S. Market Insurance, Self-Insurance, and Self-Protection // *Journal of Political Economy*. – 1972. - Vol. 80, No. 4. - P. 623-648.
17. Friedman M., Savage L.J. The Utility Analysis of Choices Involving Risk // *Journal of Political Economy*. – 1948. - Vol. LVI, №4. - P. 279-304 [На русском языке: Фридмен М., Сэвидж Л.Дж. Анализ полезности при выборе среди альтернатив, предполагающих риск. – Вехи экономической мысли. Теория потребительского поведения и спроса. Т.1. – СПб.: Экономическая школа, 2000. С. 208-249].
18. Galizzi, M. M., Lau, K. W., Miraldo, M., Hauck, K. Bandwagoning, Free-Riding and Heterogeneity in Influenza Vaccine Decisions: An Online Experiment // *Health Economics*. – 2022. – Vol. 31, Iss. 4 – P. 614-646. *https://doi.org/10.1002/hec.4467*
19. Gilboa, I. Decision Under Uncertainty: State of the Science // Annual Review of Economics. – 2025. - Vol. 17, - P. 1-30. https://doi.org/10.1146/annurev-economics-090924-041522
20. Handbook of Mathematical Economics. Vol. 1. Ed. by K.J. Arrow, M.D. Intriligator. North Holland, 1981. Ch. 6. The economics of uncertainty: selected topics and probabilistic methods. Pp. 211-216, 227-242.
21. Handbook of Mathematical Economics. Vol. 4. Ed. by W. Hildenbrand, H. Sonnenschein. North Holland, 1991. Ch. 33. Utility theory with uncertainty. Pp. 1765-1771, 1811-1814.
22. Kahneman D., Tversky A. Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk // *Econometrica*. – 1979. - Vol. 47, No. 2. - P. 263-291.
23. Pratt J.W. Risk Aversion in the Small and in the Large // *Econometrica*. – 1964. – Vol. 32 (1-2). – P. 122-136.
24. Rubinstein A. Modeling Bounded Rationality. – The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 1998. [Режим доступа: *https://arielrubinstein.tau.ac.il/br/br.pdf*].
25. Simon H. A. A Behavioral Model of Rational Choice // *Quarterly Journal of Economics*. - 1955. - Vol. 69. - P. 99–118.
26. Simon H. A. Rational Choice and the Structure of the Environment // *Psychological Review*. - 1956. - Vol. 63. - P. 129–138.
27. Thaler R.H. Behavioral Economics // *Journal of Political Economy*. – 2017. - Vol. 125, No.6. - P. 1799-1805.
28. Tversky A., Kahneman D. Rational Choice and the Framing of Decisions // *Journal of Business*. - 1986. - Vol. 59. - P. 251–278.
29. Tversky A., Shafir E. Choice Under Conflict: The Dynamics of the Deferred Decision // Psychological Science. - 1992. - Vol. 3. P. 358–361.

Глава 6. Рыночное равновесие

6.1. Фирма и отрасль в условиях совершенной конкуренции
6.2. Устойчивость конкурентного равновесия: паутинообразная модель
6.3. Альтернативные модели динамического взаимодействия спроса и предложения на конкурентных рынках
6.4. Эволюционная рыночная динамика
6.5. Равновесие монополиста
6.6. Равновесие монопсонии
6.7. Равновесие в условиях олигополии
6.8. Равновесие фирмы и рынка в условиях монополистической конкуренции
6.9. Равновесие на рынках активов

6.1. Фирма и отрасль в условиях совершенной конкуренции

В краткосрочной перспективе фирма не всегда будет останавливать производство, даже неся убытки. Если цена будет выше минимума средних переменных издержек, то фирма предпочтет продолжать работать, ведь в таком случае она будет покрывать часть постоянных издержек, которые стали бы ее убытками при ликвидации предприятия. Если же цена продукта упадет ниже минимума средних переменных издержек, фирма примет решение о прекращении производства в краткосрочном аспекте. Следовательно, краткосрочная функция предложения конкурентной фирмы представляет собой возрастающий сегмент функции предельных издержек, расположенный выше минимума средних переменных издержек, т.е. при объеме производства, превышающем выпуск, соответствующий минимальному значению *AVC* (рис. 6.1).

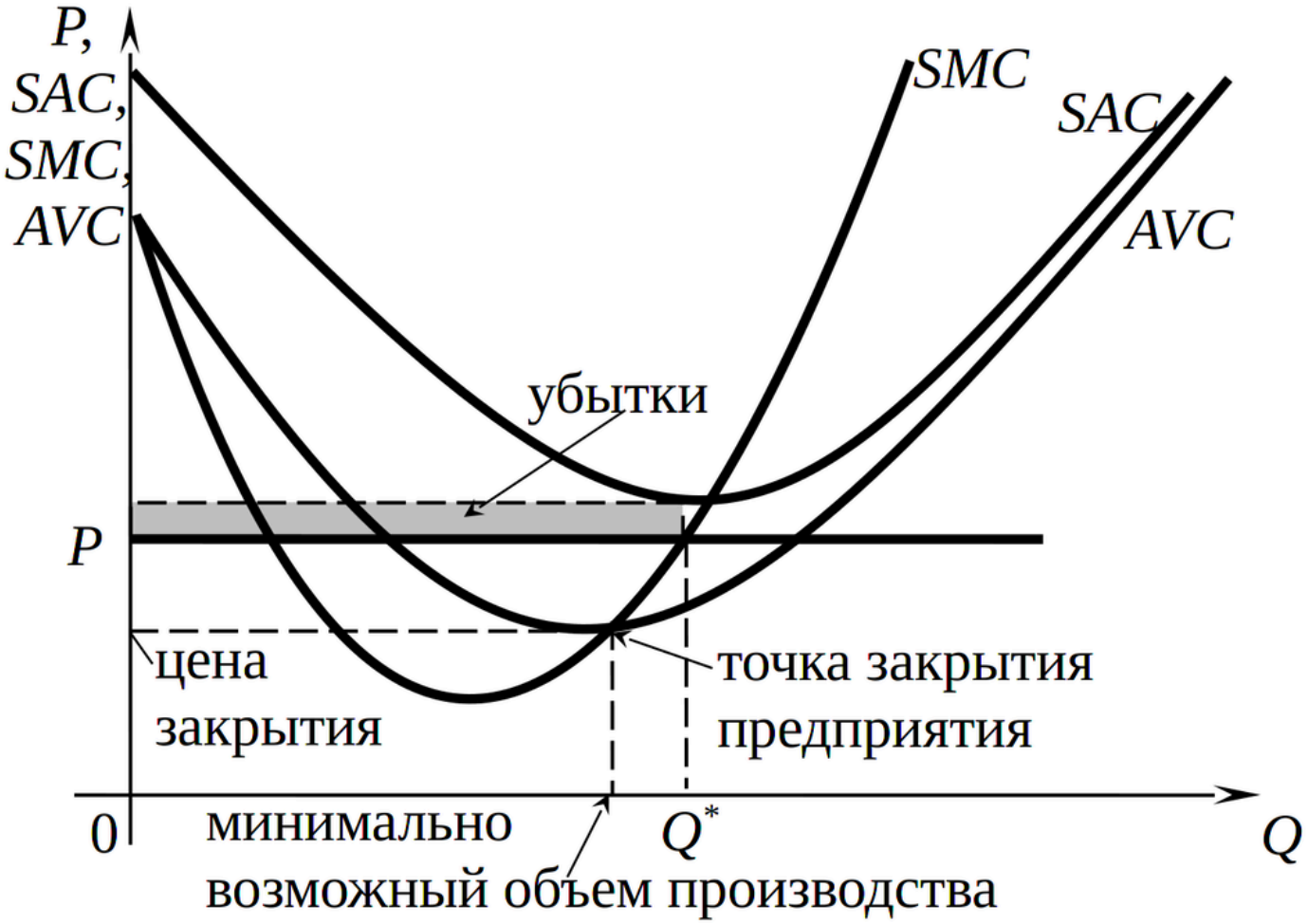


Рисунок 6.1. Точка закрытия предприятия в коротком периоде

В краткосрочном аспекте отраслевое предложение в условиях совершенной конкуренции представляет собой “горизонтальную” сумму кривых предложения всех фирм, составляющих отрасль. Оно показывает, сколько продукции будут готовы предложить рынку все фирмы в отрасли при каждом уровне рыночной цены (рис. 6.2).

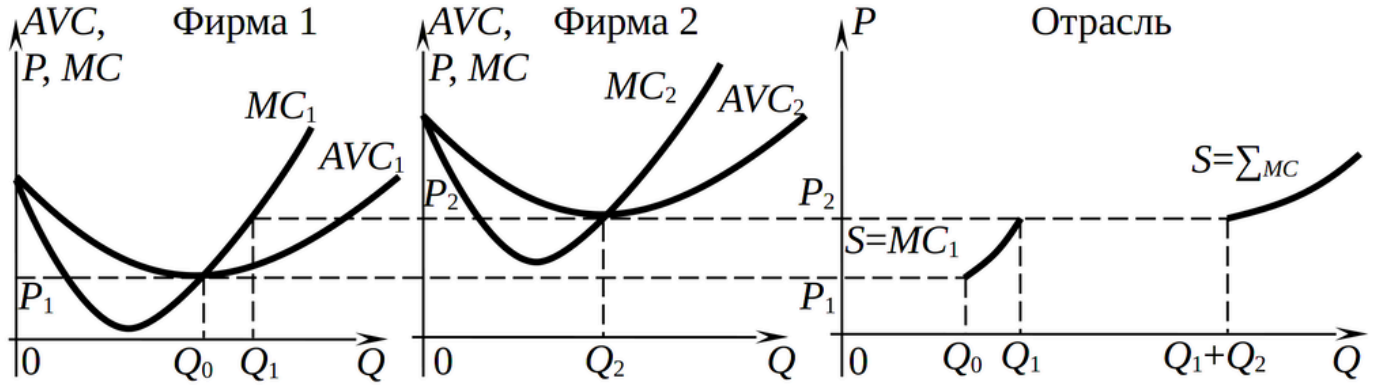


Рисунок 6.2. Отраслевое предложение в краткосрочном аспекте

Выигрыш производителя (PS) представляет собой свободные денежные средства, которые образуются за счет прибыли и амортизационных отчислений и служат источником для развития фирмы:

$$PS = PR + FC = TR - VC = Q^* (P - AVC),$$

где Q^* – объем производства фирмы.

Поэтому выигрыш производителя можно рассчитать как общий доход за вычетом переменных издержек, величину которых можно представить как площадь под графиком предельных издержек ($VC(0)=0$):

$$\int_0^{Q^*} MC(Q)\,dQ = \int_0^{Q^*} dVC(Q) = VC\left(Q^*\right) - VC(0) = VC\left(Q^*\right).$$

Наконец, используя равенство AVC и MC для первой, бесконечно малой единицы товара, излишек производителя может быть подсчитан как сумма разностей между доходом и, соответственно, переменными издержками на участке от 0 до точки Q_1 и предельными издержками от точки Q_1 до точки Q^* (рис. 6.3).

Итак, выигрыш производителя можно представить площадями фигур *PABC*, *PAD* и *PAEF*.

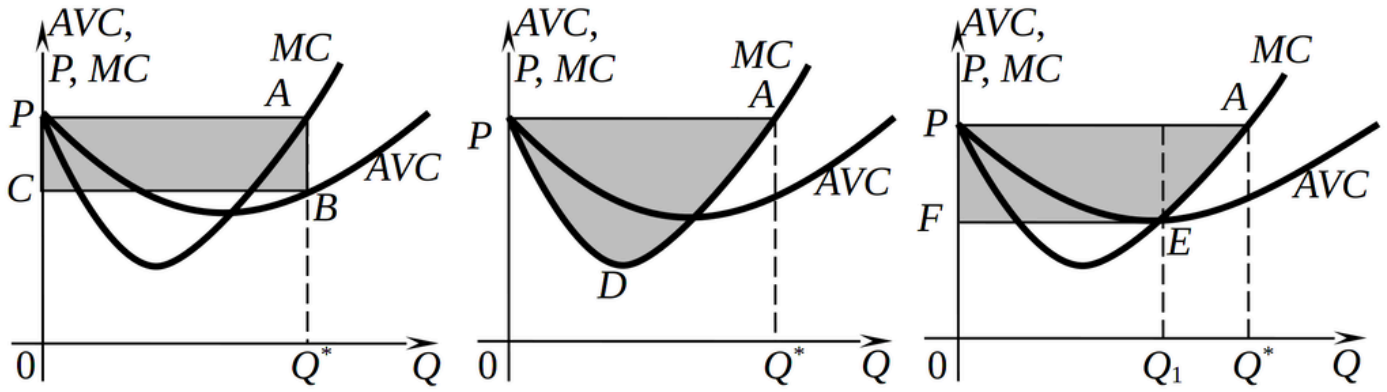


Рисунок 6.3. Выигрыш производителя в краткосрочном аспекте

Если использовать третий из вариантов подсчета выигрыша производителей – как площади слева от графика предельных издержек, ограниченной снизу минимальным значением средних переменных издержек, а сверху – уровнем рыночной цены, то можно увидеть, что выигрыш совершенно конкурентной фирмы может быть представлен в виде площади слева от графика функции предложения, ограниченной сверху уровнем рыночной цены. Следовательно, совокупный выигрыш производителей в конкурентной отрасли – это площадь слева от функции отраслевого предложения, ограниченная сверху уровнем равновесной цены.

Рассмотрим механизм построения функции отраслевого предложения продукции с точки зрения его взаимодействия с предложением факторов производства – труда и капитала. Если отрасль использует значительное в масштабах экономики количество работников и основных фондов, то отраслевое предложение факторов производства будет возрастающей функцией. Чем выше ставки заработной и арендной платы в данной отрасли относительно других отраслей, тем больше предложение труда и капитала на данном рынке. Положительный наклон кривой предложения факторов в данной отрасли отражает рост альтернативной стоимости их перетока из других отраслей.

Будем предполагать количество фирм в отрасли постоянным. В таком случае аналитически функция предложения конкурентной отрасли получается на основе оптимизационно-балансовой модели частичного рыночного равновесия, ключевым элементом которой является совокупность задач максимизации прибыли для всех предприятий на рынке:

$$\begin{cases} \max_{K_i,L_i} PR = \max_{K_i,L_i}\{pq_i - p_L L_i - p_K K_i\}, i=1,\ldots,n: \\ p_L = \varphi(L), \\ p_K = \psi(K); \end{cases}$$

где $p_L=\varphi(L)$ и $p_K=\psi(K)$ – функции предложения, соответственно, труда и капитала для данной отрасли, $q_i=f\left(K_i,L_i\right)$ – производственная функция *i*-й фирмы,

$$Q=\sum_{i=1}^{n} q_i = nq_i \quad (6.1)$$

– это отраслевое предложение,

$$L=\sum_{i=1}^{n} L_i = nL_i \quad (6.2)$$

– это отраслевой спрос на труд,

$$K=\sum_{i=1}^{n} K_i = nK_i \quad (6.3)$$

– это отраслевой спрос на капитал,

n – количество (идентичных) фирм в отрасли.

Равенство предельных продуктов факторов производства в стоимостном выражении предельным факторным издержкам задает систему:

$$\begin{cases} p \bullet MP_K\left(K_i,L_i\right) = K_i \frac{\partial\psi(nK_i)}{\partial K_i} + \psi\left(nK_i\right), \\ p \bullet MP_L\left(K_i,L_i\right) = L_i \frac{\partial\varphi(nL_i)}{\partial L_i} + \varphi\left(nL_i\right); \end{cases}$$

из которой получаются функции производного спроса на факторы:

$$K_i=f_K\left(n,p\right),L_i=f_L\left(n,p\right).$$

Рассматривая данные функции спроса на труд и капитал в качестве аргументов производственной функции $q_i=q_i\left(f_K\left(n,p\right),f_L\left(n,p\right)\right)$ с учетом пропорциональности индивидуального и отраслевого выпуска (6.1), выводим искомую функцию отраслевого предложения продукции в контексте эффектов обратной связи между рынком продукции и рынками факторов:

$$Q=nq_i\left(f_K\left(n,p\right),f_L\left(n,p\right)\right). \left(6.48\right)$$

Альтернативный подход к получению функции предложения конкурентной отрасли использует двухэтапную постановку задачи максимизации прибыли с учетом внутриотраслевого взаимодействия фирм и ответной реакции рынков факторов производства:

$$\begin{cases} \max_{q_i} PR_i=\max_{q_i}\{pq_i\text{-}TC_i\left(q_i,p_K,p_L\right)\},i=1,\ldots,n: \\ \quad \begin{cases} TC_i\left(q_i,p_K,p_L\right)=\min_{K_i,L_i}\{p_LL_i+p_KK_i\}: \\ \qquad f\left(K_i,L_i\right)=q_i, \\ \qquad p_L=\varphi(L), \\ \qquad p_K=\psi(K); \end{cases} \end{cases}$$

где отраслевой объем продаж определяется соотношением (6.1), а предложение факторов производства для данной отрасли пропорционально индивидуальным объемам их использования (6.2) – (6.3).

Будем выводить функцию отраслевого предложения исходя из процедуры двухшаговой максимизации прибыли.

Подставляя функции предложения труда и капитала в издержки производства, с учетом того, что отраслевой спрос на данные факторы производства пропорционален индивидуальному – предъявляемому отдельной фирмой (6.2) – (6.3), получаем выражение:

$$TC_i=p_KK_i+p_LL_i=\psi\left(nK_i\right)K_i+\varphi\left(nL_i\right)L_i.$$

Выписываем эквимаржинальное условие минимизации издержек производства заданного объема продукции:

$$MRTS_{KL}=\text{-}\frac{dK_i}{dL_i}=\frac{MP_L(K_i,L_i)}{MP_K(K_i,L_i)}=\frac{L_i\frac{\partial\varphi(nL_i)}{\partial L_i}+\varphi(nL_i)}{K_i\frac{\partial\psi(nK_i)}{\partial K_i}+\psi(nK_i)},$$

из которого получаем траекторию развития фирмы:

$$K_i=f\left(n,L_i\right),$$

или

$$L_i=f^{\text{-}1}\left(n,K_i\right).$$

Используя траекторию развития в ограничении по объему выпускаемой продукции, приходим к функциям условного спроса на капитал и труд:

$$K_i=K_i^h\left(q_i,n\right),L_i=L_i^h\left(q_i,n\right).$$

Подставляя их вместе с функциями предложения труда и капитала в выражение себестоимости продукции, с учетом пропорциональности между отраслевыми и индивидуальными затратами факторов производства (6.2) – (6.3) получим функцию издержек фирмы с учетом ресурсных рынков:

$$TC_i=p_KK_i+p_LL_i=\psi\left(nK_i\right)K_i+\varphi\left(nL_i\right)L_i=\psi\left(nK_i^h\left(q_i,n\right)\right)K_i^h\left(q_i,n\right)+\varphi\left(nL_i^h\left(q_i,n\right)\right)L_i^h\left(q_i,n\right).$$

Далее, при фиксированном количестве предприятий $n=const$, применяя условие равенства предельных издержек цене продукта, дающее максимум прибыли конкурентной фирмы (2.44), получаем ее функцию предложения с учетом рынков факторов производства:

$$\begin{aligned} MC_i&=\frac{dTC_i}{dq_i}=\frac{\partial\psi}{\partial K_i^h}\frac{dK_i^h}{dq_i}K_i^h+\psi\left(nK_i^h\right)\frac{dK_i^h}{dq_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial L_i^h}\frac{dL_i^h}{dq_i}L_i^h+\varphi\left(nL_i^h\right)\frac{dL_i^h}{dq_i} \\ &=\left(\frac{\partial\psi}{\partial K_i^h}K_i^h+\psi\left(nK_i^h\right)\right)\frac{dK_i^h}{dq_i}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial L_i^h}L_i^h+\varphi\left(nL_i^h\right)\right)\frac{dL_i^h}{dq_i}=p. \end{aligned}$$

Теперь, используя соотношение между индивидуальными и отраслевыми объемами выпуска (6.1), приходим к функции отраслевого предложения с учетом рынков факторов производства как зависимости между рыночным объемом выпускаемой продукции и рыночной ценой, которая представляет собой обратную зависимость по отношению к функции (6.4):

$$p=n\left(\frac{\partial\psi}{\partial K_i^h}K_i^h\left(\frac{Q}{n},n\right)+\psi\left(nK_i^h\left(\frac{Q}{n},n\right)\right)\right)\frac{dK_i^h}{dQ}+n\left(\frac{\partial\varphi}{\partial L_i^h}L_i^h\left(\frac{Q}{n},n\right)+\varphi\left(nL_i^h\left(\frac{Q}{n},n\right)\right)\right)\frac{dL_i^h}{dQ}.$$

Допустим, например, что технология производства репрезентативной (*i*-й) конкурентной фирмы характеризуется функцией: $Q_i=K_i^{\frac{1}{4}}L_i^{\frac{1}{2}}$, где K_i и L_i – объемы используемых капитала и труда данной фирмы, а Q_i – ее объем производства. Пусть ставки заработной и арендной платы являются переменными величинами, и функции предложения капитала и труда для данной отрасли, соответственно, имеют вид: $p_L=L^{\frac{5}{2}}$, $p_K=K^{\frac{5}{4}}$, где L и K – объемы предложения, соответственно, труда и капитала для отрасли. Выведем функцию долгосрочного предложения конкурентной отрасли, в которой работает 256 фирм.

Решим вначале задачу максимизации прибыли конкурентной фирмы с учетом влияния рынков факторов производства в двухэтапной постановке. Учитывая функции предложения капитала и труда для данной отрасли, а также тот факт, что отраслевой спрос на данные факторы производству пропорционален индивидуальному – предъявляемому отдельной фирмой $(L=256L_i,K=256K_i)$, получаем ее функцию издержек производства:

$$TC_i=p_K K_i+p_L L_i=(256K_i)^{5/4}K_i+(256L_i)^{5/2}L_i=2^{10}K_i^{\frac{9}{4}}+2^{20}L_i^{\frac{7}{2}}.$$

Минимизируя издержки производства заданного объема продукции, из эквимаржинального условия $7 \bullet 2^{10}L_i^{7/2}=9K_i^{9/4}$ выводим траекторию развития фирмы:

$$K_i=\frac{7^{\frac{4}{9}}\bullet 2^{\frac{40}{9}}}{3^{\frac{8}{9}}}L_i^{\frac{14}{9}}.$$

Подставляя траекторию развития фирмы в производственную функцию, приходим к функциям условного спроса со стороны фирмы на факторы производства с учетом влияния их предложения для данной отрасли:

$$L_i=\frac{3^{\frac{1}{4}}}{7^{\frac{1}{8}}\bullet 2^{\frac{5}{4}}}Q_i^{\frac{9}{8}},\ K_i=\frac{7^{\frac{1}{4}}\bullet 2^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}}Q_i^{\frac{7}{4}}.$$

Подставляя их в выражение себестоимости продукции, получаем функцию долгосрочных издержек производства с учетом функций предложения труда и капитала:

$$TC_i=\frac{2^{\frac{157}{8}}}{3^{\frac{9}{8}}\bullet 7^{\frac{7}{6}}}Q_i^{\frac{63}{16}}.$$

Дифференцируя ее по объему производства отдельной фирмы (Q_i)

$$MC_i=3^{\frac{7}{8}}\bullet 7^{\frac{9}{16}}\bullet 2^{\frac{125}{8}}Q_i^{\frac{47}{16}}$$

и учитывая пропорциональность рыночного и индивидуального объема выпускаемого продукта $\left(Q=256Q_i, или Q_i=\frac{Q}{2^8}\right)$, получаем искомую обратную функцию долгосрочного отраслевого предложения:

$$p=\frac{3^{\frac{7}{8}}\bullet 7^{\frac{9}{16}}}{2^{\frac{63}{8}}}Q^{\frac{47}{16}}. \quad (6.5)$$

Убедимся в правильности полученного результата, получив ту же самую функцию предложения продукции конкурентной отрасли с учетом реакции рынков факторов производства, используя одноэтапную постановку задачи максимизации прибыли фирмы:

$$\max_{K_i,L_i}PR_i\left(K_i,L_i\right)=\max_{K_i,L_i}\left(TR_i\left(K_i,L_i\right)\text{-}TC_i\left(K_i,L_i\right)\right)=\max_{K_i,L_i}\left(p\bullet K_i^{\frac{1}{4}}L_i^{\frac{1}{2}}\text{-}2^{10}K_i^{\frac{9}{4}}\text{-}2^{20}L_i^{\frac{7}{2}}\right).$$

Равенство предельных доходностей факторов и предельных факторных издержек задает систему:

$$\begin{cases}K_i=\frac{7^4\bullet 2^{80}L_i^{12}}{p^4},\\ L_i=\frac{3^4\bullet 2^{20}K_i^4}{p^2};\end{cases}$$

из которой получаются функции производного спроса на факторы:

$$\begin{cases}K_i=\frac{p^{\frac{28}{47}}}{2^{\frac{320}{47}}\bullet 3^{\frac{48}{47}}\bullet 7^{\frac{4}{47}}},\\ L_i=\frac{p^{\frac{18}{47}}}{2^{\frac{340}{47}}\bullet 3^{\frac{4}{47}}\bullet 7^{\frac{16}{47}}}.\end{cases}$$

Рассматривая выведенные функции спроса на труд и капитал в качестве аргументов производственной функции с учетом пропорциональности индивидуального и отраслевого выпуска, выводим искомую прямую функцию отраслевого предложения продукции в контексте эффектов обратной связи между рынком продукции и рынками факторов:

$$Q=\frac{2^{\frac{126}{47}}\bullet p^{\frac{16}{47}}}{3^{\frac{14}{47}}\bullet 7^{\frac{9}{47}}},$$

Обратной по отношению к выведенной зависимости является функция отраслевого предложения (6.5), полученная выше с использованием процедуры максимизации прибыли на рынках готовой продукции (в двухэтапной постановке).

Рассмотрим теперь механизм получения отраслевой функции спроса на трудовые ресурсы. Будем рассматривать отрасль как совокупность фирм, производящих одинаковый, однородный продукт. Для упрощения экономического анализа предположим, что каждая фирма производит только один продукт.

В долгосрочном аспекте функция отраслевого спроса на факторы производства, в частности, на трудовые ресурсы определяется оптимизационно-балансовой моделью частичного рыночного равновесия, ключевым элементом которой является совокупность индивидуальных задач максимизации прибыли каждой из присутствующих на конкурентном рынке фирм с учетом того, что рыночная цена будет зависеть от общеотраслевого объема выпуска Q как суммы количеств продукции, производимых каждой из фирм в отдельности q_i, причем объемы затрат и труда, и капитала представляют собой переменные величины:

$$\begin{cases}\max_{K_i,L_i}PR_i=\max_{K_i,L_i}\left\{pq_i\text{-}p_L L_i\text{-}p_K K_i\right\}, i=1,\ldots,n:\\ p=\varphi(Q),\end{cases}$$

где L_i и K_i – индивидуальные затраты факторов производства (труда и капитала, соответственно) на каждом из n предприятий,

$q_i=f\left(K_i,L_i\right)$ – производственная функция *i*-й фирмы,

$p=\varphi(Q)$ – функция спроса на продукт отрасли,

$Q=\sum_{i=1}^{n}q_i=nq_i$ – это отраслевое предложение (равное спросу) (6.2),

$L=\sum_{i=1}^{n} L_i=nL_i$ – это отраслевой спрос на труд,

$K=\sum_{i=1}^{n} K_i=nK_i$ – это отраслевой спрос на капитал,

n – количество фирм в отрасли.

Здесь, как и выше, предполагается идентичность отраслевых производителей.

Подставим выражение для производственной функции в функцию спроса на продукт отрасли, учитывая, что отраслевой объем производства пропорционален количеству фирм:

$$p=\varphi\left(nq_i\right)=\varphi\left(nf(K_i,L_i)\right). \quad (6.6)$$

Выписывая необходимые условия максимума прибыли для каждой из фирм в отдельности по труду и капиталу, подставляя в них полученное выражение для спроса на отраслевой выпуск (6.6) и учитывая, что фонд отработанных человеко-часов рабочего времени и машино-часов оборудования в отрасли пропорциональны количеству фирм (6.2) – (6.3), после очевидных преобразований получаем систему:

$$\begin{cases} p_K=n\varphi\left(nf\left(\frac{K}{n},\frac{L}{n}\right)\right)\frac{\partial f\left(\frac{K}{n},\frac{L}{n}\right)}{\partial K}, \\ p_L=n\varphi\left(nf\left(\frac{K}{n},\frac{L}{n}\right)\right)\frac{\partial f\left(\frac{K}{n},\frac{L}{n}\right)}{\partial L}; \end{cases}$$

которая задает неявную отраслевую функцию спроса на труд, сбалансированного с величиной капитала.

В качестве примера рассмотрим получение функции отраслевого спроса на труд при технологии Кобба–Дугласа. Допустим, что производственная функция каждой из фирм в отрасли имеет вид: $q_i=K_i^{¼}L_i^{½}$, $i=1,\ldots,n$; а рыночный спрос представлен зависимостью: $p=\frac{1}{\sqrt{Q}}$. Тогда необходимые условия максимума с учетом выражения для рыночного спроса (6.6) задают систему:

$$\begin{cases} \frac{L_i^{\frac{1}{4}}}{4\sqrt{2n}K_i^{\frac{7}{8}}}=p_K, \\ \frac{K_i^{\frac{1}{8}}}{2\sqrt{2n}L_i^{\frac{3}{4}}}=p_L; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} L_i=\sqrt[5]{\frac{1}{8192n^4p_Kp_L^7}}, \\ K_i=\sqrt[5]{\frac{1}{262144n^4p_K^6p_L^2}}. \end{cases}$$

С учетом пропорциональности индивидуальных и отраслевых затрат труда и капитала (6.2) – (6.3) получаем функции отраслевого спроса на факторы производства:

$$L=\sqrt[5]{\frac{n}{8192p_Kp_L^7}}, K=\sqrt[5]{\frac{n}{262144p_K^6p_L^2}}.$$

Возможна альтернативная, двухэтапная постановка задачи максимизации прибыли с учетом внутриотраслевого взаимодействия фирм и ответной реакции рынка готового продукта:

$$\begin{cases} \max_{q_i} PR_i=\max_{q_i}\{pq_i\text{-}TC_i\left(q_i,p_K,p_L\right)\}, i=1,\ldots,n: \\ \quad \begin{cases} TC_i\left(q_i,p_K,p_L\right)=\min_{K_i,L_i}\{p_LL_i+p_KK_i\}: \\ f\left(K_i,L_i\right)=q_i, \\ p=\varphi(Q); \end{cases} \end{cases}$$

где отраслевой объем продаж определяется соотношением $Q=\sum_{i=1}^{n} q_i=nq_i$ (6.2).

Проанализируем теперь процедуру установления долгосрочного равновесия на фирме и рынке в условиях совершенной конкуренции. Механизм установления и изменения рыночного равновесия в условиях свободного входа новых фирм на рынок с учетом альтернативной прибыльности производства в различных отраслях будет приводить к тому, что в долгосрочном аспекте экономическая прибыль конкурентной фирмы окажется равной нулю. Действительно, положительная экономическая прибыль репрезентативной фирмы будет притягивать в отрасль новых производителей, что приведет к сдвигу графика отраслевого предложения вправо, увеличению рыночного объема продаж и снижению цены на продукцию, а значит, и к сокращению выпуска каждой из фирм в отдельности (рис. 6.4).

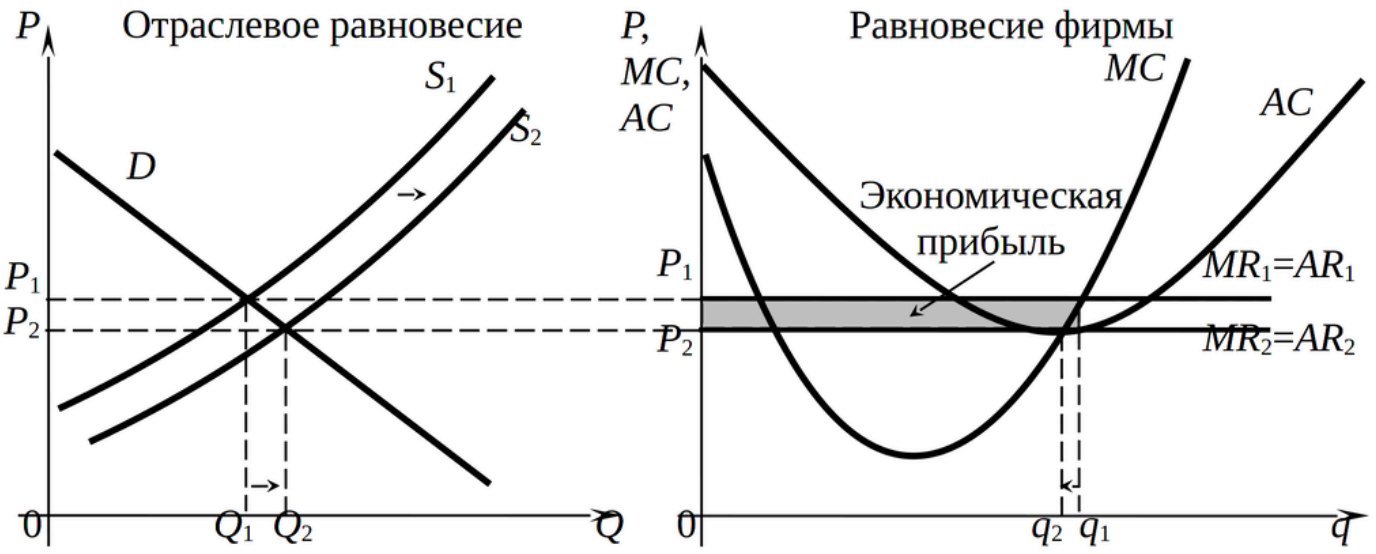


Рисунок 6.4. Взаимосвязь индивидуального и отраслевого равновесия в долгосрочной перспективе

В итоге, в состоянии долгосрочного равновесия рыночная цена устанавливается на уровне минимума средних издержек предприятия – когда они равны предельным. Таким образом, ценообразование в условиях совершенной конкуренции подчиняется двойному равенству:

$$P=MC=AC. \quad (6.7)$$

6.2. Устойчивость конкурентного равновесия: паутинообразная модель

График функции предложения конкурентной фирмы в долгосрочном аспекте будет определяться возрастающим участком графика предельных издержек (2.134)-(2.135), расположенным выше минимальной точки графика средних издержек (6.7).

Рассмотрим теперь вопросы, относящиеся к устойчивости конкурентного равновесия в динамике. Рассчитаем вначале параметры рыночного равновесия в статике. Они будут служить в качестве ориентира при анализе устойчивости динамического равновесия. Допустим, что спрос и предложение можно приблизить линейными функциями:

$$p_d = a - bq,$$
$$p_s = c + dq,$$

или

$$q_d = \frac{a}{b} - \frac{p}{b}, q_s = \frac{p}{d} - \frac{c}{d},$$

где $a, b, c, d \in R_+$, $a > c$, т.е. при нулевой цене спрос превышает предложение.

Найдем равновесные значения цены и объема продаж:

$$p^* = \frac{ad + cb}{b + d}, (6.8)$$
$$q^* = \frac{a - c}{b + d}. (6.9)$$

Рассмотрим динамическое рыночное равновесие в паутинообразной модели сначала в дискретном времени. Предпосылкой ее традиционной версии является то, что объем предложения запаздывает на один период по отношению к ценам: $q_t^s = f(p_{t-1})$. Объем спроса зависит от цены текущего периода: $q_t^d = g(p_t)$.

Система уравнений, описывающих рынок, будет выглядеть так:

$$\begin{cases} q_t^s = f(p_{t-1}), \\ q_t^d = g(p_t), \\ q_t^s = q_t^d; \end{cases} \text{ или } q_t = f(p_{t-1}) = g(p_t).$$

Итеративное действие модели можно схематично представить следующим образом:

$$q_0 \to p_0 = g^{-1}(q_0) \to q_1 = f(p_0) \to p_1 = g^{-1}(q_1) \to q_2 = f(p_1) \to \cdots$$

Рассмотрим паутинообразную модель, в которой функции спроса и предложения линейны. Предположим, что спрос описывается зависимостью:

$$q_t = \frac{a}{b} - \frac{p_t}{b}, \text{или} p_t = a - bq_t;$$

а предложение таково:

$$q_t = \frac{p_{t-1}}{d} - \frac{c}{d}, \text{или} p_{t-1} = c + dq_t;$$

где $a, b, c, d \in R_+$, $a > c$.

Проанализируем устойчивость динамики модели. Выразим p_t через p_{t-1}:

$$p_t = \frac{ad + cb}{d} - \frac{b}{d} p_{t-1}. (6.10)$$

Расписывая данные выражения последовательно для двух соседних периодов, используя в каждом из последующих – предшествующее соотношение, индуктивно получаем соотношение между ценами произвольного, t-го и первоначального, нулевого периодов:

$$p_t = \frac{ad + cb}{d} - \frac{b(ad + cb)}{d^2} + \frac{b^2(ad + cb)}{d^3} - \ldots + (-1)^{t-1} \frac{b^{t-1}(ad + cb)}{d^t} + (-1)^t \left(\frac{b}{d}\right)^t p_0.$$

Слагаемые, присутствующие в правой части данного выражения, за исключением последнего представляют собой t членов геометрической прогрессии. Просуммируем их:

$$p_t = \left(\frac{ad + cb}{b + d}\right)\left(1 - \left(-\frac{b}{d}\right)^t\right) + \left(-\frac{b}{d}\right)^t p_0 = p^* + \left(p_0 - p^*\right)\left(-\frac{b}{d}\right)^t, (6.11)$$

или

$$p_t - p^* = \left(p_0 - p^*\right)\left(-\frac{b}{d}\right)^t, (6.12)$$

где p^* – это равновесный уровень цены в статике (6.8).

Рассогласование спроса и предложения означает при этом накопление и расходование запасов продукции [1].

Если $\frac{b}{d} < 1$, то $\left(\frac{b}{d}\right)^t \to 0$ при $t \to \infty$, а значит, $\lim_{t \to \infty} p_t = \frac{ad + cb}{b + d} = p^*$, т.е. при большем по модулю угловом коэффициенте линии предложения по сравнению с линией спроса равновесие является устойчивым (рис. 6.5). При этом с течением времени отклонения рыночной цены от равновесного уровня стремятся к нулю (рис. 6.8).

Если $\frac{b}{d} > 1$, то $\left(\frac{b}{d}\right)^t \to \infty$ при $t \to \infty$, и с течением времени отклонения рыночных параметров от равновесных будут неограниченно возрастать. Т.е. при большем по абсолютной величине тангенсе угла наклона линии спроса по сравнению с линией предложения равновесие неустойчиво (рис. 6.6).

Если $\frac{b}{d}=1$, то $p_t=\left(\frac{ad+cb}{b+d}\right)\left(1-(-1)^t\right)+(-1)^t p_0$. Следовательно, при $t=2k$, $k \in N$, $p_t=p_0$, а при $t=2k+1$, $k \in N$, $p_t=\frac{2(ad+cb)}{b+d}-p_0$.
Итак, при равном (по абсолютной величине) угловом коэффициенте линейных функций спроса и предложения равновесие является квазистабильным, т.е. существуют только два чередующиеся во времени значения рыночной цены (рис. 6.7).

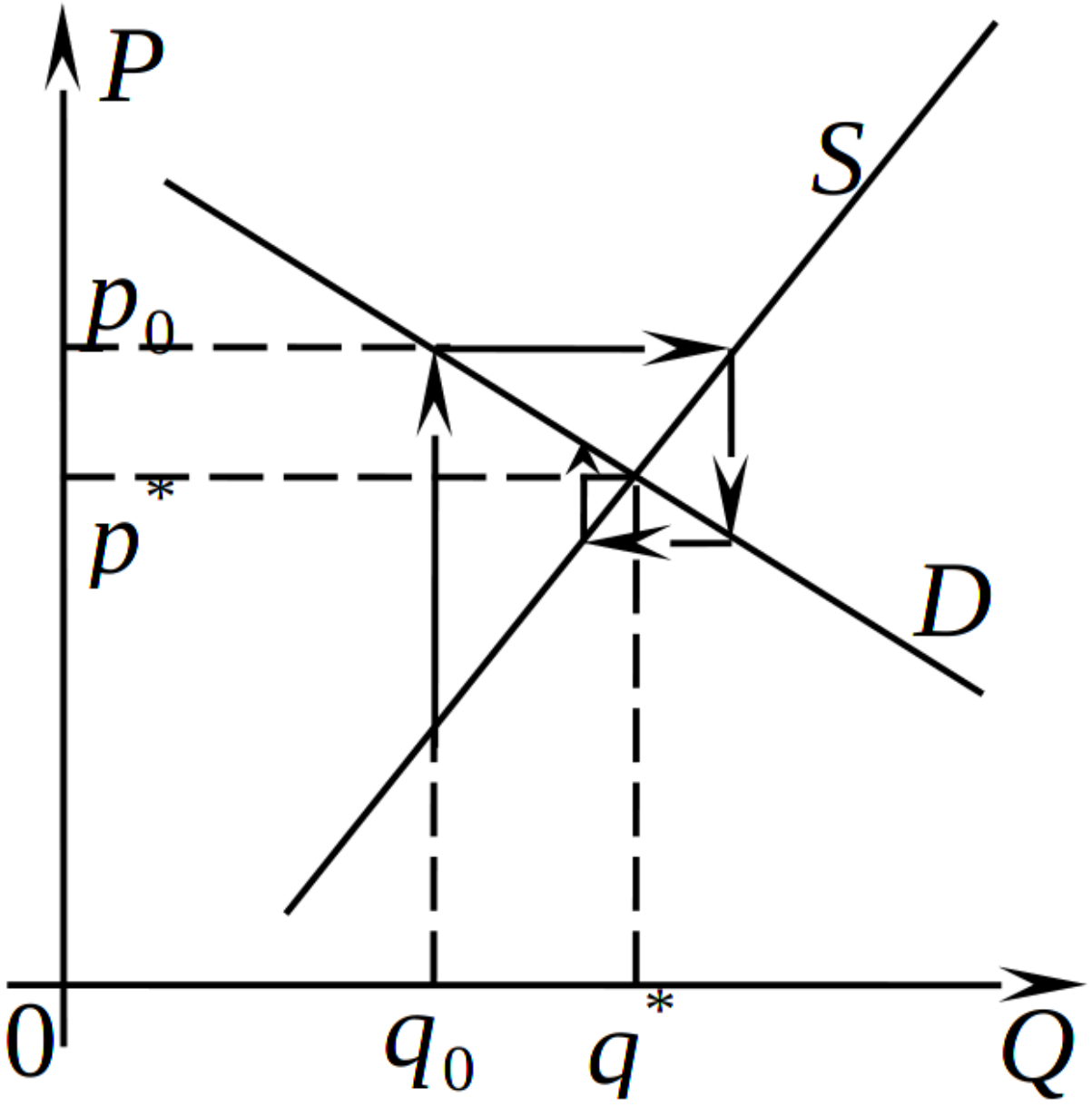


Рисунок 6.5. Устойчивое равновесие

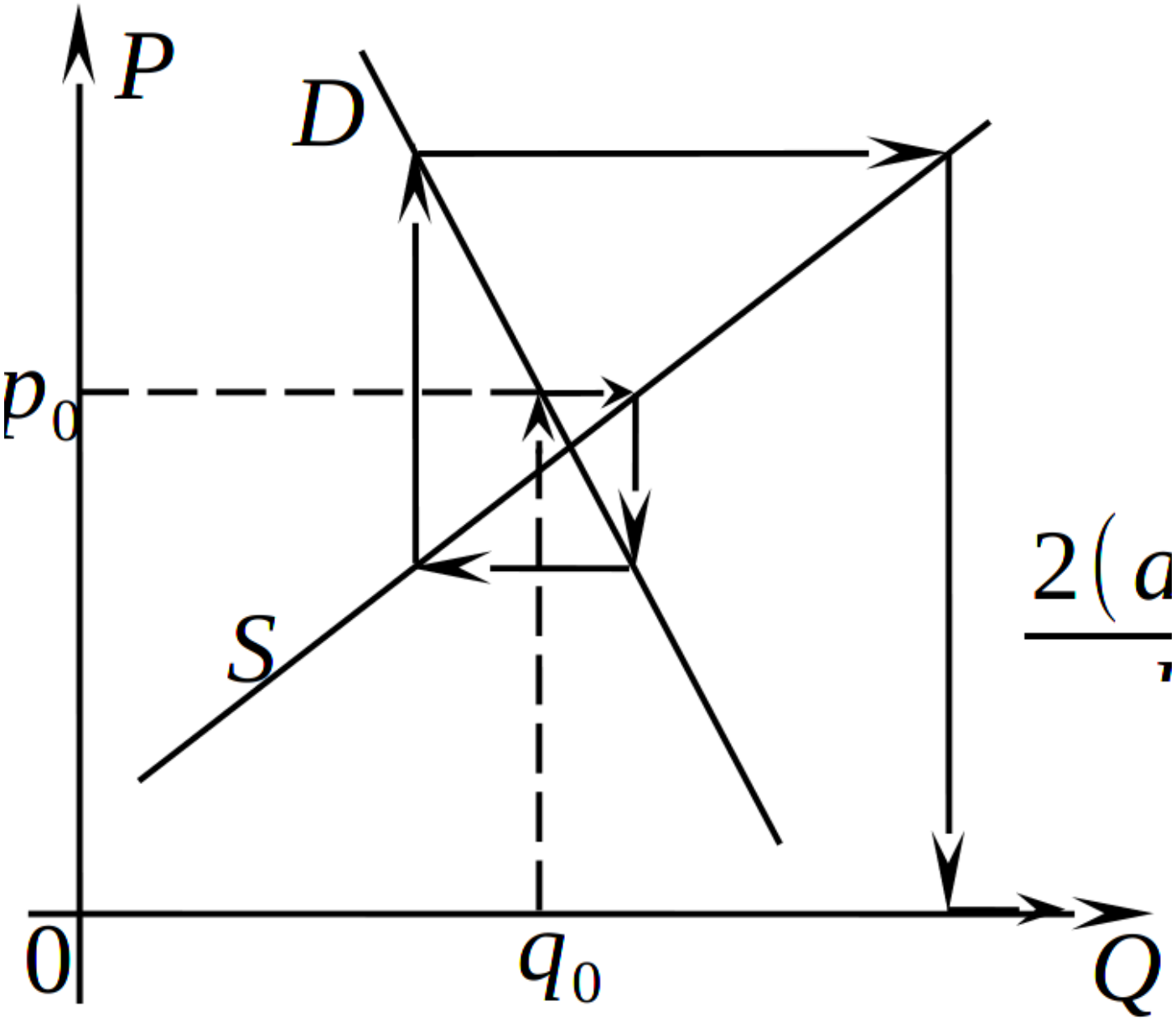


Рисунок 6.6. Нестабильное равновесие

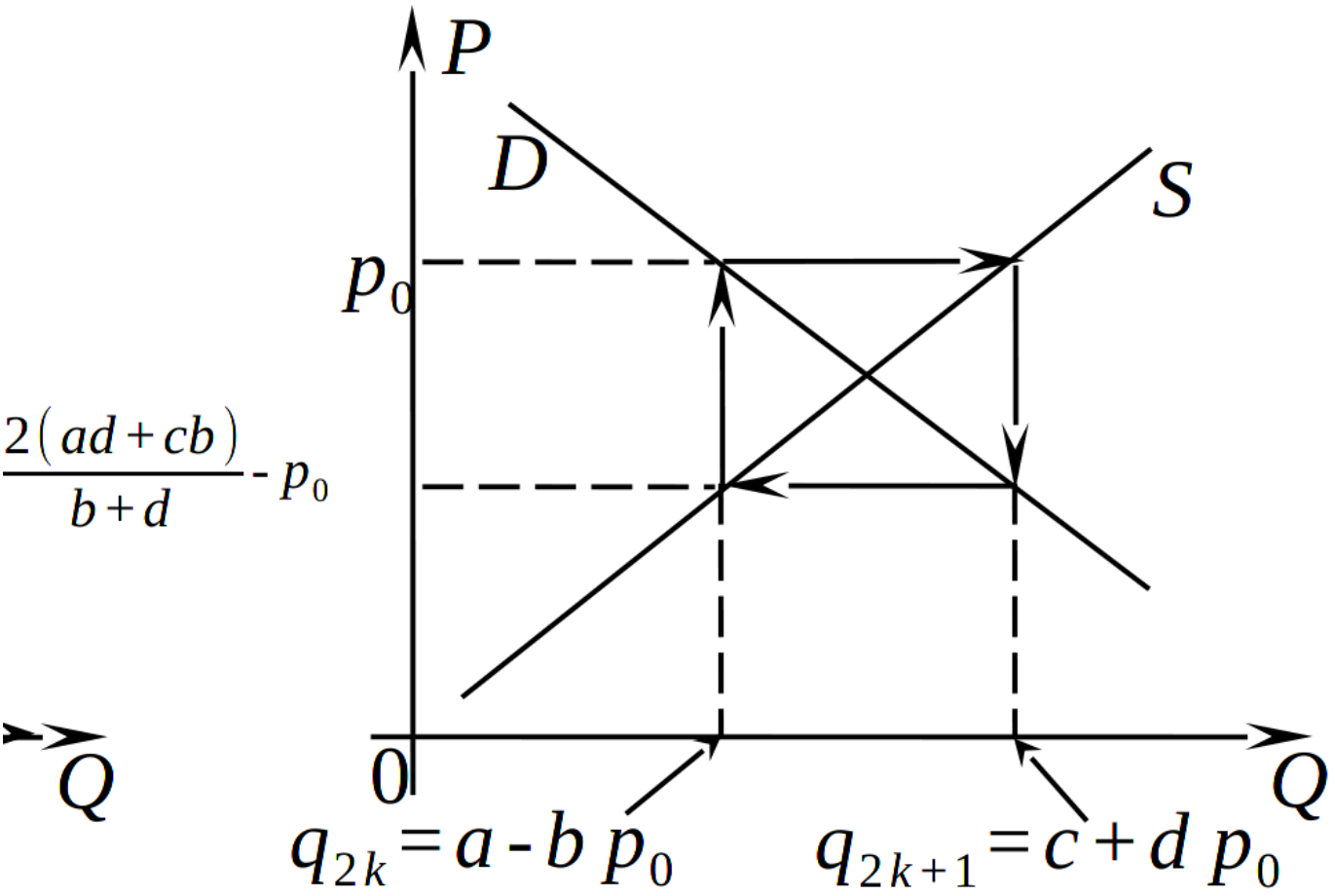


Рисунок 6.7. Квазистабильное равновесие

Перейдем теперь к исследованию паутинообразной модели в непрерывном времени. Рассчитаем отклонение рыночной цены текущего, t-го – от предыдущего периода под номером $(t-\Delta t)$. Для этого вычтем p_{t-1} из левой и правой частей соотношения (6.10) и перейдем от дискретного временно́го шага в один период к интервалу Δt, рассчитав тем самым приращение цены за произвольный единичный период времени Δt:

$$\frac{p(t)-p(t-\Delta t)}{\Delta t} = \frac{ad+cb}{d} - \frac{(d+b)}{d} p\,(t-\Delta t). \quad (6.13)$$

Устремляя временной шаг Δt к нулю, в пределе

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t)-p(t-\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{ad+cb}{d} - \frac{(d+b)}{d} p\,(t-\Delta t) \right)$$

получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{ad+bc}{d} - \frac{(d+b)}{d} p(t), \quad (6.14)$$

которое является аналогом соответствующего разностного уравнения (6.13).

Действительно, дифференциальное уравнение (6.14) можно аппроксимировать разностной схемой [2]:

$$p\,(t+h)-p(t) = h \left(\frac{ad+bc}{d} - \frac{(d+b)}{d} p(t) \right). \quad (6.15)$$

Если установить в ней временной шаг h равным единице, то уравнение (6.15) принимает вид (6.13).

Решаем уравнение (6.14), разделяя переменные:

$$\frac{dp}{p - \frac{ad+bc}{d+b}} = -\frac{(d+b)}{d} dt.$$

Интегрируя: $\int d \ln \left| p - \frac{ad+bc}{d+b} \right| = -\int \frac{(d+b)}{d} dt + \ln c_1$, а затем потенцируя данное уравнение получаем: $p(t) = \frac{ad+bc}{d+b} + c_1 e^{-\frac{(d+b)}{d} t}$.
Используя начальное условие, определяем константу: $c_1 = p(0) - \frac{ad+bc}{d+b}$.

Окончательно имеем уравнение динамики цен:

$$p(t) = p^* + \left(p(0) - p^* \right) e^{-\frac{(d+b)}{d} t}, \quad (6.16)$$

где p^* – это равновесный уровень цены в статике (6.8).

С течением времени цена стремится к равновесному уровню: $\lim_{t \to \infty} p(t) = p^*$, ведь $\lim_{t \to \infty} e^{-\frac{(d+b)}{d} t} = 0$, поскольку $\frac{d+b}{d} > 0$ (рис. 6.8).

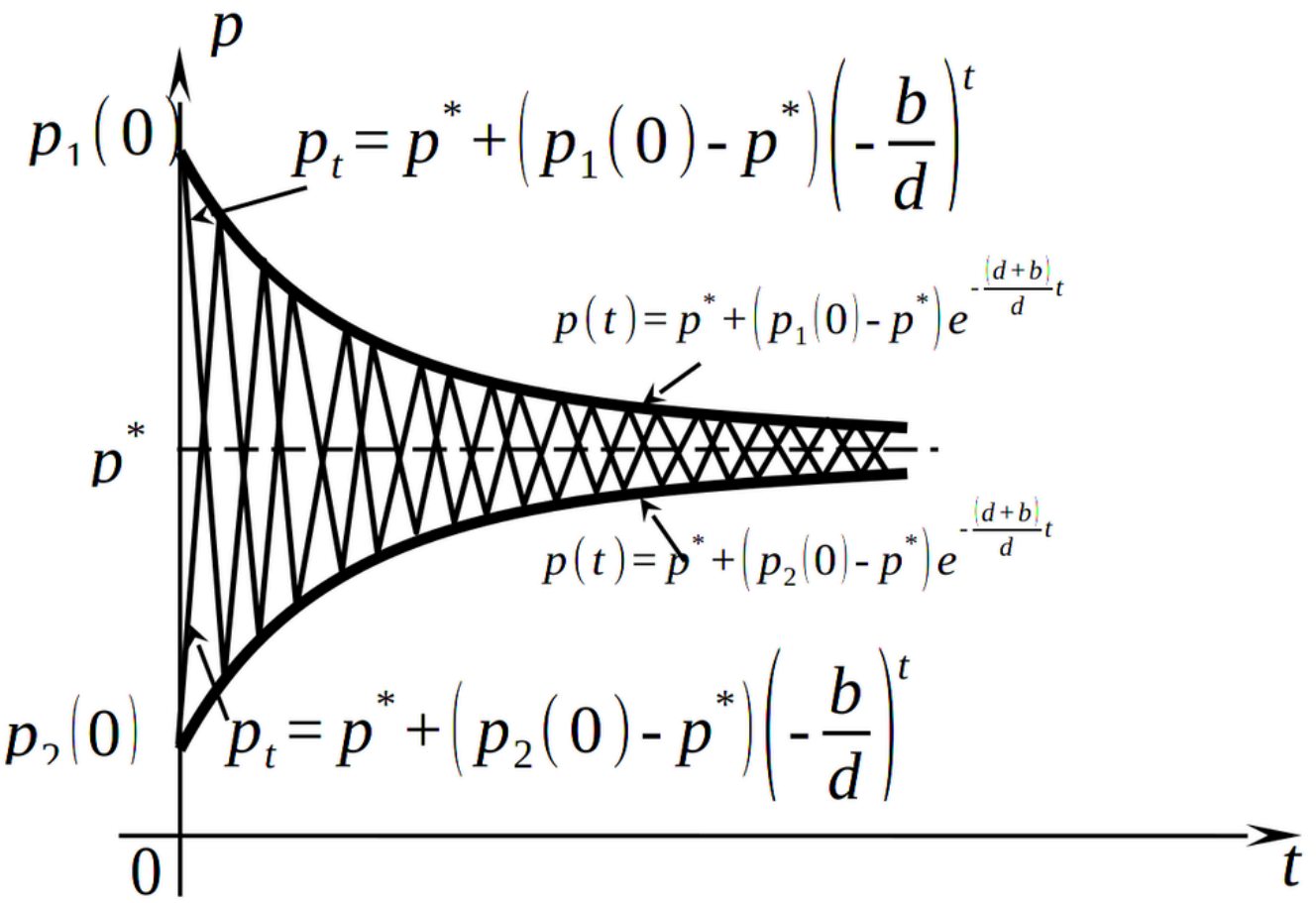


Рисунок 6.8. Устойчивая рыночная динамика

Траектория динамики рыночной цены в дискретном времени (6.11)-(6.12) служит аппроксимацией непрерывного случая (6.16), ведь $e^{-\frac{(d+b)}{d}t} \approx \left(1-\frac{d+b}{d}\right)^t = \left(-\frac{b}{d}\right)^t$.

Устойчивую динамику рыночной цены в непрерывном времени можно проиллюстрировать и по-другому. Если преобразовать уравнение (6.14):

$$\dot{p} = \frac{d+b}{d}\left(\frac{ad+bc}{d+b} - p\right),$$

то поскольку $\frac{d+b}{d} > 0$, постольку очевидно, что в случае $p(t) > \frac{ad+bc}{d+b}$ цена с течением времени снижается $\left(\dot{p} < 0\right)$ в направлении равновесного уровня (6.8). Если же $p(t) < \frac{ad+bc}{d+b}$, то цена увеличивается $\left(\dot{p} > 0\right)$ до равновесного значения (6.8).

Таким образом, равновесие в модели устойчиво (рис. 6.9) при любых значениях коэффициентов спроса и предложения.

Проанализированная выше паутинообразная модель иллюстрирует тот факт, что при отрицательном наклоне кривой спроса и положительном наклоне кривой предложения рыночное равновесие будет устойчивым по Вальрасу, когда цена p рассматривается в качестве независимой переменной, а объем сделок q – зависимой.

Действительно, пусть $p_1 > p^*$. Тогда $q_1^s > q_1^d$. Следовательно, p снижается, приближаясь к уровню p^*. Допустим, что $p_2 < p^*$. Тогда $q_2^s > q_2^d$. Следовательно, p повышается, возвращаясь к уровню p^*. Итак, равновесие устойчиво (рис. 6.9).

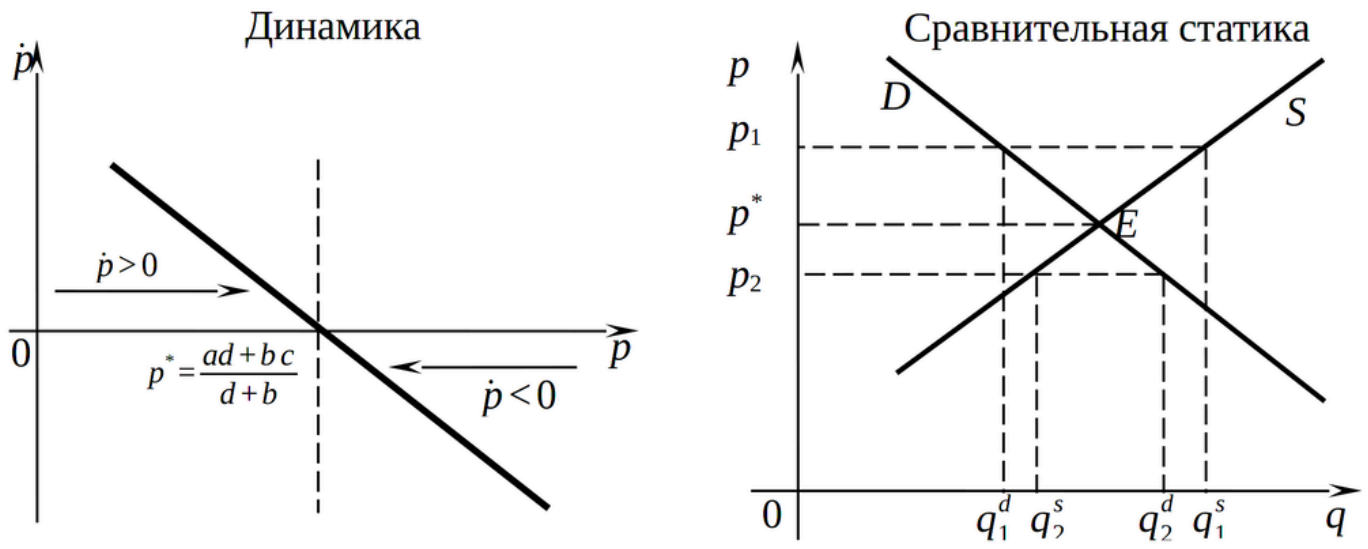


Рисунок 6.9. Устойчивость рыночного равновесия по Вальрасу

В рамках паутинообразной модели, итерационное взаимодействие между спросом и предложением можно представить альтернативным образом. Спрос запишем в таком же виде, как и ранее $(p_t=a-bq_t)$, а запаздывание в предложении представим следующим образом:

$$q_{t+1}=\frac{p_t}{d}-\frac{c}{d}$$

или

$$p_t=c+dq_{t+1}.$$

Условие рыночного равновесия представим как равенство цен спроса и предложения для каждого периода: $p_t^s=p_t^d$, т.е.

$$q_{t+1}=\frac{a-c}{d}-\frac{b}{d}q_t.$$

Тогда отклонение величины предложения в будущем от текущего объема спроса составит:

$$q_{t+1}-q_t=\frac{a-c}{d}-\frac{(d+b)}{d}q_t,$$

или при произвольном временно́м интервале:

$$\frac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t}=\frac{a-c}{d}-\frac{(d+b)}{d}q(t).$$

Устремляя шаг времени к нулю:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{a-c}{d}-\frac{(d+b)}{d}q(t)\right),$$

получаем уравнение в дифференциалах

$$dq+\frac{(d+b)}{d}qdt=\frac{(a-c)}{d}dt.$$

Выделим в левой части последнего равенства полный дифференциал. Для этого домножим его левую и правую части на интегрирующий множитель $e^{\int\frac{(d+b)}{d}dt}=e^{\frac{(d+b)}{d}t}\neq 0$:

$$e^{\frac{(d+b)}{d}t}dq+qde^{\frac{(d+b)}{d}t}=\left(\frac{a-c}{b+d}\right)de^{\frac{(d+b)}{d}t}.$$

Интегрируя $\int d\left(qe^{\frac{(d+b)}{d}t}\right)=\frac{a-c}{b+d}\int de^{\frac{(d+b)}{d}t}+C$, получаем:

$$qe^{\frac{(d+b)}{d}t}=\left(\frac{a-c}{b+d}\right)e^{\frac{(d+b)}{d}t}+C, \text{ т.е. } q(t)=\frac{a-c}{b+d}+Ce^{-\frac{(d+b)}{d}t}.$$

Используя начальное условие: $q(0)=\frac{a-c}{b+d}+C$, определяем константу $C=q(0)-q^*$. Окончательно имеем:

$$q(t)=q^*+\left(q(0)-q^*\right)e^{-\frac{(d+b)}{b}t},$$

где q^* – это равновесный объем продаж (6.9), к которому будет стремиться объем сделок с течением времени:

$$\lim_{t\to\infty}q(t)=\frac{a-c}{b+d}.$$

Таким образом, при стандартной форме графиков спроса и предложения равновесие будет устойчивым по Маршаллу, когда q предполагается независимой переменной, а p – зависимой, так же, как и равновесие по Вальрасу.

Действительно, пусть, $q_1<q^*$. Тогда $p_1^d>p_1^s$. Следовательно, q возрастает, стремясь к q^*. Допустим, что $q_2>q^*$. В этом случае $p_2^s>p_2^d$. Поэтому q снижается до уровня q^*. Итак, равновесие устойчиво (рис. 6.10).

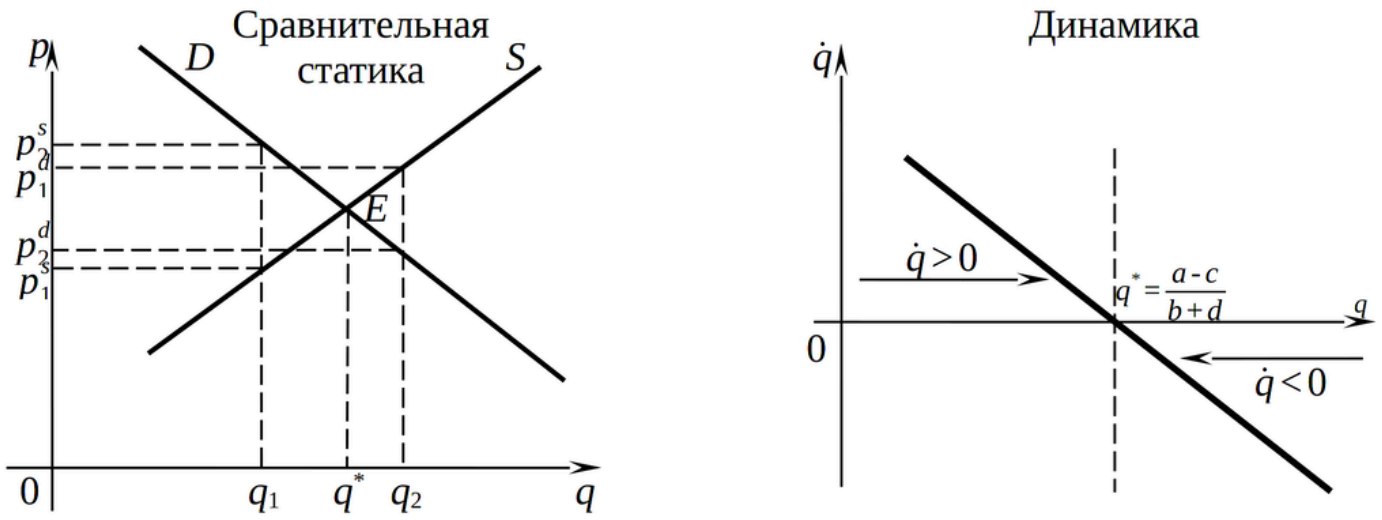


Рисунок 6.10. Устойчивость рыночного равновесия по Маршаллу

1. Воркуев Б.Л. Количественные методы исследования в микро- и макроэкономике. – М.: ТЕИС, 2007. ↩

2. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. – М.: Наука, 1973. ↩

6.3. Альтернативные модели динамического взаимодействия спроса и предложения на конкурентных рынках

Проанализируем сначала элементарную динамическую модель взаимодействия спроса и предложения.

Предположим, что спрос на данный товар характеризуется фиксированной долей (s) расходов в совокупных доходах (M) потребителей:

$$PY=sM, (6.17)$$

или

$$Y=s\frac{M}{P}, (6.18)$$

где sM – денежные средства потребителей, израсходованные на покупку данного товара, P – цена, Y – объем его потребления.

Продифференцировав балансовое соотношение (6.17) по времени:

$$s\frac{dM}{dt}=\frac{dP}{dt}Y+\frac{dY}{dt}P$$

и поделив левую и правую части полученного равенства соответственно на левую и правую часть предыдущего тождества, приходим к функции спроса в темповой записи:

$$\frac{dM(t)/dt}{M(t)}=\frac{dP(t)/dt}{P(t)}+\frac{dY(t)/dt}{Y(t)},$$

или

$$\frac{\dot{M}}{M}=\frac{\dot{P}}{P}+\frac{\dot{Y}}{Y}, (6.19)$$

где точка над переменной, как и ранее, обозначает ее производную по времени.

Используя формулу дифференциала натурального логарифма, в соотношении темпов прироста можно перейти к логарифмической шкале измерения анализируемых показателей:

$$\dot{m}=\pi+\dot{y}, (6.20)$$

где $\dot{p}=\frac{dp}{dt}\equiv\pi$ – темп прироста цен на данном рынке, $p\equiv\ln P$; $\dot{m}=\frac{dm}{dt}$ – темп прироста денежных доходов потребителей M, $m\equiv\ln M$; $\dot{y}=\frac{dy}{dt}$ – темп пророста объемов потребления товара, $y\equiv\ln Y$.

Таким образом, должно выполняться следующее соотношение между темпами прироста доходов, уровня цен и объема товарной массы на данном рынке:

$$\dot{Y}=Y\left(\dot{m}-\pi\right). (6.21)$$

Будем предполагать, что предложение продукции характеризуется пропорциональной зависимостью (с коэффициентом пропорциональности $k>0$) между относительным отклонением фактического объема производства (Y) от потенциального уровня $\left(Y^*\right)$, соответствующего полному использованию производственных мощностей производителей, и темпа прироста цен на данном рынке:

$$\pi(t)=k\left(\frac{Y(t)-Y^*}{Y^*}\right). (6.22)$$

Динамическое равновесие спроса и предложения будет выглядеть так:

$$\frac{\dot{Y}}{Y}=\dot{m}-k\left(\frac{Y-Y^*}{Y^*}\right),$$

или

$$\dot{Y}-Y\left(\dot{m}+k\right)=-\frac{k}{Y^*}Y^2.$$

Мы получили дифференциальное уравнение Бернулли вида [1]:

$$\frac{dY}{dt}+a(t)Y=b(t)Y^n, n\neq 1,$$

или

$$Y^{-n}\frac{dY}{dt}+a(t)Y^{1-n}=b(t).$$

Заменой $Y^{1-n}=z$ оно сводится к линейному дифференциальному уравнению.

В нашем случае имеем:

$$Y^{-2}\dot{Y}-Y^{-1}\left(\dot{m}+k\right)=-\frac{k}{Y^*}.$$

Здесь $z=Y^{-1}$, соответственно, $Y=z^{-1}$. Учитывая, что $\frac{dz}{dt}=-Y^{-2}\frac{dY}{dt}$, имеем:

$$\dot{z}+z\left(\dot{m}+k\right)=\frac{k}{Y^*}.$$

Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного. Поэтому для решения данного уравнения необходимо вначале

решить соответствующее однородное уравнение $\dot{z}+z\left(\dot{m}+k\right)=0$. Разделяем переменные: $\frac{dz}{z}=-\left(\dot{m}+k\right)dt$, откуда $\int d\ln z=-\int d\ln M-k\int dt+\ln c$, т.е. $z=\frac{c}{M(t)e^{kt}}$.

Для решения исходного неоднородного уравнения применяем метод вариации постоянной в общем решении соответствующего однородного уравнения:

$$z(t)=\frac{c(t)}{M(t)e^{kt}}.$$

Используем данное выражение в исходном уравнении:

$$\frac{\dot{c}}{M(t)e^{kt}}=\frac{k}{Y^*}.$$

Решая возникающее уравнение относительно варьируемого множителя, применяем метод интегрирования по частям:

$$c(t)=\frac{k}{Y^*}\int\limits_0^t M(\tau)e^{k\tau}d\tau+c_1=\frac{1}{Y^*}\int\limits_0^t M(\tau)de^{k\tau}+c_1=\frac{1}{Y^*}M(\tau)e^{k\tau}\Big|_0^t-\frac{1}{Y^*}\int\limits_0^t \dot{M}(\tau)e^{k\tau}d\tau+c_1=\frac{M(t)}{Y^*}e^{kt}-\frac{M(0)}{Y^*}-\frac{1}{Y^*}\int\limits_0^t \dot{M}(\tau)e^{k\tau}d\tau+c_1. \quad (6.23)$$

Таким образом, общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения имеет вид:

$$z(t)=\frac{c_1e^{-kt}}{M(t)}+\frac{1}{Y^*}-\frac{M(0)e^{-kt}}{M(t)Y^*}-\frac{e^{-kt}}{M(t)Y^*}\int\limits_0^t \dot{M}(\tau)e^{k\tau}d\tau=\frac{1}{Y(t)}.$$

Константу интегрирования находим по начальному условию: $c_1=\frac{M(0)}{Y(0)}$. Итак:

$$\frac{1}{Y(t)}=\frac{1}{Y^*}+\left(\frac{1}{Y(0)}-\frac{1}{Y^*}\right)\frac{M(0)}{M(t)}e^{-kt}-\frac{1}{Y^*M(t)}e^{-kt}\int\limits_0^t \dot{M}(\tau)e^{k\tau}d\tau,$$

т.е.

$$Y(t)=\left(\frac{1}{Y^*}+\left(\frac{1}{Y(0)}-\frac{1}{Y^*}\right)\frac{M(0)}{M(t)}e^{-kt}-\frac{1}{Y^*M(t)}e^{-kt}\int\limits_0^t \dot{M}(\tau)e^{k\tau}d\tau\right)^{-1}.$$

В частности, при проведении рестриктивной экономической политики, когда уровень доходов является постоянным во времени $\left(\dot{M}=0\right)$, данное выражение упрощается:

$$Y(t)=\left(\frac{1}{Y^*}+\left(\frac{1}{Y(0)}-\frac{1}{Y^*}\right)\frac{M(0)}{M(t)}e^{-kt}\right)^{-1}.$$

Очевидно, что с течением времени, в пределе (при $t\to\infty$) объем производимой продукции в данной ситуации будет стремиться к потенциальному значению:

$$\lim_{t\to\infty}Y(t)=Y^*.$$

Проанализируем теперь поведение экономической системы при функциях спроса (6.22) и предложения (6.21) в долгосрочном аспекте в общем случае. Для этого при решении соответствующего дифференциального уравнения воспользуемся первоначальным выражением проварьированного множителя $c(t)$ (6.23) с учетом того, что значение константы интегрирования при этом остается прежним. Тогда в долгосрочном аспекте, когда время t стремится к бесконечности, система может быть охарактеризована пределом:

$$\lim_{t\to\infty}Y(t)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{Y^*M(t)e^{kt}}{\frac{Y^*M(0)}{Y(0)}+k\int\limits_0^t M(\tau)e^{k\tau}d\tau}\right). \quad (6.24)$$

Отметим, что $\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t M(\tau)e^{k\tau}d\tau=M(t)e^{kt}$. Следовательно, поскольку производная данного интеграла $M(t)e^{kt}$, как и уровень дохода $M(t)$, являются положительными, постольку $\int\limits_0^t M(\tau)e^{k\tau}d\tau$ монотонно возрастает.

Рассмотрим случай монотонно возрастающей динамики величины $M(t)e^{kt}$. Такое ее поведение будет преобладающим, поскольку, как правило, размер доходов $M(t)$ с течением времени увеличивается. Более того, возрастающая динамика $M(t)e^{kt}$ будет сохраняться даже при убывании дохода потребителей – за исключением крайних случаев, когда последний будет сокращаться с исключительно высокой, экспоненциальной скоростью – быстрее, чем возрастает сомножитель e^{kt}.

Итак, при возрастании $M(t)e^{kt}$ в силу аналогичной динамики $\int\limits_0^t M(\tau)e^{k\tau}d\tau$ в пределе (6.24) присутствует неопределенность вида ∞/∞. Раскроем ее с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{t\to\infty}Y(t)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial t}\left(Y^*M(t)e^{kt}\right)}{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Y^*M(0)}{Y(0)}+k\int\limits_0^t M(\tau)e^{k\tau}d\tau\right)}\right)=\lim_{t\to\infty}Y^*\left(\frac{\frac{\partial M}{\partial t}e^{kt}+M(t)ke^{kt}}{kM(t)e^{kt}dt}\right)=\lim_{t\to\infty}Y^*\left(\frac{\dot{M}}{kM}+1\right).$$

Значит, в бесконечно удаленном времени динамика объема производимой и потребляемой продукции будет подчиняться следующему соотношению:

$$\lim_{t\to\infty} Y(t)=Y^*+\frac{Y^*}{k}\lim_{t\to\infty}\dot{m}(t). \quad (6.25)$$

Таким образом, долгосрочная динамика экономической системы, когда спрос представлен простейшей зависимостью (6.22), а предложение не учитывает ожидания экономических агентов (6.21) [2], порождает функцию Энгеля, в соответствии с которой с течением времени, в пределе (при $t \to \infty$) темп прироста денежных доходов становится фактором, определяющим отклонение фактического объема производимой и потребляемой продукции от его потенциального уровня, соответствующего полной загрузке мощностей предприятий, присутствующих на данном рынке.

Частным случаем здесь выступает рассмотренная выше консервативная экономическая политика ($M(t)=const$, т.е. $\dot{m}=0$), при которой отрасль полностью использует имеющийся потенциал и достигает в долгосрочной перспективе равновесного объема производства: $\lim_{t\to\infty} Y(t)=Y^*$.

Таким образом, можно видеть, что потенциальный объем производства не является величиной, раз и навсегда заданной. С течением времени отрасль может переступать через текущее его значение и развиваться далее.

Введем теперь в анализ ожидания экономических агентов. Рыночное предложение в динамике с учетом ожиданий можно записать в следующем виде:

$$\frac{Y_t\text{-}Y^*}{Y^*}=\frac{\pi_t\text{-}\pi_t^e}{k}. \quad (6.26)$$

Рассмотрим простейшую ситуацию статичных ожиданий, когда прогнозное значение темпа прироста цен в будущем равно его текущему значению: $\pi_t^e=\pi_{t\text{-}1}$.

Тогда динамическая функция предложения принимает вид:

$$Y_t=Y^*+\frac{Y^*}{k}(\pi_t\text{-}\pi_{t\text{-}1}). \quad (6.27)$$

В непрерывном времени ей соответствует дифференциальное уравнение:

$$Y(t)=Y^*+\frac{Y^*}{k}Y^*\dot{\pi}(t). \quad (6.28)$$

Проанализируем на качественном уровне динамическое взаимодействие спроса (6.21) и предложения при статичных ожиданиях (6.28). Если цены растут быстрее денежных доходов $\left(\pi > \dot{m}\right)$, то объем производимой и покупаемой продукции будет возрастать; и, наоборот, при $\pi < \dot{m}$, количество товаров на рынке сокращаться. В другом ракурсе: если текущий объем производства превышает потенциальную величину $\left(Y > Y^*\right)$, то будут нарастать инфляционные процессы, а при $Y < Y^*$ темп прироста цен будет падать. Фазовый портрет динамики этой экономической системы показан на рис. 6.11. Направленность сил, действующих на рынке в отношении темпа прироста цен и количества продукции, приводит к возникновению «ценовой спирали».

Рассмотрим процесс адаптации экономической системы к регуляторному воздействию (рис. 6.12). Допустим, что в результате проведения стимулирующей экономической политики темп прироста денежных доходов возрастает от уровня $\dot{m}_0$ до $\dot{m}_1$. Для того чтобы изобразить возникающую ценовую спираль, выразим из уравнений предложения (6.27) и спроса (соответствующего (6.21) при дискретном времени $Y_t=Y_{t\text{-}1}+Y_{t\text{-}1}\left(\dot{m}\text{-}\pi_t\right)$, где темп прироста доходов покупателей $\dot{m}$ предполагается экзогенным параметром) темп прироста уровня цен через количество товара:

$$\pi_t=\pi_{t\text{-}1}+k\left(\frac{Y_t\text{-}Y^*}{Y^*}\right)=\pi_{t\text{-}1}\text{-}k+k\frac{Y_t}{Y^*}; \quad (6.29)$$

$$\pi_t=\dot{m}\text{-}\frac{Y_t\text{-}Y_{t\text{-}1}}{Y_{t\text{-}1}}=\dot{m}+1\text{-}\frac{Y_t}{Y_{t\text{-}1}}. \quad (6.30)$$

Здесь подразумевается, что темп прироста денежных доходов, как и другие переменные, является дискретным: $\dot{m}=\frac{M_t\text{-}M_{t\text{-}1}}{M_{t\text{-}1}}$.

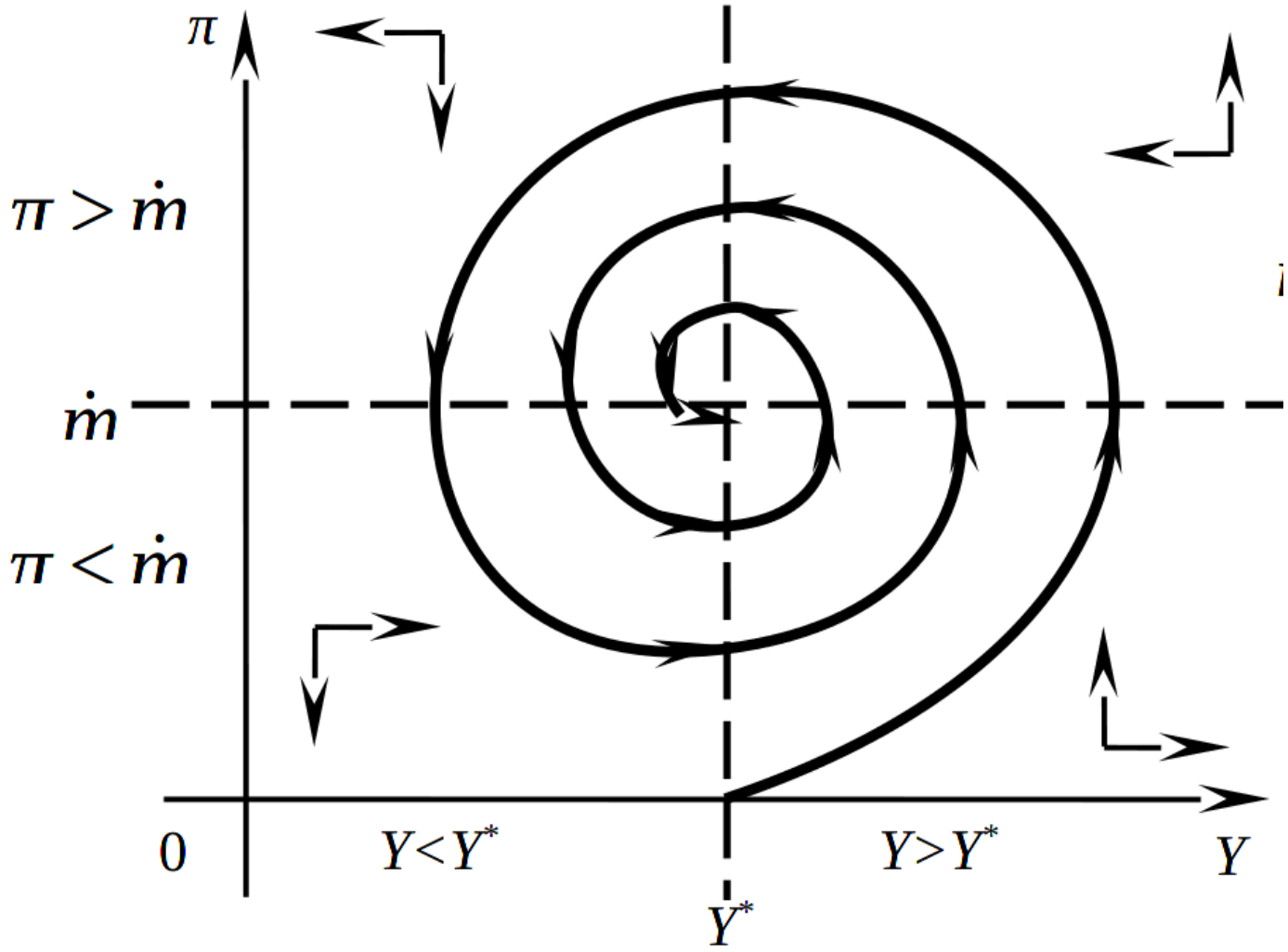


Рисунок 6.11. Ценовая спираль при стимулирующей экономической политике

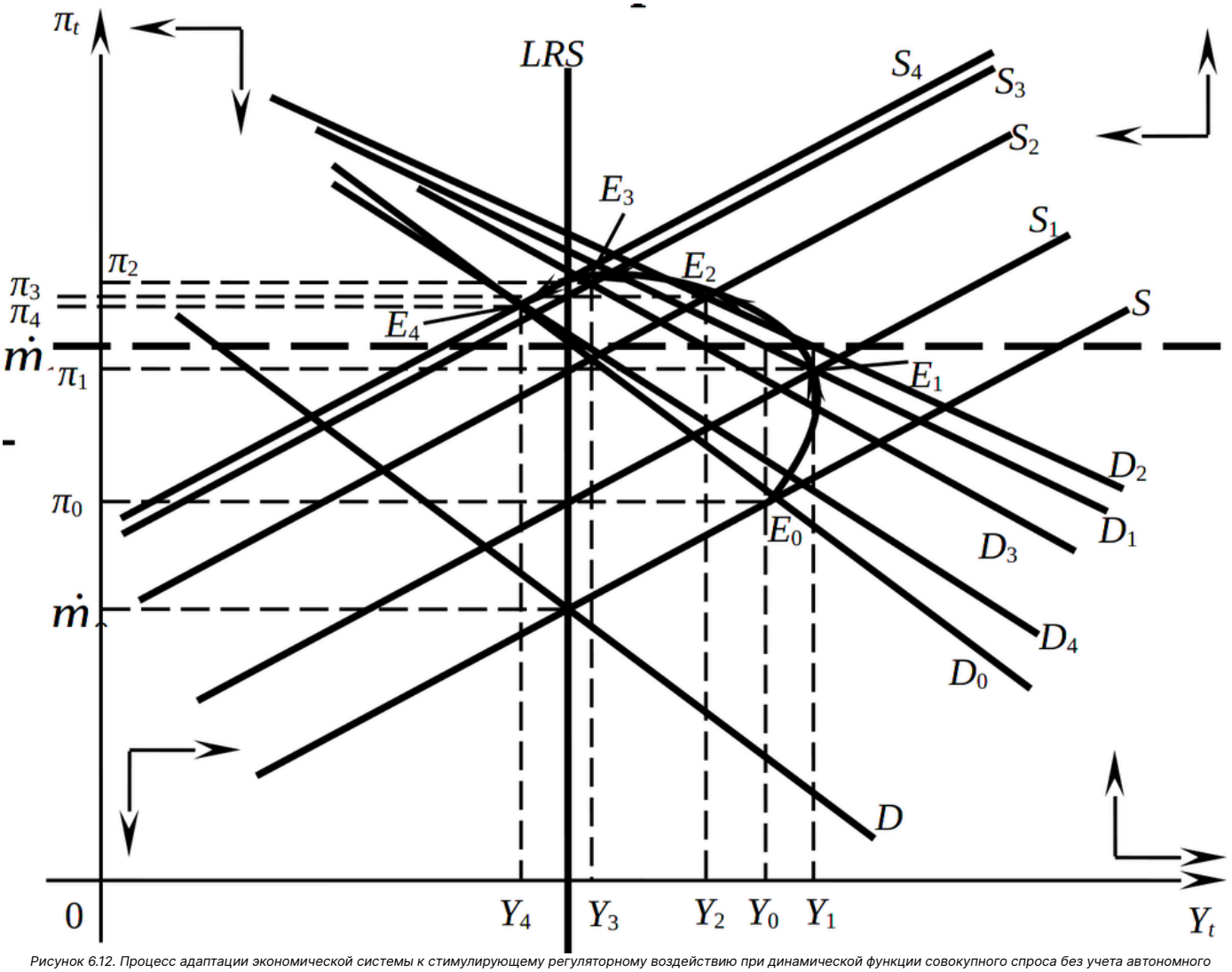


Рисунок 6.12. Процесс адаптации экономической системы к стимулирующему регуляторному воздействию при динамической функции совокупного спроса без учета автономного потребления

Из уравнения (6.29) видно, что при $Y_t{=}Y^*$ $\pi_t{=}\pi_{t\text{-}1}$; а из уравнения (6.30) следует, что при $Y_t{=}Y_{t\text{-}1}$, $\pi_t{=}\dot{m}$. Таким образом, график функции предложения S_t проходит через точку с координатами $\left(Y^*, \pi_{t\text{-}1}\right)$, а график спроса D_t – через точку $\left(Y_{t\text{-}1}, \dot{m}\right), t > 0$ (рис. 6.12).

Допустим, что первоначально, при темпе прироста доходов потребителей $\dot{m}_0$, рыночная система характеризовалась функциями спроса и предложения D и S соответственно и находилась в состоянии долгосрочного равновесия при $\pi_t{=}\dot{m}_0$, полностью реализуя свой потенциал Y^*. При увеличении темпа прироста денежных доходов до уровня $\dot{m}_1$ спрос в соответствии с уравнением (6.30) сдвигается в положение D_0, и возникает новое, краткосрочное равновесие E_0 с возросшим темпом прироста цен π_0 и объемом продукции на рынке Y_0.

Поскольку в каждый момент времени уровень предыдущего периода определяет абсолютное значение тангенса угла наклона линии спроса (6.30), при снижении количества продукта ее угловой коэффициент по абсолютной величине в будущем периоде будет возрастать, и, наоборот, при увеличении объема товаров – уменьшаться. Что касается темпа прироста цен, то его текущее значение будет определять параллельное смещение линии предложения в следующий момент времени. Если темп прироста цен увеличивается, то предложение сдвинется вправо-вверх, если он уменьшается – то влево-вниз.

Это значит, что в следующий период (№1) угол наклона линии спроса $\left(D_1\right)$ снизится ввиду увеличения количества продукта в предыдущем периоде $\left(Y_0{=}Y^*\right)$, а предложение сдвинется влево-вверх в положение S_0 в силу увеличения предыдущего темпа прироста цен $\left(\pi_0{=}\dot{m}_0\right)$. В результате краткосрочное равновесие переместится в точку E_1. Проводя те же рассуждения еще раз, приходим к следующему положению равновесия E_2, где темп прироста цен $\left(\pi_2\right)$ оказывается выше темпа прироста денежных доходов $\left(\dot{m}_1\right)$, а текущий объем продукции $\left(Y_2\right)$ снижается по отношению к предыдущему значению $\left(Y_1\right)$. Это значит, что в последующий период (№3) угловой коэффициент спроса $\left(D_3\right)$ возрастает, в то время как предложение продолжит смещаться влево-вверх (в положение S_3). Рынок попадет в точку краткосрочного равновесия E_3. Проводя аналогичную итерацию еще раз, приходим в состояние краткосрочного равновесия E_4, когда объем производства и потребления $\left(Y_4\right)$ оказывается ниже экономического потенциала $\left(Y^*\right)$.

В результате возникает ценовая спираль, которая подчиняется закономерностям, сформулированным выше применительно к непрерывному времени. В итоге после бесконечного числа итераций экономика возвратится на потенциальный уровень выпуска Y^* при возросшем темпе прироста цен, соответствующем новому темпу роста доходов покупателей $\dot{m}_1$.

Будем теперь полагать, что в базовом периоде отрасль функционировала на уровне своего потенциала: $Y^*=Y_{t-1}$. Тогда усиленная статичными ожиданиями динамическая функция предложения (6.27) принимает вид:

$$\frac{Y_t-Y_{t-1}}{Y_{t-1}}=\frac{\pi_t-\pi_{t-1}}{k}.$$

Рассмотрим теперь ту же модель рыночной динамики в непрерывном времени, когда функция предложения будет характеризоваться дифференциальным уравнением:

$$\frac{\dot{Y}}{Y}=\frac{\dot{\pi}}{k}. \quad (6.31)$$

Запишем условие динамического равновесия спроса (6.21) и предложения (6.31):

$$\frac{\dot{M}}{M}-\pi=\frac{\dot{\pi}}{k}.$$

Перейдем к логарифмической шкале измерения денежных доходов:

$$\frac{\dot{\pi}}{k}+\pi=\dot{m}. \quad (6.32)$$

Мы получили неоднородное линейное дифференциальное уравнение относительно темпа прироста цен π и скорости его изменения $\dot{\pi}$. Для решения (6.32) вначале рассматриваем соответствующее однородное дифференциальное уравнение $\dot{\pi}=-k\pi$. Разделяем переменные $\left(\frac{d\pi}{\pi}=-kdt\right)$ и интегрируем: $\int d\ln\pi=-k\int dt+\ln c$, т.е. $\pi=ce^{-kt}$.

Далее используем метод вариации постоянной, подставляя общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\pi=c(t)e^{-kt} \quad (6.33)$$

в неоднородное дифференциальное уравнение (6.32):

$$\dot{c}=ke^{kt}\dot{m}.$$

Применяя к решению данного уравнения метод интегрирования по частям, находим выражение для варьируемого множителя:

$$c(t)=k\int_0^t \dot{m}(\tau)e^{k\tau}d\tau+c_1=\int_0^t \dot{m}(\tau)de^{k\tau}+c_1=\dot{m}(\tau)e^{k\tau}\Big|_0^t-\int_0^t e^{k\tau}d\dot{m}+c_1=\dot{m}(t)e^{kt}-\dot{m}(0)-\int_0^t e^{k\tau}d\dot{m}+c_1. \quad (6.34)$$

Итак, получаем общее решение исходного неоднородного уравнения (6.32):

$$\pi(t)=\dot{m}(t)-\dot{m}(0)e^{-kt}-e^{-kt}\int_0^t e^{k\tau}d\dot{m}+c_1e^{-kt}.$$

Константу интегрирования определим по темпу прироста цен в нулевой момент времени: $\pi(0)=c_1$.

В итоге решение уравнения (6.32) приобретает вид:

$$\pi(t)=\dot{m}(t)+\big(\pi(0)-\dot{m}(0)\big)e^{-kt}-e^{-kt}\int_0^t e^{k\tau}d\dot{m}=\dot{m}(t)+\big(\pi(0)-\dot{m}(0)\big)e^{-kt}-\int_0^t e^{-k(t-\tau)}d\dot{m}. \quad (6.35)$$

В частности, если доходы потребителей растут постоянным темпом $\dot{m}(t)=\dot{m}=const$, то интеграл в выражении (6.35) аннулируется, и ценовая динамика будет описываться траекторией:

$$\pi(t)=\dot{m}+\big(\pi(0)-\dot{m}\big)e^{-kt}.$$

Очевидно, что в долгосрочной перспективе, при $t\to\infty$, темп прироста цен будет асимптотически приближаться к темпу прироста денежных доходов $\dot{m}$ (рис. 6.11).

Покажем, что данный вывод сохраняется практически при любом характере изменения доходов потребителей. Для этого преобразуем траекторию ценовой динамики (6.35), подставляя в общее решение однородного уравнения (6.33) первоначальное выражение варьируемого множителя (6.34) и учитывая, что константа интегрирования при этом сохраняет прежнее значение $(c_1=\pi(0))$:

$$\pi(t)=\pi(0)e^{-kt}+ke^{-kt}\int_0^t \dot{m}(\tau)e^{k\tau}d\tau=\pi(0)e^{-kt}+k\int_0^t \dot{m}(\tau)e^{-k(t-\tau)}d\tau.$$

Рассмотрим поведение системы в пределе, на бесконечно удаленном временно́м интервале:

$$\lim_{t\to\infty}\pi(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{\pi(0)+k\int_0^t \dot{m}(\tau)e^{k\tau}d\tau}{e^{kt}}.$$

Учитывая, что $\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \dot{m}(\tau)e^{k\tau}d\tau=\dot{m}(t)e^{kt}>0$ при $\dot{m}(t)>0$, можно сделать вывод о монотонном росте $\int_0^t \dot{m}(\tau)e^{k\tau}d\tau$ с течением времени при увеличении денежных доходов. При этом в пределе выше присутствует неопределенность вида ∞/∞. Раскроем ее с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{t\to\infty}\pi(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{\partial}{\partial t}\left(\pi(0)+k\int_0^t \dot{m}(\tau)e^{k\tau}d\tau\right)}{\frac{\partial e^{kt}}{\partial t}}=\lim_{t\to\infty}\dot{m}(t).$$

Таким образом, если рыночная система при статичных ожиданиях характеризуется элементарной функцией спроса (6.21), то с течением времени в пределе (при $t\to\infty$) темп прироста цен уравнивается с темпом прироста денежных доходов. При этом

выпуск и потребление продукции достигает потенциального уровня. Следовательно, инфляционная спираль в данной модели всегда будет сходится к точке $\left(Y^*, \dot{m}\right)$, где Y^* – потенциальный выпуск, $\dot{m}=\lim\limits_{t\to\infty}\dot{m}(t)$ (рис. 6.11). Возможность “взрывной”, “разносящей” динамики цен и объема производства, тем самым, исключается.

Итак, при стимулирующей экономической политике наличие ожиданий является необходимым условием для достижения долгосрочного равновесия в динамическом аспекте.

Рассмотрим теперь видоизменение анализа динамического равновесия при наличии в функции спроса (6.18) некоторого потребительского минимума или автономного потребления Y_A:

$$Y=Y_A+s\frac{M}{P}. \quad (6.36)$$

В силу того, что скорость изменения доходов в реальном выражении представляет собой разность темпов прироста номинальных доходов $\dot{m}$ и цен π, умноженную на величину реальных доходов

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{M}{P}\right)=\frac{M}{P}\left(\frac{dM/dt}{M}-\frac{dP/dt}{P}\right), \quad (6.37)$$

можно представить динамическую функцию спроса в следующем виде:

$$\dot{Y}=s\frac{M}{P}\left(\frac{\dot{M}}{M}-\pi\right). \quad (6.38)$$

Проанализируем вначале динамическое равновесие при простейшей функции предложения без учета ожиданий (6.22).

Тогда условие динамического равновесия спроса и предложения будет таким:

$$\dot{Y}=s\frac{M}{P}\left(\frac{\dot{M}}{M}-k\frac{Y}{Y^*}+k\right),$$

или:

$$\dot{Y}=s\frac{M}{P}\frac{\dot{M}}{M}-\frac{ks}{Y^*}\frac{M}{P}Y+ks\frac{M}{P}. \quad (6.39)$$

Для решения данного неоднородного линейного дифференциального уравнения необходимо вначале решить соответствующее однородное уравнение:

$$\dot{Y}=-\frac{ks}{Y^*}\frac{M}{P}Y.$$

Разделяем переменные

$$\frac{dY}{Y}=-\frac{ks}{Y^*}\frac{M}{P}\,dt$$

и интегрируем его:

$$\ln Y=-\frac{ks}{Y^*}\int\frac{M}{P}\,dt+\ln c.$$

Потенцируя, получаем решение анализируемого однородного дифференциального уравнения, к которому применяем метод вариации постоянной:

$$Y(t)=c(t)e^{-\frac{ks}{Y^*}\int\limits_0^t\frac{M}{P}(\tau)\,d\tau}.$$

Подставляя его в исходное неоднородное уравнение, после очевидных преобразований получаем следующее дифференциальное уравнение для варьируемого множителя:

$$dc=B\frac{M}{P}\dot{m}e^{\frac{ks}{Y^*}\int\limits_0^t\frac{M}{P}(\tau)\,d\tau}dt+ks\frac{M}{P}e^{\frac{ks}{Y^*}\int\limits_0^t\frac{M}{P}(\tau)\,d\tau}dt.$$

Интегрируем данное уравнение:

$$c=s\int\limits_0^t\frac{M}{P}(\tau)\dot{m}(\tau)e^{\frac{ks}{Y^*}\int\limits_0^\tau\frac{M}{P}(\xi)\,d\xi}d\tau+Y^*e^{\frac{ks}{Y^*}\int\limits_0^t\frac{M}{P}(\tau)\,d\tau}+c_1.$$

Подстановка данного соотношения в общее решение однородного уравнения дает общее решение исходного неоднородного уравнения (6.39):

$$Y(t)=Y^*+\left(c_1+s\int\limits_0^t\frac{M}{P}(\tau)\dot{m}(\tau)e^{\frac{ks}{Y^*}\int\limits_0^\tau\frac{M}{P}(\xi)\,d\xi}d\tau\right)e^{-\frac{ks}{Y^*}\int\limits_0^t\frac{M}{P}(\tau)\,d\tau}.$$

По объему товарной массы в нулевой момент времени определим константу интегрирования: $c_1=Y(0)-Y^*$.

В итоге решение уравнения (6.39) таково:

$$Y(t)=Y^*+\left(Y(0)-Y^*\right)e^{-\frac{ks}{Y^*}\int\limits_0^t\frac{M}{P}(\tau)\,d\tau}+se^{-\frac{ks}{Y^*}\int\limits_0^t\frac{M}{P}(\tau)\,d\tau}\int\limits_0^t\frac{M}{P}(\tau)\dot{m}(\tau)e^{\frac{ks}{Y^*}\int\limits_0^\tau\frac{M}{P}(\xi)\,d\xi}d\tau. \quad (6.40)$$

В частности, если проводится консервативная экономическая политика, поддерживающая уровень доходов на фиксированном, неизменном во времени уровне, когда $\dot{m}=0$, то интеграл в выражении (6.40) аннулируется, и траектория динамики объема продукции на рынке упрощается:

$$Y(t)=Y^*+\left(Y(0)-Y^*\right)e^{-\frac{ks}{Y^*}\int\limits_0^t\frac{M}{P}(\tau)d\tau}.$$

Поскольку $\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{M}{P}d\tau=\frac{M}{P}(t)>0$, постольку $\int\limits_0^t\frac{M}{P}d\tau$ монотонно возрастает. Следовательно, т.к. $\frac{ks}{Y^*}>0$, $\lim\limits_{t\to\infty}e^{-\frac{ks}{Y^*}\int\limits_0^t\frac{M}{P}d\tau}=0$. Значит, в данной, упрощенной ситуации стационарности денежных доходов в долгосрочной перспективе отраслевое производство будет выходить на уровень потенциала:

$$\lim_{t\to\infty}Y(t)=Y^*.$$

Рассмотрим в долгосрочном плане поведение системы в общем случае (6.40):

$$\lim_{t\to\infty}Y(t)=Y^*+\left(Y(0)-Y^*\right)\lim_{t\to\infty}e^{-\frac{ks}{Y^*}\int\limits_0^t\frac{M}{P}(\tau)d\tau}+\lim_{t\to\infty}\frac{s\int\limits_0^t\frac{M}{P}(\tau)\dot m(\tau)e^{\frac{ks}{Y^*}\int\limits_0^\tau\frac{M}{P}(\xi)d\xi}d\tau}{e^{\frac{ks}{Y^*}\int\limits_0^t\frac{M}{P}(\tau)d\tau}}.$$

Поскольку $\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{M}{P}(\tau)\dot m(\tau)e^{\frac{ks}{Y^*}\int\limits_0^\tau\frac{M}{P}(\xi)d\xi}d\tau=\frac{M}{P}(t)\dot m(t)e^{\frac{ks}{Y^*}\int\limits_0^t\frac{M}{P}(\tau)d\tau}>0$ при $\dot m(t)>0$, постольку при стимулирующей экономической политике $\int\limits_0^t\frac{M}{P}(\tau)\dot m(\tau)e^{\frac{ks}{Y^*}\int\limits_0^\tau\frac{M}{P}(\xi)d\xi}d\tau$ монотонно возрастает. Следовательно, в последнем пределе выше присутствует неопределенность вида ∞/∞. Раскроем ее с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{s\int\limits_0^t\frac{M}{P}(\tau)\dot m(\tau)e^{\frac{ks}{Y^*}\int\limits_0^\tau\frac{M}{P}(\xi)d\xi}d\tau}{e^{\frac{ks}{Y^*}\int\limits_0^t\frac{M}{P}(\tau)d\tau}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{d}{dt}s\int\limits_0^t\frac{M}{P}(\tau)\dot m(\tau)e^{\frac{ks}{Y^*}\int\limits_0^\tau\frac{M}{P}(\xi)d\xi}d\tau}{\frac{de^{\frac{ks}{Y^*}\int\limits_0^t\frac{M}{P}(\tau)d\tau}}{dt}}=\lim_{t\to\infty}\frac{s\frac{M}{P}(t)\dot m(t)e^{\frac{ks}{Y^*}\int\limits_0^t\frac{M}{P}(\tau)d\tau}}{\frac{ks}{Y^*}\frac{M}{P}(t)e^{\frac{ks}{Y^*}\int\limits_0^t\frac{M}{P}(\tau)d\tau}}=\frac{Y^*}{k}\lim_{t\to\infty}\dot m(t).$$

Следовательно, в бесконечно удаленный момент времени существует возрастающая зависимость объемов производства и потребления от темпа прироста денежных доходов (6.25). При этом в условиях рестриктивной экономической политики, когда $\dot m(t)=0$, объем производимой и продаваемой продукции будет стремиться к потенциальному значению: $\lim\limits_{t\to\infty}Y(t)=Y^*$.

Таким образом, динамические функции предложения при отсутствии ожиданий (6.22) и спроса как при наличии автономного потребления (6.38), так и без такового (6.21) в пределе, на бесконечно удаленном временно́м интервале порождают одну и ту же функцию Энгеля (6.25), т.е. данные разновидности модели динамического взаимодействия спроса и предложения оказываются асимптотически эквивалентными.

Если усилить ожиданиями функцию совокупного предложения, то поведение макроэкономической системы будет описываться уравнениями (6.28), (6.38).

В дискретном времени совокупное предложение с учетом ожиданий описывается соотношением (6.27), а уравнение совокупного спроса, соответствующее (6.38), будет иметь вид:

$$Y_t=Y_{t\text{-}1}+s\frac{M_t}{P_t}\left(\dot m_t-\pi_t\right). \quad (6.41)$$

При этом величина доходов и уровень цен берутся в каждый данный момент времени, т.е. их величина является результатом экономической политики и разворачивающихся процессов ценовой динамики.

Колебательные траектории характеристик экономической системы будут аналогичны проанализированной ранее ситуации при элементарной функции спроса (6.21) с той лишь разницей, что в силу (6.37) при $\dot m(t)>\pi(t)$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{M}{P}\right)>0$, т.е. реальные доходы возрастают, а значит, увеличивается абсолютное значение углового коэффициента линии спроса (6.41). Соответственно, при $\dot m(t)<\pi(t)$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{M}{P}\right)<0$, и отношение $\frac{M(t)}{P(t)}$ убывает, следовательно, линия спроса (6.41) становится более «пологой».

При этом возникают ценовые спирали, соответствующие различным видам экономической политики государства. Для того чтобы изобразить траекторию динамики рыночной системы, выразим из уравнения спроса (6.41) темп прироста цен через количество продукции:

$$\pi_t=\dot m_t+\frac{P_tY_{t\text{-}1}}{sM_t}-\frac{P_tY_t}{sM_t}. \quad (6.42)$$

Уравнение предложения (6.27) принимает вид (6.29).

Очевидно, что при $\dot m(t)>\pi(t)$ отношение $\frac{M(t)}{P(t)}$ будет возрастать, а значит, график данной обратной функции спроса (6.42) становится более «пологим». Соответственно, при $\dot m(t)<\pi(t)$ реальные доходы убывают, следовательно, будет увеличиваться угловой коэффициент линии спроса (6.42). Поскольку в свободном члене линии спроса (6.42) присутствуют величины $Y_{t\text{-}1}$ и $\frac{M_t}{P_t}$, постольку точка пересечения данного графика с вертикальной координатной осью будет зависеть от их соотношения.

Как следует из уравнения (6.29), при $Y_t=Y^*$ $\pi_t=\pi_{t\text{-}1}$; уравнение спроса с учетом автономного потребления (6.42) свидетельствует о том, что при $Y_t=Y_{t\text{-}1}$, $\pi_t=\dot m_t$. Таким образом, как и при элементарной функции спроса при отсутствии автономного потребления (6.21), график функции S_t проходит через точку с координатами $\left(Y^*,\pi_{t\text{-}1}\right)$, а график D_t – через точку $\left(Y_{t\text{-}1},\dot m_t\right)$, $t>0$.

Рассмотрим процесс адаптации экономической системы к стимулирующему регуляторному воздействию (рис. 6.13). Пусть исходно, при темпе прироста денежных доходов $\dot m_0$, рыночная система характеризовалась функциями спроса D и предложения

S и находилась в состоянии долгосрочного равновесия при $\pi_t = \dot{m}_0$, полностью реализуя свой потенциал Y^*. Допустим, что в результате проведения стимулирующей экономической политики темп прироста денежных доходов возрастает от уровня $\dot{m}_0$ до $\dot{m}_1$ и затем остается постоянным.

Происходит сдвиг функции спроса в положение D_0, и в качестве новой точки отсчета получаем краткосрочное равновесие E_0 с возросшим темпом прироста цен $\pi_0 < \dot{m}_1$ и объемом продукции Y_0. Это значит, что в следующий момент времени предложение (6.29) сдвинется влево-вверх, а спрос переместится вправо-вверх и повернется против часовой стрелки (D_1). При этом рынок окажется в точке E_1. Повторная итерация переведет систему в положение, когда темп прироста цен уже превысит темп прироста денежных доходов $(\pi_2 > \dot{m}_1)$, в количество товаров начнет снижаться $(Y_2 < Y_1)$. Это значит, что в следующий момент времени спрос уже сдвинется вниз и повернется по часовой стрелке (D_3), тогда как предложение продолжит смещаться вверх (S_3). Следующая аналогичная итерация переведет рынок из положения E_3 в точку E_4. При этом темп прироста цен начнет снижаться, а объем товарной массы упадет ниже потенциала.

Таким образом, возникает ценовая спираль, и рыночная система возвращается на потенциальный уровень производства и потребления при возросшем темпе прироста цен, соответствующем новому темпу прироста денежных доходов $\dot{m}_1$.

Однократное экзогенное воздействие, например, единовременная индексация доходов, в долгосрочном плане никак не скажется на параметрах равновесия (рис. 6.14). В результате первоначального, мгновенного увеличения темпа прироста денежных доходов (который сразу же возвращается на исходный уровень) линия спроса D, задаваемая соотношением (6.42), перемещается вверх в положение D_0. D_1 сдвигается выше по отношению к D_0 за счет возросшего объема продукта и, поскольку $\dot{m} < \pi$, поворачивается по часовой стрелке. S_1 окажется выше и левее по сравнению с S в силу возросшего темпа прироста цен в предыдущий период. В новом равновесии E_1 темп прироста цен увеличится по сравнению с предыдущим значением π_0, оставаясь выше темпа прироста денежных доходов $\dot{m}$; а количество товаров (Y_1) окажется ниже предыдущего уровня (Y_0). Это значит, что в следующий момент предложение продолжит сдвигаться вверх – в положение S_2, а спрос (D_2) сместится вниз, поворачиваясь по часовой стрелке. В новом краткосрочном равновесии E_2 и количество продукции, и темп прироста цен сократятся по сравнению с предыдущими значениями. Теперь уже не только спрос, но и предложение начнет сдвигаться вниз. Ценовая спираль возвращает рынок в первоначальное состояние долгосрочного равновесия *E*, соответствующее полной реализации экономического потенциала при неизменном темпе прироста денежных доходов и прежнем темпе прироста цен $(\pi_0 = \dot{m}_0)$.

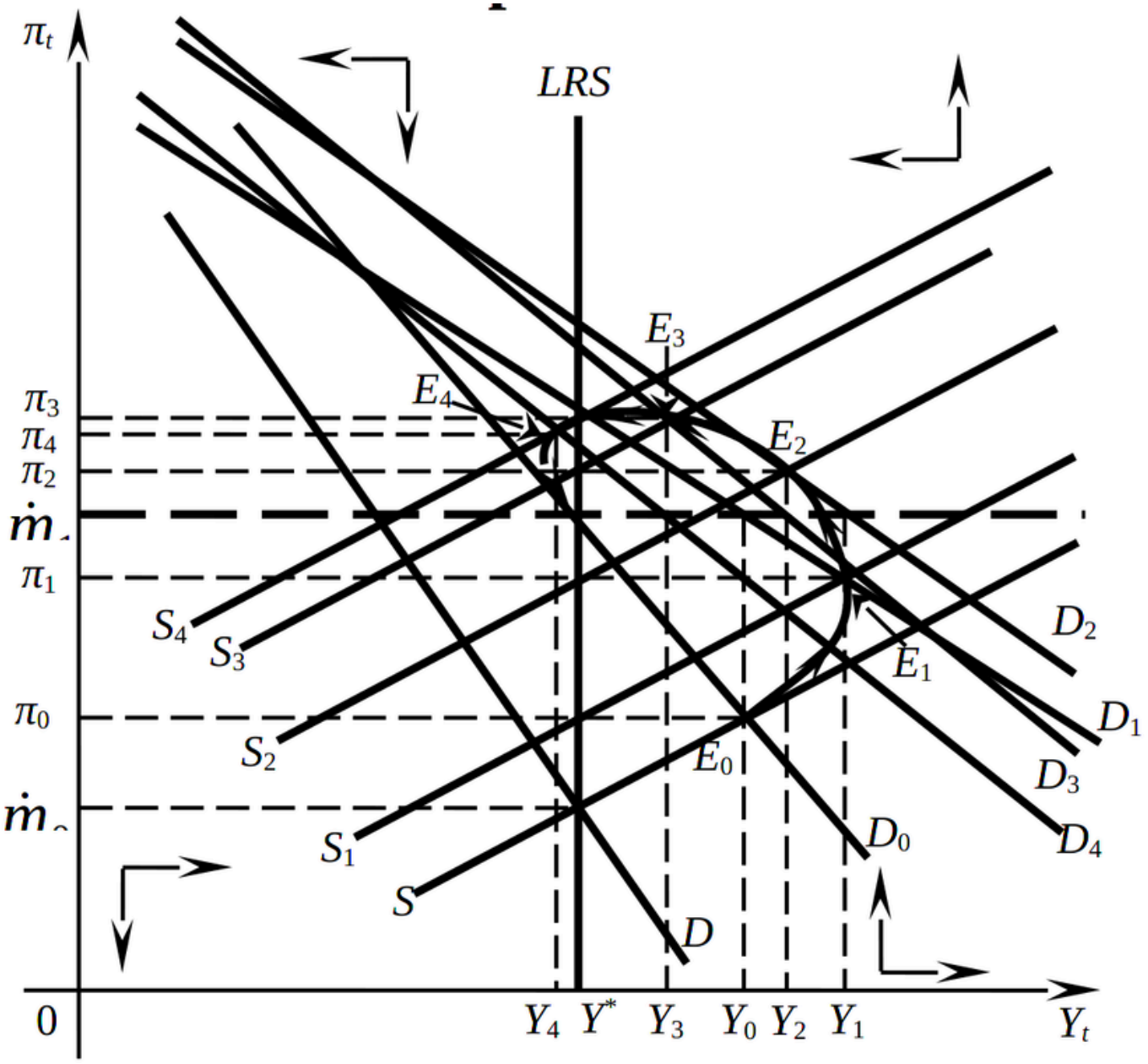


Рисунок 6.13. Процесс адаптации рыночной системы к усилению стимулирующих мер экономической политики при динамической функции спроса с учетом автономного потребления

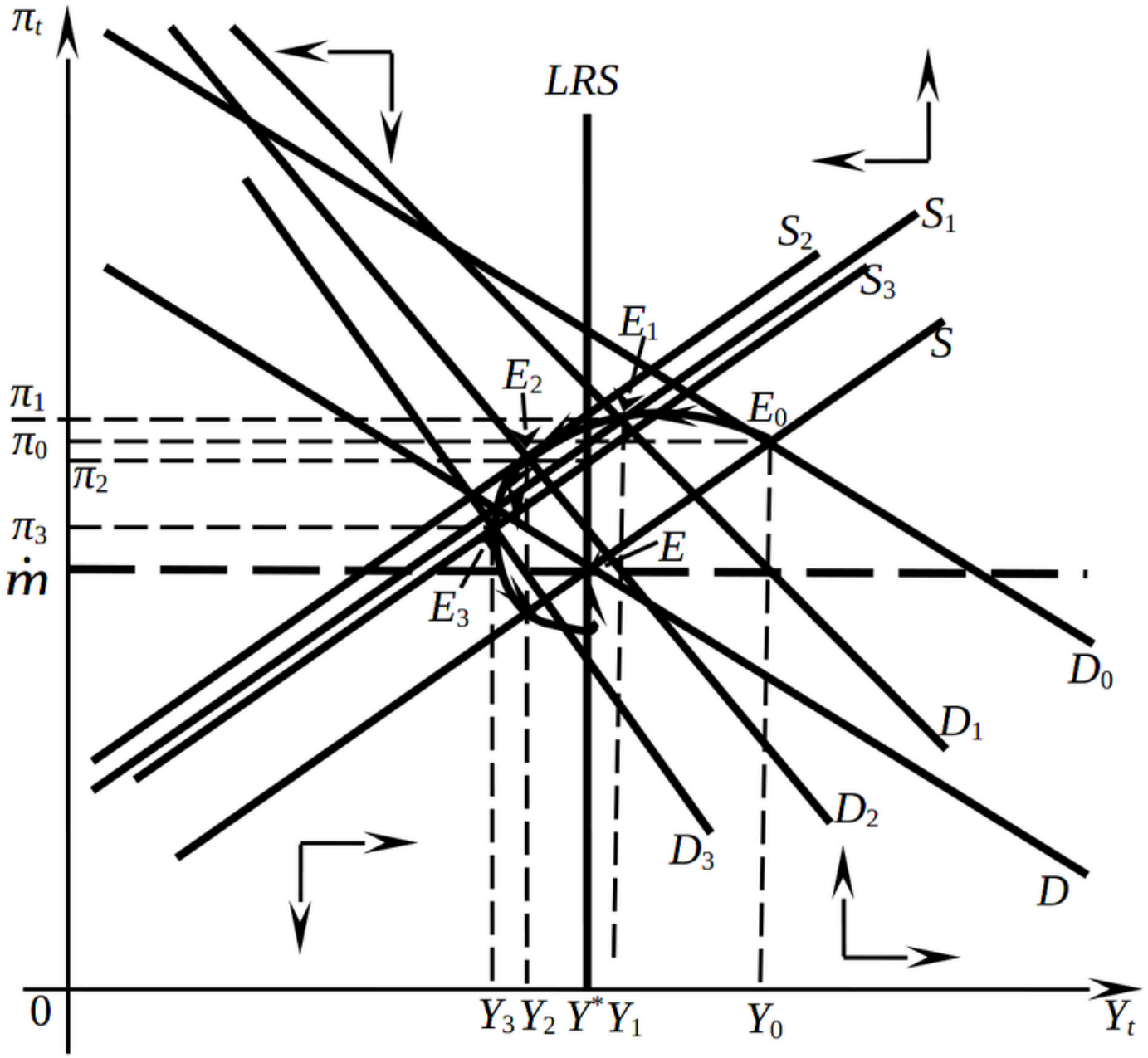


Рисунок 6.14. Процесс адаптации рыночной системы к единовременному стимулирующему регуляторному воздействию при динамической функции совокупного спроса с учетом автономного потребления

Проанализируем теперь динамическое взаимодействие спроса при наличии автономного потребления (6.38) и предложения с учетом ожиданий (6.31).

Воспользуемся выражением разности между фактическим и автономным потреблением через долю реального дохода $Y\text{-}Y_A = s\frac{M}{P}$, которое вытекает из соотношения (6.36), в функции спроса (6.38)

$$\dot{Y} = s\frac{M}{P}\left(\frac{\dot{M}}{M}\text{-}\pi\right) = (Y\text{-}Y_A)\,(\dot{m}\text{-}\pi)$$

и рассчитаем далее темп прироста количества продукции на рынке:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = (\dot{m}\text{-}\pi)\left(1\text{-}\frac{Y_A}{Y}\right).$$

Приравнивая данную функцию спроса предложению (6.31), получаем следующее уравнение, характеризующее динамику показателей рыночного равновесия:

$$\frac{\dot{\pi}}{k} = (\dot{m}\text{-}\pi)\left(1\text{-}\frac{Y_A}{Y}\right),$$

или

$$\dot{\pi} + k\pi\left(1\text{-}\frac{Y_A}{Y}\right) = \dot{m}\left(1\text{-}\frac{Y_A}{Y}\right). \quad (6.43)$$

Решая данное неоднородное линейное дифференциальное уравнение, выписываем соответствующее однородное уравнение: $\dot{\pi}+k\pi\left(1-\frac{Y_A}{Y}\right)=0.$

Разделяя переменные $\frac{d\pi}{\pi}=k\left(\frac{Y_A}{Y}-1\right)dt$, интегрируем его:

$$\ln\pi=k\int\left(\frac{Y_A}{Y}-1\right)dt+\ln c.$$

Потенцируя, получаем решение анализируемого однородного дифференциального уравнения, к которому применяем метод вариации постоянной:

$$\pi(t)=c(t)e^{k\int\limits_0^t\left(\frac{Y_A}{Y(\tau)}-1\right)d\tau}.$$

Подставляя его в исходное неоднородное уравнение, после очевидных преобразований получаем следующее дифференциальное уравнение для варьируемого множителя:

$$\dot{c}=k\dot{m}(t)\left(1-\frac{Y_A}{Y(t)}\right)e^{k\int\limits_0^t\left(1-\frac{Y_A}{Y(\tau)}\right)d\tau}.$$

Интегрируем данное уравнение:

$$c=k\int\limits_0^t\dot{m}(\tau)\left(1-\frac{Y_A}{Y(\tau)}\right)e^{k\int\limits_0^\tau\left(1-\frac{Y_A}{Y(\xi)}\right)d\xi}d\tau+c_1.$$

Подстановка данного соотношения в общее решение однородного уравнения

$$\pi(t)=\left(c_1+k\int\limits_0^t\dot{m}(\tau)\left(1-\frac{Y_A}{Y(\tau)}\right)e^{k\int\limits_0^\tau\left(1-\frac{Y_A}{Y(\xi)}\right)d\xi}d\tau\right)e^{k\int\limits_0^t\left(\frac{Y_A}{Y(\tau)}-1\right)d\tau}.$$

с учетом начального условия $\pi(0)=c_1$ дает общее решение исходного неоднородного уравнения (6.43):

$$\pi(t)=\pi(0)e^{k\int\limits_0^t\left(\frac{Y_A}{Y(\tau)}-1\right)d\tau}+ke^{k\int\limits_0^t\left(\frac{Y_A}{Y(\tau)}-1\right)d\tau}\int\limits_0^t\dot{m}(\tau)\left(1-\frac{Y_A}{Y(\tau)}\right)e^{k\int\limits_0^\tau\left(1-\frac{Y_A}{Y(\xi)}\right)d\xi}d\tau.$$

Рассмотрим в долгосрочном плане поведение данной рыночной системы, пользуясь для этого, как и ранее правилом Лопиталя:

$$\lim_{t\to\infty}\pi(t)=\pi(0)\lim_{t\to\infty}e^{k\int\limits_0^t\left(\frac{Y_A}{Y(\tau)}-1\right)d\tau}+\lim_{t\to\infty}\frac{k\int\limits_0^t\dot{m}(\tau)\left(1-\frac{Y_A}{Y(\tau)}\right)e^{k\int\limits_0^\tau\left(1-\frac{Y_A}{Y(\xi)}\right)d\xi}d\tau}{e^{k\int\limits_0^t\left(1-\frac{Y_A}{Y(\tau)}\right)d\tau}}=\lim_{t\to\infty}\frac{k\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\dot{m}(\tau)\left(\frac{Y_A}{Y(\tau)}-1\right)e^{k\int\limits_0^\tau\left(1-\frac{Y_A}{Y(\xi)}\right)d\xi}d\tau}{\frac{de^{k\int\limits_0^t\left(1-\frac{Y_A}{Y(\tau)}\right)d\tau}}{dt}}=\lim_{t\to\infty}\frac{k\dot{m}(t)\left(1-\frac{Y_A}{Y(t)}\right)e^{k\int\limits_0^t\left(1-\frac{Y_A}{Y(\tau)}\right)d\tau}}{k\left(1-\frac{Y_A}{Y(t)}\right)e^{k\int\limits_0^t\left(1-\frac{Y_A}{Y(\tau)}\right)d\tau}}=\lim_{t\to\infty}\dot{m}$$

Следовательно, в бесконечно удаленном периоде при непрерывном, как и при дискретном, течении времени уравниваются темпы прироста цен и денежных доходов.

Итак, нами проанализирована динамика рыночной системы, описываемой функциями спроса при наличии и отсутствии автономного потребления и предложения с учетом и без учета ожиданий. Решение возникающих при этом дифференциальных уравнений показывает, что экзогенная подпитка доходов населения может стимулировать увеличение потенциального уровня производства и потребления. В частности, при отсутствии ожиданий функции спроса как с учетом, так и без учета автономного потребления оказываются асимптотически эквивалентными, генерируя функции Энгеля, отражающие возрастающую зависимость между денежными доходами покупателей и объемом производимой и потребляемой продукции.

---

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – 2-е изд. – М.: Наука, 1969. ↩

2. За исключением вырожденных ситуаций, соответствующих чрезвычайно высокой, превышающей экспоненциальную, скорости сокращения доходов. ↩

6.4. Эволюционная рыночная динамика

Рассмотрим эволюционные подходы к анализу рыночной динамики на примере конкурентных рынков труда.

Традиционно выделяют несколько видов безработицы. Во-первых, это фрикционная безработица, связанная с процессом поиска нового места работы, который сопряжен с определенными транзакционными затратами времени и средств – по сбору и анализу информации, налаживанию коммуникации с потенциальными работодателями, в т.ч. ведению переговоров, перемещению на новое место работы и т.п. Во-вторых, это структурная безработица, связанная с процессами структурной перестройки хозяйственной системы, когда некоторые отрасли (бизнес-проекты) устаревают, становятся нерентабельными; другие – приходят им на смену, начинают активно развиваться. Безработица в данном контектсте связана с процессами переподготовки персонала, перемещения рабочей силы в между отраслями и секторами экономики. В-третьих, в условиях циклического спада, депрессивного состояния экономики нарастает циклическая безработица. Наконец, в-четвертых, безработица может носить сезонный характер: она сокращается в периоды ежегодного роста производства и сокращается в те месяцы, когда хозяйственные операции идут на спад.

Первый тип безработицы часто называют “добровольной” незанятостью, а второй и третий - “вынужденной” безработицей. Первые две составляющие называют “естественной” безработицей (u^*). Ей, как правило, сопутствует определенный объем вакантных рабочих мест в данной хозяйственной системе.

Отражением такой ситуации является т.н. кривая Бевериджа (рис. 6.15), которая подразумевает обратную зависимость между вакантными рабочими местами (V) и безработными (U). Логика здесь такова: чем больше вакансий, тем выше вероятность трудоустройства незанятых. И наоборот, увеличение числа безработных означает растущую нехватку вакантных рабочих мест: предложение труда не находит соответствующего спроса – вакансий.

Кривая Бевериджа позволяет выделить еще два типа незанятости рабочей силы. Безработица является спросоизбыточной, если количество вакантных рабочих мест превышает число потенциальных работников; и наоборот, в ситуации, когда имеющихся вакансий будет недостаточно для трудоустройства всех тех, кто ищет работу, будет наблюдаться спросодефицитная безработица.

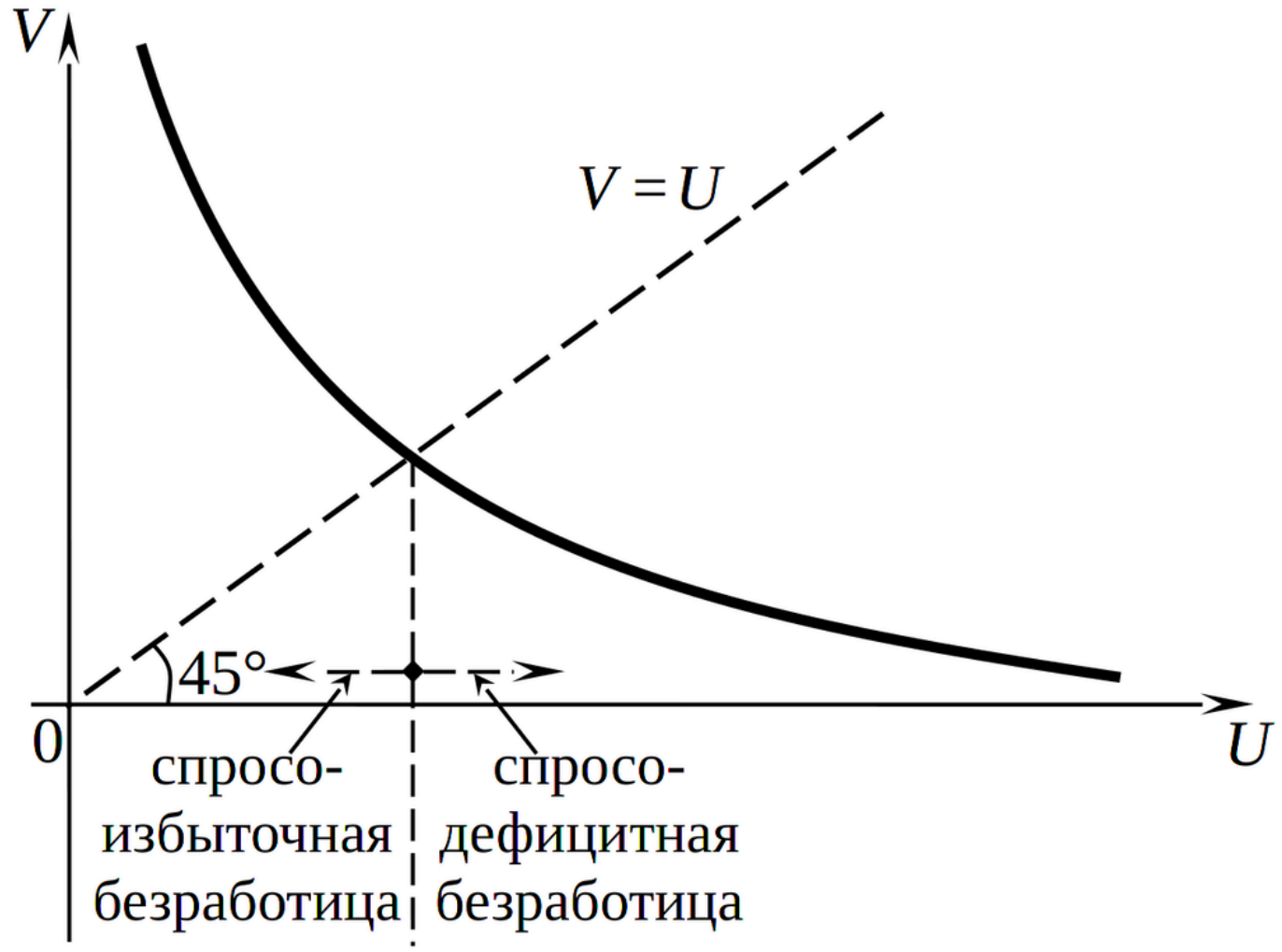


Рисунок 6.15. Кривая Бевериджа

В стационарном состоянии норма безработице должна оставаться на неизменном, “естественном” уровне:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{U}{L+U}\right)=0.$$

Дифференцируя данную стационарную норму безработицы по времени, получаем

$$\frac{(L+U)\frac{dU}{dt}-U\frac{(dL+dU)}{dt}}{(L+U)^2},$$

а значит,

$$(L+U)\frac{dU}{dt}=U\frac{(dL+dU)}{dt},$$

или

$$L\frac{dU}{dt}=U\frac{dL}{dt}.$$

Следовательно, из последних двух равенств получаем, что

$$\frac{\frac{dU}{dt}}{U}=\frac{\frac{(dL+dU)}{dt}}{L}=\frac{\frac{d(L+U)}{dt}}{L+U}.$$

Следовательно, “естественный” уровень безработицы предполагает равенство темпов прироста занятости, безработицы и трудовых ресурсов:

$$\frac{\frac{dL}{dt}}{L}=\frac{\frac{dU}{dt}}{U}=\frac{\frac{d(L+U)}{dt}}{L+U}. \quad (6.44)$$

Проанализируем показатели, которыми характеризуется “естественная” норма безработицы [1]. Допустим, что все население (N) является экономически активным:

$$N(t)=L(t)+U(t), \quad (6.45)$$

и его прирост достигается за счет естественного движения, т.е. рождаемости и смертности, а механическое движение населения – иммиграция и эмиграция – отсутствует.

Пусть, *k* – коэффициент естественного прироста населения; *s* – показатель увольнений, то есть доля уволенных в общем числе занятых; *f* – показатель трудоустройства, то есть доля трудоустроенных среди безработных.

Предположим, что весь прирост экономически активного населения вначале пополняет ряды безработных (рис. 6.16).

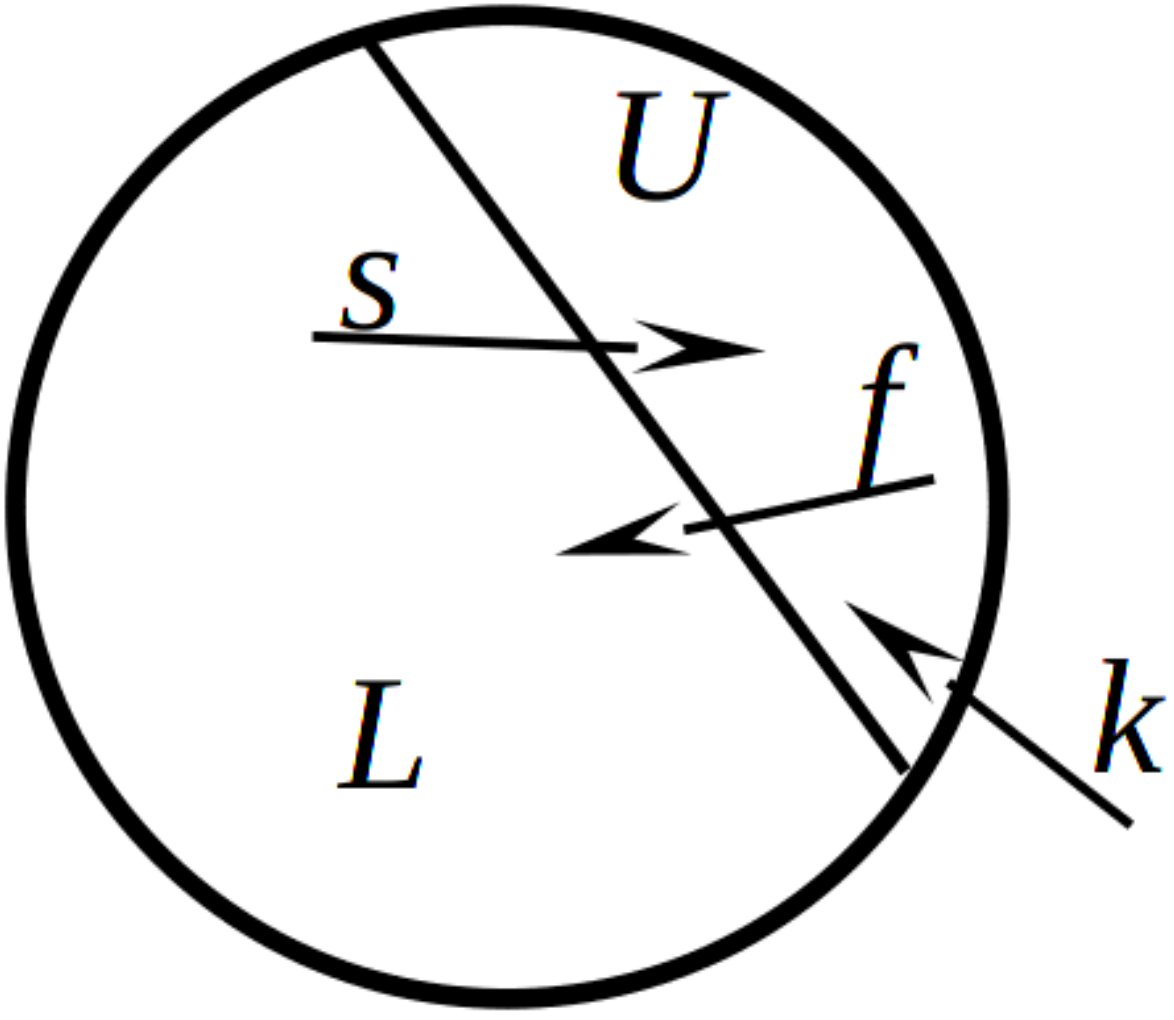


Рисунок 6.16. Движение населения

Итак, динамика занятости и безработицы описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = sL - fU + k(U+L), & (6.46) \\ \frac{dL}{dt} = fU - sL. & (6.47) \end{cases}$$

В темповой записи она будет выглядеть так:

$$\begin{cases} \frac{\frac{dU}{dt}}{U} = s\frac{L}{U} - f + k\frac{(U+L)}{U}, \\ \frac{\frac{dL}{dt}}{L} = f\frac{U}{L} - s. \end{cases}$$

Поскольку «естественный» уровень безработицы предполагает равенство темпов прироста занятости и безработицы (6.44), постольку из данной системы следует соотношение: $\frac{sL}{U} - f + \frac{k(U+L)}{U} = \frac{fU}{L} - s$. Умножая его почленно на *U*, получаем: $sL - fU + k(U+L) = \frac{fU^2}{L} - sU$, или $(s+k)(U+L) = \frac{fU(U+L)}{L}$, следовательно, $L = \frac{fU}{s+k}$.

Таким образом, естественный уровень безработицы составляет

$$u = \frac{U}{L+U} = \frac{U}{\frac{fU}{s+k}+U} = \frac{s+k}{s+k+f}.$$

Если естественное движение населения отсутствует (*k*=0), то

$$u = \frac{s}{s+f}.$$

В данном, простейшем случае уравнения динамики занятости и безработицы принимают вид:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = sL - fU = f\left(\frac{s}{f}L - U\right), & (6.48) \\ \frac{dL}{dt} = fU - sL = f\left(U - \frac{s}{f}L\right). & (6.49) \end{cases}$$

Очевидно, что при отсутствии изменения численности населения увеличение занятого населения должно равняться сокращению числа безработных: $\frac{dL}{dt} = -\frac{dU}{dt}$.

Динамику системы (6.48)-(6.49) на качественном уровне иллюстрируют рис. 6.17-6.18. Направления изменения показателей рынка труда в каждой из областей графика, лежащих по разные стороны от луча $U = \frac{s}{f}L$, показаны соотвествующими горизонтальными (для показателя L) и вертикальными (для U) стрелками. Комбинация данных векторов будет задавать равнодействующее направление совместной динамики экономических переменных, характеризующих использование рабочей силы, показанное изогнутой линией со стрелкой. Очевидно, что динамические силы будут сводить показатели занятости и безработицы из любой точки на координатной плоскости на луч $U = \frac{s}{f}L$ (рис. 6.17).

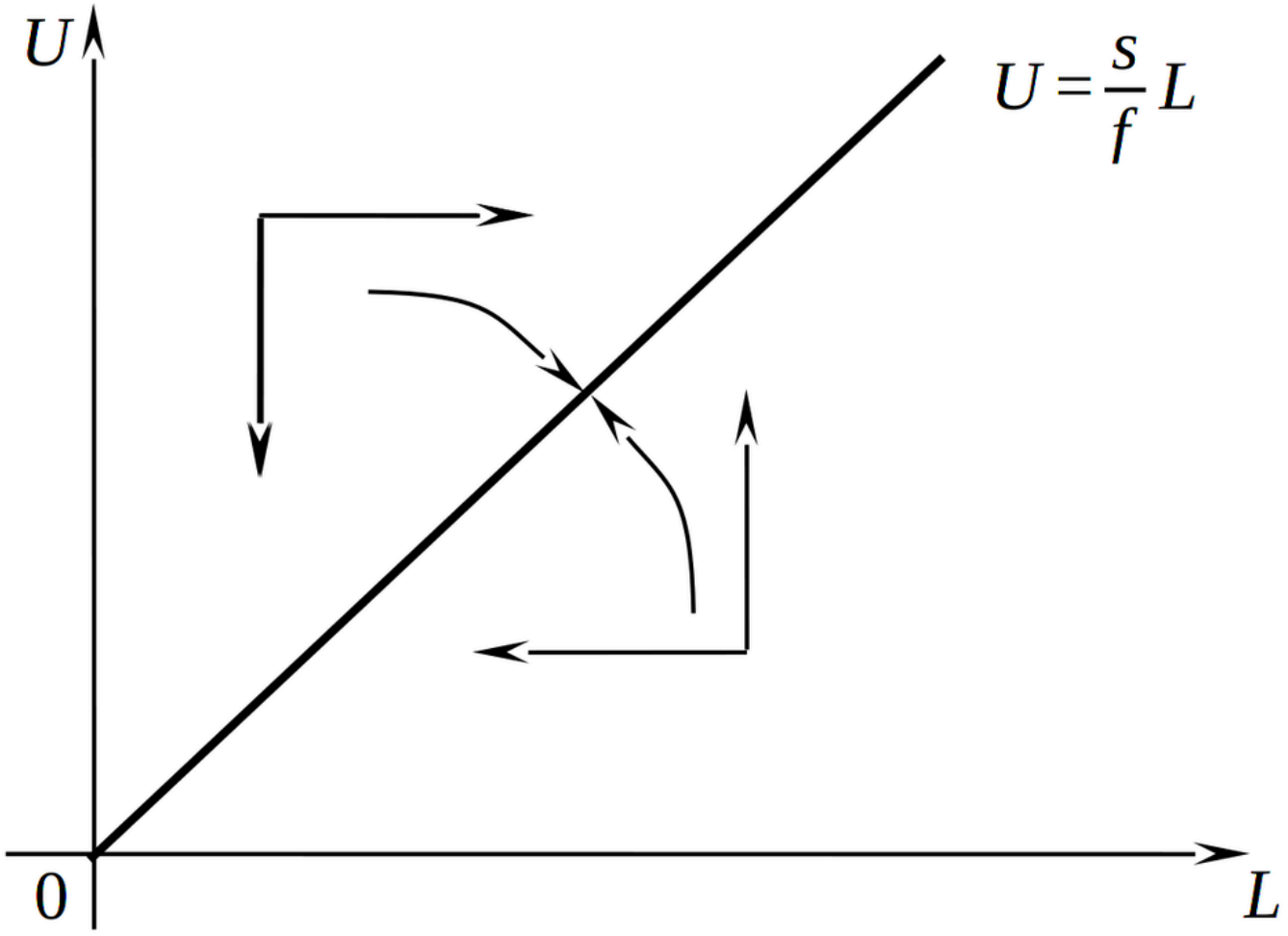


Рисунок 6.17. Устойчивая динамика рынка труда при отсутствии естественного движения населения

Тот факт, что данный луч характеризует динамическое равновесие на рынке труда, отражен на рис. 6.18. Действительно, если величины занятости и безработицы оказываются меньше равновесных, то $\dot{U} > 0$, $\dot{L} > 0$, и данные показатели возрастают, возвращаясь к равновесным уровням. Наоборот, при отклонении в большую сторону $\dot{U} < 0$, $\dot{L} < 0$, значит, занятость и безработица сокращаются, стремясь обратно к равновесию. Таким образом, если любой из рыночных показателей отклоняется в большую или меньшую сторону от равновесного значения – соответственно $\frac{s}{f} L$ для объема занятости и $\frac{f}{s} U$ для числа безработных – направление изменения данных показателей будет направлено в противоположную сторону от исходного отклонения, что будет возвращать значения данных показателей к равновесному уровню.

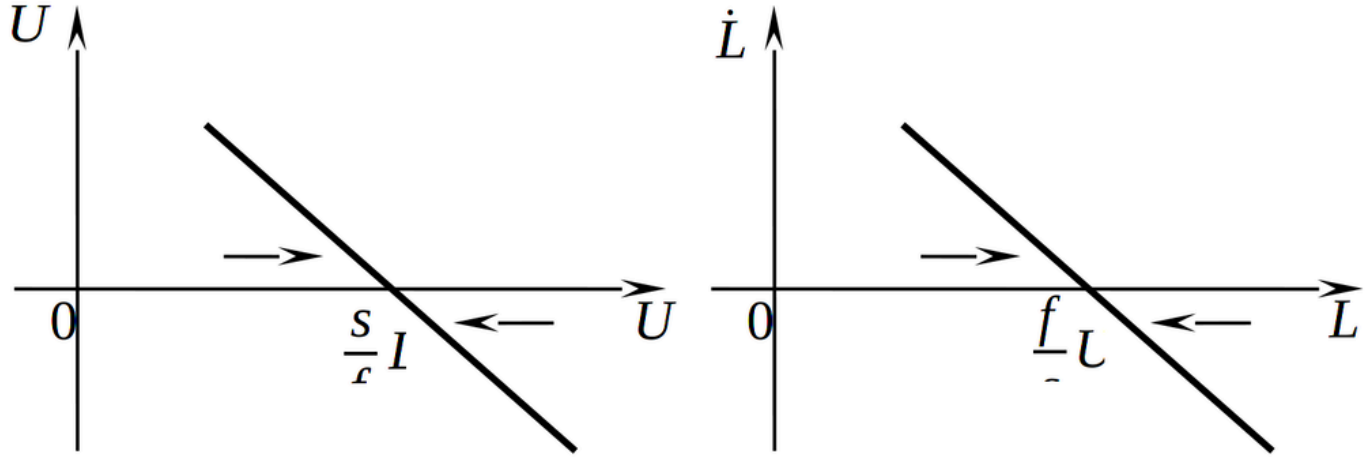


Рисунок 6.18. Устойчивое соотношение численности безработных и занятых при стационарном населении

В силу того, что в данном случае экономически активное население не меняется во времени $\left(\dot{N}=0\right)$ $U(t)+L(t)=U(0)+L(0)$, а соотношение, характеризующее «естественный» уровень безработицы может быть записано в следующем виде: $U(t)=\frac{s}{f} L(t)$, количество занятых и безработных устанавливается на фиксированных уровнях:

$$L(t)=\frac{s(U(0)+L(0))}{s+f}, U(t)=\frac{f(U(0)+L(0))}{s+f}.$$

Таким образом, при отсутствии естественного движения населения (k=0) система рынка рабочей силы является устойчивой, и уровень безработицы сходится к "естественному". В данном случае "естественный" уровень безработицы является устойчивым в долгосрочном плане.

В противоположность этому, в исходной, более общей системе (6.46)-(6.47), которую можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = L(k+s) + U(k-f) = (k-f)\left(U - \left(\frac{k+s}{f-k}\right)L\right), \\ \frac{dL}{dt} = f\left(U - \frac{s}{f}L\right); \end{cases}$$

"естественный" уровень безработицы неустойчив (рис. 6.19).

Относительно устойчивым же в динамическом аспекте является уровень безработицы, характеризуемый тем же соотношением $\left(U(t) = \frac{s}{f}L(t)\right)$, что и в простейшем случае. При наличии прироста населения будут возникать постоянные стимулы к отклонению от него, однако динамика системы будет неизменно возвращать уровень безработицы к данному значению, но уже при новой, возросшей численности занятых и безработных с перспективой возобновления данных динамических процессов. Имеет место тенденция к перемещению вдоль луча $U(t) = \frac{s}{f}L(t)$, которое будет сопровождаться увеличением и занятости, и безработицы (рис. 6.19).

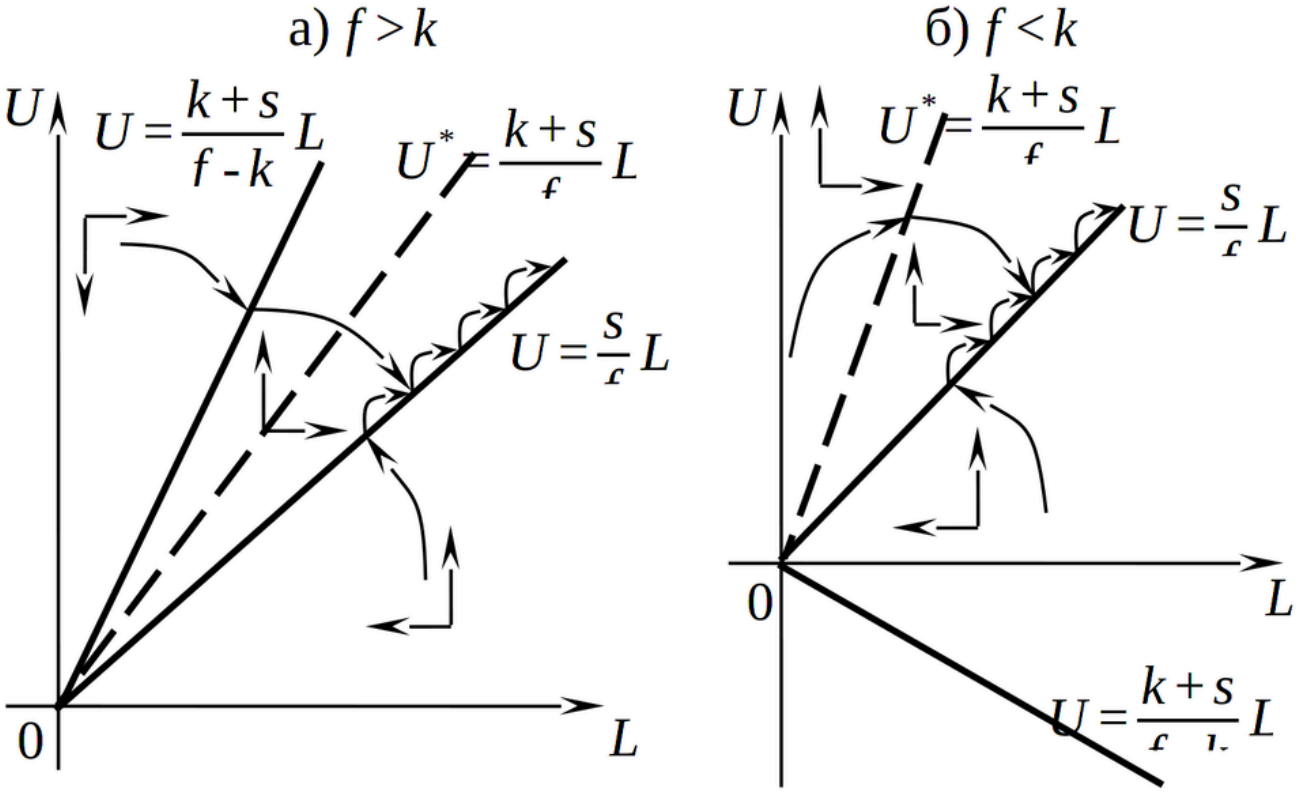


Рисунок 6.19. Динамика рынка труда с учетом естественного движения населения

Эволюция занятости в рыночной системе может быть описана с помощью логистического уравнения, которое традиционно используется для характеристики динамических процессов, определяющих численность популяций живых существ [2]:

$$\frac{dL}{dt} = fL(N-L) - sL, \quad (6.50)$$

где f и s – заданные постоянные рождаемости и смертности, N – "несущая способность" окружающей среды.

Данное дифференциальное уравнение может описывать не только динамику численности живых популяций, но и хозяйственных систем – в частности, увеличение количества сотрудников, занятых на предприятиях отрасли (L). Тогда N, как и ранее, будет обозначать численность населения при предположении о том, что все оно является экономически активным (6.45); а разность $(N-L)$ будет равна численности незанятых (безработных) трудовых ресурсов (U). Соответственно, f и s – это показатели трудоустройства и увольнения.

Проанализируем логистическое уравнение (6.50), представив его в виде уравнения Бернулли $\frac{dL}{dt} - (fN-s)L = -fL^2$ и используя традиционную схему решения уравнения данного типа. Преобразуя $\frac{\frac{dL}{dt}}{L^2} - \frac{fN-s}{L} = -f$ и проводя замену переменной $z = \frac{1}{L}$, а значит, $\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{L^2}\frac{dL}{dt}$, переписываем уравнение (6.50) в следующем виде: $\frac{dz}{dt} + (fN-s)z = f$.

Решим вначале соответствующее однородное уравнение: $\frac{dz}{dt} + (fN-s)z = 0$. Разделяя переменные $\frac{dz}{z} = d\ln|z| = (s-fN)dt$ и интегрируя $\ln|z| = (s-fN)t + \ln c$, получаем общее решение данного однородного уравнения: $z(t) = ce^{(s-fN)t}$.

Далее, применяя метод вариации постоянной $z(t)=c(t)e^{(s-fN)t}$, подставляем полученное решение в исходное неоднородное уравнение: $\frac{dc}{dt}e^{(s-fN)t}+c\,(s-fN)e^{(s-fN)t}+(fN-s)ce^{(s-fN)t}=f$; откуда $\frac{dc}{dt}e^{(s-fN)t}=f$, или $dc=fe^{(fN-s)t}dt=\frac{f}{(fN-s)}de^{(fN-s)t}$. Здесь мы воспользовались производной экспоненты: $\frac{de^{(fN-s)t}}{dt}=(fN-s)e^{(fN-s)t}$, или $e^{(fN-s)t}dt=\frac{de^{(fN-s)t}}{fN-s}$.

Интегрируя уравнение относительно варьируемого множителя $c(t)=\frac{f}{(fN-s)}e^{(fN-s)t}+c_1$, получаем общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения как сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного: $z(t)=\frac{f}{fN-s}+c_1e^{(s-fN)t}$.

Возвращаемся к исходной переменной $L(t)=\frac{1}{\frac{f}{fN-s}+c_1e^{(s-fN)t}}$ и находим значение постоянной c_1 из начального условия: $N(0)=\frac{1}{\frac{f}{fN-s}+c_1}$, т.е. $c_1=\frac{1}{L(0)}-\frac{f}{fN-s}$.

Итак, логистическая кривая имеет вид:

$$L(t)=\frac{(fN-s)L(0)}{fL(0)+(fU(0)-s)e^{(s-fN)t}}. \quad (6.51)$$

Записав траекторию $L(t)$ в таком виде, мы восстановили потерянное ранее при замене переменных тривиальное решение $L(t)=0$.

В дальнейшем, однако, мы будем анализировать только содержательное с экономической точки зрения решение $L(t)>0$, которое предполагает $L(0)>0$.

Исследуем данную траекторию на монотонность:

$$\dot{L}=\frac{(fN-s)^2L(0)(fU(0)-s)e^{(s-fN)t}}{\left(fL(0)+(fU(0)-s)e^{(s-fN)t}\right)^2}.$$

При $fU(0)-s>0$ логистическая функция (6.51) монотонно возрастает: $\dot{L}>0$. Обратим внимание на то, что в пределе, когда время уходит в бесконечность, численность занятых стремится к величине $N-\frac{s}{f}>0$:

$$\lim_{t\to\infty}L(t)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{(fN-s)L(0)}{fL(0)+(fU(0)-s)e^{(s-fN)t}}\right)=N-\frac{s}{f},$$

т.е. $N-\frac{m}{r}$ является горизонтальной асимптотой логистической кривой.

Приравняв вторую производную логистической функции нулю:

$$\ddot{L}=(fN-s)^3L(0)\,(fN-s-fL(0))e^{(s-fN)t}\frac{\left(fL(0)-(fU(0)-s)e^{(s-fN)t}\right)}{\left(fL(0)+(fU(0)-s)e^{(s-fN)t}\right)^3}=0,$$

получаем, что $fL(0)-(fU(0)-s)e^{(s-fN)t}=0$, или $e^{(s-fN)t}=\frac{fL(0)}{fU(0)-s}$, а значит, направление выпуклости логистической кривой (6.51) меняется в момент

$$t_{перегиба}=\frac{1}{(s-fN)}\ln\left(\frac{fL(0)}{fU(0)-s}\right).$$

Очевидно, что $t_{перегиба}>0$ при $fL(0)<fN-s<2fL(0)$.

Таким образом, при описанных выше условиях решение логистического уравнения описывается *S*-образным графиком (рис. 6.20). Данное уравнение (6.50) может не только описывать динамику численности популяции живых существ, но и эволюцию изменение занятости во времени.

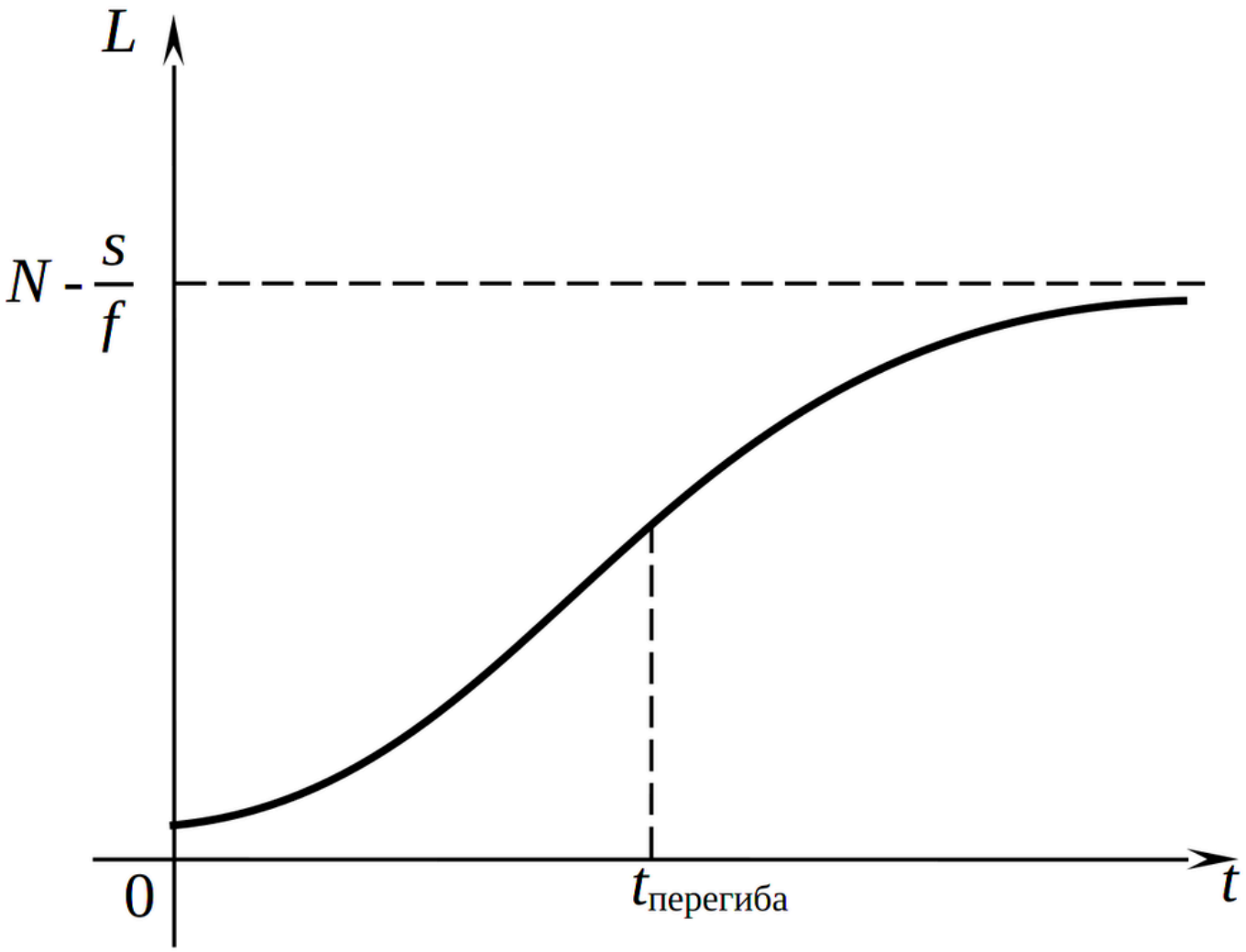


Рисунок 6.20. Логистическая кривая

При увеличении предельной величины $N\text{-}\frac{s}{f}$ получаем семейство логистических кривых (рис. 6.21), которое показывает, что в хозяйственной системе может наблюдаться эволюция, смена типов естественного и механического движения населения, демографические переходы.

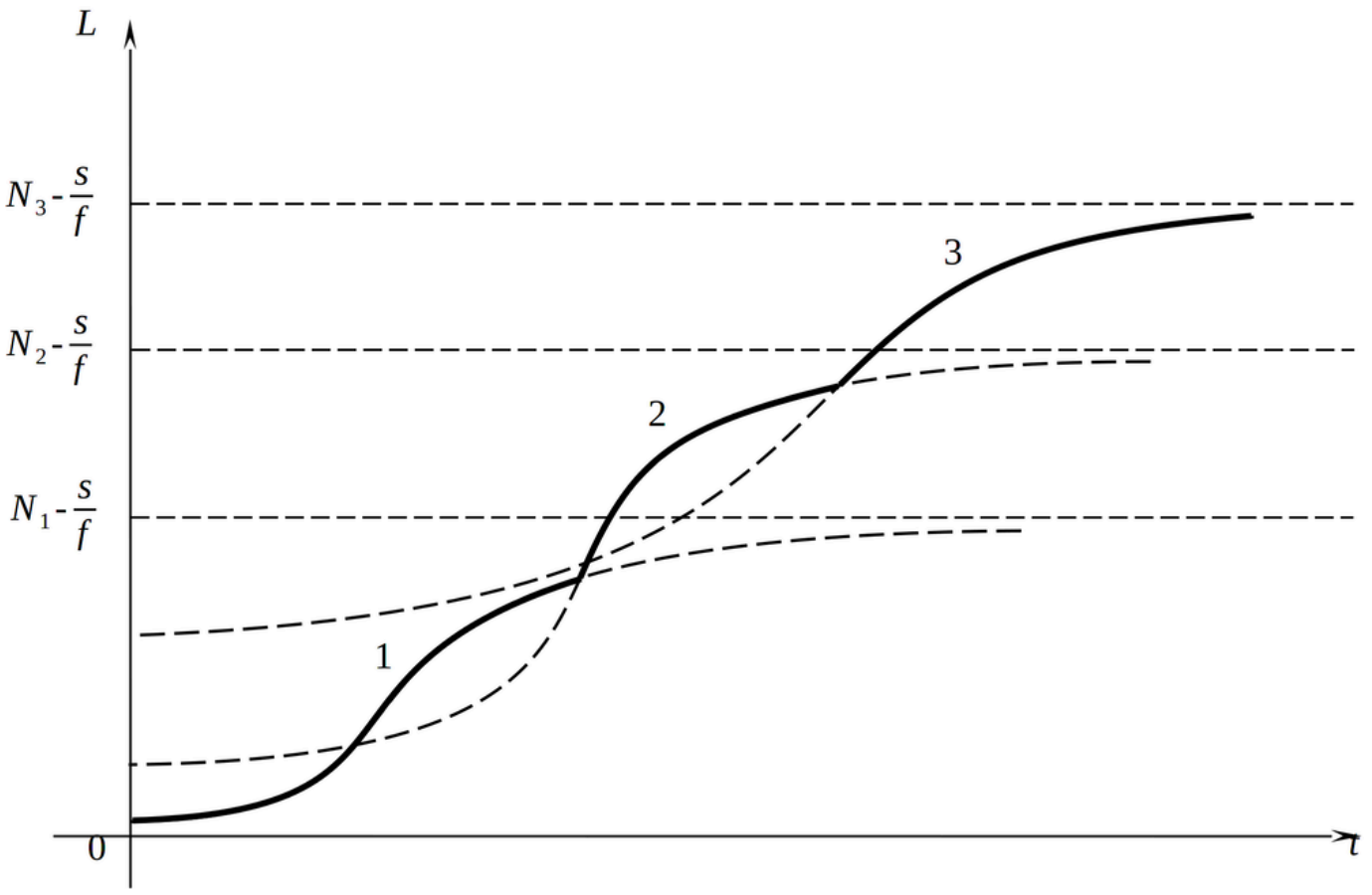


Рисунок 6.21. Демографические переходы и эволюция занятости

Проанализируем логистическое уравнение (6.50) при переменном во времени демографическом потенциале рыночной системы $N(t)$, представив его в виде уравнения Бернулли $\frac{dL}{dt} - (fN(t) - s)L = -fL^2$ и используя традиционную схему решения уравнения данного типа. Преобразуя $\frac{\frac{dL}{dt}}{L^2} - \frac{fN(t) - s}{L} = -f$ и проводя замену переменной $z = \frac{1}{L}$, а значит, $\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{L}\frac{dL}{dt}$, переписываем уравнение (6.50) в следующем виде: $\frac{dz}{dt} + (fN(t) - s)z = f$.

Решим вначале соответствующее однородное уравнение: $\frac{dz}{dt} + (fN(t) - s)z = 0$. Разделяя переменные $\frac{dz}{z} = d\ln|z| = (s - fN(t))\,dt$ и интегрируя $\ln|z| = \int (s - fN(t))\,dt + \ln c = \int_0^t (s - fN(\tau))\,d\tau + \ln c$, получаем общее решение данного однородного уравнения: $z(t) = ce^{\int_0^t (s - fN(\tau))\,d\tau}$.

Далее, применяя метод вариации постоянной $z(t) = c(t)e^{\int_0^t (s - fN(\tau))\,d\tau}$, подставляем полученное решение в исходное неоднородное уравнение:

$$\frac{dc}{dt}e^{\int_0^t (s - fN(\tau))\,d\tau} + c\,(s - fN(t))e^{\int_0^t (s - fN(\tau))\,d\tau} + (fN(t) - s)ce^{\int_0^t (s - fN(\tau))\,d\tau} = f;$$

откуда

$$\frac{dc}{dt}e^{\int_0^t (s - fN(\tau))\,d\tau} = f,$$

или

$$dc = fe^{\int_0^t (fN(\tau) - s)\,d\tau}\,dt = \frac{f}{(fN(t) - s)}\,de^{\int_0^t (fN(\tau) - s)\,d\tau}.$$

Здесь мы воспользовались производной экспоненты: $\frac{de^{\int_0^t (fN(\tau) - s)\,d\tau}}{dt} = (fN(t) - s)e^{\int_0^t (fN(\tau) - s)\,d\tau}$, или $e^{\int_0^t (fN(\tau) - s)\,d\tau}\,dt = \frac{de^{\int_0^t (fN(\tau) - s)\,d\tau}}{fN(t) - s}$.

Интегрируя уравнение относительно варьируемого множителя:

$$c(t) = f\int_0^t e^{\int_0^\tau (fN(\xi) - s)\,d\xi}\,d\tau + c_1 = f\int_0^t \frac{de^{\int_0^\tau (fN(\xi) - s)\,d\xi}}{(fN(\tau) - s)} + c_1 = \frac{fe^{\int_0^t (fN(\tau) - s)\,d\tau}}{fN(t) - s} + f^2\int_0^t \frac{\dot{N}e^{\int_0^\tau (fN(\xi) - s)\,d\xi}}{(fN(\tau) - s)^2}\,d\tau + c_1,$$

получаем общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения как сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$z(t)=\frac{f}{fN(t)\text{-}s}+f^2e^{\int_0^t(s\text{-}fN(\tau))\,d\tau}\int_0^t\frac{\dot{N}e^{\int_0^\tau(fN(\xi)-s)\,d\xi}}{(fN(\tau)\text{-}s)^2}d\tau+c_1e^{\int_0^t(s\text{-}fN(\tau))\,d\tau}.$$

Возвращаемся к исходной переменной

$$L(t)=\frac{1}{\frac{f}{fN(t)\text{-}s}+f^2e^{\int_0^t(s\text{-}fN(\tau))\,d\tau}\int_0^t\frac{\dot{N}e^{\int_0^\tau(fN(\xi)-s)\,d\xi}}{(fN(\tau)\text{-}s)^2}d\tau+c_1e^{\int_0^t(s\text{-}fN(\tau))\,d\tau}}$$

и находим значение постоянной c_1 из начального условия:

$$L(0)=\frac{1}{\frac{f}{fN(t)\text{-}s}+c_1},\text{ т.е. }c_1=\frac{1}{L(0)}\text{-}\frac{f}{fN(t)\text{-}s}.$$

Итак, логистическая кривая имеет вид:

$$L(t)=\frac{(fN(t)\text{-}s)L(0)}{fL(0)+\left(fN(t)\text{-}s\text{-}fL(0)+f^2L(0)(fN(t)\text{-}s)\int_0^t\frac{\dot{N}e^{\int_0^\tau(fN(\xi)-s)\,d\xi}}{(fN(\tau)\text{-}s)^2}d\tau\right)e^{\int_0^t(s\text{-}fN(\tau))\,d\tau}}.\quad(6.52)$$

При переменном во времени демографическом потенциале так же, как и в простейшем случае, когда $N(t)=const$, логистическая кривая описывает режим с насыщением: в пределе, когда время уходит в бесконечность, численность занятых стремится к разности между экономически активным населением и отношением коэффициентов увольнения и трудоустройства:

$$\lim_{t\to\infty}L(t)=N(t)\text{-}\frac{s}{f};$$

при этом предельное значение логистической функции $N\text{-}\frac{s}{f}$ «дрейфует» во времени.

Исследуем траекторию $L(t)$ на монотонность:

$$\dot{L}=\frac{L(0)(fN(t)\text{-}s)^2\left(fN(t)\text{-}s\text{-}fL(0)+f^2L(0)\left((fN(t)\text{-}s)\int_0^t\frac{\dot{N}e^{\int_0^\tau(fN(\xi)-s)\,d\xi}}{(fN(\tau)\text{-}s)^2}d\tau\text{-}\frac{\dot{N}}{(fN(\tau)\text{-}s)^2}\right)\right)e^{\int_0^t(s\text{-}fN(\tau))\,d\tau}}{\left(fL(0)+\left(fN(t)\text{-}s\text{-}fL(0)+f^2L(0)(fN(t)\text{-}s)\int_0^t\frac{\dot{N}e^{\int_0^\tau(fN(\xi)-s)\,d\xi}}{(fN(\tau)\text{-}s)^2}d\tau\right)e^{\int_0^t(s\text{-}fN(\tau))\,d\tau}\right)^2}.$$

Отметим, что

$$\frac{\int_0^t\frac{\dot{N}e^{\int_0^\tau(fN(\xi)-s)\,d\xi}}{(fN(\tau)\text{-}s)^2}d\tau}{t}=\overline{\left(\frac{\dot{N}e^{\int_0^t(fN(\tau)-s)\,d\tau}}{(fN(t)\text{-}s)^2}\right)}$$

представляет собой среднее значение дроби $\frac{\dot{N}e^{\int_0^\tau(fN(\xi)-s)\,d\xi}}{(fN(\tau)\text{-}s)^2}$ на временно́м отрезке $\tau\in[0,t]$, т.е.

$$\int_0^t\frac{\dot{N}e^{\int_0^\tau(fN(\xi)-s)\,d\xi}}{(fN(\tau)\text{-}s)^2}d\tau=t\overline{\left(\frac{\dot{N}e^{\int_0^t(fN(\tau)-s)\,d\tau}}{(fN(t)\text{-}s)^2}\right)},$$

причем, поскольку $fN\text{-}s>0$, постольку $\int_0^t(fN(\tau)\text{-}s)\,d\tau>0$ и $e^{\int_0^t(fN(\tau)-s)\,d\tau}>1$, а значит, $t\overline{\left(\frac{\dot{N}e^{\int_0^t(fN(\tau)-s)\,d\tau}}{(fN(t)\text{-}s)^2}\right)}>\overline{\left(\frac{\dot{N}}{(fN(t)\text{-}s)^2}\right)}$ при $t>1$.

Если $\ddot{N}<0$, то дробь $\frac{\dot{N}}{(fN(t)\text{-}s)^2}$ убывает во времени, следовательно, ее среднее значение за весь временной интервал $[0,t]$ будет больше, чем текущее значение: $\overline{\left(\frac{\dot{N}}{(fN(t)\text{-}s)^2}\right)}>\frac{\dot{N}}{(fN(t)\text{-}s)^2}$. Действительно, если для некоторой функции $x(t)$ $\dot{x}<0$, а значит, $x(t)+t\dot{x}=(\dot{tx})<x(t)$; то $x(t)<\frac{\int_0^t x(\tau)d\tau}{t}$.

Если теперь предположить, что в пределе, когда время уходит в бесконечность, потенциал занятости превышает ее начальное значение $\left(N\text{-}\frac{s}{f}>L(0)\right)$ и, кроме того, $fN(t)\text{-}s>fL(0)>1$, т.е. в первоначальный момент появляется более одного нового работника; то $(fN(t)\text{-}m)\int_0^t\frac{\dot{N}e^{\int_0^\tau(fN(\xi)-s)\,d\xi}}{(fN(\tau)\text{-}s)^2}d\tau>\frac{\dot{N}}{(fN(t)\text{-}s)^2}$, числитель дроби в выражении $\dot{L}$ положителен, и значит, занятость монотонно возрастает со временем $\left(\dot{L}>0\right)$ вплоть до величины $N(t)\text{-}\frac{s}{f}$.

Еще одним примером эволюционных подходов к анализу взаимодействия спроса на рабочую силу и ее предложения может служить система дифференциальных уравнений, анализируемых в математической биологии и описывающих динамику

определенных экосистем:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = \varepsilon_1 U + \mu_1 UV, \\ \frac{dV}{dt} = \varepsilon_2 V + \mu_2 UV. \end{cases} (6.53)$$

В зависимости от знаков коэффициентов ε и ε данная система уравнений, впервые проанализированная А. Лоткой и В. Вольтерра в первой трети XX века [3], может описывать соперничество между видами, количество которых характеризуется переменными *U*(*t*) и *V*(*t*), за источники пищи, а также взаимодействие между хищниками и их жертвами либо паразитов со своими хозяевами. В то же время система (6.53) может быть использована для анализа экономических процессов. Она может служить достаточно простым, но вместе с тем плодотворным инструментом анализа согласования численности вакантных рабочих мест и трудовых ресурсов на отраслевом уровне в динамическом аспекте [4].

С этой точки зрения *U*(*t*) будет обозначать численность потенциальных работников (безработных), *V*(*t*) – число вакансий, ε_1 и ε_2 – коэффициенты автономного прироста, *UV* – совокупные возможности во всем их многообразии потенциальных перемещений безработных на вакантные места, а μ_1 и μ_2 – коэффициенты пропорциональности, показывающие, как существующий потенциал обеспечения работой нуждающихся в ней лиц сказывается на общем количестве безработных и вакансий.

Очевидно, что социально-экономическая система эволюционирует, отталкиваясь от некоторых начальных условий: $U(0) = U_0$, $V(0) = V_0$.

Перепишем систему (6.53) с учетом того, что $d\ln U = \frac{dU}{U}$, $d\ln V = \frac{dV}{V}$:

$$\begin{cases} d\ln U = (\varepsilon_1 + \mu_1 V)\,dt, \\ d\ln V = (\varepsilon_2 + \mu_2 U)\,dt; \end{cases}$$

откуда делением первого равенства на второе получаем

$$\frac{d\ln U}{d\ln V} = \frac{\varepsilon_1 + \mu_1 V}{\varepsilon_2 + \mu_2 U}.$$

Преобразуем данное соотношение следующим образом:

$$\varepsilon_2 d\ln U + \mu_2 dU = \varepsilon_1 d\ln V + \mu_1 dV.$$

Интегрируя это равенство $\varepsilon_2 \int d\ln U + \mu_2 \int dU = \varepsilon_1 \int d\ln V + \mu_1 \int dV + \ln C$, получаем $\varepsilon_2 \ln U + \mu_2 U = \varepsilon_1 \ln V + \mu_1 V + \ln C$. Потенцируя данное соотношение $e^{\varepsilon_2 \ln U + \mu_2 U} = e^{\varepsilon_1 \ln V + \mu_1 V + \ln C}$, приходим к следующему равенству: $U(t)^{\varepsilon_2} e^{\mu_2 U(t)} = CV(t)^{\varepsilon_1} e^{\mu_1 V(t)}$. Константу C можно определить из начального условия:

$$C = \frac{U(0)^{\varepsilon_2}}{V(0)^{\varepsilon_1}} e^{\mu_2 U(0) - \mu_1 V(0)}. (6.54)$$

В итоге получаем следующую взаимозависимость динамики безработицы и вакантных мест:

$$\left(\frac{U(t)}{U(0)}\right)^{\varepsilon_2} e^{\mu_2 (U(t) - U(0))} = \left(\frac{V(t)}{V(0)}\right)^{\varepsilon_1} e^{\mu_1 (V(t) - V(0))}. (6.55)$$

В частности, если положить для простоты $L(0) = H(0) = 1$, то *C*=1, и решение системы (6.55) в замкнутой форме будет выглядеть следующим образом:

$$U(t)^{\varepsilon_2} e^{\mu_2 U(t)} = V(t)^{\varepsilon_1} e^{\mu_1 V(t)}.$$

В отличии от кривой Бевериджа (рис. 6.15) данная модель позволяет описывать целый спектр взаимозависимостей между вакансиями и безработными. Как и в биологии, применительно к социально-экономической проблематике возможны различные сочетания знаков коэффициентов ε_1, ε_2, μ_1, μ_2. Здесь мы рассмотрим наиболее характерные и наиболее типичные ситуации с точки зрения структурных сдвигов в хозяйственной системе [5].

Будем анализировать случай положительных коэффициентов ε_1 и ε_2. Поскольку моделирование взаимосвязи между демографическими и социально-экономическими процессами остается за рамками анализируемой модели, можно, в частности, допустить, что одним из значимых источников увеличения численности безработных являются активные процессы естественного либо механического прироста населения. При этом увеличение численности экономически активного населения, часть которого находится в поиске работы, оказывается пропорциональным имеющемуся его количеству.

Наращивание количества вакантных рабочих мест так же зачастую оказывается пропорциональным существующему их количеству. Это может, в частности, наблюдаться при стабильном поступательном развитии экономики, когда действуют кумулятивные процессы повышения деловой активности.

Рассмотрим вначале наиболее ярко выраженные проявления процессов трансформации хозяйственной среды, когда оба коэффициента μ_1 и μ_2 оказываются положительными. Модель не раскрывает источники увеличения численности безработных. Это может быть как увольнение работников, так и приток в состав экономически активного населения новых трудоспособных жителей за счет как естественного (рождаемости и смертности), так и миграционного движения населения. В частности, в условиях демографического всплеска в регионах, сопредельных с данным, трудодефицитным – и, как следствие, бурного притока мигрантов на местный рынок труда трудоустройство их части может стимулировать бурный приток новых людей в поисках занятости. Отражением такой динамики спроса на рынке труда будет коэффициент $\mu_1 > 0$ в модели (6.53).

Одной из интерпретаций $\mu_2 > 0$ может служить взаимосвязь миграционных и инвестиционных процессов. При наплыве непритязательной к условиям труда и быта, дешевой рабочей силы на местный рынок работодатели оказываются в состоянии снижать затраты на создание новых рабочих мест, которые ранее требовали существенных капитальных вложений. Появляется возможность быстро наращивать число вакансий, открытие которых откладывалось бы при ином состоянии хозяйственной среды, если бы на рынке присутствовали только высококвалифицированные и сравнительно высокооплачиваемые специалисты.

Для анализа динамики решения эволюционной системы требуется рассмотреть вспомогательную зависимость $Y = X^{\varepsilon} e^{\mu X}$. Она образуется произведением экспоненциальной $Y = e^{\mu X}$ и степенной $Y = X^{\varepsilon}$ функций. При положительных значениях

коэффициентов ≣ и ≣ они представляют собой возрастающие зависимости *Y* от *X*. Результирующая функция $Y = X^{\varepsilon}e^{\mu X}$ в данном случае так же будет монотонно возрастающей (рис.6.22).

Для анализа решения эволюционной системы требуется рассмотреть вспомогательную зависимость $Y=X^{\varepsilon}e^{\mu X}$. Она образуется произведением экспоненциальной $Y=e^{\mu X}$ и степенной $Y=X^{\varepsilon}$ функций. При положительных значениях коэффициентов ≣ и ≣ они представляют собой возрастающие зависимости *Y* от *X*. Результирующая функция $Y=X^{\varepsilon}e^{\mu X}$ в данном случае так же будет монотонно возрастающей (рис. 6.22).

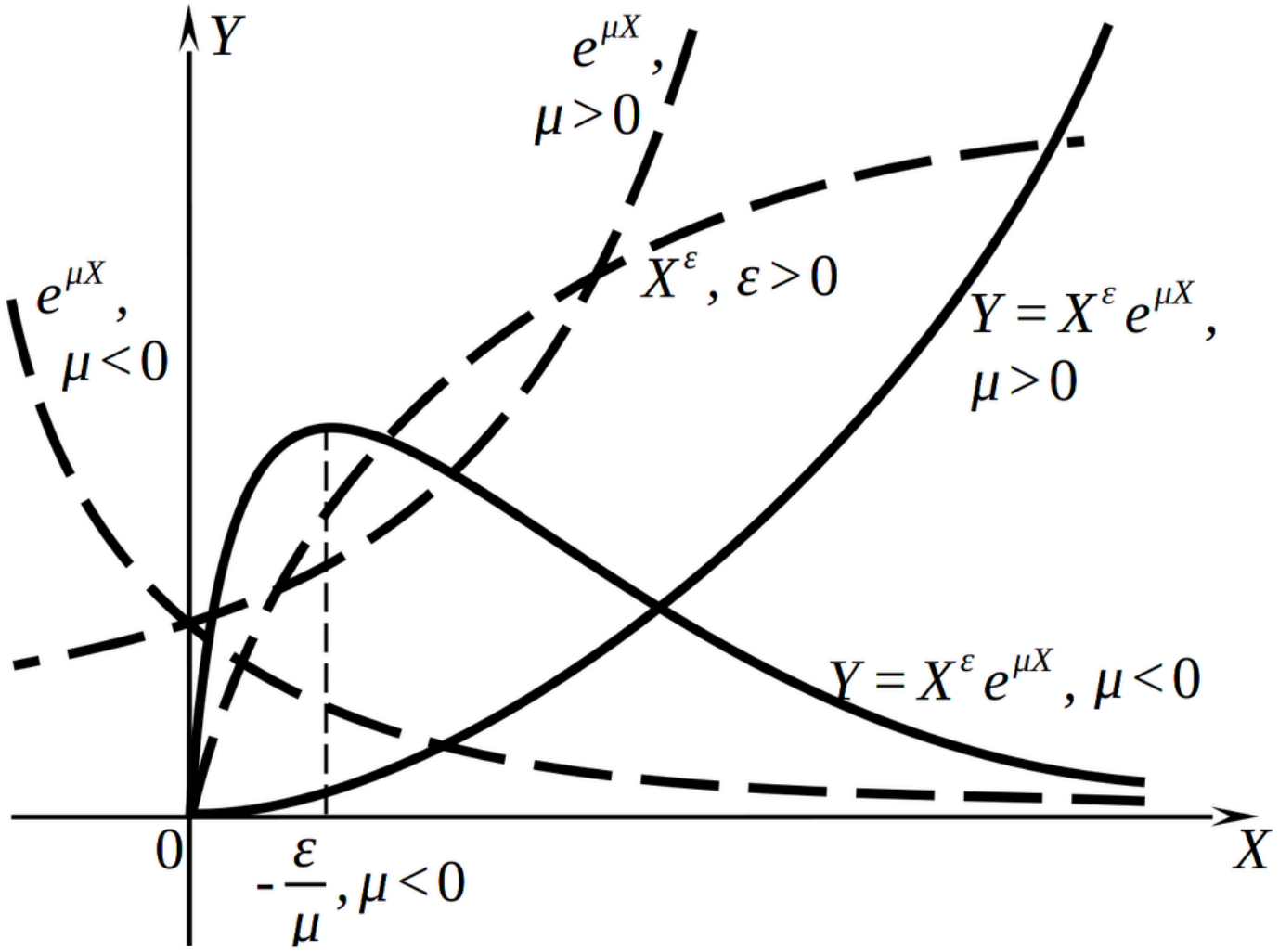


Рисунок 6.22. Построение вспомогательной зависимости $Y=X^{\varepsilon}e^{\mu X}$

Данная зависимость переносится в системы координат "*Y–U*" и "*Z–V*" на рис. 6.23. Полученное выше решение эволюционной системы (6.55) устанавливает линейную зависимость между значениями функций $Y=U^{\varepsilon_2}e^{\mu_2 U}$ и $Z=Ve^{\mu_1 V}$: *Y=CZ* с коэффициентом пропорциональности (6.54). Это соотношение изображено в правом верхнем квадранте рис. 6.23. В итоге можно видеть, что, в противоположность кривой Бевериджа (рис. 6.15), анализируемая эволюционная система (6.53) при положительных коэффициентах ≣ и ≣ генерирует возрастающую зависимость между числом безработных и количеством вакантных рабочих мест как одну из возможных фазовых траекторий при структурных сдвигах характеристик хозяйственной среды.

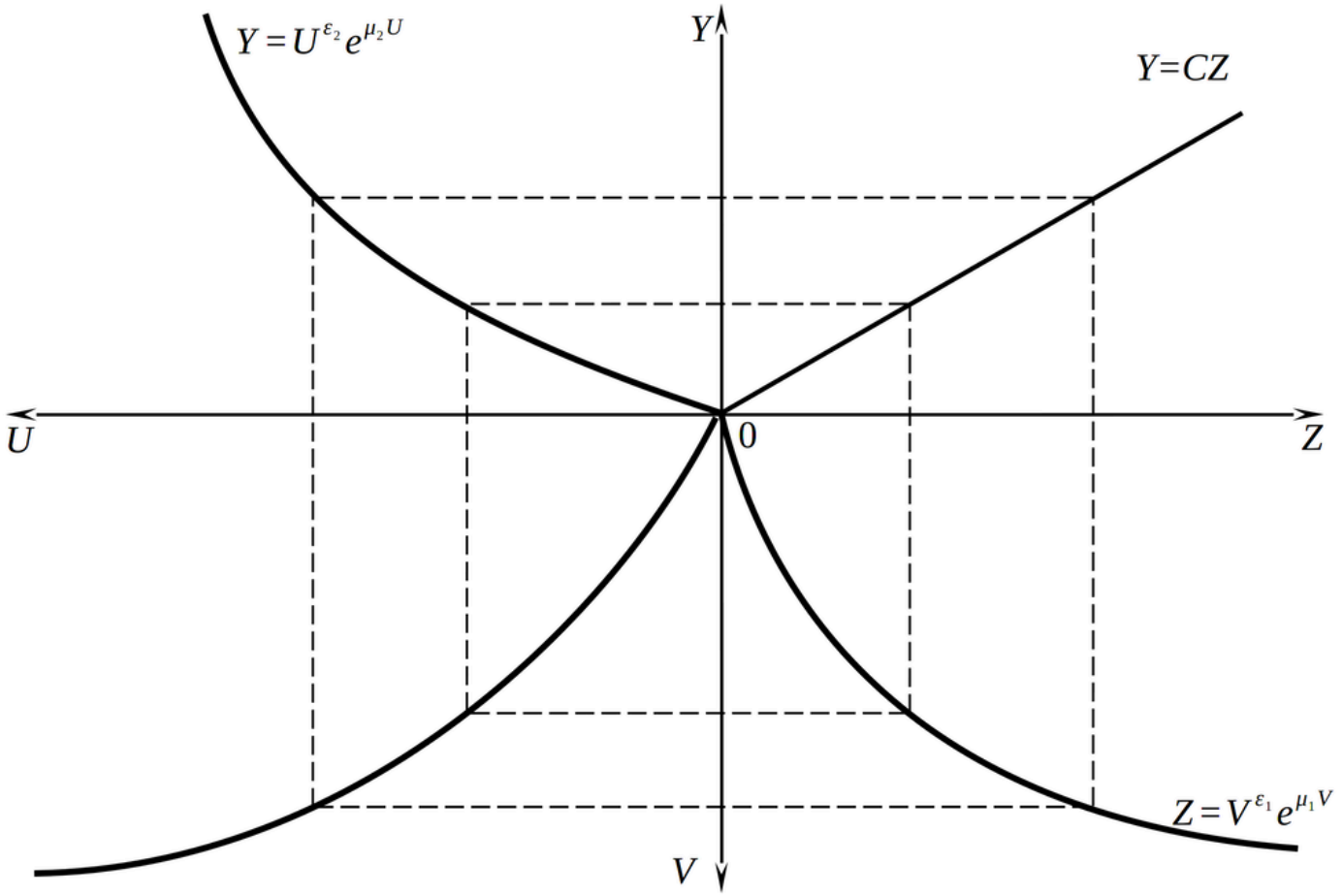


Рисунок 6.23. Динамика вакансий и безработицы в условиях структурной трансформации экономики: $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \mu_1 > 0, \mu_2 > 0$

Рассмотрим теперь более стабильную экономическую ситуацию, когда при $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ коэффициенты μ_1 и μ_2 оказываются отрицательными. Данный случай более типичен для хозяйственной практики, поскольку обращение потенциального работника по поводу трудоустройства на вакантное место при благоприятном стечении обстоятельств должно приводить к ликвидации как данной вакансии, так и статуса временно незанятого работника. Оказывается, что такое, более реалистичное соотношение между параметрами модели (6.53) может приводить к возникновению целого спектра различных по направленности фазовых траекторий численности безработных и вакансий.

Проанализируем вначале вспомогательные зависимости $Y=X^{\varepsilon}$ и $Y=e^{\mu X}$ (рис.6.22). Первая из них остается без изменения, поскольку коэффициенты ≣ так же, как и в предыдущем случае, принимают положительные значения. Вторая же зависимость, ввиду отрицательного показателя степени экспоненты ≣, становится теперь убывающей. Композиция данных функций $Y=X^{\varepsilon}e^{\mu X}$ является немонотонной. При увеличении независимой переменной *X*>0 значение функции вначале возрастает, ведь при $\mu < 0$, $Y' = X^{\varepsilon}e^{\mu X}\left(\frac{\varepsilon}{X}+\mu\right) > 0$ на интервале $0 < X < -\frac{\varepsilon}{X}$; а затем, при $X > -\frac{\varepsilon}{X}$, убывает $\left(Y' < 0\right)$. Значение $X=-\frac{\varepsilon}{X}$ дает максимум анализируемого произведения функций.

Потенциальные соотношения между количеством незанятого населения и вакантных рабочих мест при $\mu < 0$ приведены на рис. 6.24. В отличии от стационарной хозяйственной системы, в которой действуют закономерности, отраженные кривой Бевериджа (рис.6.15), в условиях эволюции хозяйственной системы при различных значениях константы (6.54) оказываются возможными и убывающая, и возрастающая (III), а также немонотонная (I) и даже неоднозначная, нефункциональная (II) зависимости между анализируемыми социально-экономическими показателями.

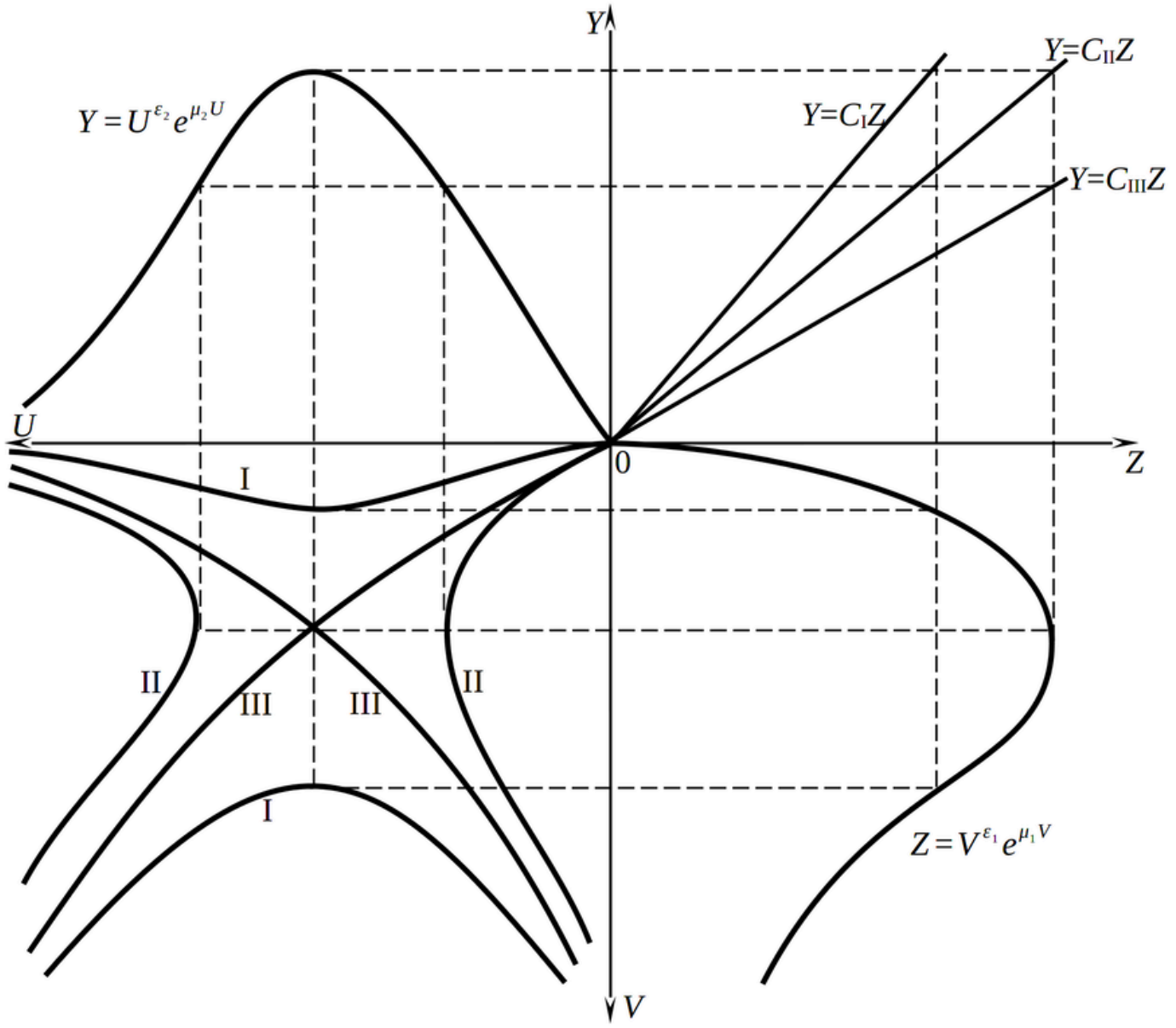


Рисунок 6.24. Обобщенная взаимозависимость числа вакансий и безработных в динамичной хозяйственной среде

Существуют различные проявления взаимосвязи между количеством вакансий и размерами занятости в масштабах конкретного рынка:

$$L=\alpha V,$$

где α – постоянный коэффициент.

В условиях стационарной экономики эта зависимость будет убывающей: с увеличением числа трудоустроенных отрасли количество вакантных рабочих мест будет сокращаться $(\alpha<0)$. В ситуации экономического роста данная зависимость, наоборот, будет возрастающей: объем занятости и число вакансий в отрасли могут увеличиваться параллельно $(\alpha>0)$. Аналогичное сонаправленное изменение этих показателей $(\alpha>0)$ может наблюдаться и в кризисных условиях, когда при сокращении численности работников количество вакансии также будет снижаться.

Поэтому вольтерровская система (6.53) может быть переформулирована в терминах зависимости между объемами занятости и безработицы в контексте отраслевого рынка труда:

$$\begin{cases}\frac{dU}{dt}=\varepsilon_1 U+\nu_1 UL,\\ \frac{dL}{dt}=\delta_2 L+\nu_2 UL;\end{cases}(6.56)$$

где $\nu_1=\alpha\mu_1$, $\nu_2=\alpha\mu_2$,$\delta_2=\alpha\varepsilon_2$.

Очевидной отличительной особенностью данной системы, характеризующей динамику взаимодействия спроса и предложения на рынке труда, от элементарной системы (6.46)-(6.47) является наличие мультипликативного взаимодействия между занятостью и безработицей.

Поскольку число безработных и занятых оказываются связанными балансовым соотношением (6.45), постольку динамическая система (6.56) приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = \varepsilon_1 U + \nu_1 U\,(N\text{-}U), \\ \frac{dL}{dt} = \delta_2 L + \nu_2 L\,(N\text{-}L), \\ U + L = N. \end{cases}$$

Очевидно, что при этом динамика каждого из показателей, характеризующих рынок труда, будет описываться логистической кривой (6.52). Таким образом, вольтерровская система (6.53) является обобщением логистического уравнения (6.50) с учетом системно-динамического взаимодействия между структурообразующими элементами данной хозяйственной системы.

---

1. Вереникин А.О., Волошин Д.И. Теория структурных изменений в экономике. – М.: ТЕИС, 2009. ↩
2. Логистическое уравнение было впервые изучено Ферхюльстом в работе: Verhulst P.F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement // Corresp. math. et phys., vol.10, 1838, p.113-121. Цит.по: Вольтера В. Математическая теория борьбы за существование. – Москва, Ижевск: Ин-т компьют. исслед-ний, 2004, с.245-246. ↩
3. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. ↩
4. Коровкин А.Г., Наумов А.В. Подход к прогнозированию рациональных структур занятости населения региона // Развитие комплекса моделей рационального планирования и методов их согласования / Отв. ред. Фаерман Е.Ю. – М.: ЦЭМИ АН СССР, 1986; Коровкин А.Г. Динамика занятости и рынка труда: вопросы макроэкономического анализа и прогнозирования. – М.: МАКС Пресс, 2001. ↩
5. Вереникин А.О., Сидоренко В.Н. Возможности использования различных методов прогнозирования потребностей экономики в кадрах с высшим образованием // Альтернативы экономической политики в условиях замедления экономического роста / Под ред. А.А. Аузана, В.В. Герасименко. М.: Экономический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2015. – С.761-768. ↩

6.5. Равновесие монополиста

Чистая монополия – структура рынка, на котором предложение представлено единственным продавцом товара (услуги), который не имеет близких заменителей, а спрос – множеством покупателей, принимающих решение независимо друг от друга и не способных оказать существенного влияния на формирование рыночной цены. Отличительной особенностью этой рыночной структуры являются высокие барьеры входа на рынок, в частности, законодательные или административные – такие, например, как патенты; либо экономические – в том числе, существенная экономия на масштабе производства, а также барьеры выхода предприятий из отрасли, например, значительные капитальные вложения. Монопольная власть тем больше, чем выше входные барьеры в отрасль и чем меньше заменителей у товара. Так как монополист является единственным продавцом на данном рынке, он полностью контролирует объем предложения и рыночную цену.

Традиционно предполагается, что фирма – абсолютная монополия руководствуется в своем поведении принципом максимизации прибыли:

$$\frac{dPR}{dQ}=\frac{dTR}{dQ}-\frac{dTC}{dQ}=MR-MC=0.$$

Таким образом, необходимым условием максимума прибыли монополии является равенство предельного дохода и предельных издержек, которое с учетом выражения предельной выручки через эластичность рыночного спроса (1.56) можно записать так:

$$MR=p\left(1+\frac{1}{E_p^d}\right)=MC. \quad (6.57)$$

Монополия всегда выбирает объем выпуска, который соответствует эластичному (по цене) участку функции спроса, ведь именно этот сегмент соответствует положительной величине предельного дохода, а монополист никогда не станет увеличивать объем производства, если это не только повлечет за собой дополнительные издержки, но и приведет к сокращению выручки.

Графически процедура максимизации прибыли предполагает поиск такого объема производимой продукции, при котором точка на графике выручки будет расположена как можно более высоко над соответствующей точкой на графике издержек. Необходимое условие максимума прибыли утверждает, что при данном объеме производства касательная к графику прибыли будет горизонтальной, а угловые коэффициенты касательных к графикам издержек и выручки будут равны (см. верхнюю часть рис. 6.25). Это соответствует пересечению графиков предельных издержек (MC) и выручки (MR) в нижней части рис. 6.25.

Условию равенства предельных величин дохода и издержек (6.57), выполнение которого необходимо для достижения максимума прибыли, могут соответствовать объемы производства продукции, как обеспечивающие фирме наибольшую прибыль (Q^* на рис. 6.25), так и приносящие максимальные убытки (Q_1 на рис. 6.25).

Достаточным условием максимума функции прибыли в найденной из необходимого условия экстремальной точке является отрицательность второй производной данной функции:

$$\frac{d^2TR}{dQ^2}-\frac{d^2TC}{dQ^2}<0, \text{или} \frac{d^2TR}{dQ^2}<\frac{d^2TC}{dQ^2}, m.e.\ MR'<MC'.$$

Следовательно, при объеме производства, обеспечивающем максимум прибыли, угловой коэффициент касательной к графику предельных издержек должен быть не меньше тангенса угла наклона касательной к графику предельной выручки. При объеме производства, соответствующем пересечению убывающего графика предельного дохода с возрастающим участком линии предельных издержек, достаточное условие максимума прибыли гарантированно выполняется.

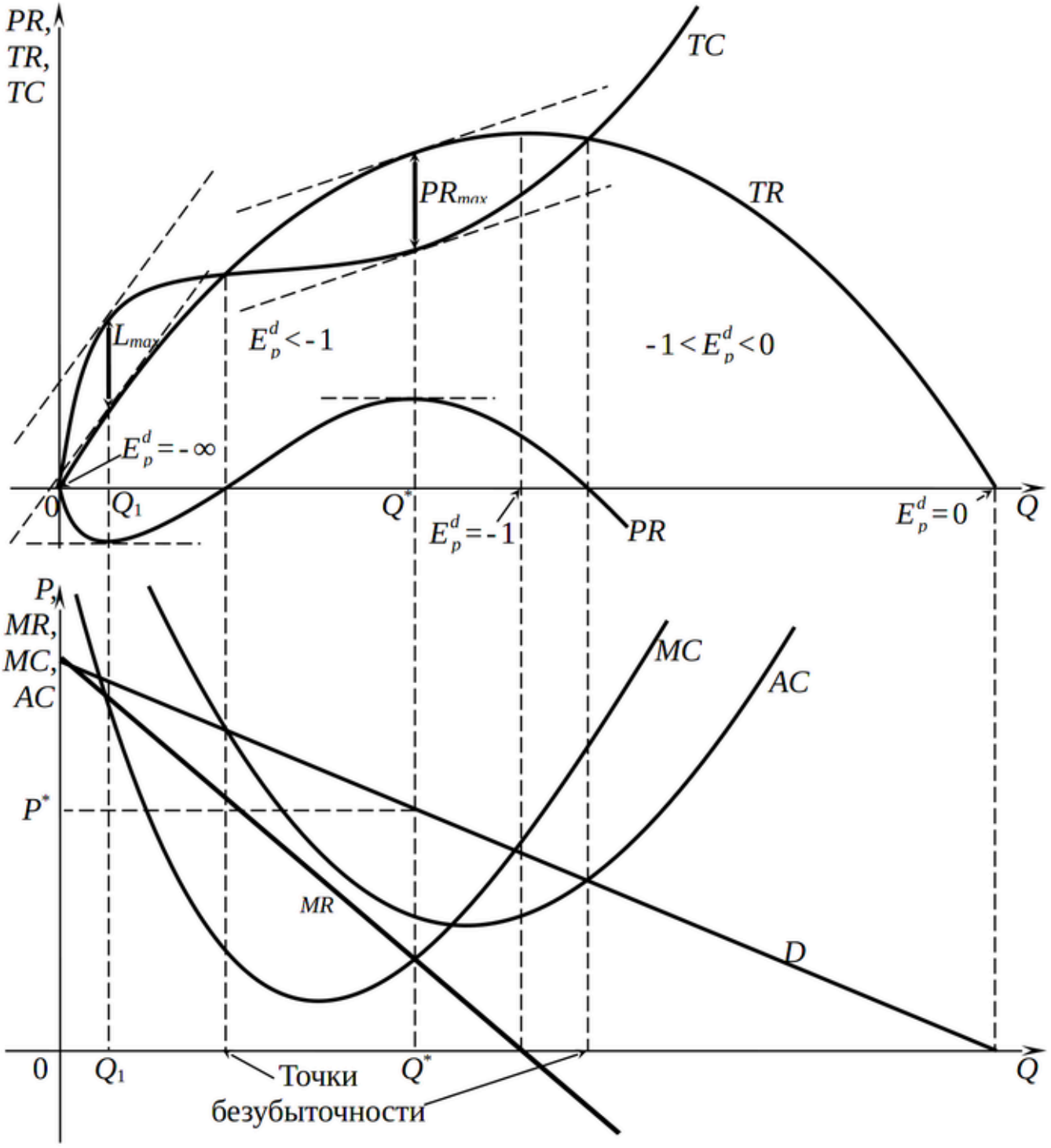


Рисунок 6.25. Максимизация прибыли монополией

Достаточное условие максимума прибыли $(PR_{\max})$ здесь выполняется в точке Q^*, где $MC' > 0$, а $MR' < 0$. В точке Q_1, на участке убывающих предельных издержек, наблюдается не максимум прибыли, а ее минимум, то есть максимум убытков $(L_{\max})$. На рис. 6.25 функция спроса для упрощения предполагается линейной. Если функция спроса имеет вид $P = a - bQ$, то функция общей выручки оказывается квадратичной параболой: $TR = P \bullet Q = aQ - bQ^2$, а предельный доход будет линейной функцией с угловым коэффициентом по модулю в два раза большим, чем у функции спроса: $MR = TR' = a - 2bQ$.

Один и тот же объем производства монополии может соответствовать различным уровням рыночной цены, если рыночный спрос претерпевает изменения. Это означает отсутствие кривой предложения как функциональной зависимости цены продукта от объема его производства в условиях монополии (левая часть рис. 6.26). И наоборот, один и тот же уровень рыночной цены может соответствовать различным объемам производства монополии, если рыночный спрос претерпевает изменения. Это означает отсутствие кривой предложения как функциональной зависимости объема производства от цены продукта в условиях монополии (правая часть рис. 6.26).

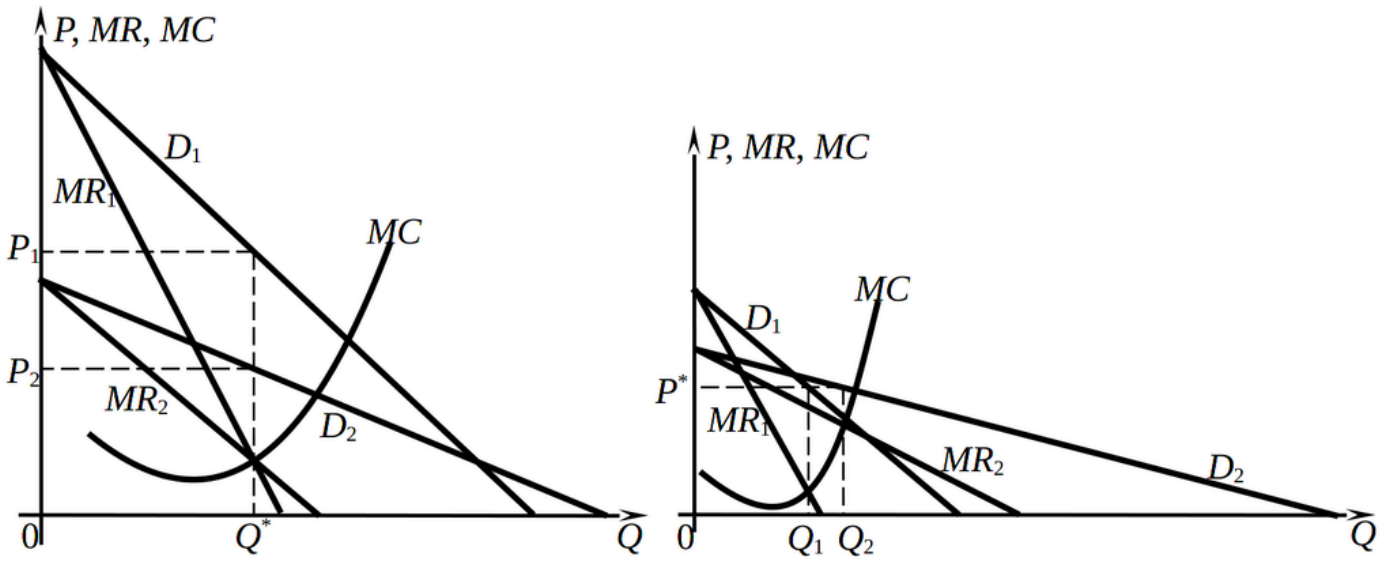


Рисунок 6.26. Отсутствие у монополии функции предложения

Хотя у монополии отсутствует функция предложения продукции как зависимость между объемом выпуска и рыночной ценой, можно показать, что, если функция спроса является неизменной, то при каждом заданном объеме производства устанавливаемая монополистом оптимальная цена на продукт является неубывающей функцией предельных издержек MC. Для обоснования этого положения будем опираться на теорию выявленной максимизации прибыли. Концепция выявленной максимизации прибыли постулируется следующим образом: фирма в отчетном периоде может пойти на сокращение объема производства при неизменных ценах на ресурсы лишь с целью такого сокращения издержек, которое позволит ей увеличить прибыль. Другими словами, если в отчетном периоде предприятие в соответствии с технологией производства может выпустить базисный объем продукции, но фирма в этом периоде производит другой, отчетный объем производства, причем цены на его факторы не меняются, то отчетное количество продукции приносит предприятию не меньшую прибыль, чем базисное.

Отметим, что если фирма обладает экономической властью, т.е. способна влиять на рыночные цены, в частности, выпускаемой продукции, то принцип выявленной максимизации прибыли усложняется. Он должен учитывать влияние сокращения объема производства предприятия в отчетном по сравнению с базисным периоде не только на снижение издержек, но и на рост рыночной цены на продукцию фирмы: если в отчетном периоде предприятие в соответствии с технологией производства и условиями рыночного спроса может выпустить базисный объем продукции и назначить на нее базисную цену, но фирма в этом периоде производит другой, отчетный объем производства по новой цене, то отчетные количество продукции и цена приносят предприятию не меньшую прибыль, чем базисные.

Проанализируем теперь зависимость ценообразования от технологии производства в условиях конкуренции и рыночной власти на рынках готовой продукции. Для того, чтобы показать неубывающую зависимость монополистической цены от предельных издержек MC, введем две альтернативные дифференцируемые функции долгосрочных затрат TC_1 и TC_2 и предположим, что $MC_2(q) \geqslant MC_1(q)$ для всех $q > 0$. Допустим далее, что монополист, обладая функцией издержек TC_1, назначит цену p_1 и выберет количество продукции q_1, а при функции затрат TC_2 цена будет p_2, а объем выпуска q_2. Применяем принцип выявленной максимизации прибыли:

$$p_1 q_1 - TC_1(q_1) \geqslant p_2 q_2 - TC_1(q_2), (6.58)$$

так как при функции издержек TC_1 назначение цены на уровне p_1 и выбор объема производства q_1, дадут не меньшую прибыль, чем любое другое сочетание цены и количества, в частности p_2 и q_2.

Аналогично при функции издержек TC_2 в силу аксиомы выявленной максимизации прибыли имеем:

$$p_2 q_2 - TC_2(q_2) \geqslant p_1 q_1 - TC_2(q_1). (6.59)$$

Сложим неравенства (6.58) и (6.59):

$$[TC_2(q_1) - TC_2(q_2)] - [TC_1(q_1) - TC_1(q_2)] \geqslant 0. (6.60)$$

Неравенство (6.60) можно переписать в интегральной форме [1]:

$$\int_{q_2}^{q_1} (MC_2(q) - MC_1(q))\, dq \geqslant 0. (6.61)$$

Вспомним, что предполагалось $MC_2(q) \geqslant MC_1(q)$. Так как подынтегральная функция неотрицательна, интеграл (6.61) как ориентированная функция может быть неотрицательным, только если верхний предел интегрирования не меньше нижнего: $q_1 \geqslant q_2$.

Учитывая, что при заданной функции спроса, за исключением вырожденного случая товара Гиффена, объем спроса является невозрастающей функцией цены, можно сделать вывод, что неизменному или более высокому уровню предельных издержек соответствует по крайней мере не меньшее значение цены производимой продукции:

$$p_2 \geqslant p_1. (6.62)$$

Таким образом, назначаемая монополией оптимальная цена является неубывающей функцией предельных затрат $\left(P_м = f(MC)\right)$:

$$если MC_2 \geqslant MC_1, то P_м^2 = f(MC_2) \geqslant P_м^1 = f(MC_1). (6.63)$$

К конкурентной фирме применимы с некоторыми изменениями рассуждения, проведенные выше в случае монопольной власти на рынке готовой продукции. Прежде всего, в данном случае необходимо использовать первую, упрощенную формулировку самого принципа выявленной максимизации прибыли, в которой цена для предприятия является экзогенным параметром. Далее введем, как и прежде, две альтернативные дифференцируемые функции долгосрочных затрат TC_{1i} и TC_{2i}, предполагая $MC_{2i}(q_i) \geqslant MC_{1i}(q_i)$ для всех $q_i > 0$, и допустим, что фирма, обладая функцией издержек TC_{1i}, выберет количество продукции q_{1i}, а при функции затрат TC_{2i} объем выпуска составит q_{2i}. Применяем принцип выявленной максимизации прибыли:

$$pq_{1i} - TC_{1i}(q_{1i}) \geqslant pq_{2i} - TC_{1i}(q_{2i}), \quad (6.64)$$

$$pq_{2i} - TC_{2i}(q_{2i}) \geqslant pq_{1i} - TC_{2i}(q_{1i}). \quad (6.65)$$

Складывая (6.64) и (6.65), получаем, как и в случае монополии, соотношения (6.60) – (6.61). Поскольку эти неравенства справедливы для каждой из фирм на конкурентном рынке, соотношение между объемами производства можно агрегировать (6.1): $Q_1 \geqslant Q_2$.

Затем можно, как и в случае монополии, перейти от соотношения между общеотраслевым количеством выпускаемой продукции к ценовому неравенству (6.62). Итак, в конкурентной ситуации с ростом предельных издержек фирм, работающих на данном рынке, происходит сдвиг графика функции отраслевого предложения влево-вверх, что приводит к росту уровня цены (рис. 6.27). Поэтому рыночная цена в условиях совершенной конкуренции при прочих равных условиях так же является неубывающей функцией предельных издержек $\left(P_к = \varphi(MC)\right)$:

$$если MC_2 \geqslant MC_1, то P_к^2 = \varphi(MC_2) \geqslant P_к^1 = \varphi(MC_1). \quad (6.66)$$

Если усилить принцип выявленной максимизации прибыли, записав неравенства (6.58) – (6.59) и (6.64) – (6.65) как строгие, то мы получим возрастающие функции, соответствующие (6.63) и (6.66) $\left(P_м = f(MC)\right.$ и $\left.P_к = \varphi(MC)\right)$:

$$если MC_2 > MC_1, то P_м^2 = f(MC_2) > P_м^1 = f(MC_1). \quad (6.67)$$

$$если MC_2 > MC_1, то P_к^2 = \varphi(MC_2) > P_к^1 = \varphi(MC_1). \quad (6.68)$$

Поскольку полученная нами функциональная зависимость конкурентной цены от предельных издержек – всюду возрастающая, для нее существует обратная функция. Если перейти к этой обратной функции:

$$MC = \varphi^{-1}(P_к), \quad (6.69)$$

то можно утверждать, что она также возрастающая. Рост рыночной цены соответствует при прочих равных условиях более высокому уровню предельных издержек типичной фирмы:

если $P_к^2 \geqslant P_к^1$, то $MC_2 = \varphi^{-1}\left(P_к^2\right) \geqslant MC_1 = \varphi^{-1}\left(P_к^1\right)$.

Составим сложную функцию, характеризующую соответствие между конкурентной и монопольной ценами. Это можно сделать, подставив полученную обратную функцию предельных издержек от конкурентной цены (6.69) в качестве аргумента в функцию цены монополии (6.67): $P_м = f(MC) = f\left(\varphi^{-1}\left(P_к\right)\right)$. Из проведенных преобразований следует вывод, что монопольная цена как композиция возрастающего и неубывающего отображений – это нестрого возрастающая, или неубывающая, функция от цены конкурентной.

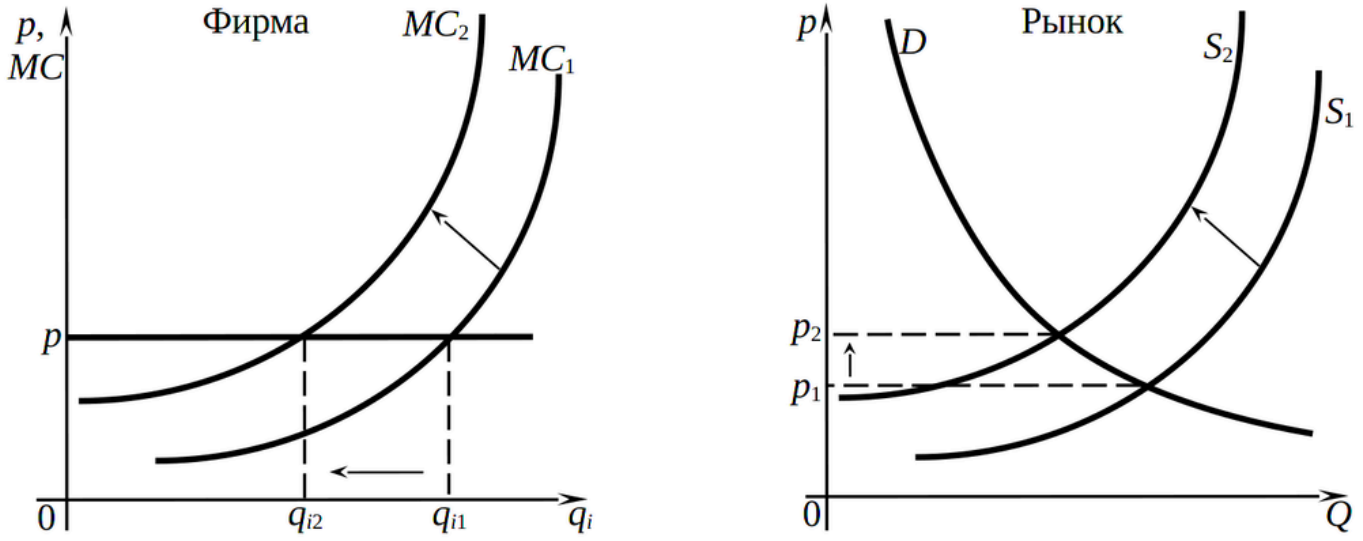


Рисунок 6.27. Конкурентная цена продукта – возрастающая функция предельных издержек его производства

Таким образом, на основе проведенного анализа можно сделать вывод, что одним из важнейших факторов, лежащих как в основе монопольной цены, так и цены конкурентной, является динамика факторов производственно-технологического характера, формирующих уровень издержек производства и их предельные значения. Этот факт закладывает основы для сонаправленности динамики цен, устанавливаемых в рамках монополистической рыночной структуры, их движению при конкурентном ценообразовании.

Рыночная власть, понимаемая в смысле способности фирмы завышать цену продукции (P_m) по сравнению с ее конкурентным уровнем (P_c), соответствующем значению предельных издержек, измеряется с помощью индекса Лернера [2], который, с учетом

условия максимизации прибыли (6.57), оказывается равным обратной величине эластичности рыночного спроса, взятой со знаком минус:

$$L=\frac{p\text{-}MC}{p}=\frac{p\text{-}MR}{p}=\frac{p\text{-}p\left(1+\frac{1}{E_p^d}\right)}{p}=\text{-}\frac{1}{E_p^d}. \quad (6.70)$$

Таким образом, эластичность рыночного спроса по цене является основным фактором, ограничивающим рыночную власть монополии. Чем ниже эластичность спроса, т.е. чем слабее сокращается объем производства и продаж (в натуральном выражении) в ответ на монопольное завышение цен, тем выше рыночная власть фирмы.

Рассмотрим задачу максимизации прибыли монополией в одноэтапной постановке, в контексте определения оптимальной комбинации факторов производства:

$$\max_{K,L} PR\,(K,L)=\max_{K,L}\left(p(Q(K,L))\bullet Q(K,L)\text{-}wL\text{-}rK\right),$$

где $Q=Q\,(K,L)$ – производственная функция фирмы, а $p(\bullet)$ – рыночный спрос на ее продукцию.

Предположим вначале, что данная монополия является "ценополучателем" на рынке труда: $\frac{dw}{dL}=0$, т.е. ставка заработной платы $w=MC_L=AC_L$ воспринимается в качестве параметра, заданного равновесием на конкурентном рынке труда.

В данном случае возникает система необходимых условий максимума прибыли:

$$\begin{cases}\frac{\partial PR}{\partial L}=\frac{\partial TR}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial L}\text{-}w=MR\bullet MP_L\text{-}w=0,\\ \frac{\partial PR}{\partial K}=\frac{\partial TR}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial K}\text{-}r=MR\bullet MP_K\text{-}r=0\end{cases}:$$

или

$$\begin{cases}MRP_L=MR\bullet MP_L=w,\\ MRP_K=MR\bullet MP_K=r.\end{cases}$$

Таким образом, предельная доходность каждого фактора производства должна быть равна его цене. Объединенное необходимое условие максимума прибыли будет представлять собой усложнение системы равенств (2.120) с учетом несовершенной конкуренции на рынке продукции:

$$\frac{w}{MP_L(K,L)}=\frac{r}{MP_K(K,L)}=MR\,(Q\,(K,L)),$$

то есть отношение цены фактора производства к его предельному продукту должно быть одинаковым для всех ресурсов и равным предельному доходу.

Чистая монополия может быть как "естественной", так и искусственно рожденной структурами, обладающими значительной экономической властью. Естественная монополия – это монополистическая структура рынка, в которой барьеры входа в отрасль создаются значительной экономией на масштабе производства относительно емкости рынка, что выражается в существовании высокого минимального эффективного размера предприятия и относительно узкого рынка.

При возрастающей отдаче от масштаба производства предельные издержки оказываются убывающей функцией от его объема. В данном случае наблюдается ситуация "естественной" монополии. Для нее максимум прибыли в соответствии с достаточным условием будет существовать, лишь если в точке пересечения графиков предельных издержек и выручки угловой коэффициент касательной к первому из них будет не меньше тангенса угла наклона касательной ко второму. Такой ситуации соответствует точка Q^* на рис. 6.28. В противоположной ситуации, когда в точке пересечения графиков *MR* и *MC* угловой коэффициент первого больше, чем тангенс угла наклона касательной ко второму, будет наблюдаться не максимум, а минимум прибыли. Такой ситуации соответствует точка Q_1 на рис. 6.28.

В качестве примера рассмотрим естественную монополию с производственной функцией $Q=K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}$, максимизирующую прибыль в условиях совершенной конкуренции на рынках ресурсов, где установились цены капитала $p_K=\frac{1}{9}$ и труда $p_L=\frac{1}{3}$. Допустим, что функция спроса на продукцию фирмы имеет вид: $p=\frac{1}{\sqrt{Q}}$. Определим оптимальные объемы затрат факторов производства и выпускаемой продукции.

Прежде всего рассчитаем предельные продукты – соответственно, капитала $MP_K=\frac{2}{3}K^{\text{-}\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$ и труда $MP_L=\frac{2}{3}K^{\frac{2}{3}}L^{\text{-}\frac{1}{3}}$. Следовательно, используя выражение предельной нормы технологического замещения капитала трудом как отношение предельных продуктов факторов, получаем эквимаржинальное условие:

$$MRTS_{KL}=\frac{MP_L}{MP_K}=\frac{\frac{2}{3}K^{\frac{2}{3}}L^{\text{-}\frac{1}{3}}}{\frac{2}{3}K^{\text{-}\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}}=\frac{K}{L}=\frac{p_L}{p_K},$$

которое задает соотношения между затратами факторов производства, минимизирующими его издержки: $K=\frac{p_L}{p_K}L$, или $L=\frac{p_K}{p_L}K$.

Подставляя данные соотношения в производственную функцию, приходим к зависимостям между количеством выпускаемой продукции и объемами затрат факторов:

$$Q=K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}=K^{\frac{2}{3}}\left(\frac{p_K}{p_L}K\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{p_K}{p_L}\right)^{\frac{2}{3}}K^{\frac{4}{3}},\text{ а значит, }K=\sqrt{\frac{p_L}{p_K}}Q^{\frac{3}{4}};$$

$$Q=K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{p_L}{p_K}L\right)^{\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{p_L}{p_K}\right)^{\frac{2}{3}}L^{\frac{4}{3}},\text{ следовательно, }L=\sqrt{\frac{p_K}{p_L}}Q^{\frac{3}{4}}.$$

Выведем функцию общих издержек производства. Для этого подставим полученные выше зависимости между объемом производства и его факторами в выражение себестоимости продукции:

$$TC=p_K K+p_L L=p_K\sqrt{\frac{p_L}{p_K}}Q^{\frac{3}{4}}+p_L\sqrt{\frac{p_K}{p_L}}Q^{\frac{3}{4}}=2\sqrt{p_K p_L}Q^{\frac{3}{4}}.$$

Взяв производную общих издержек по объему выпускаемой продукции, получаем функцию предельных издержек производства: $MC=\frac{dTC}{dQ}=\frac{3\sqrt{p_K p_L}}{2\sqrt[4]{Q}}$.

Рассчитаем характеристики деятельности предприятия, максимизирующего прибыль. Необходимое условие ее максимума – это равенство предельного дохода предельным издержкам: $MC=\frac{3\sqrt{p_K p_L}}{2\sqrt[4]{Q}}=MR=\frac{1}{2\sqrt{Q}}$. Оно позволяет определить оптимальный объем производства: $Q^*=\frac{1}{81p_K^2 p_L^2}=9$. Подставляя данную величину в зависимостях между количеством выпускаемой продукции и затратами факторов производства, получаем их оптимальные значения: $K^*=9$, $L^*=3$. Проверка достаточного условия подтверждает, что найденное решение, действительно, дает максимум прибыли. В этом легко убедиться, взглянув на выражение общей выручки фирмы: $TR=pQ=\frac{1}{\sqrt{Q}}Q=\sqrt{Q}=\sqrt{K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}}=K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{3}}$, которая, обладая убывающей отдачей от масштаба хозяйственной деятельности, будет строго вогнутой, а значит, с учетом того, что в условиях совершенной конкуренции на рынках факторов производства издержки производства будут представлять собой линейную зависимость от объемов капитала и труда, строго вогнутой будет и функция прибыли, что будет гарантировать наличие ее глобального максимума в точке, соответствующей необходимым условиям экстремума.

Целью государственного регулирования естественной монополии является повышение ее объема производства до уровня наиболее приближенного к выпуску совершенно конкурентной фирмы в условиях долгосрочного равновесия, соответствующего минимальному значению функции долгосрочных средних издержек (*AC*). Существует дилемма регулирования естественной монополии – это так называемые механизмы “справедливого” и “эффективного” ценообразования. “Справедливая” цена устанавливается на уровне средних издержек, соответствующих данному объему производства. В этом случае фирма выберет выпуск Q_f и установит цену P_f. При данной схеме регулирования государство не несет никаких затрат, поскольку монополия работает на границы самоокупаемости, когда ее выручка полностью покрывает издержки. Альтернативой является установление “эффективной” цены на уровне предельных издержек. В таком случае монополия будет производить Q_e единиц продукции, но будет нести убытки, поскольку регулируемая цена на ее продукт P_e будет ниже средних издержек *AC*. Этот тип регулирования цен потребует субсидирования монополии со стороны государства для покрытия убытков фирмы, равных площади AE_eP_eB (рис. 6.28).

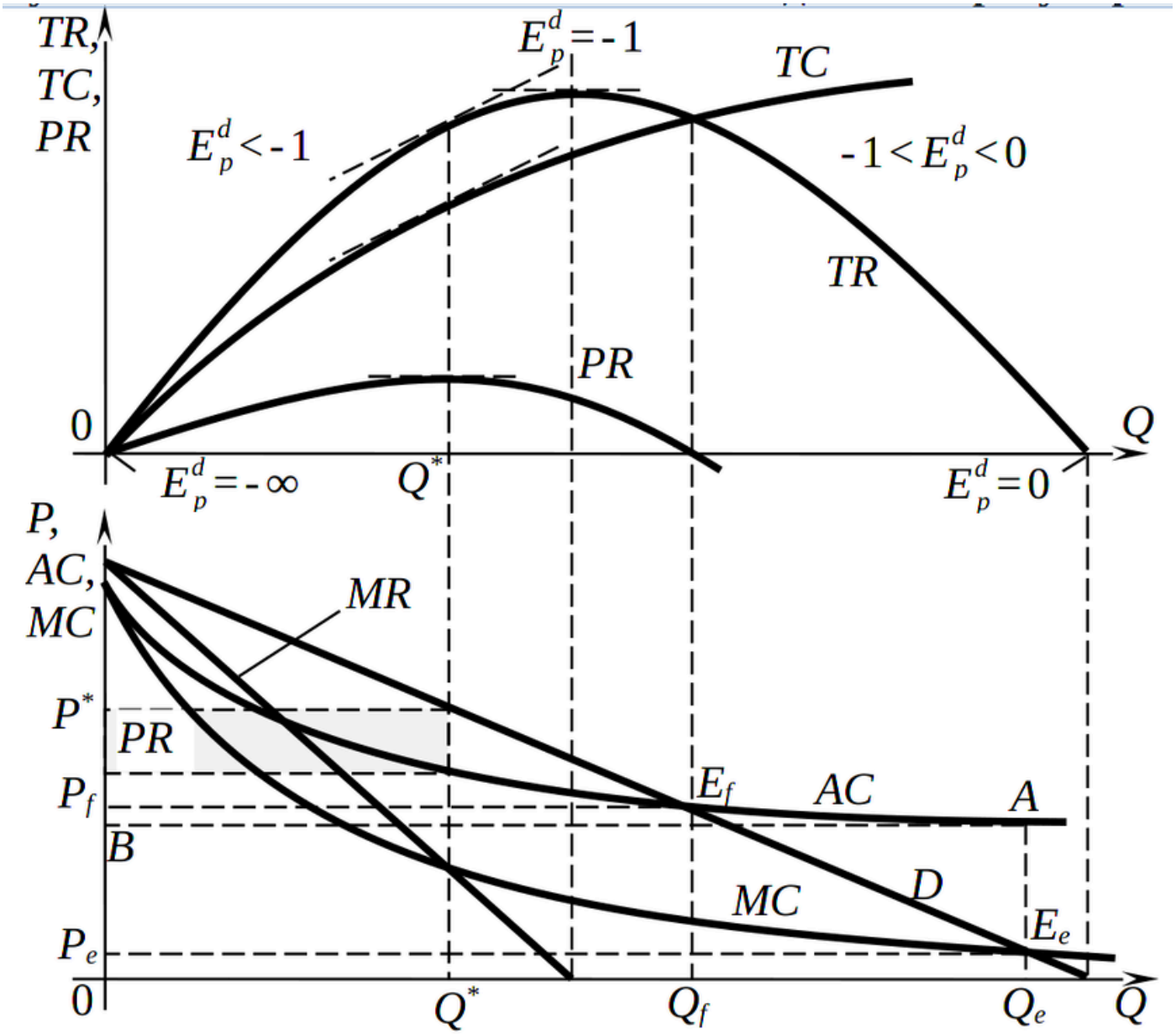


Рисунок 6.28. Естественная монополия: дилемма регулирования

В условиях монополизации ряда отраслей одним из методов выработки механизма государственного регулирования цен, ориентированного на достижение субоптимального равновесия («second best»), становится ценообразование по принципу Рамсея [3] . При этом основным принципом централизованного регулирования ценообразования является максимизация чистого (нетто-) общественного благосостояния в условиях безубыточности работы предприятий.

Рассмотрим многопродуктовую монополию, выпускающую товары и оказывающую услуги на n независимых друг от друга рынках с функциями спроса $p_i = p_i(q_i)$, $i = 1, \ldots, n$. При этом монополист несет издержки в объеме $TC(q_1, \ldots, q_n)$. Валовое общественное благосостояние на *i*-м рынке может быть рассчитано как площадь под графиком функции спроса от нулевого до фактического объема выпуска

$$TSB_i = \int_0^{q_i} p_i(q)dq.$$

Чистый выигрыш общества – это разность между валовым общественным благосостоянием и теми издержками, которые несет производитель:

$$NSB = \sum_{i=1}^{n} TSB_i - TC(q_1, \ldots, q_n).$$

Государство максимизирует совокупное общественное благосостояние по объемам производства на всех рынках

$$\max_{q_1, \ldots, q_n} \left(\sum_{i=1}^{n} \int_0^{q_i} p_i(q)dq - TC(q_1, \ldots, q_n) \right)$$

в условиях ограничивающего фактора безубыточности производства, то есть в ситуации равенства общего дохода общим издержкам

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\left(q_i\right) q_i = TC\left(q_1, \ldots, q_n\right).$$

Эта задача на условный экстремум общественного благосостояния может быть решена введением функции Лагранжа:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{q_i} p_i(q)dq - TC\left(q_1, \ldots, q_n\right) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\left(q_i\right) q_i - TC\left(q_1, \ldots, q_n\right)\right),$$

где λ – множитель Лагранжа.

Дифференцируя по каждому из n объемов производства с помощью производной собственного интеграла по параметру и приравнивая в силу необходимого условия экстремума получающиеся производные нулю, имеем:

$$p_i - \frac{\partial TC}{\partial q_i} + \lambda\left(p_i + q_i \frac{\partial p_i}{\partial q_i} - \frac{\partial TC}{\partial q_i}\right) = 0, i = 1, \ldots, n.$$

Кроме того, должно выполняться ограничение по безубыточности работы фирмы:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} p_i\left(q_i\right) q_i - TC\left(q_1, \ldots, q_n\right) = 0.$$

Проводя очевидные преобразования, условие максимизации прибыли фирмы можно представить в следующем виде:

$$\left(p_i - MC_i\right)(1+\lambda) = -\lambda p_i \frac{\partial p_i}{\partial q_i} \frac{q_i}{p_i}.$$

Заметим, что $\frac{\partial p_i}{\partial q_i} \frac{q_i}{p_i} = \frac{1}{E_i}$, где E_i – эластичность спроса на *i*-м рынке.

Из условия оптимизации деятельности монополии следует:

$$\frac{p_i - MC_i}{p_i} = -\frac{1}{E_i}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right).$$

Таким образом, субоптимальные цены, устанавливаемые государством должны отклоняться в процентном отношении от предельных издержек, а значит, конкурентных цен в тем большей степени, чем ниже абсолютная величина ценовой эластичности спроса с коэффициентом пропорциональности $\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)$, едином для всех монополизированных рынков.

---

1. Тироль Ж. Рынки и рыночная власть: в 2-х т. – 2-е изд. – М.: Экономическая школа, 2000. ↩
2. Абба Лернер (1903-1982) – американский экономист. ↩
3. Данный механизм ценообразования был сформулирован Ф. Рамсеем в работе: Ramsey F.P. A contribution to the theory of taxation // Economic Journal,1927, Vol.37, №145. – P.47-61. Ср.: Авдашева С.Б., Розанова Н.М. Теория организации отраслевых рынков. – М.: Магистр, 1998, с.262-263. ↩

6.6. Равновесие монопсонии

Проанализируем теперь поведение монопсонии на рынке фактора производства (труда), то есть такой рыночной структуры, когда на стороне спроса присутствует только один покупатель, в то время как со стороны предложения ему противостоит множество продавцов, которые, однако, не в состоянии повлиять на формирование рыночной цены [1].

Максимизация прибыли фирмой при наличии несовершенной конкуренции на рынках ресурсов видоизменяется, поскольку цена фактора производства должна рассматриваться как функция его объема, приобретаемого монопсонией, или функция предложения ресурса (труда): $w=w(L)$. Монопсония обладает рыночной властью на рынке данного фактора производства. Изменяя количество нанимаемой рабочей силы, монопсония способна влиять на ее цену – ставку заработной платы. Как правило, монопсония сталкивается с возрастающей функцией предложения труда: $\frac{dw}{dL} > 0$.

Будем вначале предполагать, что монопсония является совершенно конкурентной фирмой на рынке выпускаемой ею продукции. Таким образом, рассмотрим третий случай из возможных сочетаний структур совершенной и несовершенной конкуренции на рынках продуктов и ресурсов.

В краткосрочном аспекте, когда труд является единственным переменным фактором производства, условие максимизации прибыли для такой фирмы будет иметь вид:

$$\frac{dPR}{dL}=\frac{dTR}{dL}-\frac{dTC}{dL}=p\frac{dQ}{dL}-\frac{d(w(L)\bullet L)}{dL}=p\bullet MP_L-w-\frac{dw}{dL}L=p\bullet MP_L-w\left(1+\frac{1}{\frac{dL}{dw}\bullet\frac{w}{L}}\right)=0.$$

Здесь $w\left(1+\frac{1}{\frac{dL}{dw}\bullet\frac{w}{L}}\right)=\frac{dTC}{dL}$ – это предельные издержки на труд (MC_L), а $\frac{dL}{dw}\bullet\frac{w}{L}$ – это эластичность предложения труда по ставке заработной платы $\left(E_w^{L_s}\right)$.

Таким образом, оптимальное количество рабочей силы, нанимаемой монопсонией, которая является совершенным конкурентом на рынке продукта, определяется следующим равенством:

$$MVP_L=p\bullet MP_L=w\left(1+\frac{1}{E_w^{L_s}}\right)=MC_L. \quad (6.71)$$

Графически равновесие монопсонии на рынке труда изображено на рис. 6.29. Функция предложения труда (S_L) здесь предполагается линейной: $w=a+bL$, *a* и *b* – некоторые положительные константы. Тогда функция предельных издержек на труд MC_L также будет линейной, с угловым коэффициентом, в два раза превышающим тангенс угла наклона функции предложения труда; причем точки пересечения данных прямых линий с вертикальной координатной осью (стоимостных величин – ставки заработной платы и предельных издержек на труд) будут совпадать:

$$MC_L=\frac{dTC}{dL}=\frac{d}{dL}(w(L)\bullet L)=\frac{d}{dL}\left(aL+bL^2\right)=a+2bL.$$

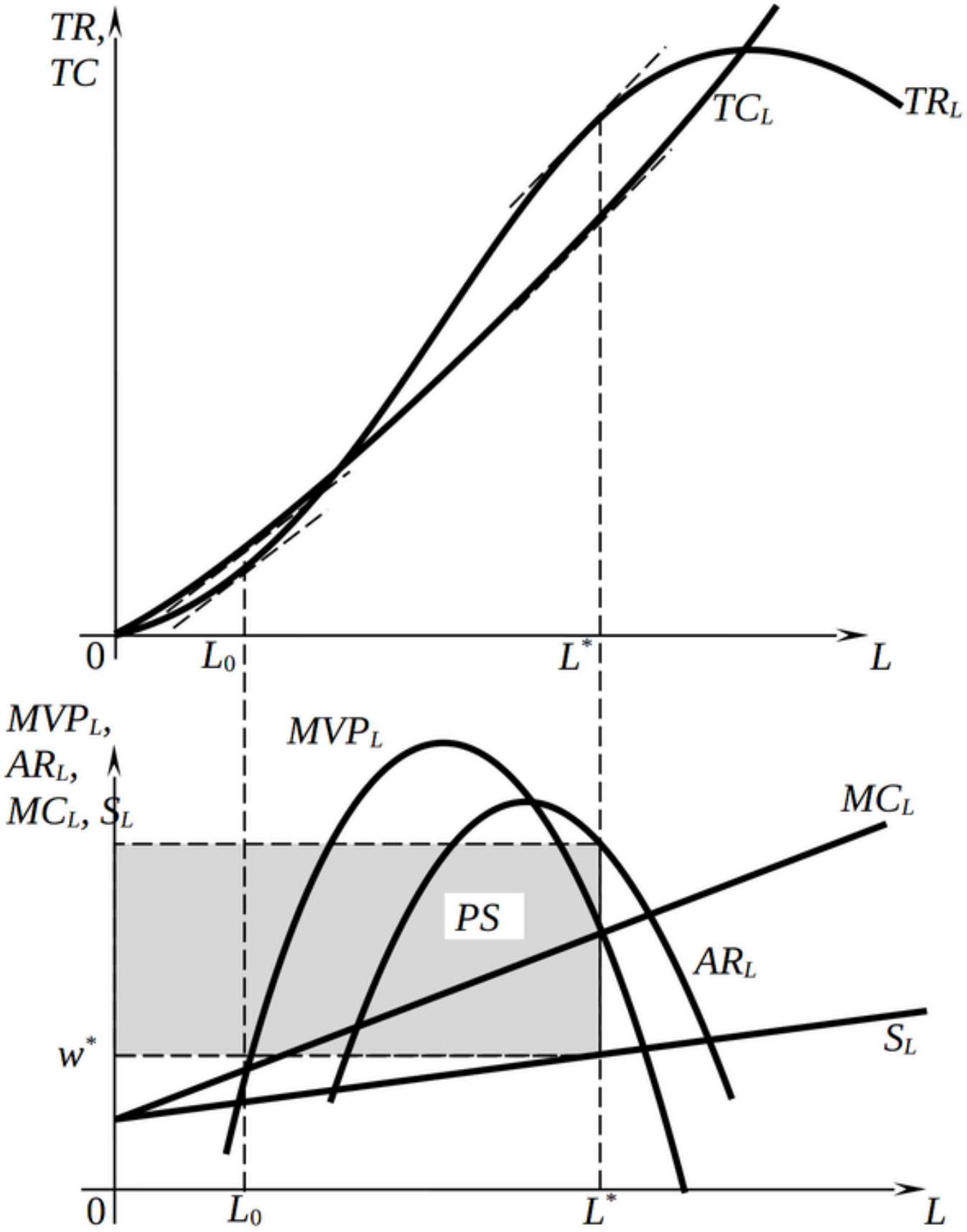


Рисунок 6.29. Монопсония на рынке труда при совершенной конкуренции на рынке продукта

Достаточным условием максимизации прибыли монопсонией в условиях совершенной конкуренции на рынке продукта будет отрицательность второй производной прибыли по трудозатратам:

$$p \bullet MP_L' < MC_L'.$$

Таким образом, максимум прибыли монопсонии, являющейся совершенным конкурентом на рынке продукта, будет достигаться при таком уровне трудозатрат, когда при равенстве предельной доходности труда и предельных издержек на данный фактор производства угловой коэффициент касательной к графику предельной доходности труда будет меньше тангенса угла наклона касательной к линии предельных издержек на труд. Поскольку предельные издержки MC_L являются возрастающей функцией трудозатрат, постольку на участке убывающей предельной производительности труда данное неравенство будет заведомо справедливым (рис. 6.29).

Подобно тому как у монополии отсутствует функция предложения продукта, в ситуации монопсонии невозможно построить функцию спроса на труд. Чтобы показать это, предположим, что произошли изменения в функции предложения труда, и ее график переместился из положения S_L^1 в положение S_L^2 (рис. 6.30). Исходной функции предложения соответствовала функция предельных издержек на труд MC_L^1, а новая функция предложения генерирует функцию предельных издержек вида MC_L^2. Предположим далее, что функция предельной доходности труда неизменна (MVP_L).

При этом возможна ситуация, когда в исходной и в новой ситуации графики предельных издержек на труд – соответственно, MC_L^1 и MC_L^1 – пересекаются между собой в точке их пересечения с графиком MVP_L, когда $MC_L^1{=}MC_L^1{=}MVP_L$ (левая часть рис. 6.30). Тогда при одном и том же оптимальном уровне занятости L^* монопсония будет назначать разные ставки заработной платы – в исходной ситуации она будет установлена на уровне w_1^*, а в новой ситуации – на уровне w_2^*. Следовательно, у монопсонии отсутствует функциональная зависимость между оптимальной величиной спроса на труд и ставкой заработной платы, ведь для наличия такой зависимости было бы необходимо, чтобы данному уровню занятости соответствовало единственное значение ставки заработной платы.

С другой стороны, при изменении функции предложения труда и перемещении ее графика из положения S_L^1 в положение S_L^2, а также соответствующем сдвиге линии предельных издержек на труд из положения MC_L^1 в положение MC_L^2 точки пересечения линий предельных издержек на труд с неизменным графиком предельной доходности труда могут располагаться таким образом, что оптимальная величина занятости может измениться (от уровня L_1^* до уровня L_2^*), сохраняя при этом соответствующую оптимальную ставку заработной платы (w^*) на прежнем уровне (правая часть рис. 6.30). Это значит, что для монопсонии отсутствует функция спроса на труд как зависимость между ставкой заработной платы и объемом используемой рабочей силы.

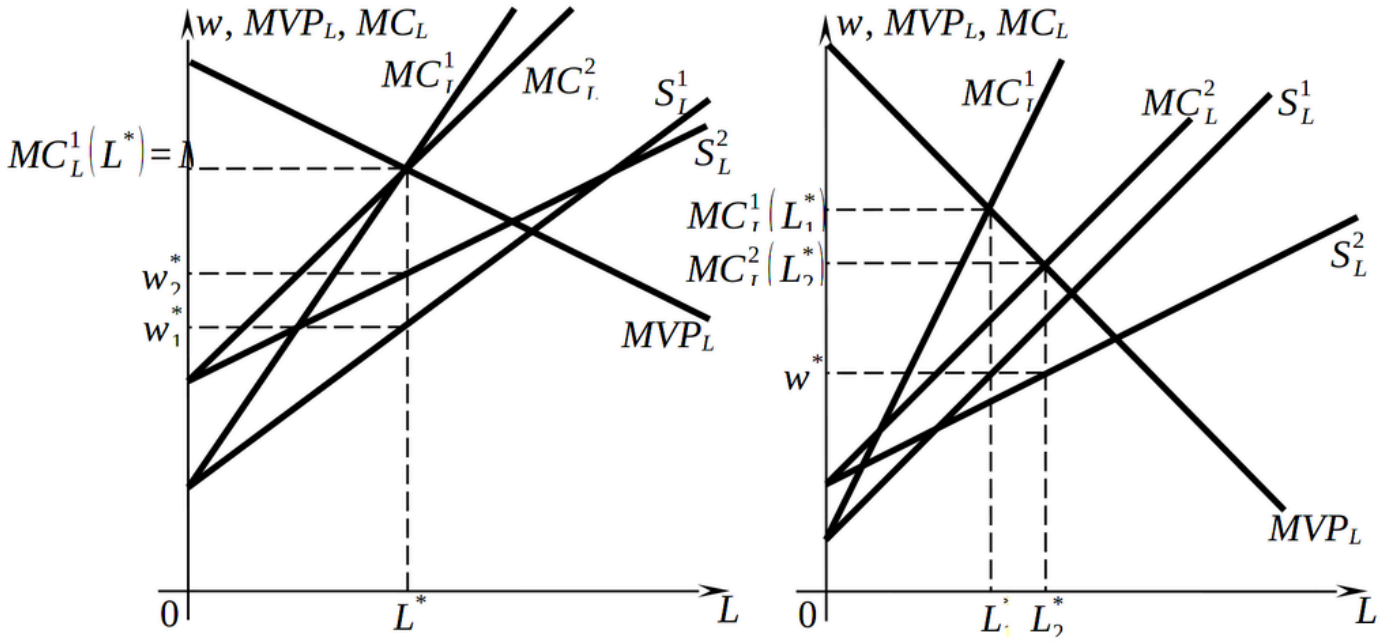


Рисунок 6.30. Отсутствие у монопсонии функции спроса на труд

Аналогично рассуждениям, проведенным выше относительно ценообразования при монополии, можно показать, что, хотя у монопсонии отсутствует функция спроса на ресурсы, оптимальная с точки зрения такого предприятия цена на используемый им фактор производства оказывается невозрастающей функцией его предельной доходности MRP.

Предположим, что существуют две альтернативные функции спроса на продукцию монопсониста $p^1{=}g^1(q)$ и $p^2{=}g^2(q)$. Верхний индекс вводится для того, чтобы провести различие с функциями спроса на ресурсы. Этим двум функциям конечного спроса будут отвечать функции совокупной доходности ресурса ($TR_1(x_1)$ и $TR_2(x_1)$). Пусть соответствующие функции предельной доходности ресурса таковы, что $MRP_2(x_1) \geq MRP_1(x_1)$ для всех $x_1 > 0$. Кроме того, предположим, что при функции спроса на продукт $p^1{=}g^1(q)$ монопсонист выберет объем используемого ресурса в количестве x_1^1 и назначит цену на ресурс в размере p_1^1, а при функции спроса $p^2{=}g^2(q)$ параметрами, характеризующими рынок ресурса, будут соответственно x_1^2 и p_1^2. Тогда, используя принцип выявленной максимизации прибыли, можно записать:

$$p^1 f\left(x_1^1\right) \text{-} p_1^1 x_1^1 \geq p^1 f\left(x_1^2\right) \text{-} p_1^2 x_1^2, (6.72)$$

так как при функции спроса на продукцию $p^1{=}g^1(q)$ фирма-монопсония предпочтет выбрать количество x_1^1, а не другое, например, x_1^2, единиц ресурса и назначит на него цену p_1^1, а не любую другую, в частности p_1^2, так как это обеспечит ей по крайней мере не меньшую прибыль. В неравенстве (6.72) $f(\bullet)$ обозначает производственную функцию $q{=}f\left(x_1\right)$.

Аналогично, при функции спроса на продукцию $p^2{=}g^2(q)$ аксиома выявленной максимизации прибыли дает неравенство:

$$p^2 f\left(x_1^2\right)\text{-}p_1^2 x_1^2 \geq p^2 f\left(x_1^1\right)\text{-}p_1^1 x_1^1. (6.73)$$

Сложим правую часть неравенства (6.73) с правой частью неравенства (6.72), а левую часть (6.73) – соответственно с левой частью (6.72):

$$p^1 f\left(x_1^1\right)+p^2 f\left(x_1^2\right) \geq p^1 f\left(x_1^2\right)+p^2 f\left(x_1^1\right). (6.74)$$

По определению, $TR_i\left(x_1^j\right)=p^i f\left(x_1^j\right)$, $i, j=\{1,2\}$. Поэтому неравенство (6.74) можно переписать в следующем виде: $TR_2\left(x_1^2\right)\text{-}TR_2\left(x_1^1\right)\text{-}\left(TR_1\left(x_1^2\right)\text{-}TR_1\left(x_1^1\right)\right) \geq 0$. Используя определение предельной доходности ресурса, данное неравенство можно записать в интегральной форме:

$$\int_{x_1^1}^{x_1^2}\left(MRP_2\left(x_1\right)\text{-}MRP_1\left(x_1\right)\right)dx_1 \geq 0. (6.75)$$

По предположению, $MRP_2(x_1) \geq MRP_1(x_1)$ для всех $x_1 > 0$. Поэтому, в силу ориентированности римановского интеграла, из неравенства (6.75) следует, что верхний предел интегрирования должен быть не меньше нижнего:

$$x_1^2 \geq x_1^1. (6.76)$$

Как правило, цена предложения ресурса $\left(p_1=h_1\left(x_1\right)\right)$ – это неубывающая функция его количества. Поэтому неизменной или большей величине MRP будет соответствовать, как минимум, не меньшее значение цены ресурса.

Таким образом, в случае монопсонии наблюдается картина, симметричная по отношению к ситуации с монополией. Оптимальная цена, устанавливаемая покупателем-монопсонистом, является нестрого возрастающей, или неубывающей, функцией предельной доходности приобретаемого ресурса $\left(P_{монопс}=\varphi(MRP)\right)$:

$$если MRP_1 \geq MRP_2, то P^1_{монопс}=\varphi\left(MRP_1\right) \geq P^2_{монопс}=\varphi\left(MRP_2\right). (6.77)$$

На рынках промежуточной продукции, подпадающих под ситуацию совершенной конкуренции, присутствует не одна, а множество фирм, нанимающих услуги данного фактора производства:

$$\max_{x_1} PR=\max_{x_1}\{pq\text{-}p_1 x_{i1}\}, i=1,\ldots,n:$$
$$p_1=h_1\left(X_1\right),$$

где *m* – общее количество фирм из разных отраслей, использующих данный фактор производства; X_1 – общее количество фактора, нанятое всеми предприятиями (6.2) или (6.3). Цена на ресурс при совершенной конкуренции на рынках факторов производства равна его предельной доходности MRP, совпадающей в случае конкурентной структуры и на продуктовом рынке со стоимостью предельного продукта фактора производства: $p \bullet MP=p_1$ (2.127).

Рассуждения, использующие принцип выявленной максимизации прибыли, применительно к конкуренции на рынке фактора производства несколько отличаются от выкладок, проделанных для монопсонии. Поскольку здесь так же, как и в случае конкуренции на рынке готовой продукции, наблюдается компенсирующее поведение, отдельная фирма не в состоянии влиять на рыночную цену ресурса:

$$p_i^1 f\left(x_{1i}^1\right)\text{-}p_1 x_{1i}^1 \geq p_i^1 f\left(x_{1i}^2\right)\text{-}p_1 x_{1i}^2, (6.78)$$
$$p_i^2 f\left(x_{1i}^2\right)\text{-}p_1 x_{1i}^2 \geq p_i^2 f\left(x_{1i}^1\right)\text{-}p_1 x_{1i}^1. (6.79)$$

Поскольку вытекающее отсюда неравенство (6.75) справедливо для всех фирм, использующих данный ресурс, можно агрегировать рыночные затраты фактора, используя одно из соотношений (6.2) – (6.3). Применяя затем функцию предложения фактора производства к полученному для его совокупных рыночных затрат неравенству (6.76), доказываем неубывающую зависимость рыночной цены ресурса от его предельной доходности. Механизм ее заключается в следующем. С ростом предельной доходности фактора производства предприятий, функционирующих на данном рынке, происходит сдвиг графика функции отраслевого спроса на ресурс вправо-вверх, результатом чего становится повышение уровня рыночной цены (рис. 6.31). Итак, рыночная цена при совершенной конкуренции, при прочих равных условиях, так же как и при наличии рыночной власти, монотонно зависит от предельной доходности фактора производства $\left(P_к=f(MRP)\right)$:

$$если MRP_1 \geq MRP_2, то P^1_к=f\left(MRP_1\right) \geq P^2_к=f\left(MRP_2\right). (6.80)$$

Если усилить принцип выявленной максимизации прибыли, записав неравенства (6.73) – (6.74) и (6.78) – (6.79) как строгие, то мы получим возрастающие функции $P_{монопс}=\varphi(MRP)$ и $P_к=f(MRP)$, соответствующие (6.77) и (6.80):

$$если MRP_1 > MRP_2, то P^1_{монопс}=\varphi\left(MRP_1\right) > P^2_{монопс}=\varphi\left(MRP_2\right). (6.81)$$
$$если MRP_1 > MRP_2, то P^1_к=f\left(MRP_1\right) > P^2_к=f\left(MRP_2\right). (6.82)$$

Эта функциональная зависимость является всюду возрастающей, поэтому для нее можно получить обратное отображение $MRP=f^{-1}\left(P_к\right)$, которое также является возрастающим. Повышение уровня рыночной цены при прочих равных условиях соответствует возросшему уровню предельной доходности используемого ресурса: если $P^1_к \geq P^2_к$, то $MRP_1 \geq MRP_2$.

Подставив полученную обратную функцию предельной доходности от уровня конкурентной цены (6.82) в качестве аргумента в функцию цены монопсонии (6.81), можно получить сложную функцию цены монопсонии от конкурентного уровня цен: $P_{монопс}=\varphi\left(MRP\right)=\varphi\left(f^{-1}\left(P_к\right)\right)$. Как композиция возрастающей и неубывающей функций цена монопсонии является нестрого возрастающей, или неубывающей, трансформацией конкурентной цены. То есть, в случае монопсонии мы получили вывод, идентичный монопольной ситуации.

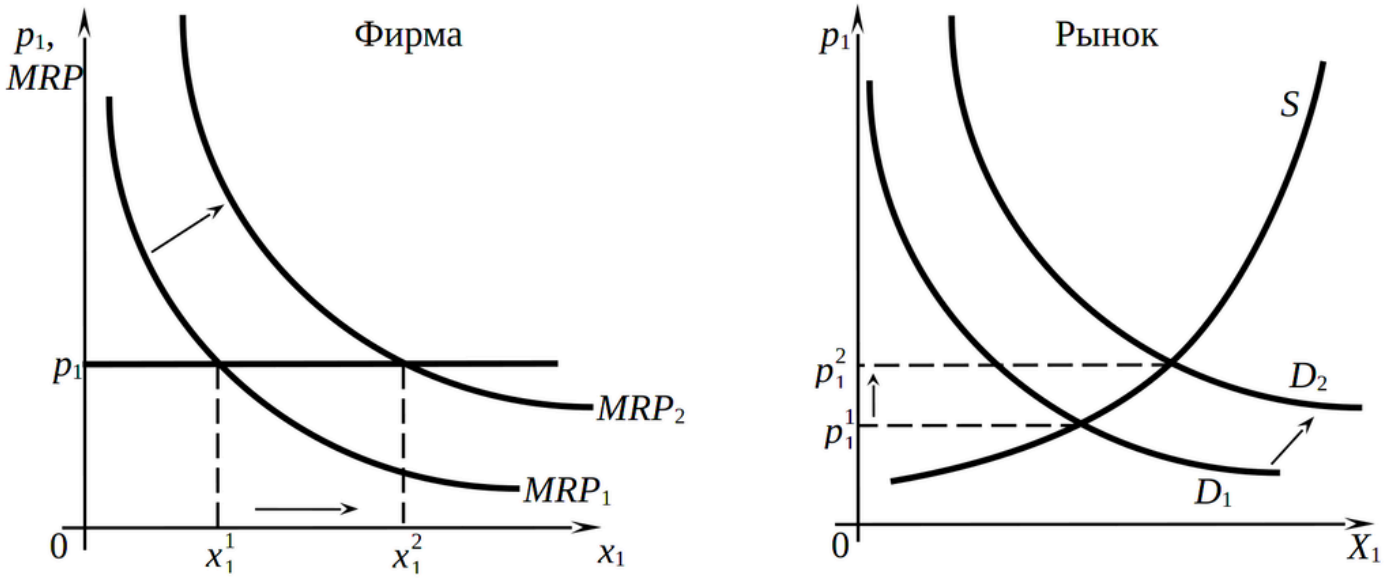


Рисунок 6.31. Конкурентная цена ресурса – возрастающая функция его предельной доходности

Таким образом, в случае монопсонии получается результат, идентичный монопольной ситуации: фундаментальную роль в процессе ценообразования как при отсутствии рыночной власти, в условиях совершенной конкуренции, так и при влиянии хозяйствующих субъектов на рыночные цены играют производственно-технологические факторы.

Аналогично монополии на продуктовом рынке, монопсония обладает экономической властью на рынке труда: она способна занижать ставку заработной платы (W_M) по отношению к конкурентному уровню, который соответствует величине предельного продукта труда в денежном выражении, или предельной ценности продукта труда MVP_L. Степень рыночной власти монопсонии можно измерить с помощью индекса Лернера:

$$L=\frac{MVP_L-w}{w}=\frac{MC_L-w}{w}=\frac{w\left(1+\frac{1}{E_w^{Ls}}\right)-w}{w}=\frac{1}{E_w^{Ls}}. \quad (6.83)$$

Здесь было использовано условие равенства предельной ценности продукта труда и предельных издержек на труд, а также выражение предельных издержек на труд через коэффициент эластичности предложения труда по ставке заработной платы.

Таким образом, эластичность предложения труда по ставке заработной платы является основным фактором, ограничивающим рыночную власть монопсонии. Чем выше эластичность предложения, т.е. чем сильнее сокращается объем рабочей силы в результате занижения ставки заработной платы монопсонией, тем меньше возможности для такого занижения, и тем слабее рыночная власть фирмы.

Можно видеть, что эластичность предложения труда по ставке заработной платы, ограничивающая рыночную власть монопсонии, представляет собой фундаментальный показатель, влияющий на определение оптимального уровня трудозатрат монопсонии. Другими факторами, оказывающими влияние на величину занятости на монопсонии, аналогично ситуации совершенной конкуренции на рынке труда, являются цена на продукт фирмы и технологические сдвиги (изменения в предельной производительности труда) и уровень ставки заработной платы.

Если монопсония на рынке труда одновременно является монополистом на рынке производимой продукции, то необходимое условие максимума ее функции прибыли – равенство нулю первой производной по переменному ресурсу – усложняется:

$$\frac{dPR}{dL}=\frac{dTR}{dL}-\frac{dTC}{dL}=\frac{dTR}{dQ}\bullet\frac{dQ}{dL}-\frac{d}{dL}(w(L)\bullet L)=\frac{dTR}{dQ}\bullet\frac{dQ}{dL}-\left(w+L\frac{dw}{dL}\right)=MR\bullet MP_L-w\bullet\left(1+\frac{L}{w}\frac{dw}{dL}\right)=p\bullet MP_L\bullet\left(1+\frac{1}{E_p^d}\right)-w\bullet\left(1+\frac{}{E}\right.$$

Таким образом, оптимальное количество рабочей силы, нанимаемой монопсонией, которая является монополистом на рынке продукта, определяется следующим соотношением (рис. 6.32):

$$MRP_L=MR\bullet MP_L=p\bullet MP_L\bullet\left(1+\frac{1}{E_p^d}\right)=w\left(1+\frac{1}{E_w^{Ls}}\right)=MC_L.$$

В данном случае линия предельной доходности труда отклоняется от графика стоимости предельного продукта фактора пропорционально обратной величине ценовой эластичности спроса на продукт, увеличенной на единицу. При этом рыночная власть фирмы на рынке труда дополняется монопольной властью на рынке продукции.

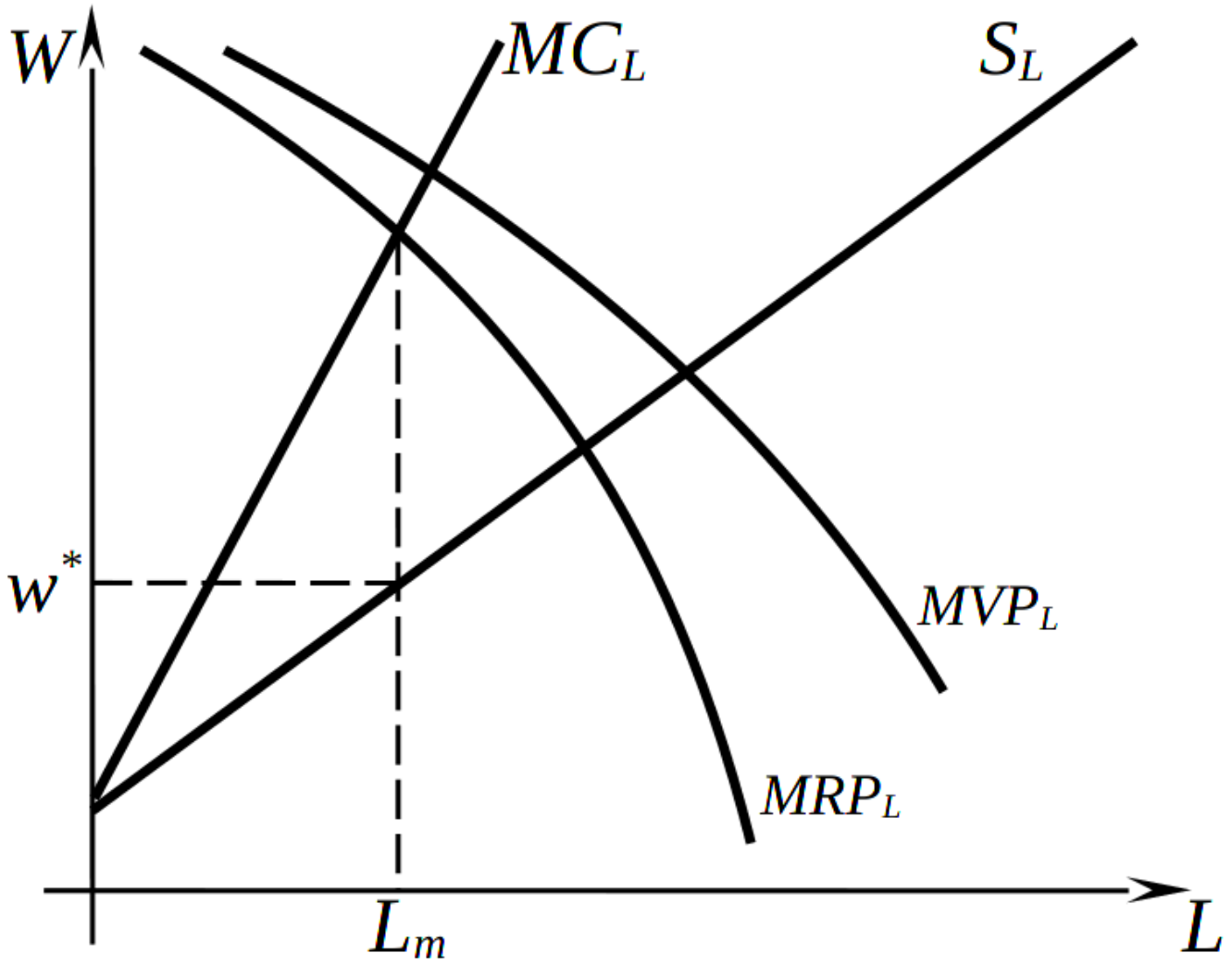


Рисунок 6.32. Монополия на рынке продукта – монопсония на рынке труда

Достаточным условием максимизации прибыли монопсонией, представляющей собой монополиста на рынке продукта, при равенстве предельной доходности труда и предельных издержек на данный фактор производства будет отрицательность второй производной прибыли по объему используемого труда, а значит, угловой коэффициент касательной к графику предельной доходности труда должен быть меньше тангенса угла наклона касательной к линии предельных издержек на труд:

$$MRP_L' < MC_L'.$$

Поскольку предельные издержки MC_L являются возрастающей функцией трудозатрат, постольку данное неравенство будет, очевидно, выполнено на участке убывающей предельной доходности труда (рис. 6.32).

1. В качестве монопсониста может выступать, например, крупный металлургический комбинат по отношению к работникам определенной профессии на локальном, территориально изолированном рынке труда. ↩

6.7. Равновесие в условиях олигополии

В условиях олигополии в отрасли действуют всего несколько фирм, которые обладают значительными долями рыночных продаж [1]. При этом наблюдается взаимная зависимость поведения конкурентов [2]. Спрос же, как правило, представлен множеством покупателей.

Продукт, поставляемый на олигопольный рынок, может быть как стандартизированным, так и дифференцированным. Главной причиной формирования олигопольного рынка является существенная экономия от масштаба производства, приводящая к возникновению значительных барьеров входа-выхода и, следовательно, положительной прибыли экономических агентов в долгосрочном периоде.

Принимая решения относительно своих действий, фирмы в условиях олигополии должны учитывать возможную реакцию конкурентов. Учет ответных действий конкурентов в условиях стратегического взаимодействия фирм на олигопольных рынках описывается с помощью инструментария, разработанного в рамках теории игр.

Элементами каждой игры являются игроки, их стратегии и выигрыши, обычно трактуемые как полезность или прибыль участников игры.

Классификация игровых моделей олигополии может осуществляться по:

- числу игроков (классическая оптимизация – это модель с одним игроком);
- числу стратегий: конечные и бесконечные;
- свойствам функций выигрыша: с нулевой суммой (антагонистические), с ненулевой суммой, с постоянной разностью (и выигрыши, и проигрыши одновременно);
- возможностям предварительных переговоров и взаимодействия игроков в ходе игры (кооперативные и некооперативные);
- принципам принятия решений (одновременные и последовательные);
- повторяемости взаимодействия (однократные и с многократным взаимодействием).

Рассмотрим сначала игры с одновременными ходами участников – так называемые игры в нормальной форме. В таких играх каждый из участников принимает решение независимо, не зная о действиях, предпринятых другими игроками, после чего определяются фактические выигрыши всех сторон. Предполагается, что игроки располагают полной информацией о возможных действиях других участников и возникающих при этом выигрышах. Матрица выигрышей, или платежная матрица, демонстрирует соотношение между потенциальными выигрышами игроков при любом сочетании выбранных ими стратегий.

Одним из важнейших понятий, характеризующих решения некооперативных игр, является равновесие по Нэшу [3]. Равновесие по Нэшу – это такое сочетание стратегий конкурентов, когда никому из них невыгодно отклониться от своей стратегии в одиночку, при условии, что остальные игроки придерживаются своих равновесных стратегий.

Одним из простейших типов игр являются игры с доминирующими стратегиями участников. В теории игр доминирующей является такая стратегия, которая приносит более предпочтительный результат независимо от стратегии, использованной партнером. Если оба игрока имеют доминирующие стратегии, то равновесным решением игры будет одновременное применение их каждым из игроков.

Так называемая игра “Дилемма заключенных” представляет собой один из наиболее известных примеров игр с доминирующими стратегиями. Предположим, что двое заключенных подозреваются в совершении какого-то преступления. При невозможности заключения договоренности между ними каждый сталкивается с альтернативой: признаться или не признаваться в содеянном. Судебный орган проводит политику, нацеленную на получение признательных показаний подозреваемых. Если один из них соглашается дать показания о вине другого, который при этом не сознается, то признавшемуся гарантируется смягчение наказания, скажем, полный отказ от судебного преследования; тогда как другого ожидает самая суровая кара (*c*). Если оба преступника идут на сотрудничество со следствием, давая показания друг на друга, то каждого из них ожидает менее жесткое наказание (*b*). Если же не сознается ни один из подозреваемых, то следствие, не располагающее прямыми доказательствами их вины, не может обвинить их обоснованно, и их ждет еще более мягкое наказание (*a*). Платежная матрица в данной игре содержит информацию о потенциальных потерях сторон (табл. 6.1). В каждой из ячеек здесь наказание игрока под номером один приводится первым. В соответствии с предпосылками игры, потери сторон в “дилемме заключенных” связаны между собой неравенством: $a < b < c$.

Схема решения игры с одновременными ходами участников такова: для каждого из игроков следует определить наилучший ответ на любое действие другого. Если стратегия *i* для первого игрока является наилучшим ответом на стратегию *j* второго, и одновременно стратегия *j* второго участника игры представляет собой наилучший ответ на стратегию *i* первого, то такая пара стратегий будет составлять равновесие по Нэшу.

Будем подчеркивать выигрыш, соответствующий наилучшему ответу каждого из игроков на данную стратегию другого, в матрице выигрышей “дилеммы заключенных”. В данной игре каждый из участников имеет доминирующую стратегию – “признание”: при этом проигрыш каждого игрока является наименьшим при любой стратегии – “признания” или “непризнания” другого игрока. Ячейка, расположенная на пересечении доминирующих стратегий игроков, соответствует равновесию по Нэшу.

Достижение этого равновесного состояния можно проиллюстрировать по-другому. Допустим, изначально игрок 1 рассчитывает на стратегию “непризнание”. Если при этом такую же стратегию выбирает второй игрок, то наилучшим ответом первого будет изменить стратегию на “признание”. Это иллюстрирует стрелка, ориентированная из левой верхней ячейки вправо. В свою очередь оптимальным ответом второго игрока на “признание” первого будет переход к такой же стратегии. Это показывает стрелка, направленная вниз из верхней правой ячейки. В итоге игроки оказываются в правой нижней ячейке, и первому игроку уже не нужно менять свою стратегию в ответ на выбор второго, поскольку любое отклонение от стратегии “признания” ухудшит его положение.

Аналогично, если исходно игрок №2 рассчитывает на стратегию “непризнания”, и если эту же стратегию выбирает игрок №1, то второму лучше сменить стратегию на “признание” (стрелка, направленная вниз из левого верхнего угла платежной матрицы). При этом наилучшим ответом перового будет также признаться (стрелка вправо из левой нижней ячейки), и игроки оказываются в правом нижнем углу матрицы выигрышей, когда второму уже не нужно корректировать свои действия в ответ на решения

первого, поскольку любое отклонение от стратегии “признания” будет означать для него увеличение потерь. Таким образом, сочетание стратегий “признания” двух участников представляет собой равновесие по Нэшу в игре “дилемма заключенных”.

Таблица 6.1. Платежная матрица “дилеммы заключенных”

		Игрок 2	
		Непризнание	Признание
Игрок 1	Непризнание	→ ↓ *a*,*a*	*c*,*0* ↓
	Признание	*0*,*c* →	*b*,*b*

Тем не менее, равновесие по Нэшу может не соответствовать максимальному выигрышу каждого из игроков. Соответствующая ему пара стратегий будет равновесной при некооперативном взаимодействии между игроками. Но если бы игроки имели возможность договариваться о совместных действиях, то, в частности, в “дилемме заключенных” они предпочли бы одновременно придерживаться стратегии “непризнания”, ведь комбинация выигрышей (*a*,*a*) означает снижение наказания для каждого из участников, по сравнению с наказаниями в условиях равновесия по Нэшу (*b*,*b*).

“Дилемма заключенных” имеет важные экономические приложения. В частности, как будет показано ниже, она может служить иллюстрацией взаимодействия фирм в условиях олигополии.

Возможна ситуация множественности равновесий по Нэшу. Например, в игре ниже (табл. 6.2) присутствуют два таких равновесия. В платежной матрице здесь выигрыши игрока 1 стоят слева, а игрока 2 – справа в каждой ячейке. Как видно, в данной игре у сторон отсутствуют доминирующие стратегии. Используя данную матрицу выигрышей, можно определить состояния равновесия по Нэшу в чистых стратегиях в игре с одновременными ходами. Это будут наборы стратегий точки (α, β) и (β, α).

Таблица 6.2. Пример множественности равновесий по Нэшу

		Игрок 2	
		Стратегия α	Стратегия β
Игрок 1	Стратегия α	3,3	**2,4**
	Стратегия β	**4,2**	1,1

Игру нормальной формы можно преобразовать в две игры развернутой формы (с последовательным взаимодействием между участниками), когда игрок 1 получает право на ход первым либо первым действует игрок 2. Применительно к игре, рассмотренной выше (табл. 6.2, рис. 6.33), в первом случае равновесие по Нэшу – это профиль стратегий (β, α), в во втором – (α, β).

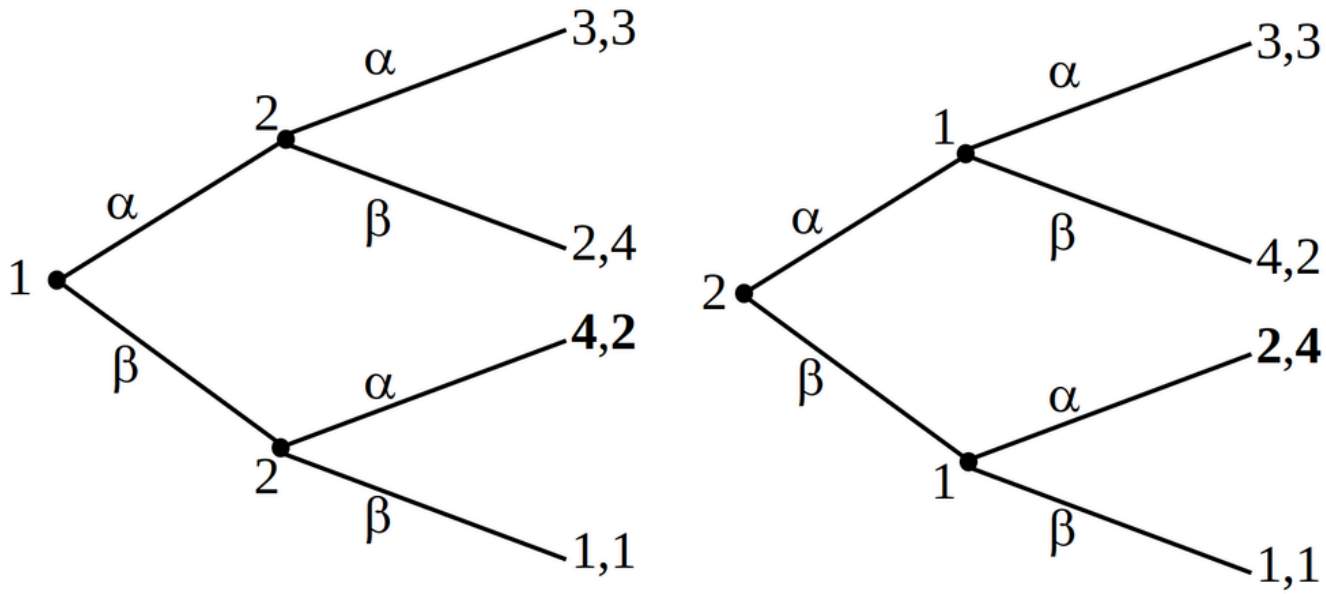


Рисунок 6.33. Два дерева игры в развернутой форме

Методом решения игр с последовательным взаимодействием сторон является так называемая “обратная индукция”. Она предполагает анализ принятия решений участниками начиная с последнего узла дерева игры с последовательным возвращением к корневому узлу.

Рассмотрим теперь принципы максимизации прибыли фирмами с учетом возможного стратегического взаимодействия между ними в условиях несовершенной конкуренции.

Одним из критериев классификации олигополистических рыночных структур может служить стратегическая переменная, по которой осуществляется взаимодействие между конкурентами: цена либо объем производства. Будем рассматривать конкурирующие между собой фирмы, которые максимизируют прибыль с точки зрения определения оптимального объема выпускаемой продукции.

Если рынок не полностью монополизирован одним производителем, то для каждой из крупных конкурирующих фирм функция прибыли записывается в следующем виде:

$$PR_i = p(Q)q_i - TC_i(q_i),$$

где q_i – это объем производства каждой, *i*-й фирмы; $Q=\sum_{i=1}^{n} q_i$ – совокупный выпуск продукции в отрасли.

Здесь предполагается, что продукция является стандартизованной, недифференцированной, а значит, на рынке существует единый уровень цены, по которой продают продукцию все фирмы.

Необходимым условием максимума прибыли является равенство нулю первой производной по количеству выпускаемой продукции:

$$\frac{\partial PR_i}{\partial q_i}=\frac{\partial (p(Q)q_i)}{\partial q_i}-\frac{\partial TC_i}{\partial q_i}=p(Q)+\frac{\partial p(Q)}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q_i}q_i-MC_i=p(Q)+\frac{\partial p(Q)}{\partial Q}\left(1+\frac{\partial Q_i}{\partial q_i}\right)q_i-MC_i=p(Q)+\frac{\partial p(Q)}{\partial Q}(1+\lambda_i)q_i-MC_i=p\left(\rho_i\left(1+\lambda_i\right)E_q^d+1\right)$$

т.е.

$$p(Q)\left(\frac{\rho_i(1+\lambda_i)}{E_p^d}+1\right)=MC_i. \quad (6.84)$$

Здесь $Q_i=\sum_{j=1,j\neq i}^{n} q_j=Q-q_i$ – объем производства всех фирм на рынке за исключением *i*-го производителя, n – общее количество фирм в отрасли, $\rho_i=\frac{q_i}{Q}$ – доля выпуска *i*-ой фирмы в общеотраслевом объеме производства, $\lambda_i=\frac{\partial Q_i}{\partial q_i}$ – предположительная вариация для *i*-го производителя, или показатель интенсивности ответной реакции остальных участников рынка на изменение объема производства со стороны данной фирмы.

Ситуации абсолютной монополии соответствует значение $\lambda_i=0$ при $\rho_i=1$. При этом условие максимизации прибыли несовершенного конкурента редуцируется к тривиальному условию равновесия фирмы – абсолютной монополии, которое, таким образом, является следствием более общей теории несовершенной конкуренции, учитывающей взаимодействие между фирмами и их ответные реакции на действия соперников.

Значение коэффициента предположительной вариации $\lambda_i=-1$ соответствует ситуации совершенной конкуренции. В этом случае наблюдается так называемое компенсирующее поведение фирм на рынке, когда ответная реакция остальных производителей полностью нейтрализует действия, предпринимаемые данной фирмой, которая в результате этого оказывается не в силах повлиять на рыночную цену производимого продукта. Это приводит к тому, что цена в отрасли устанавливается на уровне предельных издержек, поскольку предельная выручка в данном случае совпадает с рыночной ценой продукции $(p=MR_i=MC_i)$.

Концентрация производства и капитала в отрасли приводит к тому, что фирмы приобретают значительную рыночную власть, то есть возможность влиять на параметры, характеризующие функционирование отрасли, а именно цену продукции, объем отраслевого производства, количество фирм в отрасли и остроту конкуренции, норму прибыли и т.д. При наличии нескольких фирм, работающих в условиях несовершенной конкуренции, в силу условия максимизации прибыли (6.84), формула для расчета индекса Лернера, характеризующего степень рыночной власти, приобретает вид [4]:

$$L_i=\frac{p(Q)-MC_i}{p(Q)}=-\frac{\rho_i}{E_p^d}(1+\lambda_i). \quad (6.85)$$

На практике обычно значение индекса Лернера, то есть уровень монополизации отрасли, лежит между нулем и единицей. Нулевое значение соответствует ситуации совершенной конкуренции, когда *p=MC* и рыночная власть фирм отсутствует.

Рассмотрим элементарные теоретические модели, которые могут служить инструментарием анализа взаимодействия фирм на олигопольных рынках.

Модель Курно представляет собой простейший вариант описания конкуренции между олигополистами, в которой основной переменной, на которую ориентируются фирмы при принятии решений, является объем выпускаемой продукции. В базовой модели дуополии Курно [5] фирмы, присутствующие на рынке однородного продукта, считаются идентичными. Допустим для простоты, что функции издержек и рыночного спроса являются линейными: $TC_i=cq_i, i=(1,2)$, $P=a-bQ$, где $Q=q_1+q_2$ – рыночный объем продаж; *a*, *b*, *c* – положительные константы. Следовательно, предельные издержки фирм постоянны и равны между собой: $MC=c$.

Рассмотрим сначала одновременное взаимодействие конкурентов. Распишем функции прибылей олигополистов:

$$PR_1=TR_1-TC_1=(a-b\left(q_1+q_2\right))q_1-cq_1=-bq_1^2-bq_1q_2+(a-c)q_1;$$
$$PR_2=TR_2-TC_2=(a-b\left(q_1+q_2\right))q_2-cq_2=-bq_2^2-bq_1q_2+(a-c)q_2.$$

В модели Курно предполагается, что каждый из максимизирующих прибыль олигополистов при определении своего оптимального объема производства рассматривает выпуск соперника как величину заданную, неизменную, то есть считает, что конкурент никак не отреагирует на его действия. Поэтому при дифференцировании функций прибыли каждого из дуополистов объем производства его соперника в качестве константы выносится за знак производной. В условиях равновесия по Нэшу в дуополии Курно производные прибыли каждого из олигополистов должны одновременно равняться нулю:

$$\begin{cases}\frac{\partial PR_1}{\partial q_1}=a-c-2bq_1-bq_2=0,\\ \frac{\partial PR_2}{\partial q_2}=a-c-2bq_2-bq_1=0.\end{cases} \quad (6.86)$$

Следовательно, функции реакции дуополистов будут иметь следующий вид:

$$q_i=\frac{a-c}{2b}-\frac{q_j}{2}, i,j=\{1,2\}. \quad (6.87)$$

Функции реакции показывают, как будет меняться объем производства каждой из фирм в ответ на вариацию выпуска конкурента. Решая данную систему, находим оптимальный объем производства каждого из делящих рынок поровну дуополистов Курно с одинаковыми и постоянными предельными издержками (рис. 6.34):

$$q_i^*=\frac{a-c}{3b}, i=\{1,2\}. \quad (6.88)$$

Прибыли дуополистов в состоянии равновесия по Курно-Нэшу составят:

$$PR_1=PR_2=\frac{(a-c)^2}{9b}.$$

Конкуренции фирм по Курно соответствуют нулевые предположительные вариации для каждой из фирм: $\lambda_i=0, i=\{1,2\}$. Это означает именно то, что предполагается в данной модели: при определении оптимального объема производства каждая из фирм считает выпуск соперника неизменным, установленным на уровне текущей величины. Если предположить, что функции издержек олигополистов и функция спроса являются линейными: $TC_i=cq_i, i=\{1,2\}$, $P=a-bQ$, функции реакции дуополистов Курно согласно общему условию максимизации прибыли несовершенного конкурента (6.84) будут иметь тот вид, который был нами получен только что выше.

Проанализируем теперь последовательное, итеративное взаимодействие между дуополистами Курно в дискретном времени. Вначале одна из фирм, полагая себя единственным производителем в отрасли, будет вести себя подобно монополии, максимизирующей прибыль:

$$MR_1=a-2bQ_1=MC=c.$$

Очевидно, что оптимальным для нее будет монопольный объем производства (рис. 6.35):

$$Q_1=\frac{a-c}{2b}.$$

Далее, вторая фирма будет действовать, принимая во внимание объем выпуска первой $(P_2=a-bQ_1-bQ_2)$, но при этом предполагая его постоянной величиной:

$$MR_2=a-bQ_1-2bQ_2=MC=c.$$

Отсюда получаем:

$$Q_2=\frac{a-c}{2b}-\frac{Q_1}{2}=\frac{a-c}{2b}-\frac{a-c}{4b}=\frac{a-c}{4b}.$$

На третьей итерации первая фирма так же будет уже учитывать остаточный спрос на свою продукцию: $P_3=a-bQ_2-bQ_3$, а значит,

$$MR_3=a-bQ_2-2bQ_3=c,$$

т.е.

$$Q_3=\frac{a-c}{2b}-\frac{Q_2}{2}=\frac{a-c}{2b}-\frac{a-c}{4b}+\frac{a-c}{8b}=\frac{a-c}{4b}+\frac{a-c}{8b}=\frac{3(a-c)}{8b}.$$

Очевидно, что оптимальный ответ каждого из дуополистов на заданный объем производства конкурента будет иметь вид (6.87). Таким образом, *n*-ая итерация даст:

$$Q_n=\frac{a-c}{2b}-\frac{Q_{n-1}}{2}=\frac{a-c}{2b}-\frac{a-c}{4b}+\frac{a-c}{8b}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(a-c)}{2^nb}. \quad (6.89)$$

Суммируя геометрическую прогрессию в правой части данного выражения, получаем:

$$Q_n=\frac{(a-c)}{3b}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right),$$

а значит,

$$\lim_{n\to\infty} Q_n=\frac{(a-c)}{3b}. \quad (6.90)$$

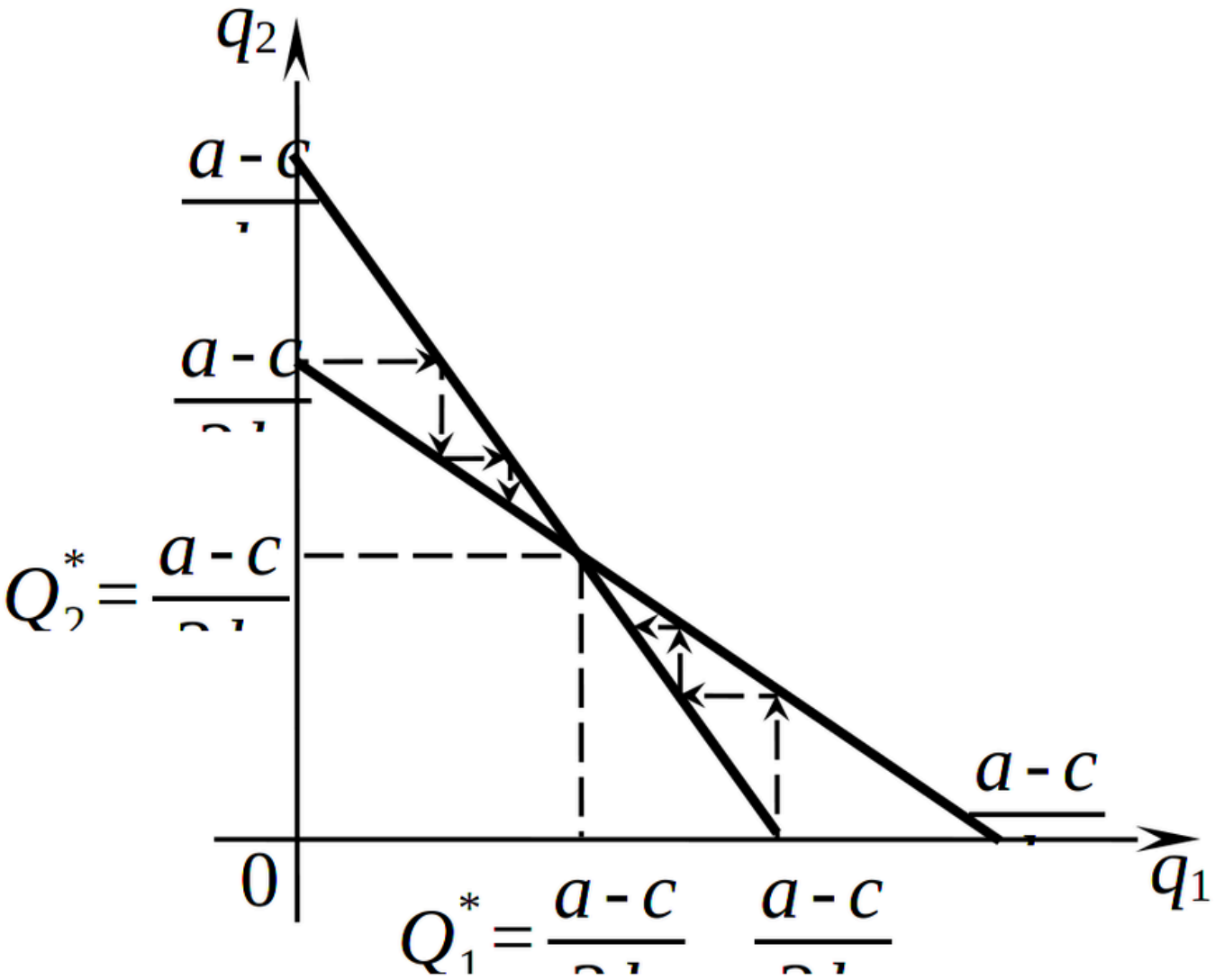


Рисунок 6.34. Равновесие Курно–Нэша

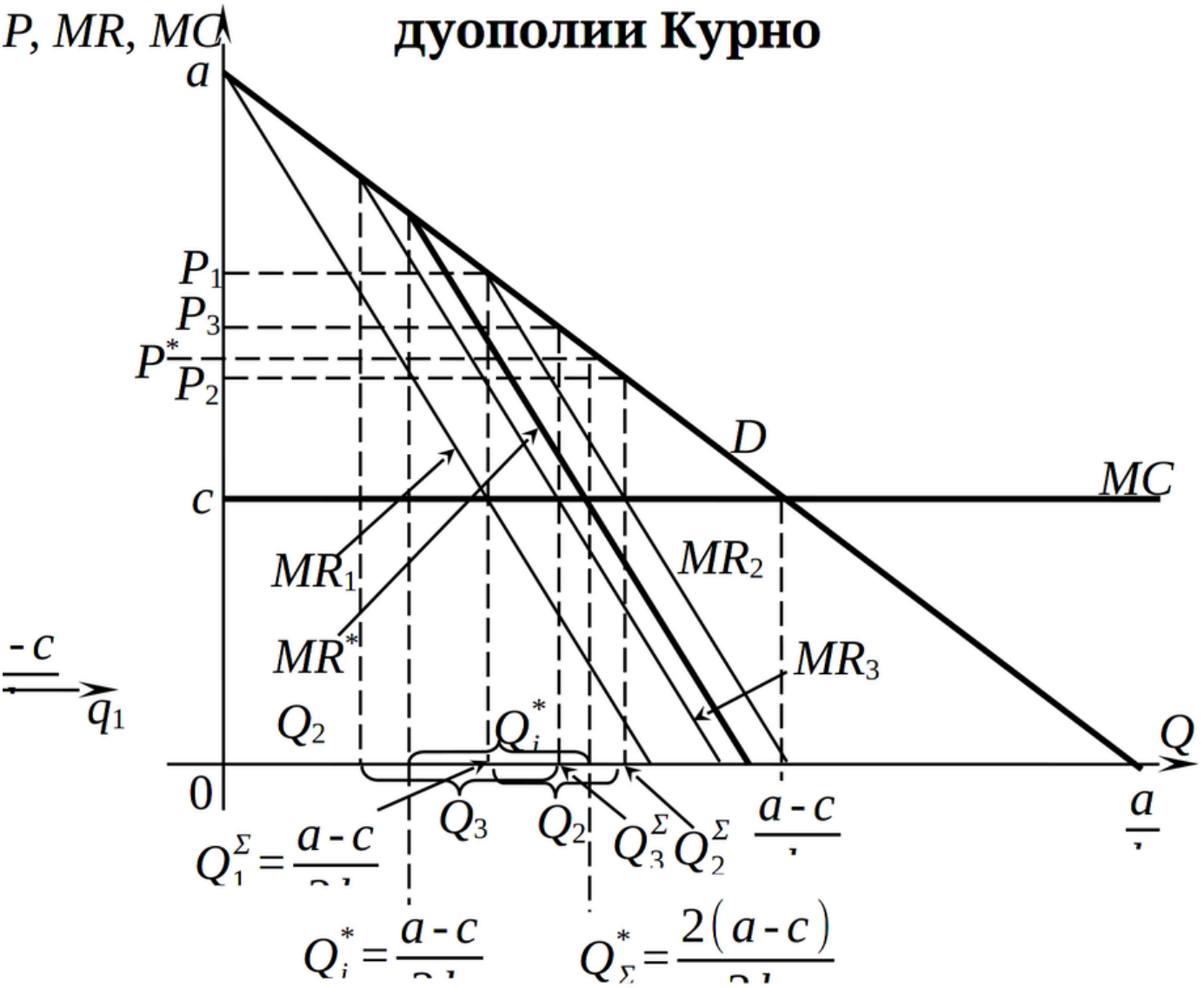


Рисунок 6.35. Итеративное определение объема производства фирмы и отрасли при дуополии Курно

Покажем теперь, как к тем же результатам приводит взаимодействие дуополистов Курно в непрерывном времени. Исходное уравнение в конечных разностях вытекает из анализа модели Курно в дискретном времени. Вычитая Q_{n-1} из левой и правой частей первого равенства в формуле (6.89), получаем:

$$Q_n - Q_{n-1} = \frac{a-c}{2b} - \frac{3}{2}Q_{n-1}.$$

Этому конечно-разностному – соответствует дифференциальное уравнение:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{a-c}{2b} - \frac{3}{2}Q(t), \text{ или } \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{3}{2}Q(t) = \frac{a-c}{2b}. \quad (6.91)$$

Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (6.91) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного. Поэтому для решения данного уравнения необходимо вначале решить соответствующее однородное уравнение:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{3}{2}Q.$$

Разделяя переменные, интегрируем данное уравнение:

$$\int d\ln|Q| = -\frac{3}{2}\int dt + \ln c_1,$$

или

$$\ln|Q| = -\frac{3}{2}t + \ln c_1.$$

Потенцируя, получаем общее решение анализируемого однородного уравнения:

$$Q(t) = c_1 e^{-\frac{3}{2}t}.$$

Для решения исходного неоднородного уравнения (6.91) применяем метод вариации постоянной:

$$Q(t) = c_1(t) e^{-\frac{3}{2}t}.$$

Подставляем данное выражение в (6.91):

$$\frac{dc_1(t)}{dt}e^{-\frac{3}{2}t}-\frac{3}{2}c_1(t)e^{-\frac{3}{2}t}=\frac{a-c}{2b}-\frac{3}{2}c_1(t)e^{-\frac{3}{2}t}.$$

Проводя очевидные упрощения и разделяя переменные, получаем:

$$dc_1(t)=\frac{(a-c)}{2b}e^{\frac{3}{2}t}dt=\frac{(a-c)}{3b}de^{\frac{3}{2}t}.$$

Интегрируя, находим множитель

$$c_1(t)=\frac{(a-c)}{3b}e^{\frac{3}{2}t}+c_2.$$

Следовательно, решение неоднородного уравнения (6.91) имеет вид:

$$Q(t)=c_1e^{-\frac{3}{2}t}+\frac{a-c}{3b}.$$

где

$$c_1=Q(0)-\frac{a-c}{3b}.$$

т.е.

$$Q(t)=\frac{a-c}{3b}+\left(Q(0)-\frac{a-c}{3b}\right)e^{-\frac{3}{2}t}.$$

В пределе аналогично (6.90) получаем оптимальный объем производства каждого из дуополистов Курно (6.88):

$$\lim_{t\to\infty}Q(t)=\frac{(a-c)}{3b}.$$

Возможно обобщение модели дуополии Курно на ситуацию с n фирмами, взаимодействующими в отрасли, когда рыночная цена при предположении о линейности рыночного спроса будет определяться соотношением:

$$P=a-b\sum_{i=1}^{n}q_i.$$

Будем предполагать, как и ранее, постоянство предельных издержек: $MC=c$.

Тогда максимизация прибыли каждой из фирм-олигополистов задает систему уравнений реакции:

$$\begin{cases} a-bQ-q_1b=c, \\ a-bQ-q_2b=c, \\ \quad\cdots \\ a-bQ-q_nb=c. \end{cases}$$

Суммируя построчно равенства в данной системе, получаем: $na-(n+1)bQ=nc$, т.е. объем производства отрасли в целом составит:

$$Q=\frac{n(a-c)}{(n+1)b}.$$

Объем производства каждой из фирм в отдельности будет определяться соответствующим уравнением реакции в системе выше:

$$q_i=\frac{a-c}{b}-Q=\frac{a-c}{(n+1)b}=\frac{Q}{n}. \quad (6.92)$$

Обратим внимание на то, что в условиях конкурентного равновесия спрос равняется предложению – предельным издержкам с: $Q_c=\frac{a-c}{b}$. Выпуск каждого из олигополистов Курно (6.92), равный $\frac{1}{n+1}$ объема производства конкурентной отрасли, при большом числе производителей на рынке незначительно отличается от количества продукции конкурентной фирмы $q_i^c=\frac{Q_c}{n}=\frac{a-c}{nb}$.

Таким образом, с ростом количества фирм равновесие в модели олигополии Курно приближается к конкурентному, когда спрос равняется предложению – предельным издержкам [6]:

$$Q_c=\frac{a-c}{b}.$$

Действительно, в условиях олигополии Курно, когда предположительные вариации равны нулю $(\lambda_i=0)$, условие максимизации прибыли фирмой – несовершенным конкурентом (6.84) принимает вид:

$$p(Q)\left(\frac{\rho_i}{\epsilon_p^d}+1\right)-MC_i=0.$$

При неограниченном увеличении числа фирм их рыночные доли будут стремиться к нулю, и условие максимизации прибыли в пределе будет совпадать с правилом для совершенно конкурентной фирмы (2.142).

Возможно развитие модели Курно, когда один из конкурентов выступает в роли фирмы-лидера. Рассмотрим простейшую ситуацию, когда на рынке присутствуют только две фирмы – лидер и последователь. Фирма-последователь, принимая решение об оптимальной для себя величине выпуска, воспринимает объем производства лидера как величину заданную, фиксированную, т.е. ведет себя подобно конкуренту по Курно. Фирма-лидер знает о таком стиле поведения последователя и учитывает это при принятии решения об оптимальном объеме производства. Это поведение фирм описывает модель дуополии Штакельберга [7].

Пусть в дуополии Штакельберга рыночный спрос описан линейной функцией, а предельные издержки постоянны и равны для фирм, из которых первая является лидером. В соответствии с предположением модели, поведение последователя характеризуется уравнением реакции, которое известно лидеру и учитывается им при построении своей функции прибыли

$$PR_1 = TR_1 - TC_1 = (a - b(q_1 + q_2))q_1 - cq_1 = \left(a - b\left(q_1 + \frac{a-c}{2b} - \frac{q_1}{2}\right)\right)q_1 - cq_1 = \frac{(a-c)}{2}q_1 - \frac{b}{2}q_1^2$$

и определении оптимального объема производства

$$\frac{\partial PR_1}{\partial q_1} = \frac{a-c}{2} - bq_1 = 0.$$

Следовательно,

$$q_1 = \frac{a-c}{2b}, q_2 = \frac{a-c}{4b}.$$

Максимизируя прибыль, фирма-лидер переходит на самую низкую изопрофиту, которая имеет хотя бы одну общую точку с линией реакции последователя (рис. 6.36).

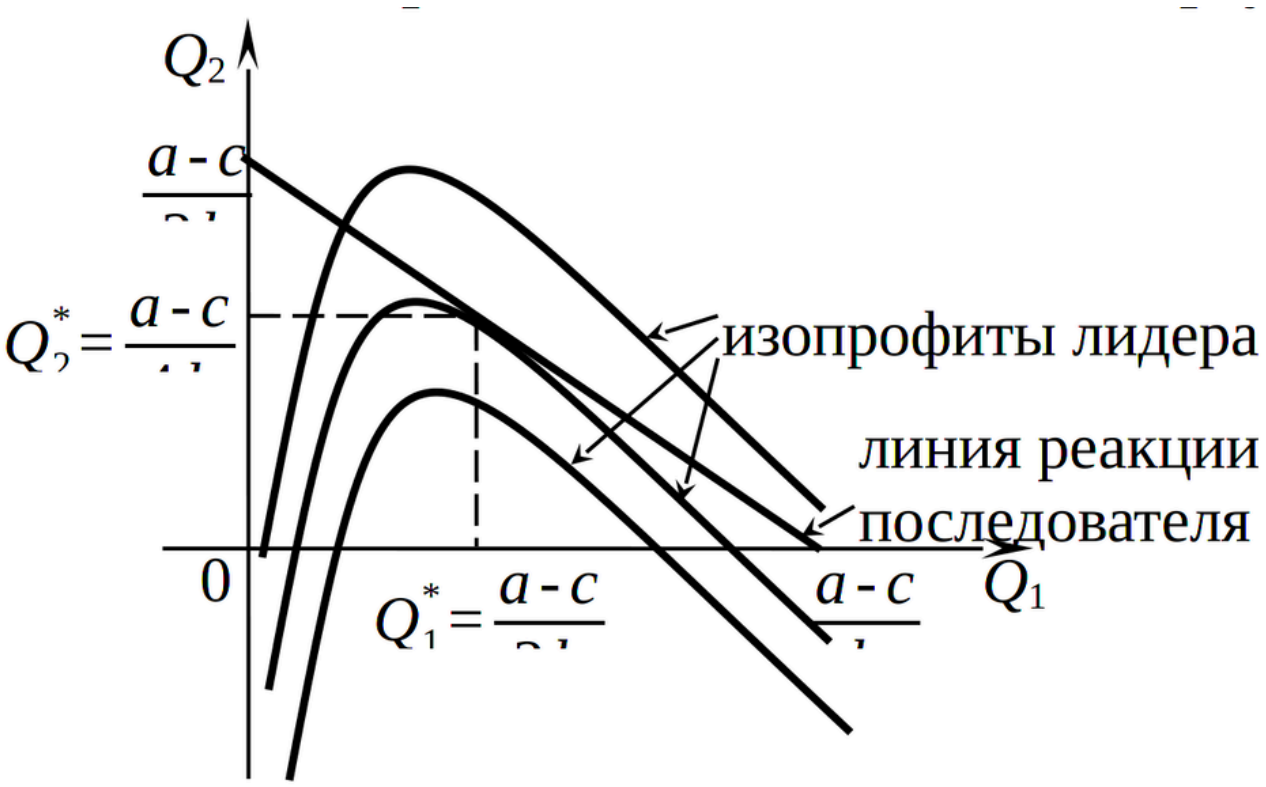


Рисунок 6.36. Равновесие в дуополии с лидерством в объемах производства по Штакельбергу

Графически равновесие в модели лидера-последователя по объему выпускаемой продукции можно проиллюстрировать точкой касания изопрофиты лидера

$$q_2 = \frac{a-c}{b} - q_1 - \frac{\overline{PR}_1}{bq_1},$$

то есть линии равной прибыли, которая имеет перевернутый U-образный вид, и линии реакции последователя [8].

Так же, как и дуополия Курно, равновесие в модели Штакельберга может быть проанализировано с помощью общего правила максимизации прибыли фирмой-несовершенным конкурентом (6.84). Поскольку в модели количественного лидерства Штакельберга последователь (с номером *i*=2) действует как дуополист Курно при $\lambda_2 = 0$, постольку, при линейных функциях издержек олигополистов и функции спроса: $TC_i = cq_i, i = \{1, 2\}$, $P = a - bQ$, предположительная вариация лидера $\lambda_1 = \frac{\partial q_2}{\partial q_1} = -\frac{1}{2}$.

Возможен также анализ видоизмененной модели Штакельберга, когда обе фирмы претендуют на роль лидеров. В этом случае при линейных издержках и спросе данная величина предположительной вариации будет характеризовать поведение каждой из фирм: $\lambda_1 = \lambda_2 = -½$.

Рассмотрим теперь обобщение модели олигополии Штакельберга на ситуацию, когда на рынке присутствует n фирм, в том числе одна фирма-лидер и n-1 фирм-последователей. Допустим, что рыночный спрос имеет вид $P = a - bQ$, а предельные издержки постоянны: $MC = c$.

Максимизация прибыли каждой из n-1 фирм-последователей задает систему:

$$\begin{cases} a - bQ - q_1 b = c, \\ a - bQ - q_2 b = c, \\ \cdots \\ a - bQ - q_{n-1} b = c. \end{cases}$$

Суммируя построчно равенства в данной системе:

$$(n-1)a - (n-1)b(Q_L + q_L) - bQ_L = (n-1)c,$$

можно получить зависимость между совокупным выпуском всех фирм-последователей (Q_L) и выпуском лидера (q_L):

$$Q_L = \frac{(n-1)(a-c)}{nb} - \frac{(n-1)}{n} q_L.$$

Учитывая данное соотношение в своей функции прибыли:

$$PR_L = (a - bQ)q_L - cq_L = (a-c)q_L - bQ_L q_L - bq_L^2 = \frac{(a-c)}{n} q_L - \frac{b}{n} q_L^2,$$

фирма-лидер в соответствии с необходимым условием ее максимума рассчитывает оптимальный объем производства:

$$q_L = \frac{a-c}{2b}.$$

Следовательно, выпуск последователей составит:

$$Q_L = \frac{(n-1)(a-c)}{2nb}, q_j = \frac{a-c}{2nb}.$$

Обратим внимание на то, что независимо от числа фирм-последователей, выпуск лидера равен половине отраслевого выпуска в условиях совершенной конкуренции.

Полярными рыночными структурами являются совершенная конкуренция и монополия. Олигопольные структуры можно различать в соответствии с тем, к какому из этих полюсов они тяготеют. Соответственно, можно выделять модели олигополии с конкурентным либо с монопольным исходом.

Принципы принятия решений доминирующей фирмой во многом похожи на логику действий монополиста. Доминирующий рыночный субъект зачастую является результатом кооперативных взаимодействий предприятий. Одним из типов таких взаимодействий является формирование картельных образований. Картель – это объединение нескольких (или всех) продавцов (покупателей) – олигополистов на рынке данного товара, которое создается с целью максимизации отраслевой прибыли посредством проведения единой политики на данном рынке, в частности назначения единой цены всеми продавцами (покупателями) и/или согласованное ее изменение, квотирования объемов выпуска (закупок) участников данной организации, а также для централизованного управления условиями производства.

Рынки картельного типа бывают нескольких видов. Во-первых – это собственно картель, то есть объединение экономически и юридически самостоятельных предприятий, ограничивающее между ними конкуренцию. Можно выделить картели по объему (квотовый) и характеристикам производства (специализации), а также картели по ценам и связанным с ними характеристикам (минимальным границам цен, скидкам, ценовому поведению в ходе тендеров и по противодействию иностранным конкурентам и т.п.). Во-вторых – это синдикат, то есть объединение предприятий, теряющих сбытовую самостоятельность, причем образуется сбытовая контора синдиката и предприятия выходят на рынок только через эту контору. И, наконец, в-третьих – это трест, то есть объединение предприятий, теряющих производственную и сбытовую самостоятельность. Предприятия в этом случае объединяются в единую фирму. Перечисленные выше формы ограничений конкуренции можно рассматривать в качестве последовательных ступеней горизонтальной интеграции предприятий, то есть процесса концентрации капитала. Объединения картельного типа в экономике России все больше приобретают ярко выраженный трестовый характер, проявляющийся в функционировании финансово-промышленных групп.

Формально функционирование картеля может быть описано следующим образом. Пусть в картель объединяются n предприятий. Предположим, что картель является полным, то есть все фирмы в отрасли заключают сговор о разделе рынка, формируя тем самым общеотраслевую монополию с производством, сосредоточенным на n отдельных предприятиях. Ключевым элементом картельного соглашения является установление квот (ρ_i) на выпуск для каждого из его участников как долей в совокупном объеме производства: $\rho_i = \frac{q_i}{Q}$.

Каждая фирма – член картеля располагает своей функцией издержек, которая определяется ее производственной функцией, задаваемой технологией производства на данном предприятии. Как правило, предприятия, входящие в картель, технологически обособлены друг от друга, т.е. издержки производства каждого предприятия (TC_j) напрямую не зависят от объемов производства (q_i) других участников картельного сговора: $\frac{\partial TC_j}{\partial q_i} = 0, i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j.$

Руководство картеля будет стремиться решить задачу оптимизации размещения производства на входящих в него предприятиях с целью максимизации совокупной прибыли картеля:

$$\max_{q_i, i=1,\ldots,n} PR = \max_{q_i, i=1,\ldots,n} \left\{ pQ - \sum_{i=1}^{n} TC_i \right\},$$

где $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$ – совокупный выпуск участников картельного сговора, в силу предложения о его полноте совпадающий с общеотраслевым объемом производства.

Необходимым условием максимума прибыли картеля является равенство нулю частных производных его функции прибыли по объемам выпусков подразделений данного монополиста. Картель, максимизирующий совокупную прибыль своих членов, будет распределять квоты между участниками сговора аналогично многозаводской монополии, оптимизирующей распределение наиболее выгодного для себя совокупного выпуска между своими подразделениями:

$$\frac{\partial PR}{\partial q_i} = \frac{\partial TR}{\partial q_i} - \frac{\partial TC}{\partial q_i} = \frac{\partial TR}{\partial Q} \bullet \frac{\partial Q}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial TC_j}{\partial q_i} = 0, i = 1, \ldots, n.$$

Максимизация совокупной прибыли будет достигаться при установлении таких квот для участников картельного сговора, которые уравнивали бы значения предельных издержек каждого из них в отдельности с величиной предельного дохода картеля в целом при оптимальном объеме производства.

Если соглашение о разделе рынка достигнуто и если все фирмы придерживаются своих квот, то объем производства каждой i-й фирмы будет пропорционален выпуску всех остальных членов картеля: $Q_i = Q - q_i = \frac{q_i}{\rho_i} - q_i = q_i \left(\frac{1}{\rho_i} - 1 \right)$. В таких условиях величина предположительной вариации для каждой из фирм будет определяться исходя из соотношения суммарной квоты ее партнеров по

сговору и ее собственной квоты: $\lambda_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_i} = \frac{1-\rho_i}{\rho_i}$. Здесь налицо так называемое параллельное поведение фирм, заключивших монопольный сговор.

При этом максимизация индивидуальной прибыли каждым членом картеля как несовершенным конкурентом с учетом ответной реакции партнеров по разделу рынка, характеризуемой величиной предположительной вариации $\lambda_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_i} = \frac{1-\rho_i}{\rho_i}$ (6.84), будет идентична максимизации прибыли картеля в целом:

$$MR = p(Q)\left(\frac{1}{E_p^d} + 1\right) = MC_i, i = 1, \ldots, n.$$

Картель является неустойчивой рыночной структурой. С одной стороны, экономические силы участников картеля, как правило, не равны, поэтому у сильных участников картеля есть стимул подавить более слабых. С другой стороны, у каждого (*i*-го) участника картеля есть мотив в виде более высокой прибыли к превышению своей квоты в общем выпуске картеля [9]. Если остальные участники картеля (с номерами $j \neq i, j = 1, \ldots, n$) соблюдают соглашение о квотах, то их суммарный выпуск будет составлять $Q_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} q_j = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \rho_j Q = Q \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \rho_j$. Тогда *i*-й член картеля столкнется с остаточным спросом в размере $q_{res}^i = Q - Q \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \rho_j$, где $Q \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \rho_j$ – постоянная величина. Оптимальной конкурентной стратегией для данной фирмы будет уклонение от условий картельного соглашения и максимизация индивидуальной прибыли на остаточном спросе в соответствии с реакцией по Курно. Это значит, что фирма-нарушитель будет руководствоваться общим правилом максимизации прибыли для несовершенного конкурента (6.84) при нулевом коэффициенте предположительной вариации $(\lambda_i = 0)$, когда отраслевой выпуск будет иметь следующее выражение: $Q = q_{res}^i + Q \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \rho_j$. Такая логика будет подталкивать фирму к превышению индивидуальной квоты на выпуск, назначенной ей в рамках картеля. При этом рыночная цена на данный продукт окажется ниже монопольного уровня, что будет негативно сказываться на прибыли остальных участников картельного сговора.

Итак, картель предполагает кооперативное взаимодействие между фирмами на олигопольном рынке. При этом фирмы могут добиться увеличения прибыли по сравнению с конкурентным равновесием по Нэшу. В частности, при линейных функциях спроса $P = a - bQ$ и издержек $TC_i = cq_i$ выпуск картеля в целом составит: $Q = \frac{a-c}{2b}$. Допустим для простоты, что на рынке присутствуют только две фирмы, которые и объединились в картель. Поскольку фирмы идентичны, логично предположить, что и их квоты в рамках картеля будут равны: $q_i = \frac{a-c}{4b}$, $i = \{1, 2\}$. Тогда они будут делить монопольную прибыль пополам: $PR_i = \frac{(a-c)^2}{8b}$.

При этом каждая из фирм (присвоим ей индекс *i*) будет иметь стимул к уклонению от картельного соглашения в соответствии с функцией реакции дуополиста Курно (6.87): $q_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_j}{2}$, – при условии, что ее партнер (с номером *j*) будет придерживаться своей квоты в картеле, производя $q_j = \frac{a-c}{4b}$. В такой ситуации выпуск нарушителя составит: $q_i = \frac{3(a-c)}{8b}$, совокупный выпуск дуополистов достигнет значения $Q = \frac{5(a-c)}{8b}$, рыночная цена установится на уровне $P = \frac{3a+5c}{8}$, а прибыли фирм распределятся следующим образом: $PR_i = \frac{9(a-c)^2}{64b}$, $PR_j = \frac{3(a-c)^2}{32b}$.

Очевидно, что если бы заключение картельного соглашения было невозможно, и фирмы конкурировали бы по Курно, то они производили бы объем продукции $q_i = \frac{a-c}{3b}$, а их прибыли оказались бы равны: $PR_1 = PR_2 = \frac{(a-c)^2}{9b}$.

В таком случае взаимодействие фирм можно было бы представить в игровой форме, аналогичной “дилемме заключенных” (табл. 6.1). В условиях некооперативного взаимодействия между фирмами у каждой из них существует доминирующая стратегия, состоящая в том, чтобы увеличивать производство в соответствии со стратегией Курно. В итоге установится равновесие по Курно-Нэшу. При этом, если бы фирмы придерживались стратегии кооперативного, картельного взаимодействия, то они смогли бы увеличить совокупную прибыль до монопольных размеров (табл. 6.3).

Таблица 6.3. Конкуренция и кооперация в условиях дуополии

		Фирма 2	
		Ограничивать выпуск картельной квотой	Увеличивать выпуск по стратегии Курно
Фирма 1	Ограничивать выпуск картельной квотой	$\frac{(a-c)^2}{8b}, \frac{(a-c)^2}{8b}$	$\frac{3(a-c)^2}{32b}, \frac{9(a-c)^2}{64b}$
	Увеличивать выпуск по стратегии Курно	$\frac{9(a-c)^2}{64b}, \frac{3(a-c)^2}{32b}$	$\frac{(a-c)^2}{9b}, \frac{(a-c)^2}{9b}$

Для того чтобы картельная организация была устойчива, посягательства на уклонение от условий сговора должны пресекаться радикальными экономическими санкциями по отношению к нарушителю. Жесткость этих мер зависит от соотношения потенциальных размеров выигрыша отдельной фирмы в случае нарушения картельного соглашения и ее гарантированной прибыли при соблюдении договоренности с партнерами.

Предположим, что изначально все фирмы, заключившие картельное соглашение, производят одинаковый объем продукции q_i^{cart}. Их совокупный объем производства составляет

$$Q_{cart} = \sum_{i=1}^{n} q_i^{cart},$$

а прибыль каждого из участников картеля достигает величины

$$PR_i^{cart} = P\left(Q_{cart}\right) q_i^{cart} - TC_i^{cart}\left(q_i^{cart}\right),$$

где $P(\bullet)$ – функция рыночного спроса на продукцию картеля.

Допустим, что одна из фирм нарушает картельное соглашение и превышает свою квоту, увеличивая объем выпускаемой продукции до q_i^{dev}. При этом, если остальные фирмы сохранят свой объем производства, то в данный момент она получит прибыль

$$PR_i^{dev}=P\left(Q_{cart}^{dev}\right)q_i^{dev}-TC_i^{dev}\left(q_i^{dev}\right).$$

Из-за того, что совокупный объем производства в отрасли возрастет:

$$Q_{cart}^{dev}=q_i^{dev}+\sum_{i=1}^{n-1}q_i^{cart},$$

а рыночная цена $P\left(Q_{cart}^{dev}\right)$ сократится, прибыль всех остальных участников картельного соглашения снизится до некоторого уровня

$$\check{PR}_i^{cart}=P\left(Q_{cart}^{dev}\right)q_i^{cart}-TC_i^{cart}\left(q_i^{cart}\right).$$

Очевидно, что такое оппортунистическое поведение фирмы-нарушителя неизбежно повлечет санкции (S) со стороны остальных участников картеля. Возможным ответом может стать увеличение ими объема производства до определенного уровня $\hat{q}_i^{cart}$, который позволит увеличить их прибыль до уровня

$$\widehat{PR}_i^{cart}=P\left(\widehat{Q}_{cart}^{dev}\right)\hat{q}_i^{cart}-TC_i^{cart}\left(\hat{q}_i^{cart}\right)$$

и наказать нарушителя уменьшением его чистого дохода до величины

$$\check{PR}_i^{dev}=P\left(\widehat{Q}_{cart}^{dev}\right)q_i^{dev}-TC_i^{dev}\left(q_i^{dev}\right).$$

Тогда, если предположить, что нарушение обнаруживается в следующем периоде после того, как оно произошло, а действие картеля распространяется на неограниченно долгое время, то дисконтированный выигрыш фирмы-нарушителя составит:

$$PR_i^{dev}+\frac{\check{PR}_i^{dev}}{1+r}+\cdots+\frac{\check{PR}_i^{dev}}{(1+r)^n}+\cdots=PR_i^{dev}+\frac{\check{PR}_i^{dev}}{r},$$

где r – банковская ставка процента.

Если потенциальный нарушитель предпочтет отказаться от посягательств на картельное соглашение, то его гарантированная дисконтированная прибыль будет такой же, как и у остальных членов картеля:

$$PR_i^{cart}+\frac{PR_i^{cart}}{1+r}+\cdots+\frac{PR_i^{cart}}{(1+r)^n}+\cdots=\frac{PR_i^{cart}(1+r)}{r}.$$

Для того чтобы картель был устойчивым, дисконтированный выигрыш при уклонении от выполнения его условий не должен превышать выгод от их соблюдения:

$$\frac{PR_i^{cart}(1+r)}{r}=PR_i^{cart}+\frac{PR_i^{cart}}{r}\geq PR_i^{dev}+\frac{\check{PR}_i^{dev}}{r},$$

или после преобразований:

$$S=\frac{PR_i^{cart}-\check{PR}_i^{dev}}{r}\geq PR_i^{dev}-PR_i^{cart}.$$

Таким образом, чистая приведенная стоимость наказания должна быть не меньше выигрыша фирмы-нарушителя по сравнению с остальными участниками картельного соглашения. Наказание S должно отвечать интересам рядовых участников картельного соглашения. Оно должно не только не наносить им самим дополнительный ущерб, но повышать их прибыль в случае появления нарушителя:

$$\widehat{PR}_i^{cart}\geq\check{PR}_i^{cart}.$$

Понимая это, потенциальный нарушитель будет рассматривать в качестве достоверной угрозу такого наказания, что будет являться стимулом к соблюдению картельного соглашения, гарантируя его устойчивость.

Всем фирмам, действующим на рынке данного товара, не всегда удается договориться о заключении всеобъемлющего картельного соглашения. Часто в картель входит лишь часть фирм, присутствующих на рынке. В этом случае на рынке будет наблюдаться ситуация неполного картеля, когда за его рамками остается ряд некартелированных предприятий. В своем поведении неполный картель будет руководствоваться теми же принципами, что и единая квазимонопольная фирма – ценовой лидер. Поэтому в качестве обобщения модели картеля в его неполном случае может рассматриваться модель доминирующей фирмы по Форхаймеру, в которой в качестве фирмы-лидера будет выступать картельное объединение нескольких юридически самостоятельных фирм.

В модели лидерства в ценах по К. Форхаймеру [10] предполагается, что доминирующая фирма, обладающая значительной долей общего рыночного объема продаж [11], максимизирует функцию прибыли и выбирает в результате этого оптимальную для себя цену. Цена, установленная лидером из индивидуальных соображений, становится единой для всех остальных фирм-аутсайдеров, которые не способны на стратегическое поведение и принимают ее как заданную рынком. Доминирующая фирма может выделяться из ряда фирм, присутствующих на рынке, преимуществом в издержках. Каждая из фирм конкурентного окружения выбирает исходя из цены, установленной лидером, оптимальный для себя объем производства, руководствуясь правилом: *P=MC*.

Функция предложения $Q_s=Q(p)$ фирм конкурентного окружения может быть получена путем “горизонтального” суммирования, то есть суммирования оптимальных для каждой заданной цены объемов предлагаемой продукции, полученных из условий равенства цены предельным издержкам. Полученное предложение будет покрывать часть общего рыночного спроса (Q_d). Доминирующей фирме будет оставаться лишь часть рыночного спроса за вычетом предложения конкурентного окружения (Q_s). Это так называемый остаточный спрос: $Q_{res}(p)=Q_d-Q_s$.

Важнейшим показателем, характеризующим функцию спроса на продукцию фирмы-лидера, является эластичность. Равенство, аналогичное сформулированному выше определению остаточного спроса доминирующей фирмы, справедливо и для эластичностей, взятых с весами, равными соответствующим долям в выпуске отрасли:

$$E_{res}\rho_L = E_p^d - E_s\rho_c,$$

где E_{res} – ценовая эластичность функции остаточного спроса, $\rho_L = \frac{Q_L}{Q}$ – доля выпуска лидера в совокупном производстве отрасли, E_p^d – эластичность общеотраслевого спроса по цене, E_S – ценовая эластичность предложения фирм конкурентного окружения, а $\rho_c = \frac{Q_s}{Q}$ – доля выпуска фирм-аутсайдеров в отраслевом объеме производства [12] .

Данное соотношение становится очевидным, если продифференцировать тождество, определяющее остаточный спрос фирмы-лидера, по цене и домножить все компоненты равенства на отношение $\frac{P}{Q}$ и, кроме того, домножить и разделить левую часть равенства на Q_L, а второе слагаемое справа – на Q_s: $\frac{dQ_{res}}{dP}\frac{P}{Q}\frac{Q_L}{Q_L} = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q} - \frac{dQ_S}{dP}\frac{P}{Q}\frac{Q_s}{Q_s}$, учитывая при этом определения соответствующих коэффициентов эластичности.

Исходя из остаточного спроса может быть получена функция валового дохода доминирующей фирмы – ценового лидера: $TR = p_{res}(Q_L) \bullet Q_L$, где $p_{res}(Q_L)$ – обратная функция остаточного спроса. Необходимым условием максимизация прибыли фирмы-лидера является равенство ее предельного дохода и предельных издержек: *MR=MC*. Здесь наблюдается квазимонопольное поведение: фирма – ценовой лидер ведет себя подобно монополии с той лишь разницей, что для нее предельная выручка рассчитывается, исходя не из всего рыночного спроса, а лишь из остаточного спроса, то есть спроса за вычетом предложения конкурентного окружения.

Исходя из равенства предельного дохода и предельных издержек фирма-лидер определит для себя оптимальный объем производства Q_L. А с учетом обратной функции остаточного спроса $p_{res}(Q_L)$ доминирующая фирма определит для себя оптимальную цену, которая станет единой для всего рынка.

При уровне цены, для которого аннулируется объем предложения конкурентного окружения, наблюдается излом функции остаточного спроса на продукцию доминирующей фирмы – ценового лидера (рис. 6.37). Ниже излома (участок 2) остаточный спрос совпадает с общим рыночным спросом, так как предложение конкурентного окружения здесь нулевое. Каждому из двух участков остаточного спроса соответствует свой участок графика функции предельного дохода (MR_1 и MR_2). В точке излома графика функции остаточного спроса наблюдается разрыв графика предельной выручки.

Линия предельных издержек *MC* может пересечь либо отрезок MR_1 (рис. 6.37), либо MR_2, либо пройти в разрыве между этими двумя участками графика предельного дохода. Каждому из этих трех случаев будет соответствовать свое оптимальное количество производимой продукции, которое после подстановки в функцию остаточного спроса дает свою единую для рынка цену. По данной цене фирмы-последователи из конкурентного окружения в соответствии со своей функцией предложения предложат на рынке Q_F единиц продукции.

Если линия предельных издержек предприятия, занимающего на рынке доминирующее положение, в модели ценового лидерства К. Форхаймера проходит сквозь разрыв предельной выручки, то наблюдается ситуация “жестких цен” в условиях олигополии. В этом случае в течение некоторого времени может иметь место период относительной устойчивости, стабильности цен, если изменения параметров рыночного спроса или затрат фирмы-лидера не приводят к относительному сдвигу ее графика предельных издержек за границы разрыва предельной выручки. Однако практика показывает, что такие периоды как правило сменяются скачкообразным изменением цен, после чего опять может наблюдаться относительное затишье на рынке.

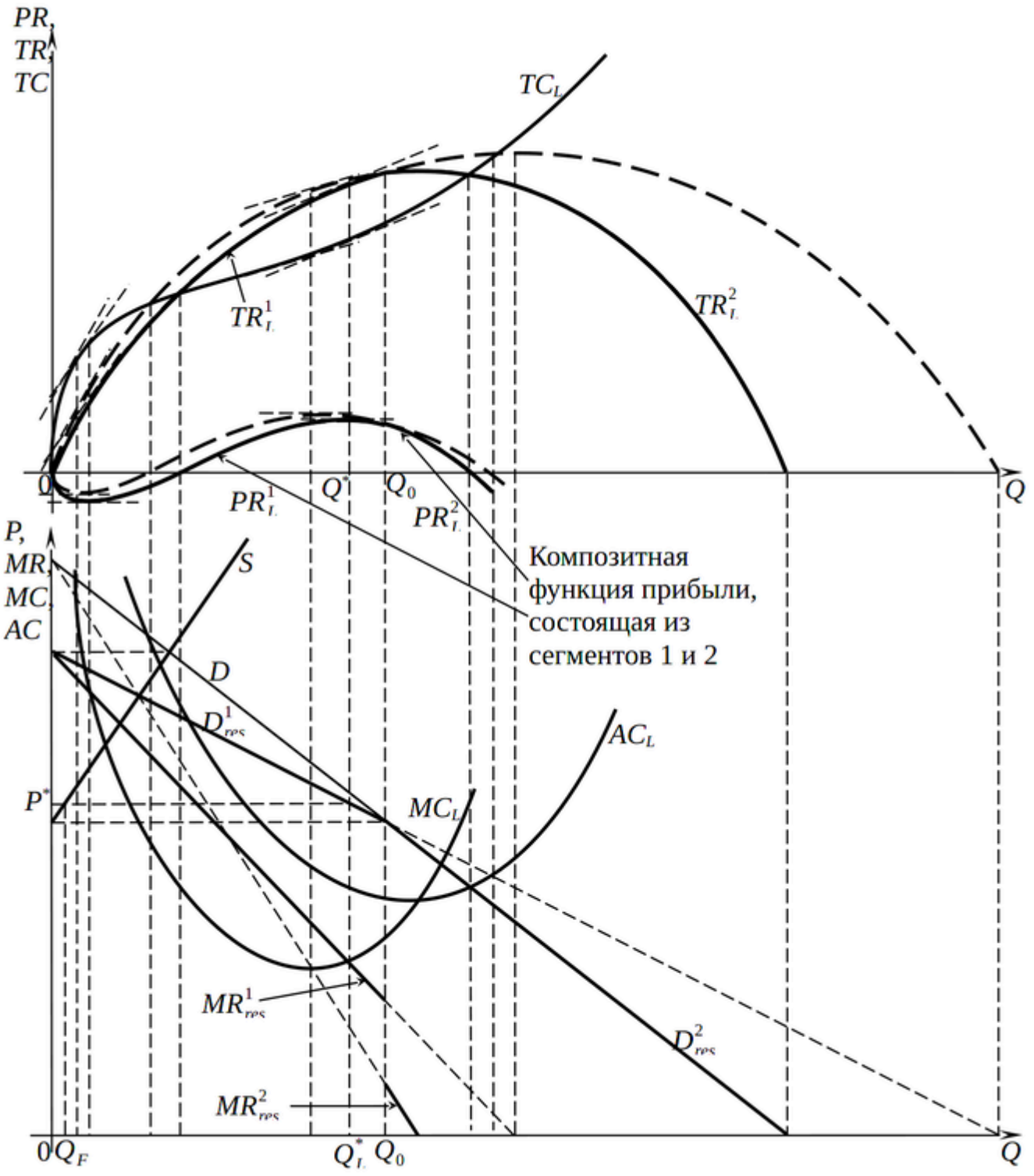


Рисунок 6.37. Характеристики рыночного поведения доминирующей фирмы

Рассмотрим теперь описанное Ж. Бертраном [13] соперничество фирм, обладающих рыночной властью, которое может служить примером модели олигополии с конкурентным исходом. Предположим, что рынок некоторого однородного продукта, характеризуемый линейной функцией спроса $P=a-bQ$, или $Q=\frac{a}{b}-\frac{P}{b}$, обслуживают две фирмы, которые взаимодействуют между собой по Бертрану, конкурируя по уровню цены. Обозначим через Q_1 и Q_2 объемы производства соответственно первой и второй фирм. Очевидно, что $Q_1+Q_2=Q$.

На рынке однородного продукта фирма, назначая цену ниже уровня конкурента, забирает весь объем рыночного спроса. При одинаковых ценах на продукты фирм их приобретение потребителями становится равновероятным, т.е. каждое из предприятий может рассчитывать на половину рыночного спроса. Таким образом, функции остаточного спроса для данных фирм будут симметричными:

$$Q_1 = \begin{cases} \frac{a}{b} - \frac{P_1}{b} при P_2 > P_1, \\ \frac{a}{2b} - \frac{P_1}{2b} при P_1 = P_2, \\ 0 при P_1 > P_2; \end{cases}$$

$$Q_2 = \begin{cases} \frac{a}{b} - \frac{P_2}{b} при P_1 > P_2, \\ \frac{a}{2b} - \frac{P_2}{2b} при P_1 = P_2, \\ 0 при P_2 > P_1. \end{cases}$$

Будем предполагать, что данные фирмы работают в условиях постоянной отдачи от масштаба с постоянными предельными издержками, которые равны средним и составляют соответственно $MC_1 = AC_1 = c_1$ для первой – и $MC_2 = AC_2 = c_2$ для второй фирмы. Очевидно, что, если рыночная цена оказывается выше уровня средних и предельных издержек, то фирмы будут получать положительную экономическую прибыль. При цене, равной средним и предельным издержкам, прибыль фирмы будет нулевой. Если же цена оказывается ниже уровня средних и предельных затрат, то фирма будет нести убытки.

Проанализируем теперь оптимальное реагирование фирм на поведение конкурента. Для этого вначале рассчитаем потенциальные характеристики монопольного поведения каждой из фирм. Из условия максимизации прибыли для фирмы 1 при отсутствии конкурента $(MR = a - 2bQ = c_1)$ получаем $Q = \frac{a - c_1}{2b}$, $P = \frac{a + c_1}{2}$. Аналогично из условия максимизации прибыли для фирмы 2 $(MR = a - 2bQ = c_2)$ получаем $Q = \frac{a - c_2}{2b}$, $P = \frac{a + c_2}{2}$.

Если одна из фирм назначит цену выше уровня предельных издержек другой фирмы, то конкуренту будет выгодно, снизив цену, захватить весь рынок. Если кем-то из дуополистов устанавливается цена выше уровня монопольной цены конкурента, то для соперника появляется возможность максимизации прибыли за счет монополистического ценообразования, рассмотренного выше. Если цена, установленная одной из фирм, оказывается ниже уровня, соответствующего монопольной прибыли ее конкурента, но превышает при этом его средние и предельные издержки, то данная фирма-конкурент постарается минимизировать дисконт (ε) к установленной на рынке цене, ведь при постоянных средних издержках чем выше цена – тем больше прибыль. Установление кем-либо из дуополистов цены на уровне средних и предельных издержек другой – будет означать нулевую прибыль его конкурента, для которого такой финансовый результат будет сохраняться при назначении цены не ниже цены, назначенной соперником. Если один из конкурентов устанавливает цену на каком-то уровне, который будет ниже средних и предельных издержек другого – то вторая фирма может ответить назначением любой цены, превышающей данное ее значение, выбранное соперником, т.к. это будет означать для нее нулевую прибыль. Таким образом, множества реагирования для первой и второй фирмы соответственно будут иметь вид:

$$P_1 = \begin{cases} \frac{a + c_1}{2} при P_2 > \frac{a + c_1}{2}, \\ P_2 - \varepsilon при c_1 < P_2 \le \frac{a + c_1}{2}, \\ c_1 + \alpha при P_2 = c_1, \\ P_2 + \beta при P_2 < c_1; \end{cases}$$

$$P_2 = \begin{cases} \frac{a + c_2}{2} при P_1 > \frac{a + c_2}{2}, \\ P_1 - \varepsilon при c_2 < P_1 \le \frac{a + c_2}{2}, \\ c_2 + \alpha при P_1 = c_2, \\ P_1 + \beta при P_1 < c_2. \end{cases}$$

Здесь $\varepsilon = o(1)$ – бесконечно малая величина, $\alpha \ge 0$, $\beta > 0$. Для того, чтобы показать предельных характер сегментов реагирования фирм $P_1 = P_2 - \varepsilon$ и $P_2 = P_1 - \varepsilon$, они изображены на рис. 6.38 пунктирными линиями.

Равновесие по Нэшу будет соответствовать пересечению множеств реакции дуополистов.

Если фирмы являются идентичными с точки зрения используемой технологии и издержек производства $(c_1 = c_2 = c)$, то равновесие по Нэшу будет заключаться в назначении одинаковых цен на уровне издержек производства: $P_1 = P_2 = c$. Действительно, отклоняясь от данной стратегии, фирма не может увеличить свою прибыль. В данной ситуации равновесие по Нэшу характеризуется точкой E^* на рис. 6.38.

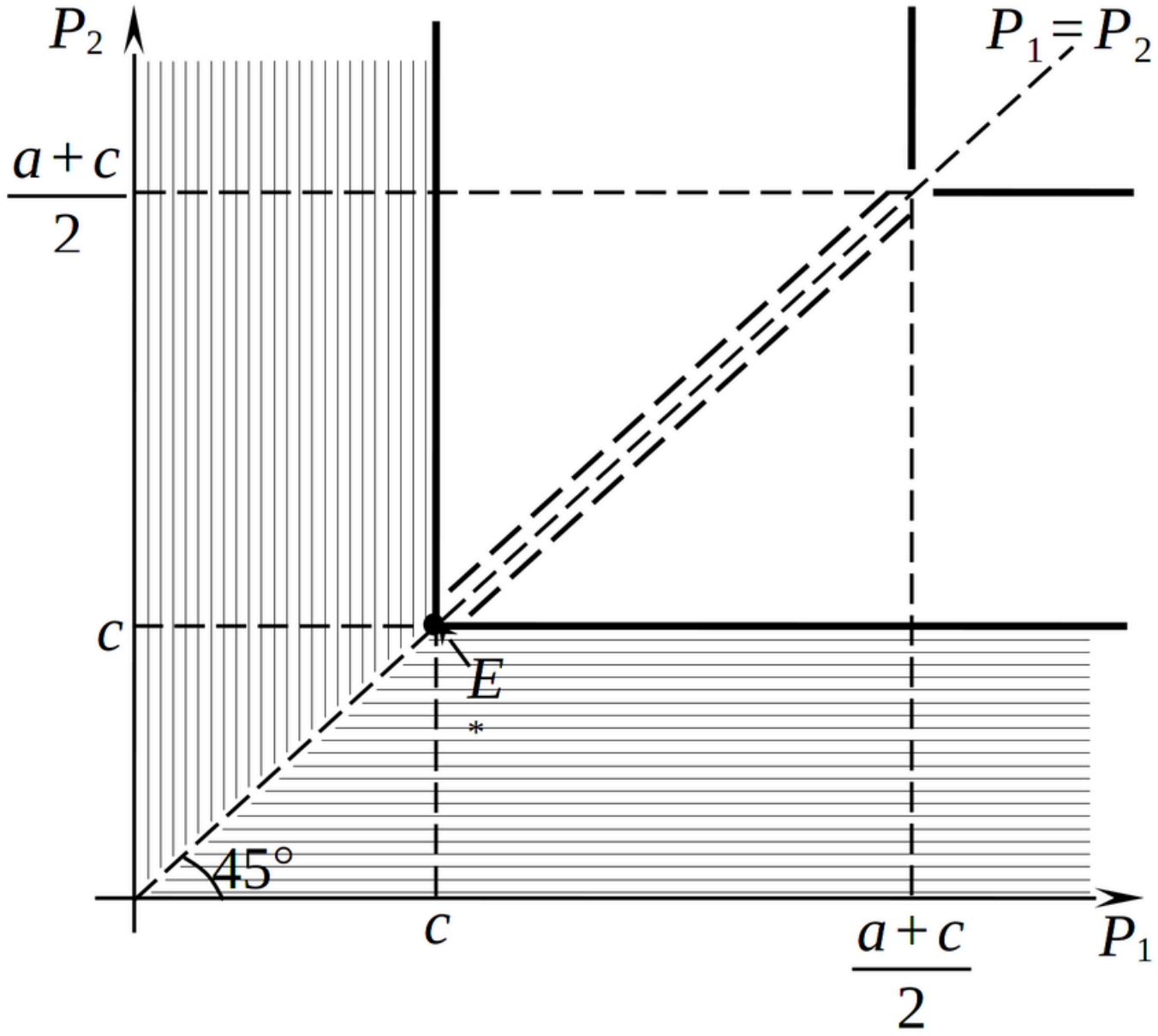


Рисунок 6.38. Взаимодействие идентичных фирм по Бертрану

При этом фирмы будут делить рынок пополам: $Q_1 = Q_2 = \frac{a-c}{2b}$, получая при этом нулевую экономическую прибыль. Таким образом, модель Бертрана характеризует ситуацию ценовой войны между олигополистами, которая приводит к парадоксальным последствиям, когда конкуренты, стремясь завоевать весь рынок, постепенно снижают цены ниже уровня, установленного соперниками, до порогового значения, соответствующего ситуации безубыточности репрезентативной фирмы, характерной для структуры совершенной конкуренции (рис. 6.39).

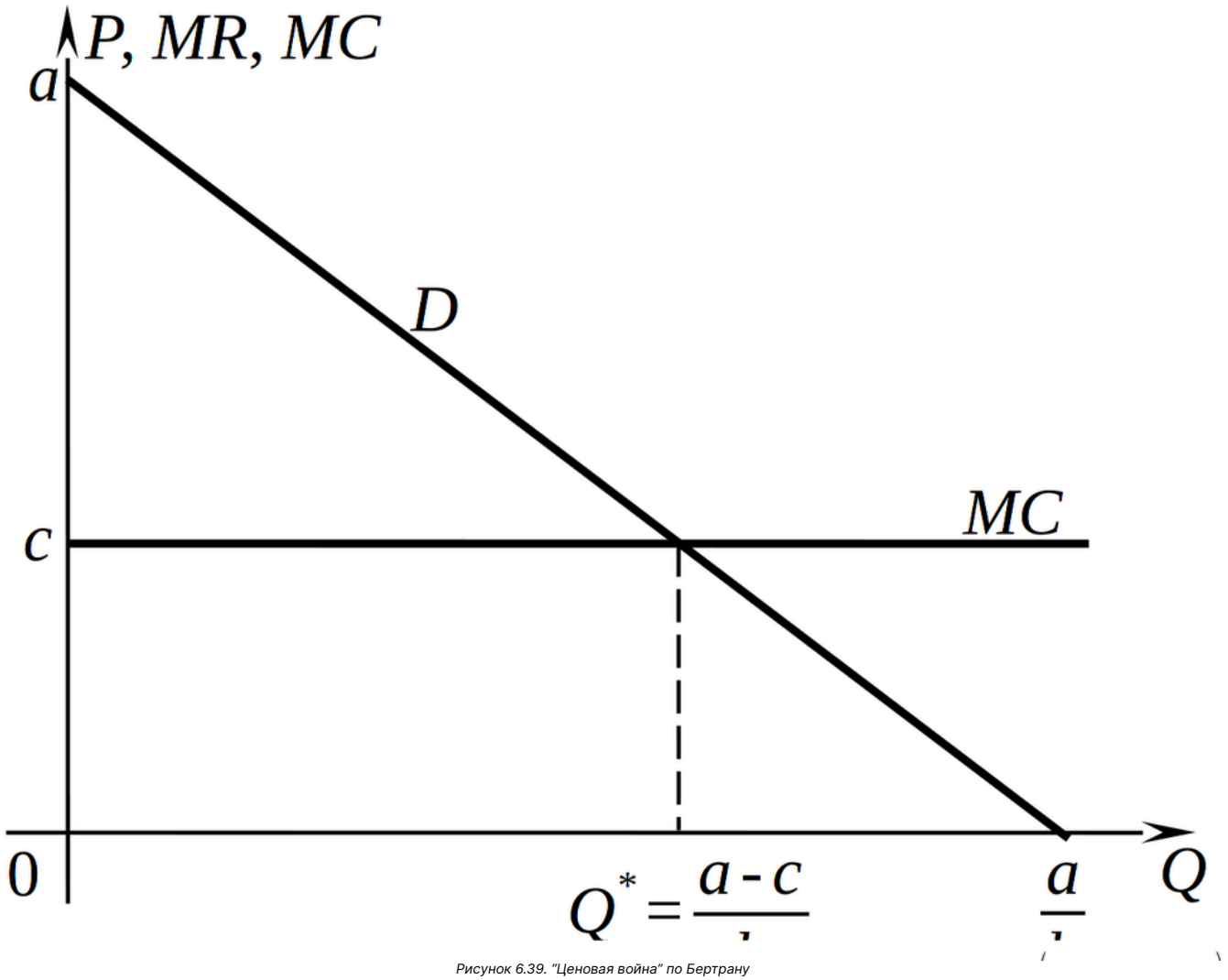


Рисунок 6.39. "Ценовая война" по Бертрану

Если фирмы различаются по своим технологиям производства $(c_1 \neq c_2)$, то равновесие по Нэшу оказывается неединственным. Пусть для определенности первая фирма имеет преимущество в издержках производства: $c_1 < c_2$. При этом она, обладая более передовой технологией, имеет возможность назначить цену ниже уровня предельных и средних издержек конкурента и при этом оставаться прибыльной: $c_1 < P_1 < c_2$. Вторая фирма, избегая убытков и отвечая на действия первой, будет назначать цену выше той, которая будет установлена соперником: $P_2 > P_1$. Если первая фирма назначит цену на уровне средних и предельных издержек второй $(P_1{=}c_2)$, то ее соперник отреагирует, устанавливая цену на этом же уровне или выше него: $P_2 \geq c_2$.

Пересечение множеств реакции фирм $c_1 < P_1{=}P_2{-}\varepsilon \leq c_2$ и $c_1 < P_1{+}\varepsilon{=}P_2 \leq c_2{+}\varepsilon$ будет задавать равновесия по Нэшу, которые определяются в предельном смысле, с учетом того, что $\varepsilon{=}o(1)$ – это бесконечно малая величина (рис. 6.40).

В этих условиях вторая фирма теряет, а первая – приобретет весь объем рыночного спроса:

$$Q_1{=}\tfrac{a{-}P_1}{b}{=}\tfrac{a{-}P_2{+}\varepsilon}{b}; Q_2{=}0.$$

Соответственно, первая фирма будет получать положительную экономическую прибыль:

$$PR_1{=}(P_1{-}c_1)Q_1{=}\tfrac{(c_2{-}c_1{-}\varepsilon)(a{-}c_2{+}\varepsilon)}{b}{=}\tfrac{(c_2{-}c_1)(a{-}c_2)}{b}{+}\varepsilon\tfrac{(2c_2{-}c_1{-}a{-}\varepsilon)}{b}.$$

Финансовый результат второй фирмы окажется нулевым: $PR_2{=}0$.

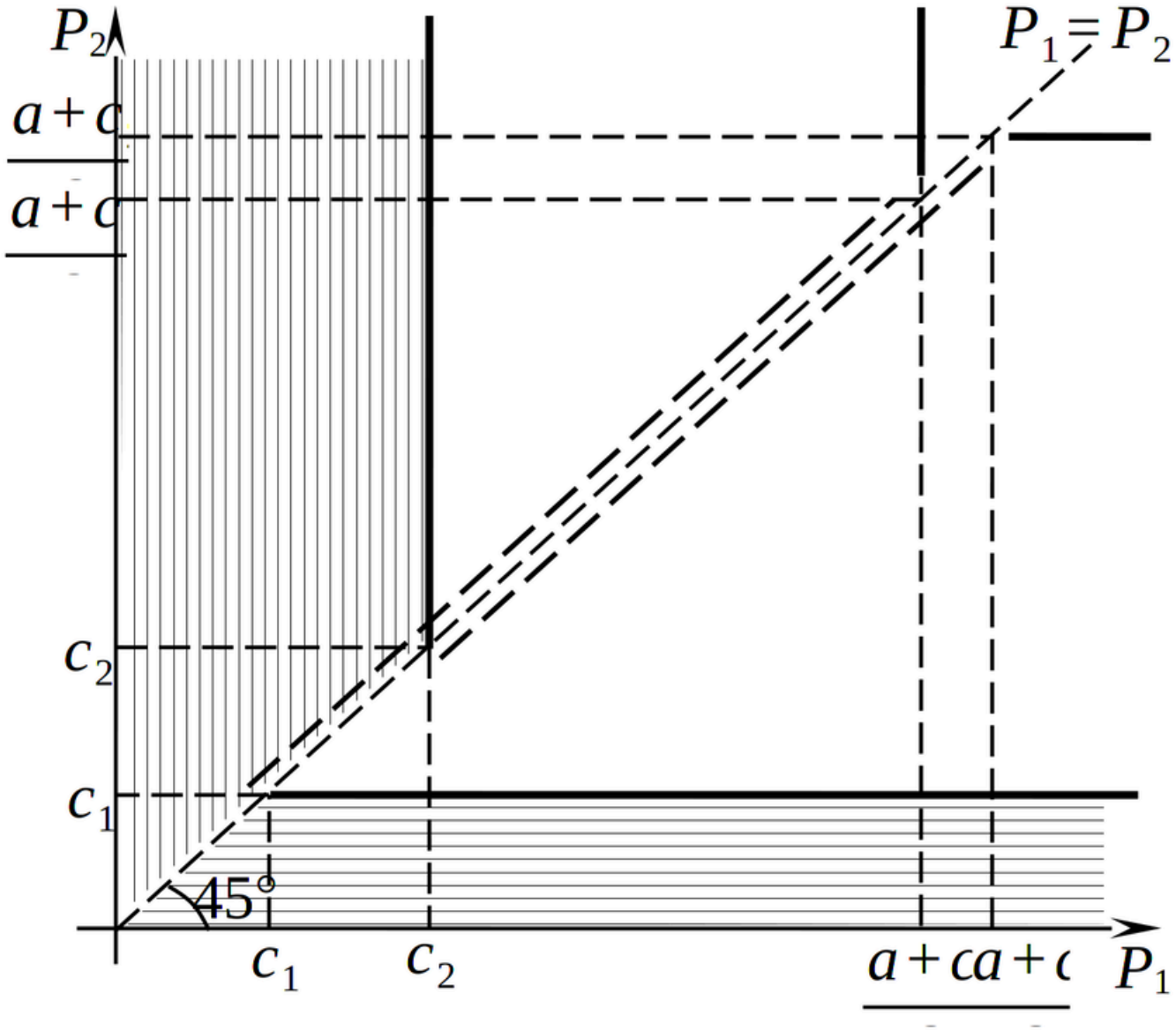


Рисунок 6.40. Взаимодействие по Бертрану фирм, различающихся по уровню предельных издержек

Логика взаимодействия фирм по Бертрану может быть использована при анализе устойчивости картельных или аналогичных им соглашений [14] . Рассмотрим бесконечно повторяющееся взаимодействие *N* идентичных фирм с одинаковыми постоянными предельными $MC_i=c$ и нулевыми постоянными издержками по логике модели Бертрана с дисконтирующим множителем $0 < \delta < 1$.

Оправданной стратегией *i*-й фирмы с точки зрения достижения негласного сговора будет назначение монопольной цены на продукт p_m и выпуск $q_i^m=\frac{q_m}{N}$ (ед.) продукции, где q_m – это монопольный объем производства, до тех пор, пока все остальные фирмы придерживаются той же стратегии, и установление конкурентной цены на уровне предельных издержек $p_c=MC_i=c$ раз и навсегда, как только какая-то из других фирм снизит цену: $p_j < p_m$.

Прибыль *i*-й фирмы, участвующей в негласном сговоре будет равна:

$$PR_i^m=\frac{(p_m\text{-}c)q_m}{(1\text{-}\delta)N}.$$

Прибыль фирмы, уклоняющейся на *n*-м шаге от соблюдения условий негласного соглашения, при условии обнаружения несоблюдения общепринятых среди участников картеля правил и наказания нарушителя на следующем шаге составит:

$$PR_i^{ev}=\frac{(p_m\text{-}c)q_m(1\text{-}\delta^{n-1})}{(1\text{-}\delta)N}+(p_m\text{-}\varepsilon\text{-}c)Q_d\delta^n,$$

где Q_d – это объем рыночного спроса при цене p_m-ε.

Предположим для простоты, что уклонение имеет место уже на первом шаге, т.е. прибыль уклониста составит: $PR_i^{ev}=(p_m\text{-}\varepsilon\text{-}c)Q_d$.

Негласный сговор будет иметь силу при условии:

$$\frac{(p_m\text{-}c)q_m}{(1\text{-}\delta)N} > (p_m\text{-}\varepsilon\text{-}c)Q_d.$$

Отсюда можно сделать вывод, что с увеличение числа фирм потенциальный выигрыш от негласного сговора, а значит, и его вероятность падает.

Будем теперь рассматривать дуопольную ситуацию (*N*=2). Тогда прибыль *i*-й фирмы, участвующей в негласном сговоре будет равна:

$$PR_i^m = \frac{(p_m\text{-}c)q_m}{2(1\text{-}\delta)}.$$

Предположим, что наказание за уклонение наступает мгновенно, но для обнаружения нарушения сговора требуется *T* периодов. Проанализируем, как длительность незамеченного нарушения отражается на вероятности негласного сговора.

Допустим для простоты, что уклонение имеет место уже на первом шаге, т.е. прибыль фирмы, постоянно уклоняющейся от соблюдения условий негласного соглашения, при условии обнаружения несоблюдения общепринятых среди участников картеля правил и наказания нарушителя на *T*+1 шаге составит:

$$PR_i^{ev} = (p_m\text{-}\varepsilon\text{-}c)Q_d\left(\frac{1\text{-}\delta^T}{1\text{-}\delta}\right),$$

где Q_d – это объем рыночного спроса при цене p_m-ε.

Негласный сговор будет иметь силу при условии:

$$\frac{(p_m\text{-}c)q_m}{2(1\text{-}\delta)} > \frac{(p_m\text{-}\varepsilon\text{-}c)Q_d(1\text{-}\delta^T)}{1\text{-}\delta},$$

т.е.

$$\frac{(p_m\text{-}c)q_m}{2} > (p_m\text{-}\varepsilon\text{-}c)Q_d\left(1\text{-}\delta^T\right).$$

Следовательно, с увеличением продолжительности безнаказанного нарушения потенциальный выигрыш от негласного сговора, а значит, и его вероятность падает.

Предположим теперь, что спрос возрастает постоянным темпом с течением времени: $Q(t)=\alpha^t Q(p_t)$, причем $\delta\alpha < 1$.

Монопольная цена в момент *t* составит:

$$p_m^t = \frac{c}{1+\frac{1}{E_p^d}} = \frac{c}{1+\frac{1}{\alpha^t\frac{dq(p_t)}{dp_t}\frac{p_m^t}{\alpha^t q_m^t}}} = \frac{c}{1+\frac{1}{\frac{dq(p_t)}{dp_t}\frac{p_m^t}{q_m^t}}},$$

т.е. ее уровень не зависит от периода времени – он будет одним и тем же на протяжении всего (бесконечного) срока взаимодействия фирм.

Пусть отсчет времени начинается с момента *t*=0. Прибыль *i*-й фирмы, участвующей в негласном сговоре будет равна:

$$PR_i^m = \frac{(p_m\text{-}c)q_m}{2(1\text{-}\delta\alpha)}.$$

Предположим для простоты, что уклонение имеет место уже на первом шаге, т.е. прибыль укloниста составит: $PR_i^{ev} = (p_m\text{-}\varepsilon\text{-}c)Q_d$, где Q_d – это объем рыночного спроса при цене p_m-ε.

Негласный сговор будет иметь силу при условии:

$$\frac{(p_m\text{-}c)q_m}{2(1\text{-}\delta\alpha)} > (p_m\text{-}\varepsilon\text{-}c)Q_d.$$

Таким образом, на расширяющемся рынке при $\alpha > 1$ потенциальный выигрыш от негласного сговора, а значит, и его вероятность возрастает.

В качестве обобщения моделей Бертрана и Курно может рассматриваться дуополия Эджуорта [15] с количественными ограничениями мощностей каждого из конкурентов: $q_i \le \overline{q}$ $(i=\{1,2\})$. Если выпуск одного из дуополистов составляет q_j, то, при предположении о линейности рыночного спроса: $P=a\text{-}bQ$, функция остаточного спроса для его конкурента будет иметь вид: $q_i^{res}=Q(P)\text{-}q_j=\frac{a}{b}\text{-}\frac{P}{b}\text{-}q_j$. Тогда, как и ранее, допуская постоянство предельных издержек: $MC=c$, получаем систему необходимых условий максимума прибыли олигополистов (6.86) при $q_i \le \overline{q}$, решая которую (6.87), приходим к уравнениям реакции для двух несовершенных конкурентов $(i, j=\{1,2\}, i \ne j)$:

$$\begin{cases} q_i = \frac{a\text{-}c}{2b}\text{-}\frac{q_j}{2} при q_i < \overline{q}, \\ q_i = \overline{q} в противоположном случае. \end{cases}$$

Данные линии реакции фирм изображены на рис. 6.41.

В первой ситуации, когда $q_i < \overline{q}$, выражение для рыночной цены принимает вид:

$$P=a\text{-}b\,(q_i+q_j)=\frac{1}{2}(a+c\text{-}bq_j). \quad (6.93)$$

Рассчитаем прибыль *i*-й фирмы:

$$PR_i^C = (P\text{-}c)\left(\frac{a\text{-}c}{2b}\text{-}\frac{q_j}{2}\right)=\frac{(a\text{-}c\text{-}bq_j)^2}{4b}. \quad (6.94)$$

Рассмотрим случай $\overline{q} \le \frac{a\text{-}c}{3b}$. Пусть $q_j \le \overline{q}$. Тогда, действуя в соответствии с функцией остаточного спроса (6.87), другая фирма будет иметь стимул для производства объема продукции, который будет не меньше лимита мощностей (рис. 6.41):

$$q_i = \frac{a\text{-}c}{2b}\text{-}\frac{q_j}{2} \ge \frac{a\text{-}c}{2b}\text{-}\frac{a\text{-}c}{6b} = \frac{a\text{-}c}{3b}.$$

Это значит, что объем производства *i*-й фирмы будет в точности соответствовать лимиту мощности: $q_i=\overline{q} \le \frac{a\text{-}c}{3b}$. Исходя из этого для *j*-й фирмы в соответствии с функцией реакции (6.87) также будет возникать стимул производить не меньше лимита

мощностей, а значит, и ее объем производства будет им в точности соответствовать.

Если каждая из фирм производит объем продукции, равный ограничению по мощностям, и при этом назначается цена, которая является максимально возможной с точки зрения функции рыночного спроса при данном суммарном объеме выпускаемой продукции, то никому из производителей не выгодно отклоняться от выбранной стратегии. Действительно, снижение цены на продаваемую продукцию не позволит фирме увеличить объем сбыта и лишь сократит выручку, а значит, и рентабельность производства. Повышение цены будет означать снижение объема продаваемой продукции ниже лимита производственных мощностей, а значит, при заданном выпуске конкурента – к сокращению рентабельности, ведь из необходимых условий оптимизации деятельности дуополистов Курно (6.87) видно, что прибыль *i*-й фирмы является возрастающей функцией от ее объема производства при $q_i < \frac{a-c}{2b} - \frac{q_j}{2}$, что как раз имеет место при $q_j = \overline{q}$. Таким образом, пересечение линий реакции дуополистов, конкурирующих в стиле Курно, при $\overline{q} \le \frac{a-c}{3b}$ (т. *E** на рис. 6.41) будет представлять собой равновесие по Нэшу.

Итак, если ограничение по мощностям не превышает равновесный выпуск в модели Курно $\left(\overline{q} \le \frac{a-c}{3b}\right)$, то в состоянии равновесия фирмы будут производить одинаковый объем продукции на уровне данного ограничения $(q_1 = q_2 = \overline{q})$ и назначать цену на том уровне, который является максимально возможным с точки зрения рыночного спроса при данном суммарном выпуске олигополистов: $P = a - 2b\overline{q}$. В частности, при $\overline{q} = \frac{a-c}{3b}$ в дуополии Эджуорта будет наблюдаться равновесие Курно-Нэша (6.88).

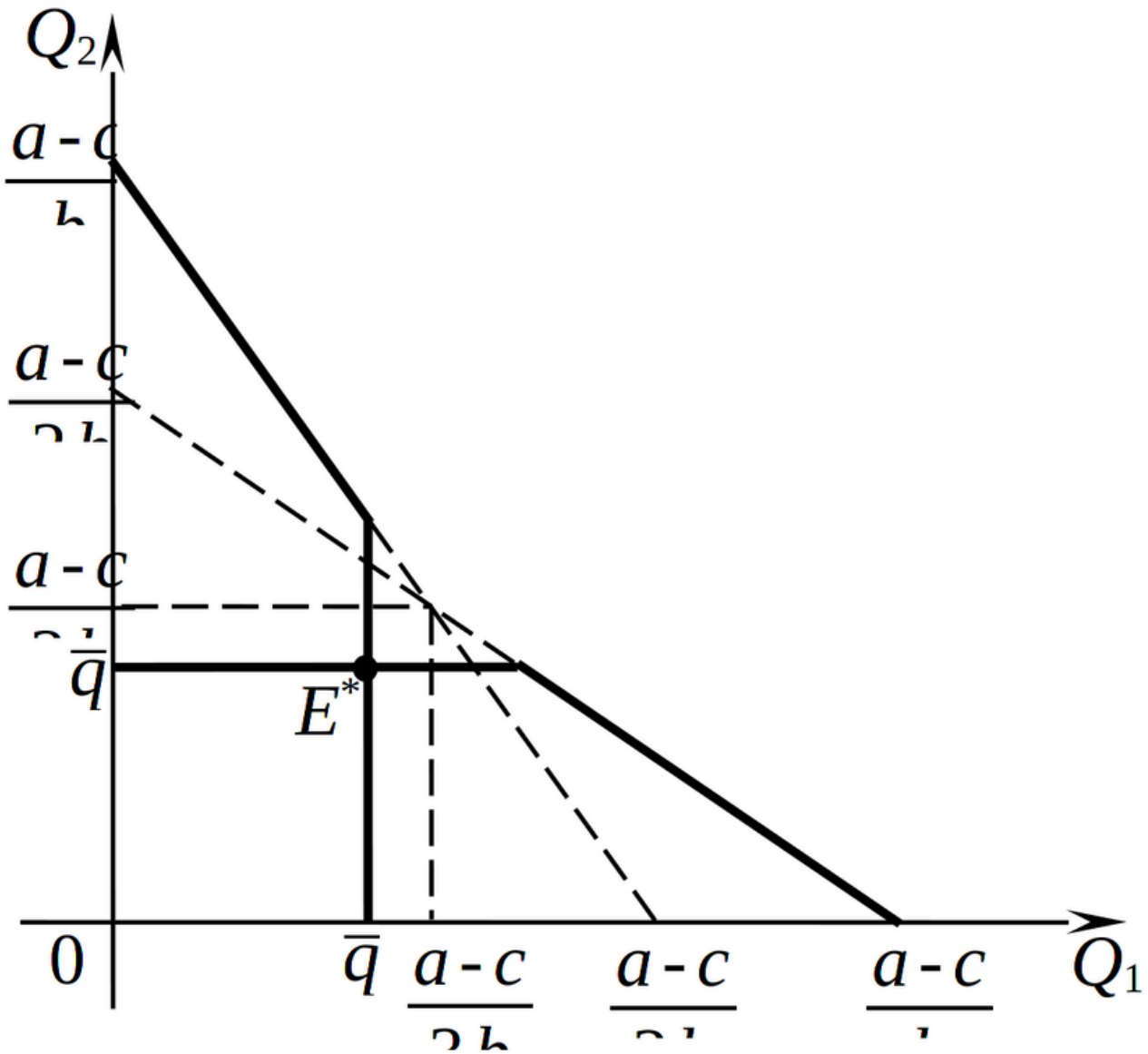


Рисунок 6.41. Равновесие в модели Эджуорта при ограничении по мощностям, не превышающем выпуск дуополистов Курно

Очевидно, что ситуация, когда фактический объем производства одной из фирм оказывается меньше лимита $(q_j < \overline{q})$, поскольку выпуск второй должен быть не больше лимитирующей величины $(q_j \le \overline{q})$, возможна лишь при лимите, превышающем равновесный выпуск по Курно:

$$\overline{q} > q_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_j}{2} \ge \frac{a-c}{2b} - \frac{\overline{q}}{2},$$

т.е.

$$\overline{q} > \frac{a-c}{3b}.$$

Рассмотрим вначале ситуацию, когда ограничение по мощностям перекрывает равновесный объем реализуемого товара дуополистом Курно, но при этом не достигает конкурентного объема производства:

$$\frac{a-c}{3b} < \overline{q} < \frac{a-c}{b}.$$

В таком случае, если рыночная цена оказывается на достаточно высоком уровне, то оптимальным ответом фирмы на действия соперника становится стратегия конкуренции в стиле Бертрана. При неполной загрузке мощностей фирмы, например, $q_i < \overline{q}$, она может назначить цену ниже уровня, установленного соперником, и увеличить за счет этого свои объемы производства и сбыта до максимума, определяемого лимитом мощностей, повышая, тем самым, прибыль. Если конкурент назначает цену выше монопольной, то для другой фирмы целесообразно, понизив цену до этого уровня, вытеснить с рынка соперника и остаться монополистом. Если изначально цена не превышает монопольного значения, то, снижая ее на бесконечно малую величину (ε) по отношению к уровню, установленному соперником, фирма сможет, осваивая все доступные мощности, увеличить объем и рентабельность производства. Однако возникающая при этом война цен будет постепенно снижать и прибыли производителей.

Вместе с тем, на каждой итерации снижения цен одним из производителей (*j*-м) при полном использовании его производственных мощностей будет существовать непокрытый остаток спроса, который создает для (*i*-го) конкурента в качестве альтернативы дальнейшему снижению цены возможность максимизации прибыли $\left(PR_i^C\right)$ на этом остаточном спросе в стиле Курно (рис. 6.35). Такая альтернатива может быть реализована, если уровень рыночной цены в результате конкуренции по Бертрану оказывается достаточно низким, близким к уровню средних и предельных издержек производства, т.е. к себестоимости единицы продукции, что подразумевает очень низкую рентабельность бизнеса $\left(PR_i^B\right)$. В такой ситуации фирма будет заинтересована в том, чтобы не снизить, а наоборот, повысить рыночную цену, максимизируя прибыль на остаточном спросе (6.94) и оставаясь при этом в рамках своего лимита производственных мощностей.

Рассмотрим пороговую ситуацию, когда снижение цены до некоторого уровня $\check{P}$ при ответе на действия конкурента (обозначим его номером *j*), полностью реализующего свой производственный потенциал $(q_j = \overline{q})$, в стиле Бертрана, оказывается для *i*-й фирмы столь же выгодным с точки зрения рентабельности производства, как и повышение цены при переключении на стратегию максимизации прибыли на остаточном спросе по Курно до уровня (6.93):

$$\widehat{P} = \frac{1}{2}(a + c - b\overline{q}).$$

При данных пороговых ценах $\check{P}$ и $\widehat{P}$ должно выполняться равенство прибылей при использовании стратегий конкуренции по Бертрану и Курно:

$$PR_i^B = \left(\check{P} - c\right)\overline{q} = \left(\widehat{P} - c\right)\left(\frac{a-c}{2b} - \frac{\overline{q}}{2}\right) = \frac{(a-c-b\overline{q})^2}{4b} = PR_i^C.$$

Из данного равенства видно, что пороговый уровень цены $\check{P}$, соответствующий реакции в рамках стратегии ценовой войны, должен превышать предельные издержки на максимальную величину средней прибыли, получаемой на остаточном спросе:

$$\check{P} = c + \frac{(a-c-b\overline{q})^2}{4b\overline{q}}.$$

Итак, если при полном использовании мощностей $(q_j = \overline{q})$ одна из фирм опускает цену ниже уровня $\check{P}$, то для другого конкурента наилучшей реакцией будет максимизация прибыли на остаточном спросе по логике Курно, т.е. выпуск $q_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{\overline{q}}{2}$ единиц продукции. При этом рыночная цена подскакивает до уровня $\widehat{P}$, и ценовая война начинается вновь.

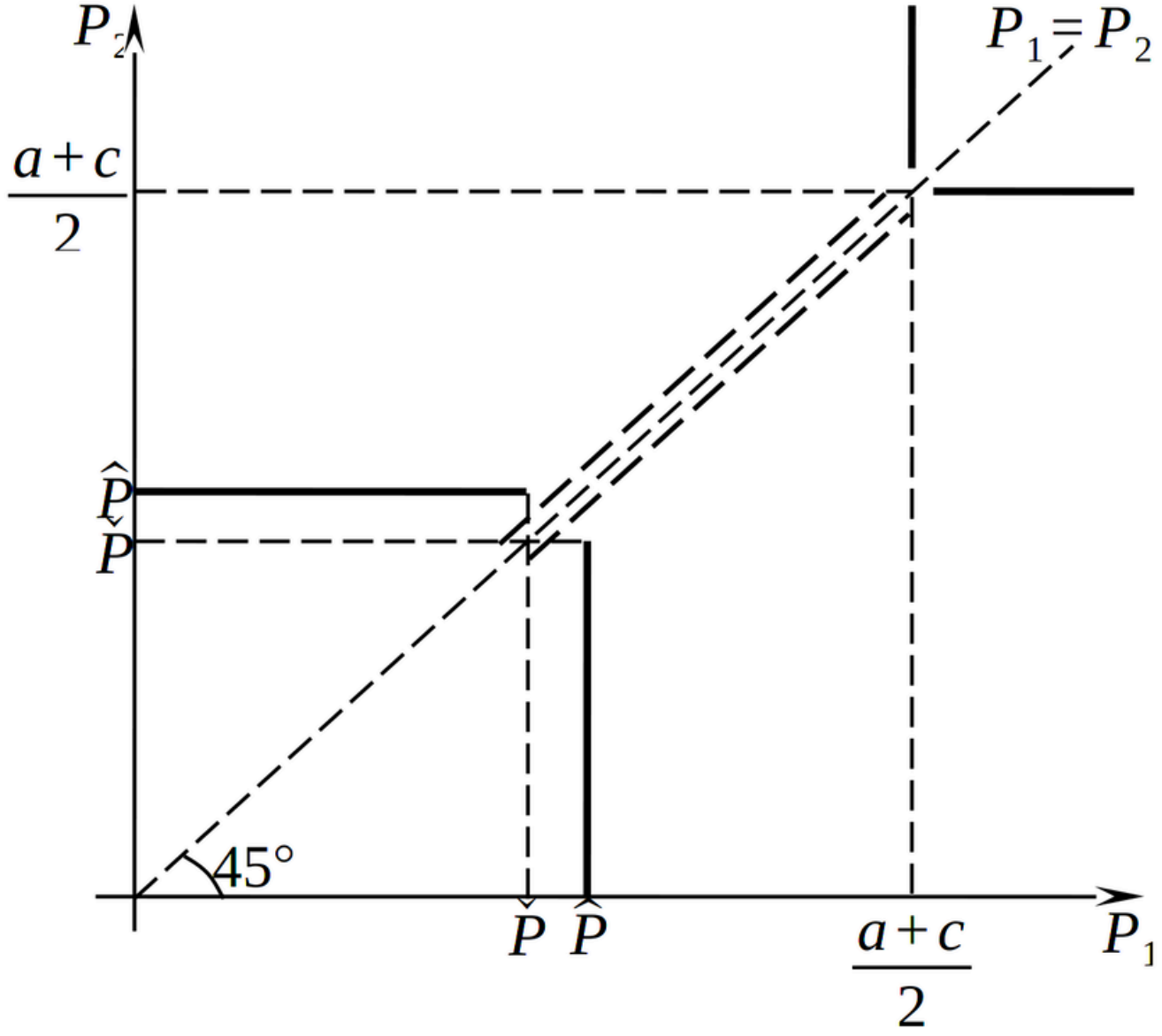


Рисунок 6.42. Взаимодействие фирм по Эджуорту

Итак, в данном случае, при $\frac{a-c}{3b} < \overline{q} < \frac{a-c}{b}$, множество реагирования каждой из фирм будет иметь вид:

$$P_i = \begin{cases} \frac{a+c}{2} при P_j > \frac{a+c}{2}, \\ P_j - \varepsilon при \check{P} \le P_j \le \frac{a+c}{2}, \\ \hat{P} при P_j \le \check{P}, \end{cases}$$

где $\varepsilon = o(1)$ – бесконечно малая величина, $i, j = \{1, 2\}, i \neq j$.

Данные множества реакции двух фирм не имеют точек пересечения (рис. 6.42).

Таким образом, если ограничение по мощностям находится в пределах между равновесными объемами производства в условиях олигополии Курно и совершенной конкуренции $\left(\frac{a-c}{3b} < \overline{q} < \frac{a-c}{b}\right)$, то сбалансированность в модели Эджуорта не достигается, и будут наблюдаться бесконечные циклы ценовых войн.

Очевидно, что максимально возможным, с точки зрения безубыточности, для каждой из фирм является конкурентный объем производства, соответствующий равенству спроса и предложения $(P = a - bQ = c)$: $Q = \frac{a-c}{b}$. Поэтому, если ограничение по мощностям окажется на уровне или выше конкурентного выпуска $\left(\overline{q} \ge \frac{a-c}{b}\right)$, то оно станет уже незначимым. Фактически в данном случае модель Эджуорта превратится в дуополию Бертрана без всяких ограничений, т.к., используя стратегию ценовых скидок, каждый из дуополистов будет стремиться освоить весь рынок, лишая, тем самым, конкурента остаточного спроса и возможности переключения на стратегию Курно. В такой ситуации в полном соответствии с дуополией Бертрана соперничество между фирмами понизит цену до уровня, соответствующего совершенной конкуренции (рис. 6.38). При этом будет наблюдаться устойчивое равновесие, при котором фирмы поделят поровну конкурентный объем производства (рис. 6.39).

Таким образом, модели олигополии Курно и Бертрана могут рассматриваться как крайние случаи модели Эджуорта, учитывающей потенциальные количественные ограничения по производственным мощностям конкурирующих фирм.

---

1. Как правило, четыре крупнейшие фирмы обеспечивают более 50 процентов отраслевого выпуска. ↩
2. Вслед за Дж. Робинсон принято считать, что граница между рынками субститутов пролегает там, где происходит разрыв в цепочке товаров-заменителей, проявляющийся в скачке показателя перекрестной эластичности спроса на данный товар по цене его субститута [См.: Робинсон Дж. Экономическая теория несовершенной конкуренции. – М.: Прогресс, 1986]. ↩
3. Джон Форбс Нэш (1928-2015) – американский математик и экономист, лауреат премии по экономике памяти Альфреда Нобеля 1994 г. ↩
4. Cowling K., Waterson M. Price-cost margins and market structure // Economica, 1976. Vol.43, №171. ↩
5. Антуан Огюстен Курно (1801-1877) – французский математик и экономист. ↩
6. При $n=1$ имеем оптимум для монополии, когда $MR=a-2bQ=MC=c$, т.е. $Q_m=\frac{a-c}{2b}$. ↩
7. Генрих фон Штакельберг (1905-1946) – немецкий экономист. ↩
8. Von Stackelberg H. Grundlagen der theoretischen Volkswirtschaftslehre. 2. Auflage. – Bern: A. Francke AG. Verlag; Tübingen: J.C.B. Mohr (Paul Siebeck), 1951. ↩
9. Примером может служить такой мощный современный картель, как Организация стран-экспортеров нефти (ОПЕК). Некоторые его члены прибегают к превышению установленных для них квот. ↩
10. Forchheimer K. Theoretisches zum unvollständigen Monopole // Schmollers Jahrbuch für Gesetzgebung, Verwaltung und Volkswirtschaft im Deutchen Reiche, 1908. B.32. – Цит. по: Шумпетер Й.А. История экономического анализа. Пер. с англ. – СПб.: Экон. школа, 2001, т.3. ↩
11. Как правило, более 35 процентов. ↩
12. См.: Авдашева С.Б., Розанова Н.М. Теория организации отраслевых рынков. – М.: Магистр, 1998. ↩
13. Жозеф Луи Франсуа Бертран (1822-1900) – французский математик, чьи идеи нашли применение в экономике. ↩
14. Ср.: Фридман А.А. Лекции по курсу микроэкономики промежуточного уровня. – М.: ГУ ВШЭ, 2009. ↩
15. Фрэнсис Исидор Эджуорт (1845-1926) – британский (ирландский) экономист. ↩

6.8. Равновесие фирмы и рынка в условиях монополистической конкуренции

Монополистическая конкуренция – это такая рыночная структура, когда при аналогичных технологических условиях производств на фирмах спрос представлен множеством покупателей, а предложение множеством продавцов, производящих и реализующих нестандартизированную, дифференцированную продукцию, близкие заменители по отношению к выпуску конкурентов. Рыночная структура монополистической конкуренции сочетает в себе свойства, характерные для монополии и совершенной конкуренции. Фирма-монополистический конкурент является монополистом на своем узком сегменте рынка, но одновременно конкурентом по отношению к другим фирмам, производящим аналогичные продукты на более широком, агрегированном рынке товаров-заменителей.

Будучи монополистом на своем сегменте рынка, фирма-монополистический конкурент способна влиять на цену выпускаемого продукта, изменяя объемы производства. Она максимизирует прибыль, ориентируясь на равенство предельных издержек и предельного дохода (6.57), рассчитанного исходя из функции остаточного спроса на свою продукцию.

Оригинальный подход к анализу динамического взаимодействия между произвольным числом фирм – несовершенных конкурентов в стиле Курно был предложен Э. Чемберлином в рамках модели монополистической конкуренции [1].

При анализе модели Э. Чемберлина будем придерживаться тех же допущений, что и ранее, при анализе олигополии Курно, предполагая постоянство предельных издержек фирм $(MC=c)$, т.е. $\gamma=1$ в (1.42), и линейность функции рыночного спроса: $P=a-bQ$. Поскольку все n фирм в отрасли являются абсолютно идентичными, их объемы выпуска будут совпадать, а значит, $q_i=\frac{Q}{n}$; т.е.

$$P=a-bnq_i, \text{ или } q_i=\frac{a}{bn}-\frac{P}{bn}.$$

Объем остаточного спроса для репрезентативной фирмы равен:

$$q_{res}=Q-(n-1)q_i,$$

где q_i – объем производства каждого из ее конкурентов.

Итак, важным моментом анализа является наличие двух функций спроса на продукт фирмы: D_{res} – в том случае, если фирма рассчитывает, что за ее изменением индивидуального объема производства остальные фирмы не последуют; и D_i – когда все фирмы в отрасли одновременно изменяют свой объем производства на ту же величину, что и данная фирма (рис. 6.43).

Пусть объем производства каждой из фирм в отрасли равен некоторой исходной величине q_i^0, а первоначальная цена установилась на уровне P_0. Тогда, поскольку в соответствии с уравнением остаточного спроса $Q=q_{res}+(n-1)q_i$, а значит, $P=a-bq_{res}-b(n-1)q_i$, постольку первоначальный объем остаточного спроса фирмы будет определяться исходя из соотношения:

$$P_1=a-bq_{res}^1-b(n-1)q_i^0.$$

Данная функция спроса задает выражение для предельной выручки фирмы, которая в соответствии с правилом максимизации прибыли будет равна предельным издержкам:

$$MR_1=a-2bq_{res}^1-b(n-1)q_i^0=MC=c,$$

откуда:

$$q_{res}^1=\frac{a-c}{2b}-\frac{(n-1)}{2}q_i^0.$$

Отметим, что если $q_i^0<\frac{a-c}{(n+1)b}$, то $q_{res}^1>\frac{a-c}{(n+1)b}$. Если же $q_i^0>\frac{a-c}{(n+1)b}$, то, наоборот, $q_{res}^1<\frac{a-c}{(n+1)b}$.

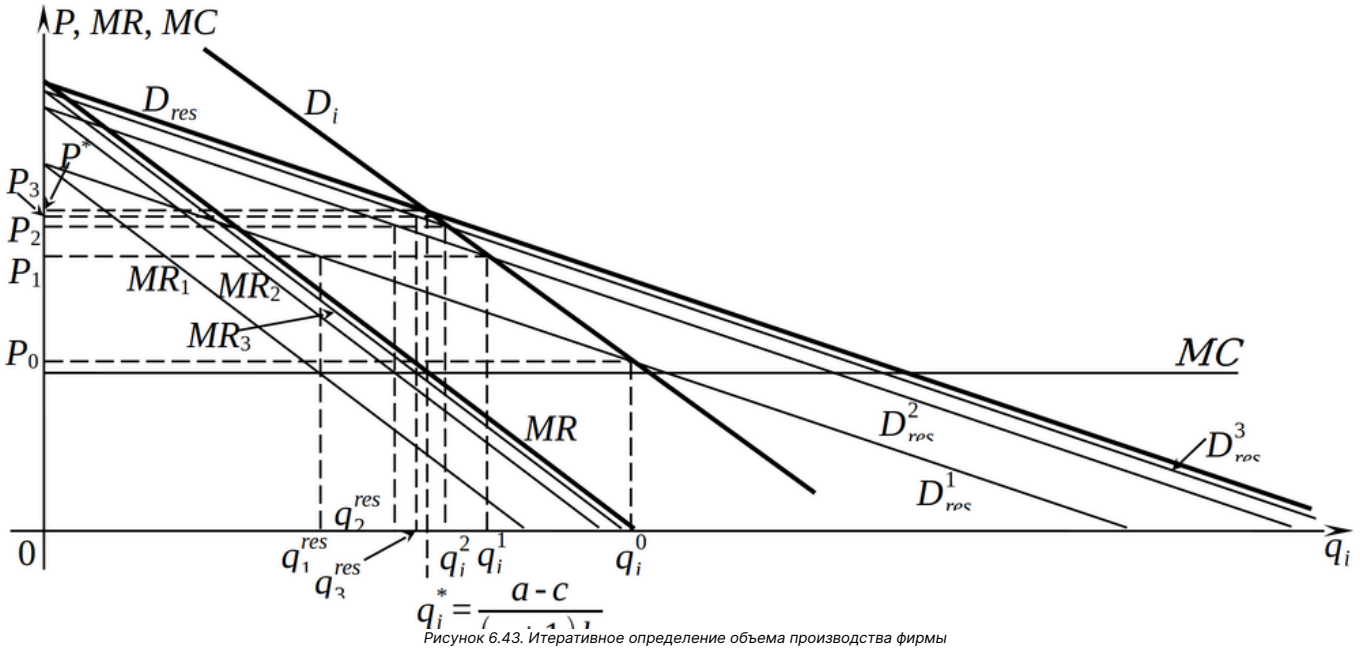


Рисунок 6.43. Итеративное определение объема производства фирмы

Подставляя полученный объем выпуска в выражение для цены, определяем значение оптимальной цены с точки зрения отдельной фирмы:

$$P_1 = \frac{a+c}{2} - \frac{b(n-1)}{2} q_i^0.$$

Итак, если изначально фирма производила q_i^0 единиц продукции при цене P_0, то, следуя условию максимизации прибыли, она станет производить теперь уже q_{res}^1 единиц продукции, назначая цену P_1. Но поскольку все фирмы в отрасли принимают такое же решение о цене на свою продукцию, постольку по такой цене данная фирма уже может продать q_i^1 единиц продукции (рис. 6.43). Итак, когда параметр времени t меняется дискретно, с учетом ответной реакции остальных производителей оптимальный уровень цены для отдельной фирмы сформирует новый объем отраслевого выпуска, приходящийся на отдельную фирму:

$$q_i^1 = \frac{a}{bn} - \frac{a+c}{2bn} + \frac{(n-1)}{2n} q_i^0 = \frac{a-c}{2bn} + \frac{(n-1)}{2n} q_i^0.$$

Аналогичное соотношение будет наблюдаться между объемами производства отдельной фирмы любых двух соседних периодов:

$$q_i^t = \frac{a-c}{2bn} + \frac{(n-1)}{2n} q_i^{t-1}. \quad (6.95)$$

Когда все фирмы продают q_i^1 единиц продукции по цене P_1, линия D_{res} смещается вниз так, что новая – проходит теперь через точку с координатами $\left(q_i^1; P_1\right)$. Теперь, вновь максимизируя прибыль, фирма станет производить объем q_{res}^2 единиц при цене P_2. В действительности же она станет продавать только q_i^2 единиц (рис. 6.43).

Таким образом, последующие итерации корректируют объем производства:

$$q_i^2 = \frac{a-c}{2bn} + \frac{(n-1)}{2n} q_i^1 = \frac{a-c}{2bn} + \frac{(n-1)(a-c)}{4bn^2} + \left(\frac{n-1}{2n}\right)^2 q_i^0,$$

$$q_i^3 = \frac{a-c}{2bn} + \frac{(n-1)}{2n} q_i^2 = \frac{a-c}{2bn} + \frac{(n-1)(a-c)}{4bn^2} + \frac{(n-1)^2(a-c)}{8bn^3} + \left(\frac{n-1}{2n}\right)^3 q_i^0$$

и т.д.

На *t*-й итерации объем выпуска составит [2]:

$$q_i^t = \frac{(a-c)}{2bn}\left(1 + \frac{n-1}{2n} + \cdots + \left(\frac{n-1}{2n}\right)^{t-1}\right) + \left(\frac{n-1}{2n}\right)^t q_i^0$$

$$= \frac{(a-c)}{2bn} \frac{\left(1 - \left(\frac{n-1}{2n}\right)^t\right)}{\left(1 - \frac{n-1}{2n}\right)} + \left(\frac{n-1}{2n}\right)^t q_i^0$$

$$= \frac{a-c}{(n+1)b} + \left(\frac{n-1}{2n}\right)^t \left(q_i^0 - \frac{a-c}{(n+1)b}\right).$$

Если $q_i^0 > \frac{a-c}{(n+1)b}$, то и $q_i^t > \frac{a-c}{(n+1)b}$ (рис. 6.43). Симметричная логика работает при $q_i^0 < \frac{a-c}{(n+1)b}$, когда $q_i^t < \frac{a-c}{(n+1)b}$ (рис. 6.4). Функция остаточного спроса D_{res} сдвигается вверх при уменьшении объемов производства всех фирм и, наоборот, сдвигается вниз – при увеличении выпуска фирм.

С течением времени, когда $t \to \infty$, множитель $\left(\frac{n-1}{2n}\right)^t$ при первоначальном объеме стремится к нулю, поскольку дробь в скобках меньше единицы, ведь в условиях монополистической конкуренции на рынке присутствует большое количество $(n>1)$ фирм [3]. Следовательно, объем производства монополистического конкурента при фиксированном количестве фирм на рынке будет стремиться к величине, равной выпуску олигополиста Курно в модели с *n* фирмами (6.52):

$$q_i^* = \lim_{t \to \infty} q_i^t = \frac{a-c}{(n+1)b}. \quad (6.96)$$

При этом отраслевой объем производства будет сходиться к величине:

$$\lim_{t \to \infty} Q = \frac{n(a-c)}{(n+1)b}. \quad (6.97)$$

С увеличением количества фирм (при $n \to \infty$) отраслевой выпуск будет приближаться к конкурентному $Q = \frac{a-c}{b}$.

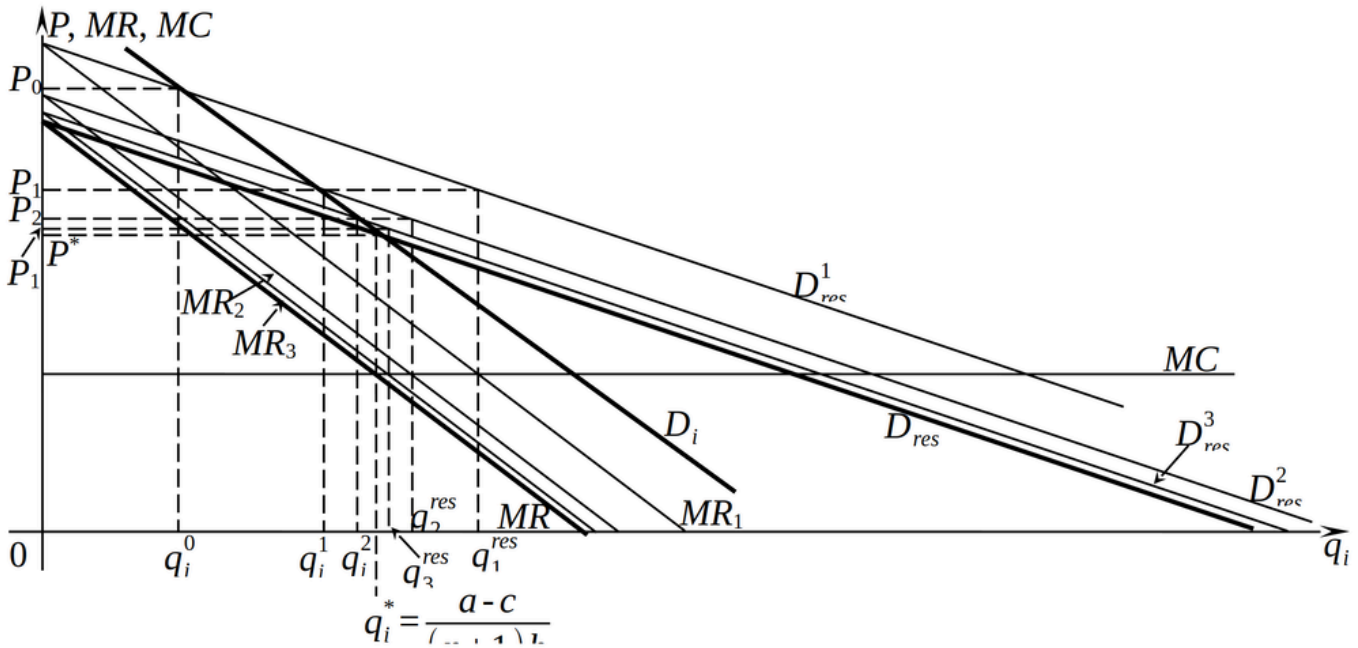


Рисунок 6.44. Итеративное определение объема производства фирмы

Таким образом, итерационная процедура смещения остаточного спроса для отдельной фирмы будет повторяться до тех пор, пока не будет достигнуто устойчивое долгосрочное равновесие. На рис. 6.43-6.44 это точка с координатами (q^*, P^*). Теперь оценка рыночной ситуации отдельной фирмой совпадает с объективным положением, действия конкурентов не приведут к изменению параметров ее деятельности, и процесс рыночной адаптации прекращается.

Аналогичная логика взаимодействия монополистических конкурентов работает, и если допустить, что время t течет непрерывно. Рассчитаем отклонение между объемами выпуска отдельной фирмы для любых двух соседних периодов. Для этого вычтем q_i^{t-1} из левой и правой частей соотношения (6.95) и перейдем от единичного к произвольному временно́му шагу Δt:

$$\frac{q_i(t)-q_i(t-\Delta t)}{\Delta t}=\frac{a-c}{2bn}-\frac{(n+1)}{2n}q_i\,(t-\Delta t).$$

В пределе, когда временно́й интервал становится бесконечно малым

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{q_i(t)-q_i(t-\Delta t)}{\Delta t}\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{a-c}{2bn}-\frac{(n+1)}{2n}q_i\,(t-\Delta t)\right),$$

получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dq_i(t)}{dt}=\frac{a-c}{2bn}-\frac{(n+1)}{2n}q_i(t).$$

Решаем его, разделяя переменные:

$$\frac{dq_i(t)}{q_i(t)-\frac{a-c}{b(n+1)}}=-\frac{(n+1)}{2n}\,dt.$$

Интегрируем $\int d\ln\left|q_i(t)-\frac{a-c}{b(n+1)}\right|=-\frac{(n+1)}{2n}\int dt+\ln c_1$, а затем потенцируем уравнение $q_i(t)=\frac{a-c}{b(n+1)}+c_1e^{-\frac{(n+1)}{2n}t}$ и находим константу по начальному условию $c_1=\frac{a-c}{b(n+1)}-q_i(0)$. Таким образом, динамика объема производства фирмы – монополистического конкурента будет описываться следующей зависимостью:

$$q_i(t)=q_i^*+\left(q_i(0)-q_i^*\right)e^{-\frac{(n+1)}{2n}t},$$

где q_i^* – равновесный объем производства, соответствующий дискретному случаю (6.96), к которому будет стремиться выпуск фирмы с течением времени.

Итак, при любом отклонении от положения долгосрочного равновесия фирма и отрасль логикой хозяйственного взаимодействия будут возвращены в данное состояние. В то же время, однажды попав в равновесное положение, фирмы теряют стимулы к уходу из него. Действительно, в частности, при дискретном ходе времени, если $q_i^t=\frac{a-c}{(n+1)b}$, то и $q_i^{t+1}=\frac{a-c}{(n+1)b}$, следовательно, равновесный объем производства (6.96), будучи достигнутым, остается стабильным в дальнейшем.

Если ослабить допущение постоянства предельных издержек и предположить линейную возрастающую зависимость предельных издержек фирм от объема производства репрезентативной фирмы $MC=cq+d$, то логика анализа модели Чемберлина остается без изменения.

Проделаем выкладки, аналогичные тем, которые приведены выше, применительно к случаю возрастающих линейных предельных издержек производства. Будем, как и ранее, предполагать линейность функции рыночного спроса.

Функция спроса (6.48) задает выражение для предельной выручки фирмы, которая в соответствии с правилом максимизации прибыли будет равна предельным издержкам:

$$MR=a-2bq_{res}^1-b\,(n-1)q_i^0=MC=cq_{res}^1+d,$$

откуда:

$$q_{res}^1 = \frac{a-d}{2b+c} - \frac{b(n-1)}{2b+c} q_i^0.$$

Подставляя полученный объем выпуска q_{res}^1 в выражение для цены (6.48), определяем значение оптимальной цены с точки зрения отдельной фирмы:

$$P_1 = a - bq_{res}^1 - b(n-1)q_i^0 = a - \frac{(a-d)b}{2b+c} + \frac{b^2(n-1)}{2b+c} q_i^0 - b(n-1)q_i^0 = \frac{ab+ac+bd}{2b+c} - \frac{b(n-1)(b+c)}{2b+c} q_i^0.$$

Итак, если изначально фирма производила q_i^0 единиц продукции при цене P_0, то, следуя условию максимизации прибыли, она станет производить теперь уже q_{res}^1 единиц продукции, назначая цену P_1. Но поскольку все фирмы в отрасли принимают такое же решение о цене на свою продукцию, постольку по такой цене данная фирма уже может продать q_i^1 единиц продукции (6.3):

$$q_i^1 = \frac{a}{bn} - \frac{P_1}{bn} = \frac{a}{bn} - \frac{ab+ac+bd}{bn(2b+c)} + \frac{(n-1)(b+c)}{n(2b+c)} q_i^0 = \frac{a-d}{n(2b+c)} + \frac{(n-1)(b+c)}{n(2b+c)} q_i^0.$$

Аналогичное соотношение будет наблюдаться между объемами производства отдельной фирмы любых двух соседних периодов:

$$q_i^t = \frac{a-d}{n(2b+c)} + \frac{(n-1)(b+c)}{n(2b+c)} q_i^{t-1}. \quad (6.98)$$

Таким образом, последующие итерации корректируют объем производства:

$$q_i^2 = \frac{a-d}{n(2b+c)} + \frac{(n-1)(b+c)}{n(2b+c)} q_i^1 = \frac{a-d}{n(2b+c)} + \frac{(a-d)(n-1)(b+c)}{n^2(2b+c)^2} + \left(\frac{(n-1)(b+c)}{n(2b+c)}\right)^2 q_i^0,$$

$$q_i^3 = \frac{a-d}{n(2b+c)} + \frac{(n-1)(b+c)}{n(2b+c)} q_i^2 = \frac{a-d}{n(2b+c)} + \frac{(a-d)(n-1)(b+c)}{n^2(2b+c)^2} + \frac{(a-d)(n-1)^2(b+c)^2}{n^3(2b+c)^3} + \left(\frac{(n-1)(b+c)}{n(2b+c)}\right)^3 q_i^0$$

и т.д.

На *t*-й итерации объем выпуска составит:

$$q_i^t = \frac{(a-d)}{n(2b+c)}\left(1 + \frac{(n-1)(b+c)}{n(2b+c)} + \cdots + \left(\frac{(n-1)(b+c)}{n(2b+c)}\right)^{t-1}\right) + \left(\frac{(n-1)(b+c)}{n(2b+c)}\right)^t q_i^0 = \frac{(a-d)}{n(2b+c)}\left(\frac{1-\left(\frac{(n-1)(b+c)}{n(2b+c)}\right)^t}{1-\frac{(n-1)(b+c)}{n(2b+c)}}\right) + \left(\frac{(n-1)(b+c)}{n(2b+c)}\right)^t q_i^0 = \frac{(a-d)}{b(n+1)+c}\left(1 - \left(\frac{(n-1)(b-\right.\right.$$

С течением времени, когда $t \to \infty$, множитель $\left(\frac{(n-1)(b+c)}{n(2b+c)}\right)^t$ при первоначальном объеме стремится к нулю, поскольку дробь в скобках меньше единицы. Следовательно, объем производства фирмы – монополистического конкурента стремится к величине:

$$q_i^* = \lim_{t\to\infty} q_i^t = \frac{a-d}{b(n+1)+c}. \quad (6.99)$$

Проанализируем теперь взаимодействие монополистических конкурентов при возрастающих предельных издержках в непрерывном времени. Используя соотношение (6.98), рассчитаем разность выпуска фирмы в любых двух соседних периодах и переходя к произвольному временно́му шагу Δt

$$\frac{q_i(t) - q_i(t-\Delta t)}{\Delta t} = \frac{a-d}{n(2b+c)} - \frac{(n+1)b+c}{n(2b+c)} q_i(t-\Delta t),$$

устремим его к нулю

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{q_i(t) - q_i(t-\Delta t)}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{a-d}{n(2b+c)} - \frac{(n+1)b+c}{n(2b+c)} q_i(t-\Delta t)\right),$$

получая, тем самым, дифференциальное уравнение:

$$\frac{dq_i(t)}{dt} = \frac{a-d}{n(2b+c)} - \frac{((n+1)b+c)}{n(2b+c)} q_i(t). \quad (6.100)$$

Решая его, вначале рассмотрим соответствующее однородное уравнение:

$$\frac{dq_i(t)}{dt} + \frac{((n+1)b+c)}{n(2b+c)} q_i(t) = 0.$$

Разделяя в нем переменные

$$\frac{dq_i(t)}{q_i(t)} = d\ln|q_i(t)| = -\frac{((n+1)b+c)}{n(2b+c)}\, dt$$

и интегрируя

$$\ln|q_i(t)| = -\frac{((n+1)b+c)}{n(2b+c)} t + \ln c_1,$$

а затем потенцируя, получаем общее решение анализируемого однородного уравнения, к которому применяем метод вариации постоянной:

$$q_i(t) = c_1(t) e^{-\frac{((n+1)b+c)}{n(2b+c)} t}.$$

Используя это решение в исходном неоднородном уравнении динамики выпуска монополистического конкурента (6.100), получаем уравнение для расчета варьируемого множителя:

$$\dot{c}_1 e^{-\frac{((n+1)b+c)}{n(2b+c)} t} = \frac{a-d}{n(2b+c)}, m.e. \ \frac{dc_1}{dt} = \frac{(a-d)}{n(2b+c)} e^{\frac{((n+1)b+c)}{n(2b+c)} t}.$$

Разделяя в нем переменные

$$dc_1 = \frac{(a-d)}{((n+1)b+c)} de^{\frac{((n+1)b+c)}{n(2b+c)} t}$$

и интегрируя, находим варьируемый множитель

$$c_1(t)=\frac{(a-d)}{((n+1)b+c)}e^{\frac{((n+1)b+c)}{n(2b+c)}t}+c_2,$$

подстановка которого в исходное неоднородное уравнение с учетом константы, значение которой определяется по начальному условию $c_2=q_i(0)-\frac{a-d}{(n+1)b+c}$, дает искомую траекторию динамики выпуска монополистического конкурента:

$$q_i(t)=q_i^*+\left(q_i(0)-q_i^*\right)e^{-\frac{((n+1)b+c)}{n(2b+c)}t},$$

где $q_i^*=\frac{a-d}{(n+1)b+c}$ – равновесный объем производства, совпадающий с рассчитанным в ситуации дискретного времени (6.99), к которому будет стремиться выпуск фирмы с течением времени.

Таким образом динамика выпуска фирмы в условиях монополистической конкуренции при возрастающих предельных издержках полностью аналогична случаю постоянных предельных затрат.

Рассмотрим теперь процесс перехода к долгосрочному равновесию в модели Чемберлина. Вначале проанализируем случай постоянных предельных издержек. Пусть, например, технология производства *i*-й фирмы описывается следующей зависимостью между объемами используемого труда (l_i) и выпускаемой продукции, представляющей собой обратную производственную функцию:

$$l_i=\alpha+\beta q_i. \quad (6.101)$$

Тогда при ставке заработной платы w издержки производства будут представлять собой следующую функцию его объема:

$$TC_i=(\alpha+\beta q_i)w=\alpha w+\beta w q_i. \quad (6.102)$$

Здесь $FC_i=\alpha w$ – постоянные издержки, $VC_i=\beta w q_i$ – переменные издержки, $MC_i=\beta w=const$ – предельные издержки. За счет наличия фиксированных затрат при постоянных предельных издержках средние издержки при этом будут представлять собой убывающую зависимость от объема производства:

$$AC_i=\frac{\alpha w}{q_i}+\beta w.$$

Предположим, что изначально для репрезентативной фирмы экономическая прибыль, которая описывается функцией:

$$PR_i=pq_i-(\alpha+\beta q_i)w, \quad (6.103)$$

представляет собой положительную величину (рис. 6.45).

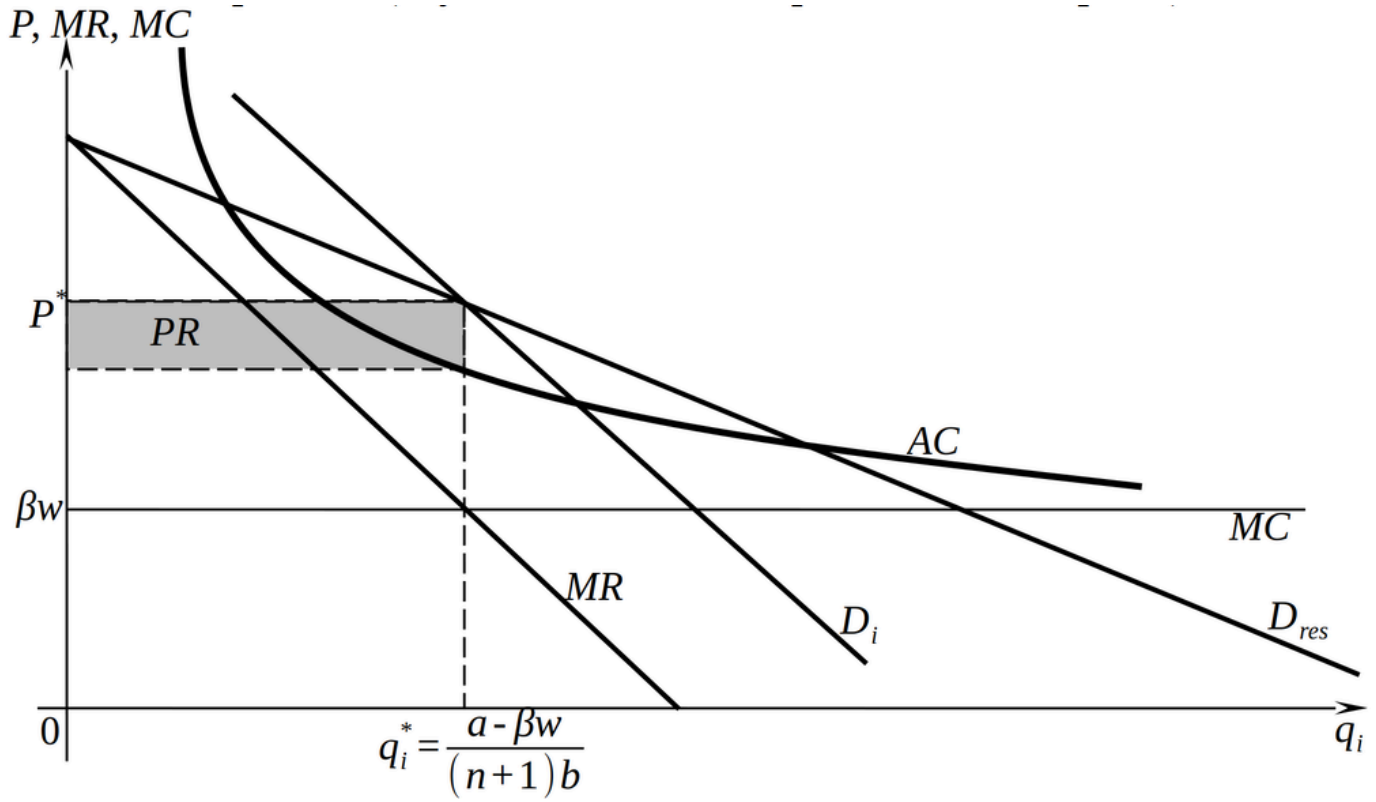


Рисунок 6.45. Модель Чемберлина: экономическая прибыль (случай постоянных предельных издержек)

Аналогично совершенной конкуренции в условиях монополистической конкуренции барьеры входа на рынок низки, поэтому при наличии положительной экономической прибыли новые фирмы будут приходить на рынок, в результате чего остаточный спрос на продукцию данной, конкретной фирмы будет сокращаться. Вход новых фирм будет продолжаться до тех пор, пока каждая из фирм будет получать экономическую прибыль. Итак, аналогично совершенной конкуренции, в долгосрочном аспекте в ситуации монополистической конкуренции будет наблюдаться нулевая экономическая прибыль:

$$P=AC. \quad (6.104)$$

Перепишем необходимое условие максимума прибыли в следующем виде:

$$\frac{dPR}{dQ}=\frac{dTR}{dQ}-\frac{dTC}{dQ}=\frac{d(Q\bullet P)}{dQ}-\frac{d(Q\bullet AC)}{dQ}=P+Q\frac{dP}{dQ}-AC-Q\frac{dAC}{dQ}=0,$$

откуда следует, что:

$$P+Q\frac{dP}{dQ}=AC+Q\frac{dAC}{dQ}.$$

Из данного равенства вместе с условием нулевой экономической прибыли вытекает следующее соотношение:

$$\frac{dP}{dQ}=\frac{dAC}{dQ}. \quad (6.105)$$

Вместе с условием нулевой прибыли его экономический смысл заключается в том, что кривая остаточного спроса на продукцию каждого предприятия отрасли будет касаться в точке долгосрочного равновесия линии средних издержек (рис. 6.46). В этой ситуации фирма будет получать нулевую экономическую прибыль, что, однако, не противоречит гипотезе максимизации прибыли, ведь даже при нулевой экономической прибыли положительные неявные издержки дадут положительную бухгалтерскую прибыль.

Таким образом, свободный вход конкурентов на рынок при положительной прибыли будет сдвигать остаточный спрос фирмы вниз до тех пор, пока он не станет касательной к графику средних издержек при оптимальном объеме производства фирмы, когда уже исчезает экономическая прибыль (6.104)-(6.105), а с ней и стимулы ко входу новых фирм в отрасль. При этом возросшее количество фирм на рынке $\left(n^*\right)$ будет определять новый выпуск репрезентативной фирмы, который станет равновесным в долгосрочном аспекте.

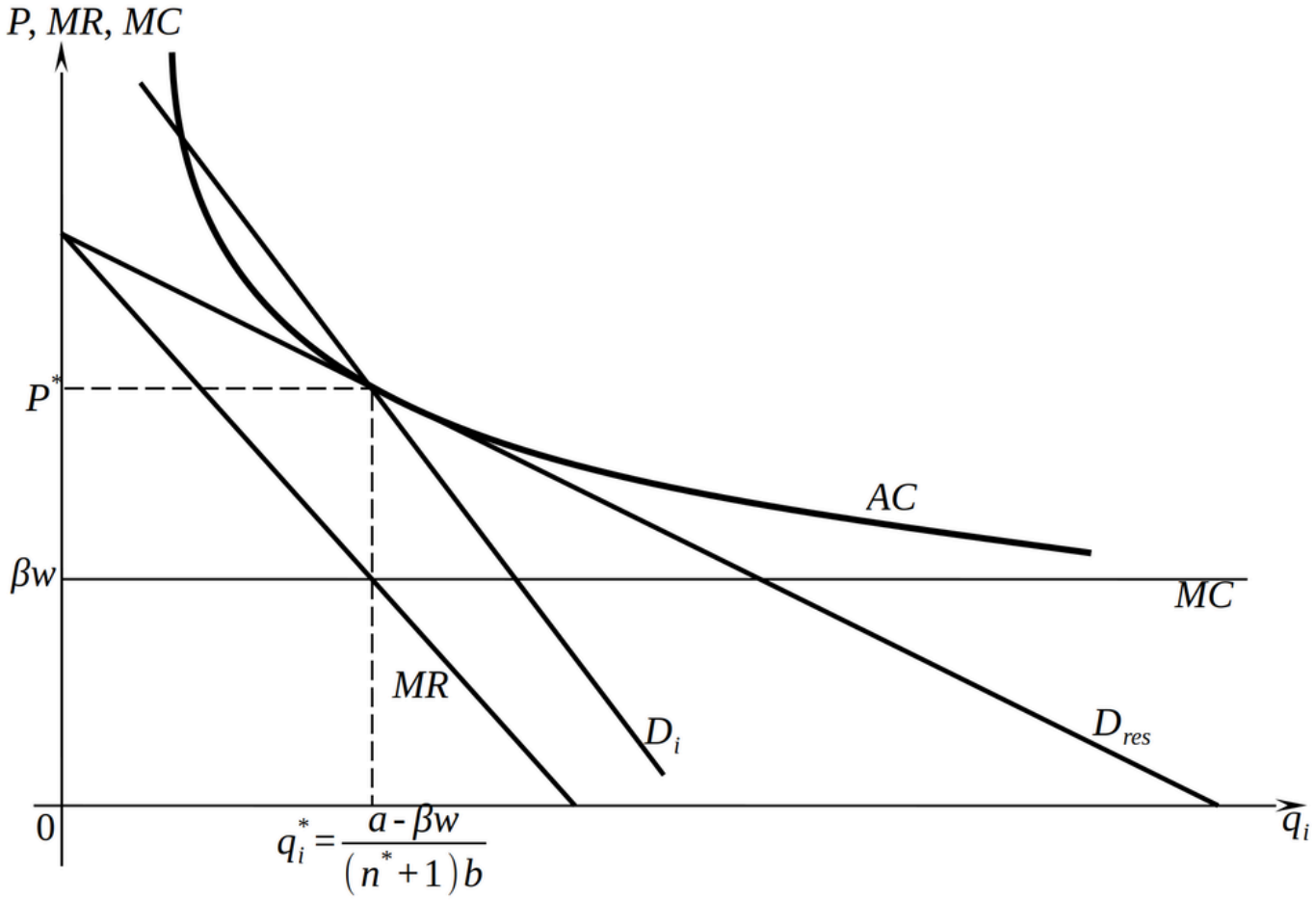


Рисунок 6.46. Модель Чемберлина: переход к долгосрочному равновесию при свободном входе фирм на рынок (случай постоянных предельных издержек)

При возрастающих предельных издержках средние издержки будут уже иметь U-образный вид. Их минимум будет соответствовать объему производства при совершенной конкуренции в долгосрочном аспекте $\left(q_i^c\right)$. Поэтому в результате увеличения количества фирм в отрасли до величины n^*, вызванного наличием положительной экономической прибыли (рис. 6.47), сдвиг вниз остаточного спроса репрезентативной фирмы до касания с графиком средних издержек приводит к установлению долгосрочного равновесия фирмы (рис. 6.48).

Сравним оптимальные значения цены и объема производства в условиях монополистической (P^* и q_i^*) и совершенной (P_c и q_i^c) конкуренции в условиях долгосрочного равновесия (рис. 6.48). Превышение величины выпуска, соответствующей минимуму долгосрочных средних издержек, то есть совершенно конкурентному уровню, над объемом производства, оптимальным для монополистического конкурента, $\left(q_i^c-q_i^*\right)$ представляет собой избыток производственных мощностей в условиях данной рыночной структуры несовершенной конкуренции. Наряду с незагруженными производственными мощностями общество в ситуации монополистической конкуренции несет дополнительные издержки по причине превышения рыночной цены уровня, соответствующего минимуму средних издержек, то есть конкурентной цены. Эти общественные издержки $\left(P^*-P_c\right)$ становятся платой за продуктовое разнообразие, поскольку, в отличие от совершенной конкуренции, когда все товары являются

идентичными друг другу по качеству, монополистическая конкуренция предоставляет потребителям возможность выбирать наиболее подходящий по качественным характеристикам товар.

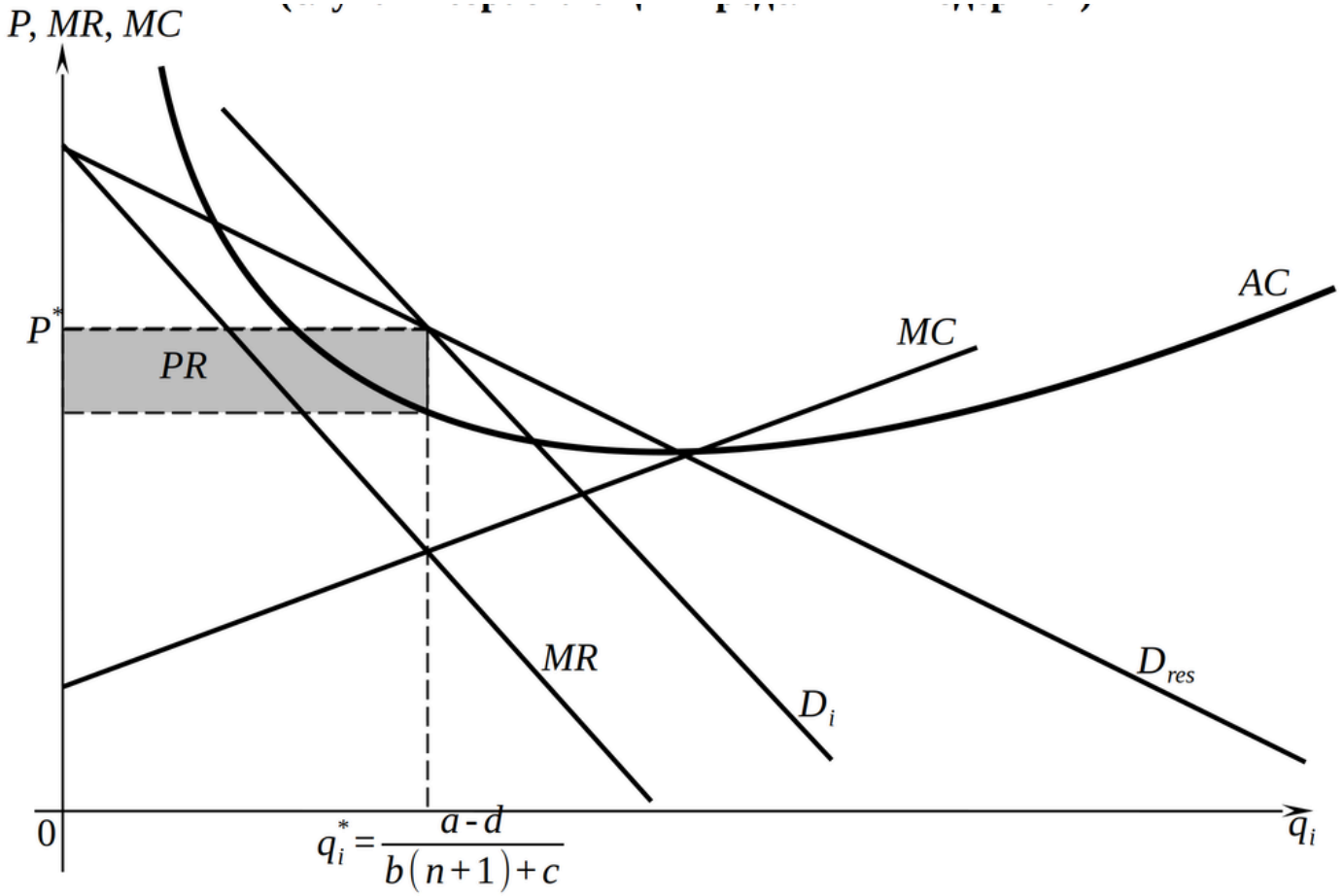


Рисунок 6.47. Модель Чемберлина: экономическая прибыль (случай возрастающих предельных издержек)

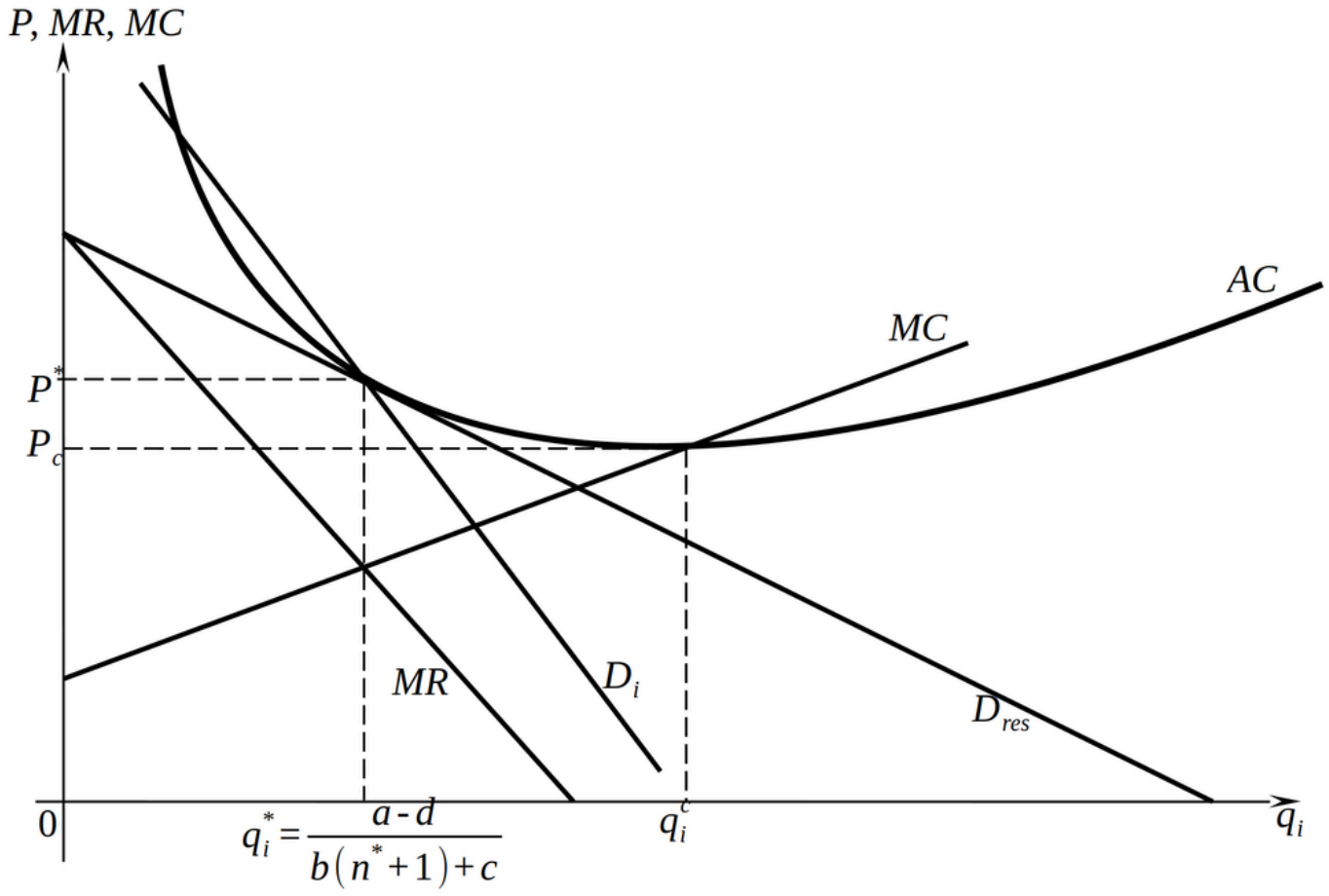


Рисунок 6.48. Модель Чемберлина: переход к долгосрочному равновесию при свободном входе фирм на рынок (случай возрастающих предельных издержек)

Рассмотрим теперь упрощенную стилизованную модель монополистической конкуренции, изначально сформулированную А. Дикситом и Дж. Стиглицем [4], которая опирается на модель Чемберлина, но несколько по-иному иллюстрирует установление долгосрочного равновесия и соответствующего ему количества производителей на рынке.

Пусть экономическая система представлена некоторой отраслью, производящей n дифференцированных продуктов, являющихся близкими заменителями друг другу, и сектором, охватывающим производство всех остальных товаров. Допустим, что в данной хозяйственной системе присутствуют L идентичных потребителей ≣ домашних хозяйств, которые тратят фиксированную часть своего дохода, равную M, на дифференцированную продукцию данной отрасли.

Предположим, что предпочтения каждого из потребителей относительно товаров, составляющих широкую отрасль дифференцированной продукции, описываются функцией CES, являющейся обобщением однородной первой степени $(\gamma=1)$ зависимости (1.13) при единичных коэффициентах при объемах потребления товаров на случай *n*-продуктового набора:

$$U=\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^{\varphi}\right]^{\frac{1}{\varphi}}, 0<\varphi<1.$$

Тогда функции индивидуального потребительского спроса на каждую из разновидностей товара, которые в совокупности составляют всю дифференцированную продуктовую группу и которые можно трактовать как специфические бренды, присутствующие на широком рынке, охватывающем схожие по потребительским свойствам блага, аналогично (2.22) будет иметь вид:

$$x_i^m=\frac{M}{p_i^{\frac{1}{1-\varphi}} \bullet \sum_{i=1}^{n} p_i^{\frac{\varphi}{\varphi-1}}}=\frac{M}{p_i^{\delta} \bullet \sum_{i=1}^{n} p_i^{1-\delta}}, i=1,\ldots,n.$$

При этом выражение $\sum_{i=1}^{n} p_i^{1-\delta}$, где $\delta=\frac{1}{1-\varphi}$ – эластичность замещения между продуктами, присутствующее в знаменателе данной функции маршаллианского спроса, можно трактовать как уровень цен (p) на данный дифференцированный продукт. Тогда индивидуальную функцию спроса можно представить в следующем виде:

$$x_i^m=\frac{M}{p_i^{\delta} \bullet p}, i=1,\ldots,n.$$

Соответственно рыночный спрос на каждую разновидность дифференцированного блага будет иметь вид:

$$x_i=\frac{L \bullet M}{p_i^{\delta} \bullet p}, i=1,\ldots,n.$$

Будем рассматривать ситуацию, когда выпуск каждой, *i*-ой разновидности рассматриваемого агрегированного дифференцированного продукта осуществляется единственным производителем, т.е. данная отрасль функционирует в условиях

монополистической конкуренции. Тогда совокупное, рыночное потребление *i*-го продукта будет совпадать с объемом его производства на данной единственной фирме:

$$q_i = x_i = \frac{L \bullet M}{p_i^{\delta} \bullet p}, i = 1, \ldots, n.$$

Индексы фирм и продуктов, а также их количества будут совпадать.

Если объем потребления каждого товара (x_i) составляет малую долю совокупного потребления данного дифференцированного блага, и эластичность замещения между данными его разновидностями и их количество достаточно высоки, то влиянием изменения каждой из их цен (p_i) на общий уровень цен в данной отрасли (p) можно пренебречь. Тогда совокупный доход потребителей, расходуемый на потребление данного агрегированного дифференцированного товара, в реальном выражении $\left(L \bullet \frac{M}{p}\right)$ будет величиной постоянной, и, поскольку функция спроса будет иметь степенной вид, постольку ее (прямая) ценовая эластичность будет равна показателю степени [5] – эластичности замещения между продуктами, взятой со знаком «минус»:

$$E_{p_i}^{x_i} = \frac{1}{\varphi\text{-}1} = -\delta. \quad (6.106)$$

В логике модели Чемберлина оценивающий таким образом эластичность спроса на свою продукцию монополистический конкурент рассуждает исходя из кривой остаточного спроса D_{res}.

Предположим далее, что технология производства каждой фирмы может быть задана линейной зависимостью (6.101) между объемами используемого труда (l_i) и выпускаемой продукции (q_i). Соответственно, издержки производства будут так же, линейно зависеть от объема выпускаемой продукции (6.102), причем предельные издержки будут представлять собой постоянную величину, не зависящую от объема выпуска: $MC_i = \beta w = const$.

Каждая фирма – монополистический конкурент, максимизируя свою прибыль (6.103), будет руководствоваться принципом равенства предельного дохода и предельных издержек. Предельная выручка может быть выражена через коэффициент эластичности спроса (1.56), используя рассчитанное выше его значение (6.106), следующим образом:

$$MR_i = p_i \left(\frac{1}{E_{p_i}^{q_i}} + 1\right) = p_i \frac{(\delta\text{-}1)}{\delta} = p_i \varphi.$$

Тогда условие максимизации прибыли принимает вил:

$$MR_i = p_i \frac{(\delta\text{-}1)}{\delta} = p_i \varphi = MC_i = \beta w.$$

Таким образом, условие максимизации прибыли с учетом эластичности рыночного спроса (6.106) позволяет рассчитать оптимальное, с точки зрения фирмы – монополистического конкурента, соотношение между рыночной ставки заработной и уровнем цены на продаваемую продукцию:

$$p_i = \frac{\beta w}{\varphi} = \frac{\beta \delta w}{\delta\text{-}1}. \quad (6.107)$$

В условиях свободного входа на рынок экономическая прибыль фирмы, работающей в условиях монополистической конкуренции, (6.103) будет падать до нуля:

$$PR_i = p_i q_i - (\alpha + \beta q_i) w = 0. \quad (6.108)$$

Объединяя условия максимизации прибыли (6.107) и долгосрочного равновесия (6.108)

$$q_i (p_i - \beta w) - \alpha w = q_i \left(\frac{\beta w}{\varphi} - \beta w\right) - \alpha w = q_i \beta w \frac{(1\text{-}\varphi)}{\varphi} - \alpha w = w \left(\frac{q_i \beta (1\text{-}\varphi)}{\varphi} - \alpha\right) = 0,$$

можно рассчитать объем производства фирмы, определяемый параметрами технологии производства и эластичности замещения между продуктами монополистических конкурентов:

$$q_i = \frac{\alpha \varphi}{\beta (1\text{-}\varphi)} = \frac{\alpha (\delta\text{-}1)}{\beta}. \quad (6.109)$$

Поскольку монополистический конкурент является единственным поставщиком товара данной разновидности $(q_i = x_i)$, постольку, зная число покупателей на рынке (L), тем самым, можно определить объем потребления данного блага каждым из них:

$$x_i^m = \frac{x_i}{L} = \frac{q_i}{L} = \frac{\alpha \varphi}{\beta (1\text{-}\varphi) L} = \frac{\alpha (\delta\text{-}1)}{\beta L}.$$

При этом совокупные денежные средства, потраченные потребителями на покупки всей номенклатуры дифференцированных товаров, будут формировать совокупную выручку их производителей, которую с учетом равновесных уровней цены (6.107) и объема производства (6.109) каждой фирмы можно записать в следующем виде:

$$L \bullet M = n \bullet p_i \bullet q_i = n \bullet \frac{\beta w}{\varphi} \bullet \frac{\alpha \varphi}{\beta (1\text{-}\varphi)} = \frac{n w \alpha}{1\text{-}\varphi} = n w \alpha \delta,$$

Это позволяет определить количество монополистических конкурентов, присутствующих в данной отрасли, охватывающей производство дифференцированной продуктовой линейки, и, соответственно, число их брендов, т.е. выпускаемых ими наименований продукции:

$$n = \frac{LM}{w\alpha\delta}.$$

1. Чемберлин Э. Теория монополистической конкуренции. – М.: Экономика, 1996. ↩
2. Напомним, что сумма t членов геометрической прогрессии рассчитывается по формуле: $S_t = a_1\frac{1-q^t}{1-q}$, где a_1 – первый член, а q – знаменатель прогрессии. В нашем случае $q = \frac{n-1}{2n}$, $a_1 = 1$. ↩
3. Отметим, что при $n = 1$ монополистическая конкуренция вырождается в монополию с оптимальным объемом производства $Q = \frac{a-c}{2b}$. ↩
4. Dixit A.K., Stiglitz J.E. Monopolistic competition and optimum product diversity // The American Economic Review. 1977. Vol. 67. №3. ↩
5. См. параграф 3.4. ↩

6.9. Равновесие на рынках активов

Модель ценообразования финансовых активов (CAPM) опирается на теорию портфельного выбора Г. Марковица, рассмотренную в параграфе 5.2.4.4. Она предполагает совершенство и ликвидность рынка капитала и применяется с целью определения требуемого уровня доходности рискового актива с учетом рыночного риска данного актива.

Важную роль в рамках модели CAPM играет т.н. теорема о разделении Д. Тобина, которая утверждает, что оптимальная для инвестора комбинация рисковых активов не зависит от его предпочтений относительно риска и дохода.

Предполагается, что инвестор желает держать часть своего капитала в виде наличности, а также на беспроцентных депозитах с целью поддержания ликвидности для возможных транзакций. Выбор соотношения активов в портфеле будет основываться на максимизации полезности этого портфеля и состоит в выборе определенной точки на эффективной границе допустимого множества портфелей Марковица. Параметры портфеля, максимизирующего полезность, будут определятся только долей инвестиций в рисковый портфель P. При этом благосостояние инвестора влияет на его решение об инвестициях в конкретные активы, но не влияет на относительное распределение его валовых инвестиций.

Допустим, на рынке существует $(n\text{-}1)$ рисковых активов с доходностями, определяемыми как прирост стоимости их цен за единицу времени

$$r_i = \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}},$$

и *n*-ый, безрисковый актив с доходностью r_f. В этом случае доходность портфеля может быть рассчитана следующим образом:

$$r_p = \sum_{i=1}^{n-1} w_i r_i + w_n r_f,$$

где w_i – доля вложения в *i*-й актив. Обозначим через w долю вложений в рисковые активы, которые приносят доходность r: $\sum_{i=1}^{n-1} w_i r_i = wr$. Соответственно, доля вложений в безрисковый актив составит [1] $w_n = (1\text{-}w)$. Тогда, уравнение доходности портфеля может быть представлено в следующем виде:

$$r_p = wr + (1\text{-}w) r_f = r_f + w\,(r\text{-}r_f). \quad (6.110)$$

Мерой риска портфеля является стандартное отклонение:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} w_i w_j cov(r_i, r_j)}, \quad (6.111)$$

где $cov(r_i, r_j)$ – ковариация *i*-го и *j*-го активов.

Заметим, что в случае безрискового актива, $\sigma_n = 0$ и $cov(r_i, r_n) = 0$ для любого *i*, в связи с чем при рассмотрении портфеля, состоящего только из рискового и безрискового активов, стандартное отклонение портфеля составит:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{w^2\sigma^2} = w\sigma. \quad (6.112)$$

Подставляя значения $w = \frac{\sigma_p}{\sigma}$ из уравнения стандартного отклонения в уравнение доходности портфеля, получаем линейную зависимость между ожидаемым доходом инвестора и риском его портфеля:

$$r_p = r_f + \theta\sigma_p, \quad (6.113)$$

где $\theta = \frac{(r_p\text{-}r_f)}{\sigma_p}$ – это т.н. коэффициент Шарпа, который показывает, как сильно по сравнению с безрисковой альтернативой вознаграждается единица риска по данному активу, и чаще всего используется в качестве меры успешности управления портфелем. Коэффициент Шарпа равен тангенсу угла наклона линии, отражающей зависимость между доходностью и риском актива (линия CAL), в связи с чем, задача инвестора заключается в его максимизации.

Наибольшее значение коэффициента Шарпа (максимальный угол наклона) будет иметь та линия CAL, которая является касательной к эффективной границе допустимого множества портфелей Марковица [2]. Таким образом, существует только одна точка оптимума, так называемый касательный портфель рисковых активов P, при которой вознаграждение за риск принимает максимальное значение (рис. 6.49).

После определения оптимального рискового портфеля, инвестор, максимизируя свою функцию полезности, переходит к выбору подходящих для него уровней риска и доходности. Выбирая доходность, инвестор определяет долю рисковых инвестиций в оптимальном портфеле, а следовательно, и оптимальное количество инвестиций в безрисковые активы, при этом сам портфель рисковых активов остается неизменным.

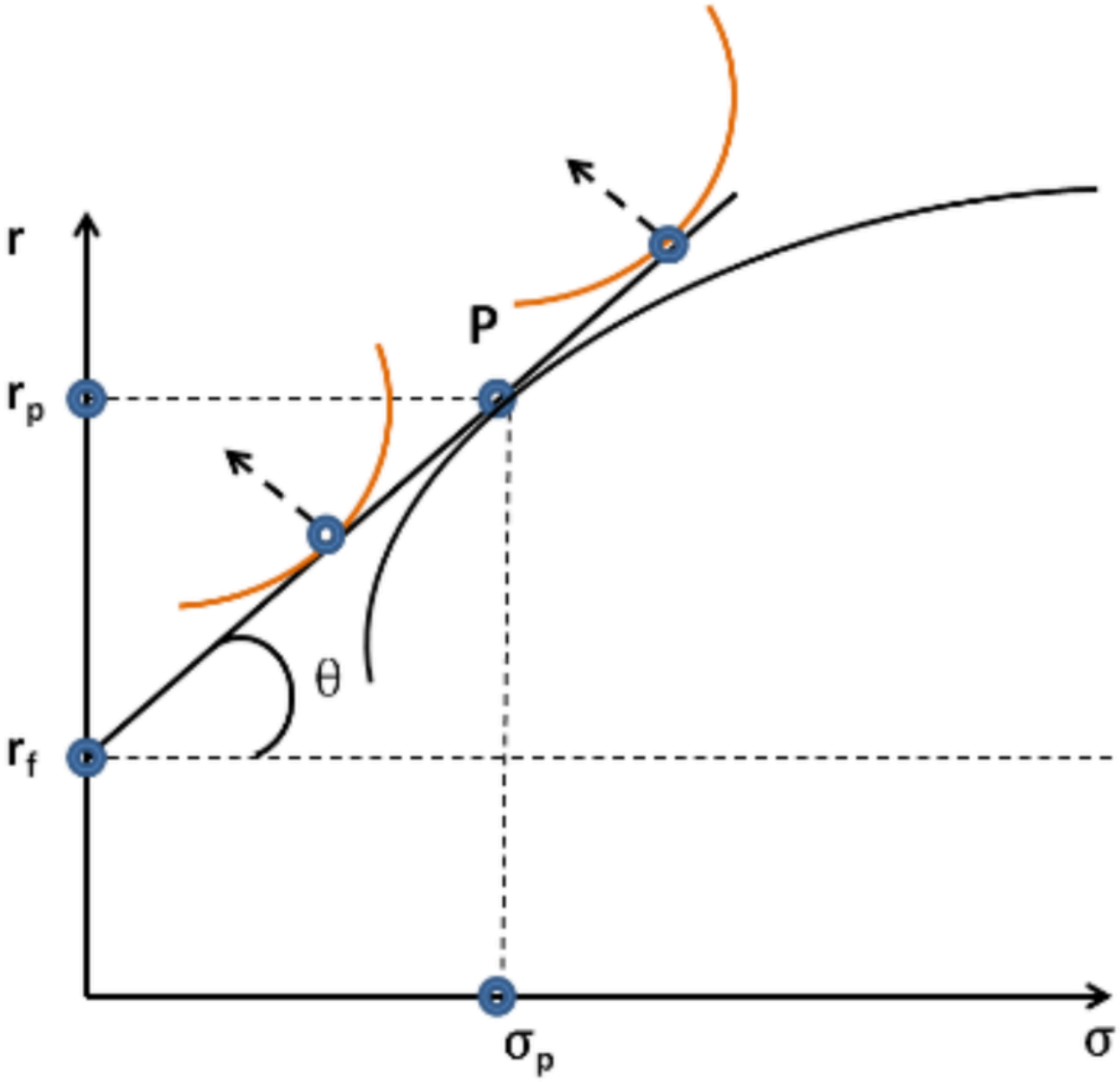


Рисунок 6.49. Выбор комбинации рискового и безрискового актива

Рассмотрим оптимизационный подход к выводу равновесных характеристик модели CAPM [3].

Наличие возможности коротких продаж подразумевает ситуацию, при которой инвестор продает актив, которого на момент совершения сделки у него нет, и который он планирует к моменту передачи актива купить на рынке по пониженной цене. В данном случае выполняется условие того, что $\sum w_i=1$, однако отсутствует условие положительности всех долей w_i.

При $w_i > 0$ доходность портфеля одного актива составит $w_i r_i=w_i (r_i\text{-}r_f)+|w_i|r_f$. *Если* $w_i < 0$, то инвестиция в актив будет равна цене, заплаченной за него. Полученная сумма должна быть депонирована, а также предельная возможная сумма должна быть выплачена настоящему владельцу актива, чьи акции были заимствованы для короткой продажи. В дополнение инвестор получает процент с вырученных от продажи денег, а также он может получить или не получить такой же процент от своего перевода владельцу акции. Чтобы облегчить анализ, предположим, что он всегда получает оба компонента дохода. Тогда доходность инвестиций составит $|w_i|(2r_f\text{-}r_i)=w_i (r_i\text{-}r_f)+|w_i|r_f$. Итоговую доходность портфеля можно записать так:

$$r_p=\sum_{i=1}^{n\text{-}1}(w_i (r_i\text{-}r_f)+|w_i|r_f)=r_f+\sum_{i=1}^{n\text{-}1} w_i m_i,$$

где $m_i=r_i\text{-}r_f$ – это премия за риск.

Стандартное отклонение данного портфеля не изменится и составит (6.111). Таким образом, возвращаясь к задаче максимизации, (в рамках выполнения начальных условий теоремы о разделении), поиск оптимального решения сводится к безусловной максимизации коэффициента Шарпа (поскольку θ – функция однородная степени 0 относительно w_i, соответственно любое пропорциональное изменение во всех w_i не влияет на θ).

Выпишем необходимые условия его максимизации:

$$\frac{\partial\theta}{\partial w_i}=\frac{m_i\text{-}\lambda(w_i\sigma_i^2+\sum\limits_{j\neq i}w_j cov(r_i,r_j))}{\sigma_p}=0,$$

где $\lambda=\frac{m}{{\sigma_p}^2}=\frac{\sum\limits_i w_i m_i}{\sum\limits_i\sum\limits_j w_i w_j cov(r_i,r_j)}$.

Поскольку σ_p – константа, она не влияет на решение и для каждого i-го уравнения точка максимума может быть записана так:

$$z_i\sigma_i^2+\sum_{j\neq i}w_j cov(r_i,r_j)=m_i, i=1,2,\ldots,n;$$

где $z_i=\lambda w_i$ – относительные инвестиции в *i*-й актив.

Второе слагаемое в предыдущем уравнении – это сумма ковариаций i-го актива с j-ым. Поскольку ковариационная матрица $\check{X}$ положительно определена, постольку можно выделить вектор оптимальных решений $z_i^0=\sum\limits_{j=1}^{n\text{-}1} cov^{mi,mj}m_j$, где cov^{ij} – элементы ij обратной ковариационной матрицы премий к доходностям активов.

Преобразовав данное выражение обратно к форме долей активов в портфеле, получаем $w_i^0=\left(\frac{1}{\lambda^0}\right)\sum\limits_{j=1}^{n\text{-}1} cov^{ri,rj}(r_j\text{-}r_f)$.

Поскольку сумма долей всех активов равна 1, постольку

$$\lambda^0=\sum_i|z_i^0|=\frac{m_p}{{\sigma_p}^2}, (6.114)$$

что позволяет получить оценку долей активов в оптимальном портфеле: ${w_i}^0=\frac{\lambda_i}{\lambda^0}\text{-}\sum\limits_{i\neq j}w_j^0{\sigma^2}_{ij}/cov(r_i,r_j)$.

Итак, оптимальная доля каждого актива в портфеле равна отношению его λ_i к λ^0 всего портфеля, при предпосылке о нулевых ковариациях (как упрощающее условие). Тогда сумма всех λ_i будет равна λ^0. Если ковариация принимает ненулевые значения, то оптимальная доля актива в портфеле будет равна отношению λ_i к λ^0 за вычетом отношения ковариации актива с другими активами к его дисперсии.

Если инвестор осуществляет исключительно «длинные» инвестиции, это накладывает ограничительное условие на $w_i\geq 0$, все активы, λ_i/λ^0 которых отрицательно, исключаются, и задача решается аналогичным образом.

Для определения оптимального портфеля в такой ситуации осуществляется максимизация функции $\phi(w,u)=\theta+\sum\limits_{i=1}^{n\text{-}1}u_i w_i$ с учетом ковариаций:

$$\frac{\partial\phi}{\partial w_i}=m_i\text{-}\lambda_i\left(w_i\sigma_i^2+\sum_{j\neq i}w_j cov(r_i,r_j)\right)+\delta u_i=0.$$

У оптимального портфеля будет максимальный коэффициент λ. В данном случае $v_i=\delta u_i$ описывает оптимальное решение для случая отсутствия коротких продаж. Оптимальный вектор z_i^0 – может быть найден с использованием условий Куна-Таккера:

$$z_i^0\sigma_i^2+\sum_{j\neq i}w_j cov(r_i,r_j)\text{-}v_i^0=m_i, i=1,2,\ldots,n;$$

$$z_i^0\geq 0, v_i^0\geq 0, z_i^0 v_i^0=0.$$

Однако для некоторого количества активов, которое реально держит инвестор $z_i>0$, в соответствии с ограничением из данных условий Куна-Таккера следует, что $v_i^0=0$. Таким образом, решение превращается в аналог ранее приведенного и все дальнейшие выкладки для случая с отсутствием коротких продаж эквиваленты случаю с короткими продажами за исключением количества активов, формирующих оптимальный портфель.

Поскольку ковариации между большинством пар ценных бумаг положительны, то ценные бумаги, которые держались на длинной позиции ($w_i>0$) в портфеле – это те бумаги, у которых ожидаемая норма доходности превышает безрисковую ставку процента.

Активы, у которых ожидаемая доходность меньше, чем безрисковая ставка процента, это те ценные бумаги, которые, с одной стороны, (а) в достаточной степени отрицательно коррелируют с другими важными ценными бумагами, которые держались в портфеле на длинной позиции или, с другой стороны, (б) ценные бумаги, которые в достаточной степени положительно коррелируют с другими ценными бумагами, которые держались в портфеле на короткой позиции.

Необходимо отметить, что при определении оптимума премия за риск зависит от дисперсии, а не от стандартного отклонения актива (6.114). Таким образом, существует линейная взаимосвязь между доходностью и дисперсией внутри множества эффективных портфелей, отражающая эффект диверсификации в координатах (r,σ).

В точке оптимума для всех активов соблюдается условие равенства отношения премии за риск к дисперсии λ^0, то есть за единицу риска (в данном случае дисперсии) все активы в оптимуме должны получать одинаковое вознаграждение.

Если свести анализ к рассмотрению всего двух активов, один из которых – целевой актив, доходность которого требуется определить, а второй – портфель, состоящий из всех остальных активов на рынке, можно представить соотношение долей этих активов следующим образом:

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{m_1\sigma_2^2\text{-}m_2 cov(r_1,r_2)}{m_2\sigma_1^2\text{-}m_1 cov(r_1,r_2)}.$$

Отсюда можно получить выражение доходности актива:

$$r_1 = r_f + z_2 cov(r_1, r_2) + z_2 \frac{w_1}{w_2}\sigma_1^2 = r_f + (r_2 - r_f)\frac{cov(r_1,r_2) + \frac{w_1}{w_2}\sigma_1^2}{\sigma_2^2 + \frac{w_1}{w_2}cov(r_1,r_2)},$$

где $z_2 = \frac{r_2 - r_f}{\sigma_2^2 + \frac{w_1}{w_2}cov(r_1,r_2)}$.

Отметим, что $z_2\frac{w_1}{w_2} = \lambda^0 w_1^0$ и $\lambda^0 > 0$. Из этого следует, что доля вложения в актив будет положительная, если наблюдается положительная линейная связь между доходностью актива и дисперсией этой доходности. Если же доля вложения в актив отрицательная, то зависимость между его доходностью и дисперсией будет обратной.

Полученное уравнение доходности актива является основой для классической трактовки модели CAPM [4], оценивающей требуемую доходность актива в зависимости от его риска и ковариации с рыночным портфелем. Поскольку в качестве второго актива выступает весь остальной рынок, число активов на котором не ограничено (согласно предпосылке о совершенно конкурентном рынке капитала), постольку в пределе отношение долей становится бесконечно малым: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{w_1}{\sum\limits_{i=2}^{n} w_i} = 0$.

Следовательно, $r_1 = r_f + \beta(r_m - r_f)$, где коэффициент $\beta = \frac{cov(r_1,r_m)}{\sigma_2^2}$ представляет собой меру систематического риска актива, который должен быть вознагражден доходностью. Для рыночного портфеля $\beta = 1$, и все остальные активы будут оцениваться относительно рыночного портфеля.

---

1. Если $w > 0$, то инвестор держит часть своего капитала в безрисковых активах и получает доход $(1-w)r_f$. Если $w < 0$, то инвестор берет заемные средства и платит за них $(1-w)r_f$. ↩

2. Один из способов доказательства теоремы о разделении основан на максимизации инвестором, располагающим денежной суммой в размере A_0, ожидаемой полезности $E[U(A_0 r_p, A_0\sigma_p)] = \overline{U}(A_0 r_p, A_0\sigma_p)$, обладающей следующими свойствами:
$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{U}}{\partial r_p} = A_0\overline{U}_1 > 0;\ \frac{\partial \overline{U}}{\partial \sigma_p} = A_0\overline{U}_2 < 0; \\ \frac{dr_p}{d\sigma_p}\Big|\overline{U} = -\frac{\overline{U}_2}{\overline{U}_1} > 0;\ \frac{d^2 r_p}{d\sigma_p^2}\Big|\overline{U} > 0. \end{cases}$$
Все доступные портфели активов могут находиться на эффективной границе Марковица (т.н. границы "E-V"), характеризуемой соотношениями: $r_i = f(\sigma_i), f'(\sigma_i) > 0, f''(\sigma_i) < 0$, либо ниже и правее данной границы. Более того, поскольку $\overline{U}_1 > 0$ и $\overline{U}_2 < 0$, все комбинации внутри данного множества допустимых портфелей будут менее эффективными, чем те, которые расположены на его границе.
Используя данные характеристики эффективной границы Марковица в соотношениях (6.110) – (6.113), можно выписать систему необходимых условий максимизации полезности:
$\frac{\partial U}{\partial w} = \overline{U}_1(r_i - r_f) + \overline{U}_2\sigma_i = 0,$
$\frac{\partial U}{\partial \sigma_i} = \overline{U}_1 w f'(\sigma) + \overline{U}_2 w = 0;$
которая может быть преобразована в цепочку равенств:
$\theta = \frac{r_i - r_f}{\sigma_i} = -\frac{\overline{U}_2}{\overline{U}_1} = f'(\sigma_i).$
Теорема о разделении выводится непосредственно из условия (6.111), если заметить, что равенство $\theta = f'(\sigma_r)$ является условием максимизации θ, т.к.
$\frac{\partial\theta}{\partial\sigma_i} = \frac{\sigma_i\left[f'(\sigma_i)\right] - [r_i - r_f]}{\sigma_i^2} = \frac{f'(\sigma_i) - \theta}{\sigma_i},$
$\frac{\partial^2\theta}{\partial(\sigma_i)^2} = \frac{\sigma_i f''(\sigma_i) + \left[f'(\sigma_i) - \theta\right] - \left[f'(\sigma_i) - \theta\right]}{\sigma_i^2} = \frac{f''(\sigma_i)}{\sigma_i} < 0, для всех \sigma_i > 0.$
Необходимое условие максимизации полезности и коэффициента θ не зависит от w. Значение $-\frac{\overline{U}_2}{\overline{U}_1}$, однако, напрямую зависит от w (для любых значений θ), и второе необходимое условие максимизации $\overline{U}$, заключается в том, что необходимо скорректировать w таким образом, чтобы $\theta = -\frac{\overline{U}_2}{\overline{U}_1}$, что удовлетворяет условию касания функции полезности и линии рыночных возможностей. ↩

3. Lintner J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets // Review of Economics and Statistics. 1965. Vol. 47. №1. ↩

4. Sharpe W.F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk // Journal of Finance. 1964. Vol. 19. №3. ↩

Глава 7. Анализ поведения фирм и рыночных структур

7.1. Анализ схем ценовой дискриминации
7.2. Версионирование. Модель Вэриана
7.3. Продажа товаров наборами и связанные продажи
7.4. Двухчастные и многочастные тарифы
7.5. Ценообразование с учетом пиковой загрузки и многопериодная ценовая дискриминация
7.6. Социальные воздействия на цены
7.7. Инновации и рыночные структуры
Тренировочные задания
Литература

7.1. Анализ схем ценовой дискриминации

7.1.1. Понятие, цель и условия ценовой дискриминации

Ценовая дискриминация – это продажа различных единиц одного и того же блага по разным ценам одному и тому же или разным потребителям. Причем, разница цен единиц блага не связана с издержками производства.

Цель проведения ценовой дискриминации - увеличение прибыли продавца.

Для успешной реализации ценовой дискриминации должны выполняться следующие *условия*:

- Наличие монопольной власти;
- Исключена или ограничена возможность перепродажи (арбитража) товара;
- Присутствие на рынке групп потребителей с различной готовностью платить и способность продавца различать эти группы.

Принято выделять три *степени ценовой дискриминации*:

- Ценовая дискриминация первой степени (совершенная ценовая дискриминация);
- Ценовая дискриминация второй степени (нелинейное ценообразование);
- Ценовая дискриминация третьей степени.

Проанализируем каждую из них.

7.1.2. Ценовая дискриминация первой степени

Ценовую дискриминацию первой степени еще называют совершенной ценовой дискриминацией, поскольку она предполагает, что каждая единица товара продается по индивидуальной цене, причем эта цена соответствует максимальной готовности потребителя платить за единицу блага.

Пусть:

- Функция полезности единственного потребителя блага x имеет вид: $U_i(x, y) = u_i(x) + y$, где y – расходы на все остальные блага, кроме x;
- $p = u(x)$ – максимальная цена, которую потребитель готов заплатить за x единиц товара;
- (p^*, x^*) – комбинация цены и выпуска, приносящие монополисту максимум прибыли;
- $c(x) = c \cdot x$ – функция издержек производства товара x монополистом.

Задача максимизации прибыли для монополиста формулируется следующим образом:

$$\max_{p,x} p - cx$$
$$u(x) \geq p$$

Экономический смысл ограничения в этой задаче состоит в том, что, покупая благо в объеме x, потребитель должен иметь неотрицательный потребительский излишек. Однако, поскольку монополист заинтересован в максимально высокой цене p, это ограничение следует превратить в равенство: $u(x) = p$.

Оптимальный объем производства x^* определяется из условия 1-го порядка:

$$u'(x) = c.$$

Его экономический смысл состоит в том, что предельная готовность потребителя платить за x равна предельным издержкам производства x.

Отсюда цена, которую потребитель готов заплатить за x^*, равна:

$$p^* = u(x^*).$$

Из рассмотренной модели следуют три важных вывода:

- Монополист производит Парето-оптимальный объем выпуска (т.к. $u'(x) = c$) и достигает максимума прибыли, в то время как потребитель платит за этот объем максимально возможную для него цену. Потерь от мертвого груза не возникает.
- Выпуск монополиста идентичен выпуску конкурентной отрасли, где $p(x) = c$, но при этом им присваивается весь рыночный излишек (т.е. потребительский излишек равен нулю).
- Аналогичный исход может быть достигнут, если монополист будет продавать каждую единицу товара согласно предельной готовности платить одному и тому же или нескольким потребителям. При этом сумма предельных готовностей платить будет равна общей готовности платить за товар (рис. 7.1).

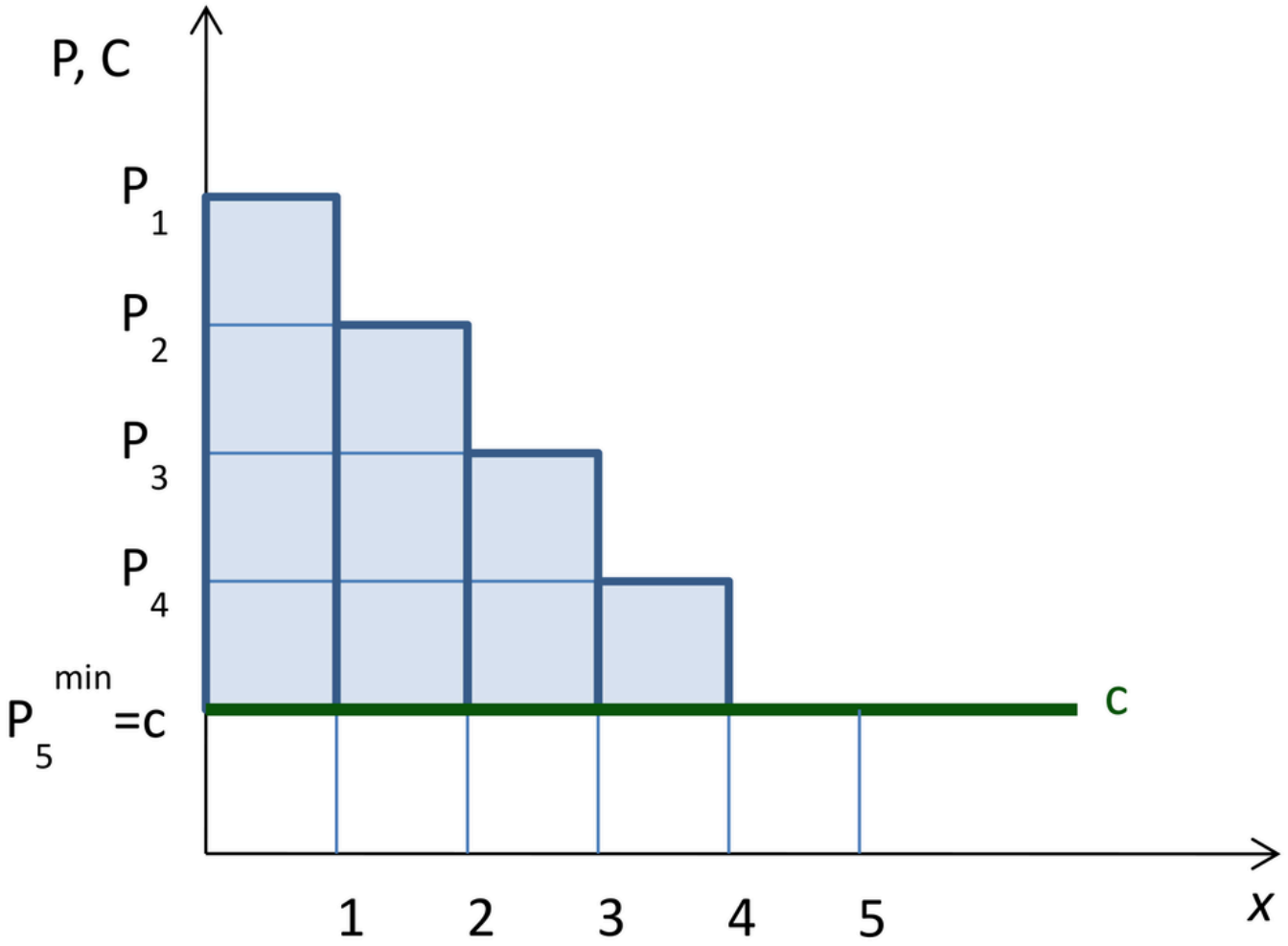


Рисунок 7.1. Ценовая дискриминация первой степени

Пусть объем товара x распадается на n частей, объем каждой из которых равен Δx, т.е. $x = n\Delta x$.

Тогда готовность платить за первую часть будет равна:

$$p_1 = u(\Delta x) - u(0).$$

Аналогично:

$$p_2 = u(2\Delta x) - u(\Delta x),$$

$$\dots$$

$$p_n = u(n\Delta x) - u((n-1)\Delta x) = u(x) - u((n-1)\Delta x).$$

С учетом того, что $u(0) = 0$, получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} p_n = u(x).$$

Таким образом, суммарная предельная готовность платить равна общей готовности платить.

Числовой пример

Пусть функция рыночного спроса на продукт максимизирующей прибыль монополии имеет вид: $P = 2 - Q$, где Q – объем выпуска. Предельные издержки производства товара равны единице. Если монополия на данном рынке будет осуществлять совершенную ценовую дискриминацию, то объем производства и прибыль фирмы будут, соответственно, равны 1 и ½, а потребительский излишек и потери общественного благосостояния будут отсутствовать.

Наблюдательный микроэкономист: Ценовая дискриминация 1-й степени

На практике ценовая дискриминация первой степени встречается там, где у продавца нет четкого прайс-листа, и цена назначается персонализировано. Это могут быть индивидуальные услуги парикмахера на дому, репетитора, массажиста, дизайнера интерьера, портного, юриста и других представителей бизнеса, которые очень хорошо знают готовность платить каждого своего клиента.

Вопрос – «На какой бюджет Вы рассчитываете?» - может означать желание продавца узнать готовность покупателя платить. А опытному торговцу на восточном базаре подобный вопрос не нужен! Ценников на товарах на таких базарах не бывает. За цену сделки принято торговаться. При этом изначальная цена предложения, которую называет продавец, определяется им по внешнему облику и психологии поведения покупателя, выдающими его состоятельность, жадность, расточительность, степень заинтересованности в покупке и другие важные характеристики.



Источник рисунка: Designed by Freepik

7.1.3. Ценовая дискриминация второй степени

7.1.3.1. Нелинейное ценообразование

Ценовая дискриминация второй степени объединяет различные виды нелинейного ценообразования, среди которых широко известны такие виды как установление разных цен в зависимости от объема потребления, условий, времени покупки.

Рассмотрим один из видов, при котором разные количества благ продаются по разным ценам потребителям с разной готовностью платить.

Пусть:

- Функции полезности потенциальных потребителей имеют вид: $U_i(x,y) = u_i(x) + y, i = 1,2$, где y – расходы на все остальные блага, кроме x;
- $r_i(x)$ – максимальная готовность потребителя платить за x единиц товара, т.е. $u_i(x) = r_i(x)$;
- $u_i(0) = 0$, т.е.: $u_i(0) + y = u_i(x) - r_i(x) + y$;
- p – цена единицы x;
- $p(x)$ – обратная функция спроса;

Оптимальный объем потребления x является решением задачи:

$$\max_{x,y} u_i(x) + y$$

$$px + y = m$$

Условие 1-го порядка имеет вид: $p = u_i^{'}(x)$. Оно означает, что цена, при которой объем потребления товара составит x единиц, равна: $p = p_i(x) = u_i^{'}(x)$.

Предположим, что:

- Максимальная готовность платить за товар у потребителя 2 выше, чем у потребителя 1, т.е.: $u_2(x) > u_1(x)$ для всех x;
- Предельная готовность платить за товар у потребителя 2 выше, чем у потребителя 1, т.е.: $u_2^{'}(x) > u_1^{'}(x)$ для всех x.

Одновременное выполнение этих условий называется «свойством единственного пересечения», означающим, что любые две кривые безразличия разных потребителей пересекаются один раз.

- $c(x) = c \cdot x$ – функция издержек производства товара x фирмой, обладающей монопольной властью.

Вопрос, на который предстоит ответить монополисту, можно сформулировать следующим образом: как «заставить» покупателей с высокой готовностью платить приобретать товары на «дорогом» сегменте рынка, оставляя «дешевый» сегмент рынка для покупателей с низкой готовностью платить?

В экономической теории этот вопрос относится к проблеме скрытых качеств, возникающей, когда одна из сторон сделки обладает некой важной для принятия решений информацией, которую другая сторона сделки не имеет, но хотела бы иметь. В случае с ценовой дискриминацией скрытые качества – это разная готовность потребителей (или их групп) платить за товар, о которой не известно монополисту.

Для реализации ценовой дискриминации 2-й степени фирме необходимо прибегнуть к сортированию клиентов посредством их самоидентификации и самоотбора.

Сортирование в данном случае означает механизм, который позволяет неинформированной стороне классифицировать информированные стороны.

Самоотбор – это выбор, сделанный информированной стороной из возможностей, предложенных неинформированной стороной, который выявляет ее скрытые качества, т.е. приводит к самоидентификации. В этом случае само поведение потребителя становится признаком его готовности платить за товар.

Покажем, как это происходит.

Пусть комбинации (r_1, x_1) и (r_2, x_2) определяют выбор потребителей 1 и 2.

Тогда для осуществления монополистом ценовой дискриминации 2-й степени должны выполняться два набора ограничений:

- «Ограничения участия» (participation constraints) или «ограничения индивидуальной рациональности» (individual rationality constraints), которые гарантируют, что полезность, получаемая каждым индивидом при совершенном им выборе, как минимум такая же, как и при отказе от него:

$$u_1(x_1) - r_1 \geq 0$$
$$u_2(x_2) - r_2 \geq 0$$

- «Ограничения самоотбора» (self-selection constraints) или «ограничения совместимости стимулов» (incentive compatibility constraints), утверждающие, что полезность, получаемая каждым индивидом при совершенном им варианте выбора, не ниже той, которую он мог бы получить при ином варианте выбора:

$$u_1(x_1) - r_1 \geq u_1(x_2) - r_2 \quad (2)$$
$$u_2(x_2) - r_2 \geq u_2(x_1) - r_1 \quad (3)$$

Перегруппировав условия, получаем систему из четырех неравенств:

$$r_1 \leq u_1(x_1) \quad (1)$$
$$r_1 \leq u_1(x_1) - u_1(x_2) + r_2 \quad (2)$$
$$r_2 \leq u_2(x_2) \quad (3)$$
$$r_2 \leq u_2(x_2) - u_2(x_1) + r_1 \quad (4)$$

Цель монополиста – определить максимальные r_1 и r_2. Чтобы решение существовало, одно из неравенств в каждой паре должно выполняться как равенство.

Предположим, что (3) – равенство, тогда (4) имеет вид:

$$u_2(x_1) \leq r_1.$$

Так как по условиям модели $u_1(x_1) < u_2(x_1)$, то $u_1(x_1) \leq r_1$, но это противоречит (1). Следовательно, (3) – неравенство, а (4) выполняется как равенство:

$$r_2 = u_2(x_2) - u_2(x_1) + r_1 \quad (5)$$

Если же (2) – равенство, тогда с учетом (5) имеем:

$$r_1 = u_1(x_1) - u_1(x_2) + u_2(x_2) - u_2(x_1) + r_1,$$

или:

$u_1(x_2) - u_1(x_1) = u_2(x_2) - u_2(x_1)$, что можно переписать в виде:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(u_1'(t) - u_2'(t)\right) dt = 0$$

Однако это противоречит условию модели: $u_2^{'}(x) > u_1^{'}(x)$.

Следовательно, (2) неравенство, а (1) выполняется как равенство:

$$r_1 = u_1(x_1) \tag{6}$$

Равенства (5) и (6) означают, что потребитель с низким спросом заплатит в соответствии со своей максимальной готовностью платить, а потребитель с высоким спросом заплатит максимально возможную цену, которая едва позволяет ему купить x_2, а не x_1.

Функция прибыли монополиста имеет вид:

$$\pi = [r_1 - cx_1] + [r_2 - cx_2] =$$
$$= [u_1(x_1) - cx_1] + [u_2(x_2) - u_2(x_1) + u_1(x_1) - cx_2]$$

Условие максимизации прибыли 1-го порядка:

$$u_1^{'}(x_1) - c - u_2'(x_1) + u_1^{'}(x_1) = 0$$
$$u_2^{'}(x_2) - c = 0$$

Из первого уравнения получаем:

$$u_1^{'}(x_1) = c + [(u_2^{'}(x_1) - u_1^{'}(x_1)) > c$$

Полученное из первого уравнения выражение означает, что для потребителя с низким спросом предельная полезность потребления превышает предельные издержки производства товара монополистом. Его потребление ниже общественно эффективного.

Из второго уравнения получаем:

$$u_2^{'}(x_2) = c$$

Полученное из второго уравнения выражение означает, что для потребителя с высоким спросом предельная полезность потребления равна предельным издержкам производства товара монополистом. В общем случае его потребление равно общественно эффективному.

7.1.3.2. Меню контрактов и самоотбор покупателей

Ценовая дискриминация второй степени может быть реализована через меню контрактов, обеспечивающих самоотбор покупателей.

Для выработки оптимального меню контрактов необходимо использовать два набора условий, уже знакомые из раздела 7.1.3 и имеющие схожую интерпретацию:

- *«Ограничения участия»* или *«ограничения индивидуальной рациональности»*, согласно которым удовлетворение индивидов от выбранной экономической деятельности должно быть как минимум таким же, как и при отказе от участия в ней.
- *«Ограничения самоотбора»* или *«ограничения совместимости стимулов»*, которые утверждают, что уровень удовлетворения каждого индивида при выборе контракта, предназначенного для него, должен быть не ниже, чем при выборе контракта, предназначенного для другого индивида.

Процедура выработки оптимального меню контрактов, обеспечивающих самоотбор покупателей, показана на интерактивном рис. 7.2 и подробно рассмотрена ниже.

Интерактивный рисунок из 5 частей (Информация для технического специалиста: в качестве образца для оформления рисунка используйте Figure 7.4a, 7.4b по ссылке: https://www.core-econ.org/the-economy/microeconomics/07-firm-and-customers-02-breakfast-cereal.html#figure-7-4ad)

Рисунок 7.2. Ценовая дискриминация второй степени: меню контрактов и самоотбор покупателей

Предположим, что благо производится с нулевыми предельными издержками [2], и на рынке существуют две группы покупателей: с высоким (D_2) и с низким (D_1) спросом. Пусть потребители внутри каждой из групп идентичны. Монополист не знает, для кого из покупателей характерен высокий, а для кого – низкий спрос на данный продукт. Предположим, что доли покупателей из двух групп одинаковы, т.е. вероятность повстречаться с потребителем из каждой группы составляет $\rho = \frac{1}{2}$. Целью монополиста является максимизация прибыли.

Монополист может предложить рынку партию в размере q_2 единиц товара и назначить за нее высокую плату в размере S_{0Bq_2}, равную максимальной денежной сумме, которую готов заплатить за данную партию потребитель с функцией спроса D_2. При этом очевидно, что монополист лишится всех покупателей из первого сегмента спроса. Но возможно, что выигрыш, который он получит за счет увеличения цены для каждого из покупателей на втором сегменте, перевесит возникающие потери.

Предлагая рынку меню контрактов, ориентированных на оба сегмента спроса, монополист всегда должен сравнивать потенциальные прибыли с теми, которые он получит, продавая наибольшую из возможных для отдельного потребителя партий товара по максимально возможной цене.

Способом реализации ценовой дискриминации второй степени служит предложение рынку различных партий товара по специальным ценам, когда плата возрастает непропорционально размеру партии.

В частности, монополист может предложить рынку следующее меню контрактов (рис. 7.3):

- приобретение партии в размере q_1 единиц данного товара по цене S_{0Aq_1} либо
- покупка партии q_2 товара за плату $S_{0Aq_1}+S_{q_1Cq_2}$.

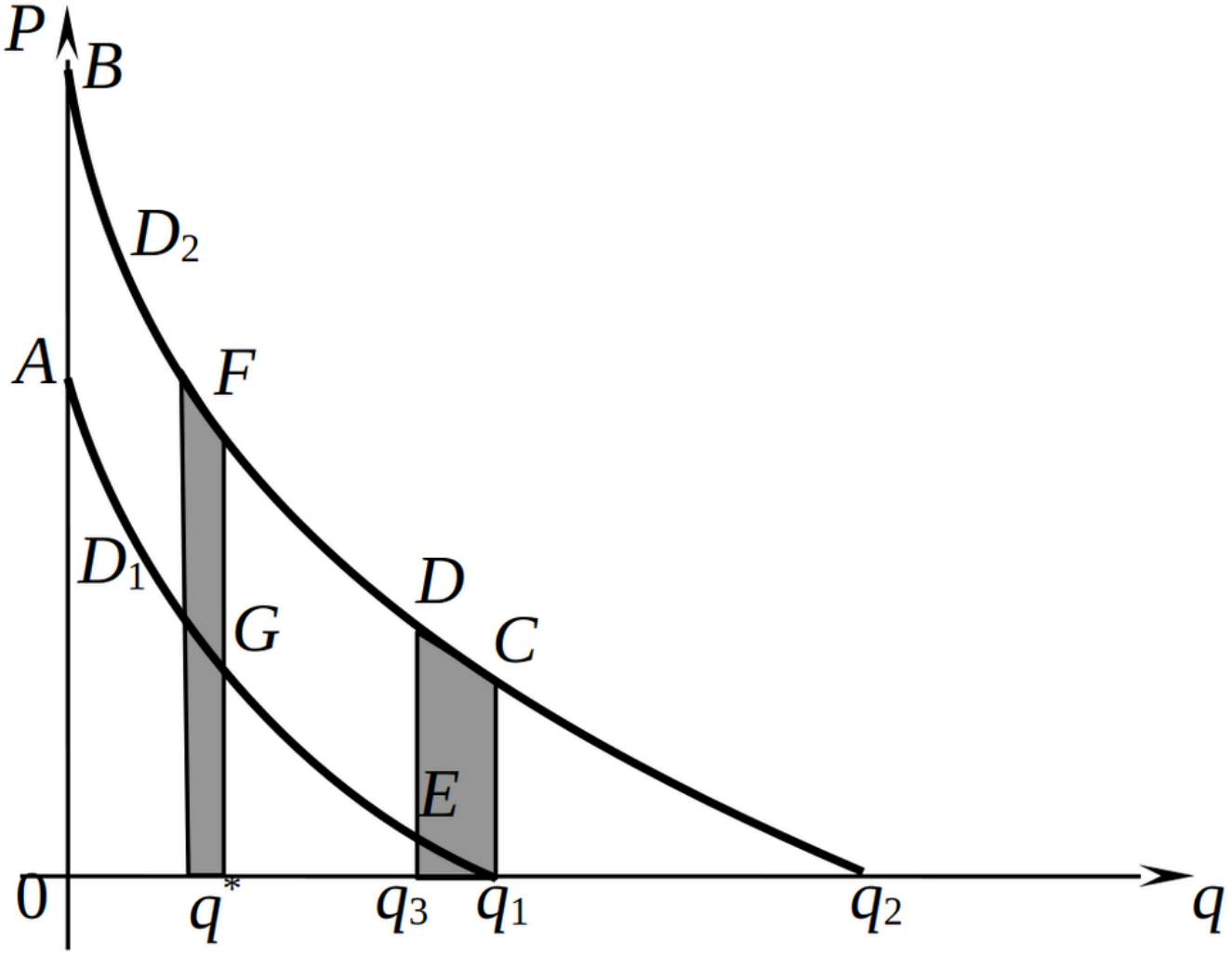


Рисунок 7.3. Выигрыши покупателя с высоким и низким спросом при различных меню контрактов

Очевидно, что покупатель из первой группы сможет купить только q_1 единиц товара, т.е. выберет первый из двух контрактов, поскольку плата в размере S_{0Aq_1} является максимальной денежной суммой, которую он готов заплатить за данное благо. Потребителю из второй группы безразлично, покупать q_1 или q_2, так как в итоге у него все равно останется излишек S_{ABCq_1}. Монополисту выгоднее, чтобы такой покупатель выбрал вторую альтернативу: тогда он получит бóльшую сумму денег, что будет означать увеличение прибыли. Этого можно добиться, уменьшив на предельно малую величину плату за партию q_2, что сделает ее приобретение более предпочтительным для данного покупателя. Таким образом, данное меню контрактов реализует механизм самоотбора покупателей, которые, выбирая определенный тип договора купли-продажи, обозначают свою принадлежность тому или иному сегменту спроса. Однако оно не является оптимальным с точки зрения продавца.

Для увеличения прибыли монополист может уменьшить количество, продаваемое потребителю первого типа на $(q_1\text{-}q_3)$ и цену – на $S_{Eq_1q_3}$. При этом второму потребителю монополист повысит плату на S_{EDCq_1}. Для монополиста выгодно поступать таким образом и далее, снижая размер партии, предлагаемой покупателю из первой группы вплоть до q^*, т.е. до тех пор, пока снижение выигрыша продавца на менее доходном сегменте спроса будет перекрываться увеличением прибыли от продажи товара потребителям с более высокой платежеспособностью. Меню контрактов станет оптимальным, т.е. прибыль монополиста будет максимальной при величине партии q^*, ориентированной на первый сегмент спроса, когда при бесконечно малом сокращении этой партии уменьшение платы, поступающей от каждого потребителя из первого сегмента, сравняется с повышением дохода от каждого покупателя из второй группы (рис. 7.3):

$$\lim_{q\to q^*}\frac{\Delta S_{Gq_1q^*}}{q\text{-}q^*}=\lim_{q\to q^*}\frac{\Delta S_{GFCq_1}}{q\text{-}q^*},$$

т.е.

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{q_1}^{x}p_1(q)\,dq=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_{q_1}^{x}p_2(q)\,dq-\int\limits_{q_1}^{x}p_1(q)\,dq\right)=\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{q_1}^{x}p_2(q)\,dq-\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{q_1}^{x}p_1(q)\,dq,$$

или

$$2\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{q_1}^{x} p_1(q)\,dq=\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{q_1}^{x} p_2(q)\,dq.$$

Используя формулу дифференцирования собственного интеграла $F(x)=\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(q,x)\,dq$ по параметру:

$F'(x)=f(\beta(x),x)\beta'(x)-f(\alpha(x),x)\alpha'(x)+\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{\partial f(q,x)}{\partial x}\,dq$, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{q_1}^{x} p_i(q)\,dq=p_i(x)\frac{\partial x}{\partial x}-p_i(x)\frac{\partial q_1}{\partial x}+\int\limits_{q_1}^{x}\frac{\partial}{\partial x}(p_i(q))\,dq=p_i(x),\ i=\{1,2\}.$$

Следовательно, оптимальный объем партии товара, продаваемой первой группе покупателей $\left(q^*\right)$, который является ключевым в выработке стимулирующего контракта, должен удовлетворять соотношению

$$p_2\left(q^*\right)=2p_1\left(q^*\right),$$

или

$$\frac{p_1(q^*)}{p_2(q^*)}=\rho=\frac{1}{2}.$$

В итоге оптимальное меню контрактов, реализующее механизм самоотбора покупателей, будет таким (рис. 4.14):

- приобретение партии в размере q^* единиц данного товара по цене S_{0AGq^*} либо
- покупка партии q_2 товара за плату $S_{0AGq^*}+S_{q^*Fq_2}$.

В общем случае при оптимизации меню контрактов следует учитывать, как правило, неравные рыночные доли покупателей из разных сегментов спроса, и делать поправку на соответствующие вероятности при анализе потенциальных потерь и выгод.

Пусть доля покупателей с высоким спросом равна ρ, а вероятность повстречать на рынке покупателя с низким спросом – соответственно, 1-ρ. Тогда при бесконечно малом изменении партии товара, предназначенной для покупателя с низким спросом, потери на первом сегменте составят $(1\text{-}\rho)p_1$, а соответствующий выигрыш на втором сегменте будет равен $\rho(p_2\text{-}p_1)$. В оптимальном меню контрактов эти величины должны быть одинаковыми:

$$(1\text{-}\rho)p_1\left(q^*\right)=\rho\left(p_2\left(q^*\right)\text{-}p_1\left(q^*\right)\right).$$

Таким образом, отношение цен спроса для покупателя из первого и второго сегментов при оптимальной партии, предназначенной для потребителя с низким спросом, должно равняться доле покупателей с высоким спросом:

$$\frac{p_1(q^*)}{p_2(q^*)}=\rho.$$

Рассмотрим подробнее выработку оптимального меню контрактов, осуществляющих самоотбор покупателей из различных сегментов с линейной зависимостью между объемом и ценой спроса. Пусть функция спроса для каждого покупателя из первой группы (D_1) имеет вид: $p_1=a–bq$, а для каждого покупателя из второй группы (D_2) спрос будет таким: $p_2=c–dq$. Предположим для определенности, что $c>a$, $a/b<c/d$ (рис. 7.4). Предположим для простоты, что количество покупателей в обоих сегментах спроса одинаково, т.е. встреча на рынке с потребителем, обладающим высоким либо низким спросом равновероятна.

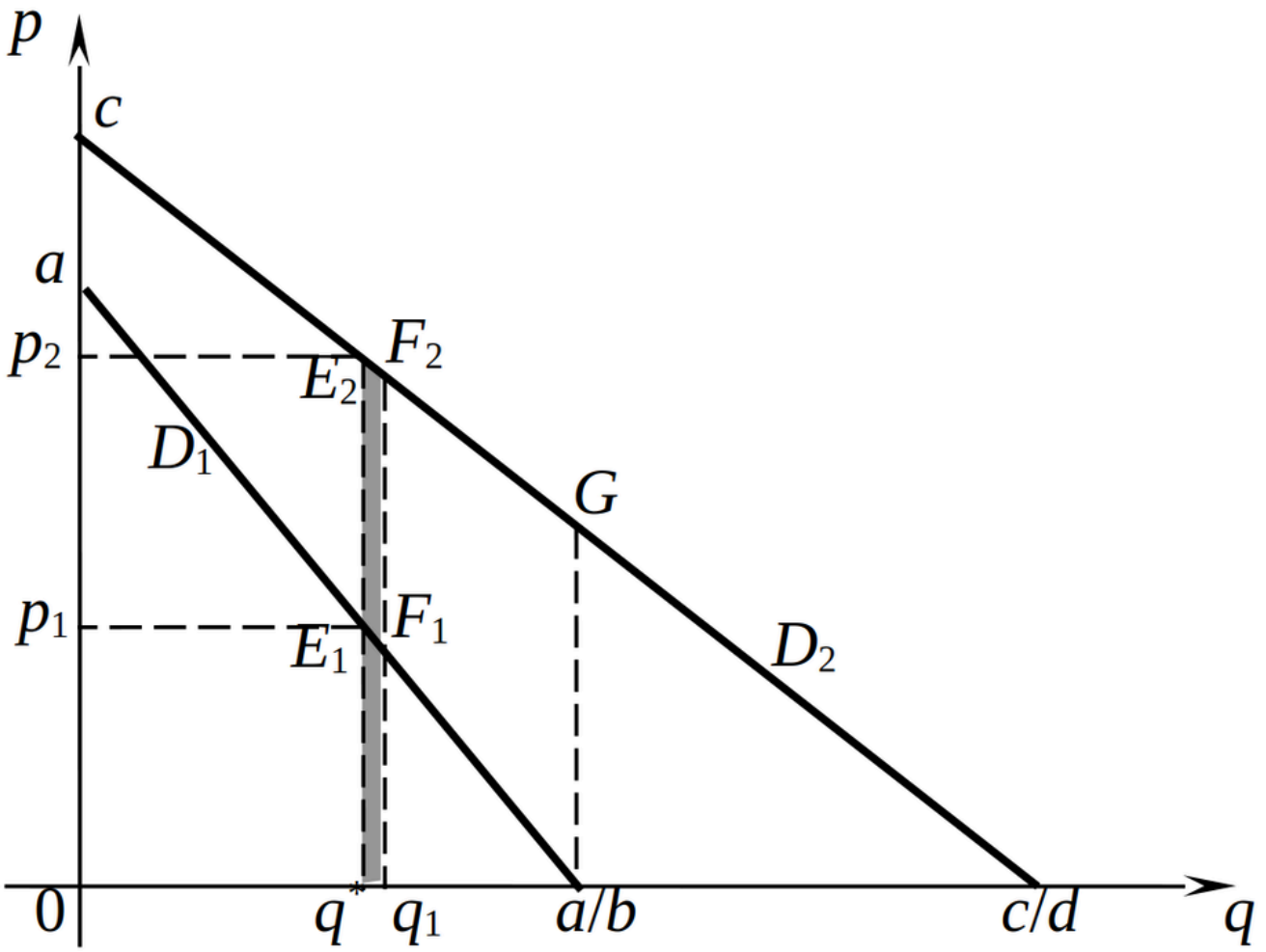


Рисунок 7.4. Выигрыши покупателя с высоким и низким спросом при различных меню контрактов: линейный спрос

При оптимизации меню контрактов за счет отклонения q^* от a/b потери на каждом потребителе из первого сегмента составят:

$$S_{a/bF_1q_1}=\frac{1}{2}(a-bq_1)\left(\frac{a}{b}-q_1\right)=\frac{a^2}{2b}-aq_1+\frac{bq_1^2}{2}.$$

Выигрыш монополиста за счет каждого покупателя из второй группы при этом будет равен:

$$S_{a/bGF_2F_1}=\frac{1}{2}\left(2c-dq_1-\frac{da}{b}\right)\left(\frac{a}{b}-q_1\right)-\frac{1}{2}(a-bq_1)\left(\frac{a}{b}-q_1\right)=\frac{da^2}{2b^2}+\frac{2ac-a^2}{2b}+q_1(a-c)+\frac{q_1^2(d-b)}{2}.$$

Чистый выигрыш монополиста при оптимизации меню контрактов составит:

$$S_{a/bGF_2F_1}-S_{a/bF_1q_1}=\frac{da^2}{2b^2}+\frac{ac-a^2}{b}+q_1(2a-c)+\frac{q_1^2(d-2b)}{2}.$$

При оптимальном меню контрактов производная чистого выигрыша дискриминирующего покупателей монополиста должна быть равна нулю:

$$\frac{d}{dq_1}\left(S_{a/bGF_2F_1}-S_{a/bF_1q_1}\right)=2a-c+(d-2b)q^*=0,$$

т.е.

$$c-dq^*=2\left(a-bq^*\right),$$

$$q^*=\frac{2a-c}{2b-d}.$$

Таким образом, для объема продукции, соответствующего оптимальной партии, предназначенной для каждого покупателя из первого сегмента, его цена спроса должна быть в два раза ниже цены спроса для покупателя из второй группы: $p_2\left(q^*\right)=2p_1(q^*)$.

Итак, цена партии в размере q^* единиц товара для покупателя с низким спросом составит $S_{0aE_1q^*}$, а для любого потребителя с высоким спросом цена партии из c/d единиц данного блага будет равна $S_{0aE_1q^*}+S_{c/dE_2q^*}$.

При выработке оптимального меню контрактов выше были использованы два типа ограничений:

- *«Ограничение участия»* или *«ограничение индивидуальной рациональности»*, которое может быть интерпретировано как *«ограничение по резервной полезности»*, было применено в отношении потребителя с низким спросом. При этом мы неявно предположили, что уровень его резервной полезности [3], который он будет иметь при отказе от покупки любой из партий товара, оговоренных в меню контрактов, равен нулю. Теория оптимальных контрактов утверждает, что

данное ограничение для потребителя с низким спросом должно быть жестким, т.е. его выигрыш при выборе контракта, предназначенного для него, должен быть равен нулю. Действительно, плата за партию, состоящую из q_1 единиц товара, равна его потребительскому излишку, т.е. площади под графиком спроса покупателя из первого сегмента, ограниченной справа размером партии, и расходами на каждую единицу товара по цене спроса для последней единицы товара в данной партии. В нашем случае вычитаемая величина равна нулю, и потребительский излишек равен максимальной денежной сумме, которую потребитель с низким спросом готов заплатить за партию в размере q_1 единиц товара.

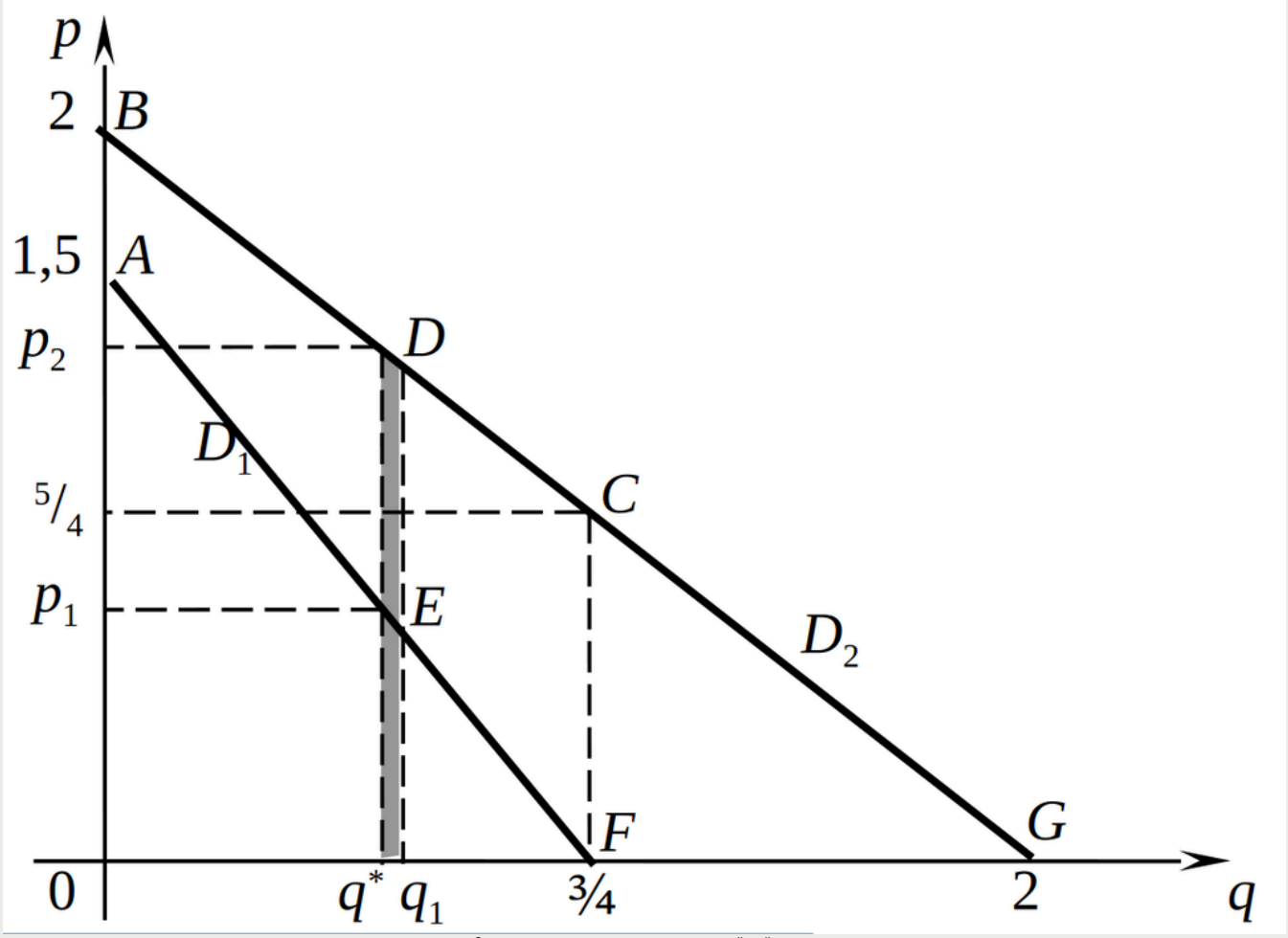
- *«Ограничение самоотбора»* или *«ограничение совместимости стимулов»* применено к потребителю с высоким спросом. В соответствии с теорией оптимальных контрактов, для него данное ограничение должно быть жестким. Действительно, меню контрактов, реализующих механизм самоотбора покупателей, подобрано таким образом, что потребительский излишек, равный максимальной денежной сумме, которую потребитель готов отдать за данную партию товара, оказывается одинаковым (S_{ABFG} на рис. 7.3) для покупателя с высоким спросом независимо от того, какой из двух контрактов он предпочтет.

Числовой пример

Предположим, что спрос на продукт предъявляется двумя равными по численности группами покупателей, состоящими из идентичных индивидов с функциями спроса, соответственно, P_1=1,5–2q и P_2=2–q. Рассмотрим процесс принятия решений монополистом, который, производя некоторый однородный продукт с нулевыми предельными издержками и не имея возможности идентифицировать покупателей с различными функциями спроса, проводит политику ценовой дискриминации второй степени. Будем предполагать, что вероятность встретить на рынке потребителя каждого типа одинакова.

Исходное меню контрактов, стимулирующее покупателей проявить свою готовность платить за товар, будет выглядеть так:

- *приобретение 2 единиц товара по цене $\frac{9}{16} + \frac{25}{32} = \frac{43}{32}$ (ден.ед.) либо*
- *покупка 0,75 единиц товара за плату в размере $\frac{9}{16}$ (ден.ед.).*



Оптимизация меню контрактов: линейный спрос

Тогда потребителю из второй группы будет безразлично, покупать 2 или 0,75 единицы товара, т.к. в итоге у него все равно останется излишек S_{ABCF}. Потребитель из первого сегмента сможет купить только 0,75 единицы товара по цене $\frac{9}{16}$.

Далее для увеличения прибыли монополист может уменьшить количество, продаваемое первому потребителю, на $(0,75\text{-}q_1)$ и цену – на величину

$$S_{EFq_1}=0,5\,(1,5-2q_1)\,(0,75-q_1)=\frac{9}{16}-\frac{3}{2}q_1+q_1^2.$$

При этом второму потребителю монополист может повысить цену на величину

$$S_{EDCF}=0,5\,(2-q_1+1,25)\,\left(\frac{3}{4}-q_1\right)-S_{EFq_1}=0,5\,(3,25-q_1)\,(0,75-q_1)-\left(\frac{9}{16}-\frac{3}{2}q_1+q_1^2\right)=\frac{21}{32}-0,5q_1-0,5q_1^2.$$

Монополисту выгодно поступать таким образом до тех пор, пока изменение S_{EFq_1} будет меньше, чем прирост S_{EDCF}. Его прибыль будет максимальной, когда

$$\frac{\partial}{\partial q_1}S_{EFq_1}=-1,5+2q_1=\frac{\partial}{\partial q_1}S_{EDCF}=-0,5-q_1,$$

т.е. при величине партии товара, ориентированной на первый сегмент спроса: $q^*=0,(3)$.

В итоге оптимальное меню контрактов, реализующее механизм самоотбора покупателей, будет выглядеть так:

- *приобретение 2 единиц товара по цене, равной $S_{0AEq_1}+S_{DGq_1}=1,(7)$ либо*
- *покупка $q^*=0,(3)$ единиц товара за плату в размере $S_{0\,AE\,q_1}=0,3(8)$.*

Отметим, что прибыль монополиста при назначении за партию в 2 единицы товара максимальной цены, которую готов заплатить потребитель из второго сегмента, равной $S_{0BG}=2$, была бы меньшей за счет потери первого сегмента спроса, по сравнению с предлагаемым механизмом ценовой дискриминации покупателей, когда уменьшение прибыли, приносимой каждым потребителм с высоким спросом (1,(7) ден.ед.), компенсируется прибылью на каждом покупателе с низким спросом (0,3(8) ден.ед.).

Числовой пример

Приведем пример создания меню контрактов, реализующего механизм самоотбора покупателей, при положительных и постоянных предельных издержках производства товара.

Допустим, что спрос на продукт предъявляется двумя равными по численности группами покупателей, состоящими из идентичных индивидов с функциями спроса, соответственно, P_1=3,5–2q и P_2=4–q. Рассмотрим процесс принятия решений монополистом, который, производя некоторый однородный продукт при постоянных предельных издержках MC=AC=2 и не имея возможности идентифицировать покупателей с различными функциями спроса, проводит политику ценовой дискриминации второй степени. Предположим равные доли потребителей каждого типа в общем числе покупателей на рынке.

Запишем ограничения при принятии решений монополистом.

- *«Ограничение участия» (ограничение по резервной полезности) для первого покупателя имеет вид:*
  $\frac{(3,5+p_1(q_1))}{2}q_1-p_1(q_1)\bullet q_1-F_1=\frac{(3,5+(3,5-2q_1))}{2}q_1-(3,5-2q_1)q_1-F_1=\frac{(3,5-(3,5-2q_1))}{2}q_1-F_1\geq 0.$

В оптимальном контракте данное ограничение будет жестким, т.е.

$$F_1=q_1^2.$$

- *«Ограничение самоотбора» или «ограничение совместимости стимулов» для второго покупателя будет выглядеть так:*
  $\frac{(4+p_2(q_2))}{2}q_2-p_2\,(q_2)\bullet q_2-F_2\geq\frac{(4+p_2(q_1))}{2}q_1-p_1\,(q_1)\bullet q_1-F_1,$

т.е.

$$\frac{(4+(4-q_2))}{2}q_2-(4-q_2)q_2-F_2\geq\frac{(4+(4-q_1))}{2}q_1-(3,5-2q_1)q_1-F_1.$$

Поскольку в оптимальном контракте данное ограничение будет активным, постольку, проводя очевидные преобразования, получаем:

$$F_2=\frac{q_2^2}{2}-\frac{3q_1^2}{2}-\frac{q_1}{2}+F_1=\frac{q_2^2}{2}-\frac{q_1^2}{2}-\frac{q_1}{2}.$$

Монополист максимизирует функцию ожидаемой прибыли, в которой с вероятностями ½ присутствуют разности между выручкой и издержками производства для каждой из групп покупателей:

$$EPR=\frac{1}{2}\left(p_1\,(q_1)\bullet q_1-AC\bullet q_1+q_1^2\right)+\frac{1}{2}(p_2\,(q_2)\bullet q_2-AC\bullet q_2+F_2)=\frac{1}{2}\left((3,5-2q_1)q_1-2q_1+q_1^2\right)+\frac{1}{2}\left((4-q_2)q_2-2q_2+\frac{q_2^2}{2}-\frac{q_1^2}{2}-\frac{q_1}{2}\right)=\frac{q}{2}$$

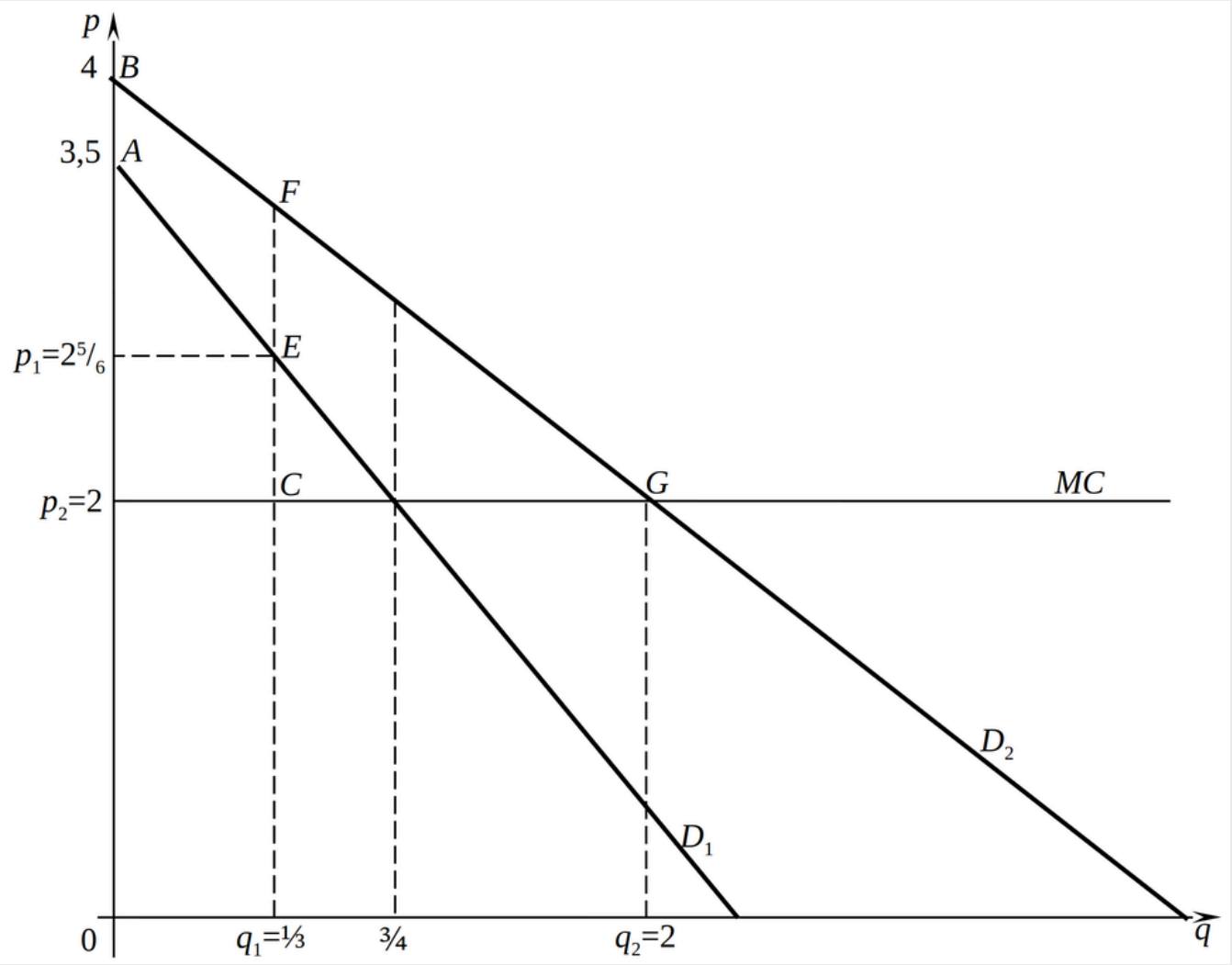
Выписывая необходимые условия максимизации прибыли:

$$\begin{cases}\frac{\partial PR}{\partial q_1}=\frac{1}{2}-\frac{3q_1}{2}=0,\\ \frac{\partial PR}{\partial q_2}=1-\frac{q_2}{2}=0;\end{cases}$$

получаем оптимальное меню контрактов, реализующее механизм самоотбора покупателей:

- *право приобрести $q_1=\frac{1}{3}$ единицы товара стоит $F_1=S_{A_{p_1}E}=\frac{1}{9}$, при этом за каждую купленную единицу товара взимается плата $p_1=2\frac{5}{6}$;*

- *право покупки $q_2 = 2$ единицы товара стоит $F_2 = S_{A_{p_1}p_2CE} + S_{CFG} = 1\frac{5}{6}$, при этом за каждую купленную единицу товара взимается плата $p_2 = 2$.*



Пример оптимизации меню контрактов: линейный спрос и положительные предельные издержки

7.1.4. Ценовая дискриминация третьей степени

Ценовая дискриминация третьей степени практикуется тогда, когда группы потребителей с разной готовностью платить выделяются по явному, внешне выраженному признаку. При этом для каждой группы потребителей назначается соответствующая цена, которая неизменна для всех единиц блага. Это одна из распространенных форм ценовой дискриминации, встречающаяся там, где среди всех потребителей можно выделить, к примеру, студентов, пенсионеров, ветеранов и т.п.

Пусть $p_i(x_i)$ – обратные функции спроса на товар x со стороны различных групп потребителей, которые монополист легко различает, $i = 1, 2$.

Допустим, что изначально при сегментации спроса монополия не проводит ценовую дискриминацию. При этом на едином рынке будет наблюдаться излом функции суммарного спроса (при объеме продукции Q_0 на рис. 7.5). Ему будет соответствовать излом функции общей выручки и разрыв в предельной выручке. При этом даже если график предельных издержек будет проходить в разрыве предельной выручки, он все равно будет пересекать и первый (MR_1), и второй (MR_Σ) ее участки. Первоначально MR_1 лежит выше MR_Σ, то есть касательная к графику TR_1 – более крутая, по сравнению с касательной к графику TR_Σ, а значит, TR_1 первоначально лежит выше TR_Σ. Но в точке Q_0 их пересечения – ситуация уже обратная: $MR_1 < MR_\Sigma$, то есть касательная к TR_1 – более пологая, чем касательная к TR_Σ. Следовательно, правее точки Q_0 TR_Σ будет превышать TR_1 (рис. 7.5).

Возможны три случая.

Если предельные издержки пересекают только первый сегмент предельного дохода (MR_1) и при этом выполняется достаточное условие максимума прибыли $(MR^{'} \leqslant MC^{'})$, то на рынке будет присутствовать только первая группа покупателей.

Вторая, более вероятная возможность – это пересечение графиков предельных издержек и дохода (при выполнении достаточного условия максимизации прибыли $MR^{'} \leqslant MC^{'}$) на более эластичном участке суммарного спроса, когда товар продается всем группам покупателей. Эта ситуация отображена на рис. 7.5. Оптимальный объем производства для фирмы составит Q_Σ, а цена будет назначена на уровне p_Σ. При этом покупателям из первой группы будет продано q_Σ^1, а потребители из второй группы купят q_Σ^2 единиц товара.

Наконец, даже если график предельных издержек будет проходить в разрыве предельной выручки, он все равно будет пересекать и первый (MR_1), и второй (MR_Σ) ее участки. Максимум прибыли монополии будет соответствовать пересечению

MC с участком суммарного предельного дохода (MR_Σ).

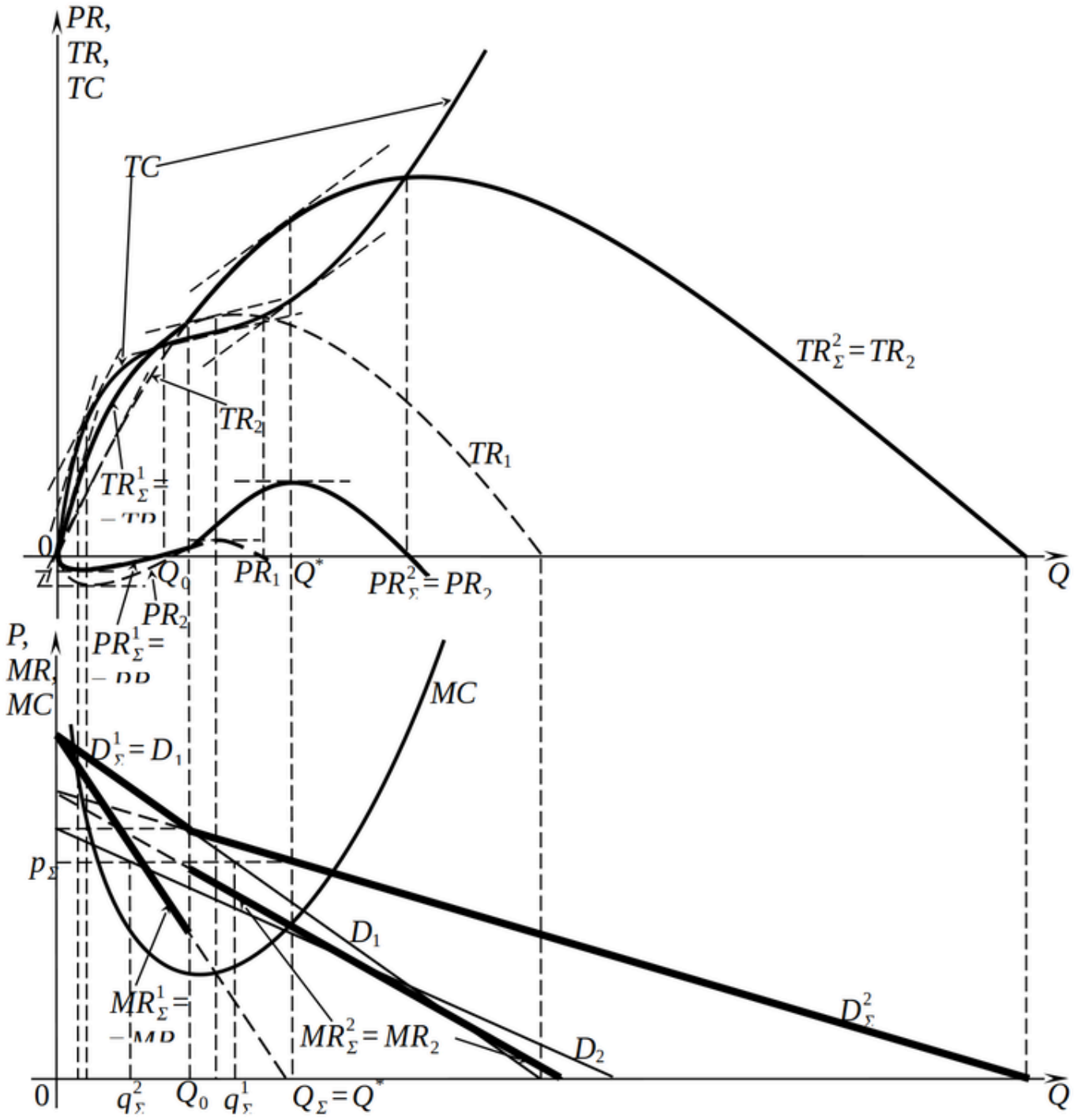


Рисунок 7.5. Отсутствие ценовой дискриминации

Необходимые условия максимума прибыли дискриминирующей монополии при наличии двух сегментов спроса $PR=TR_1+TR_2-TC=p_1q_1+p_2q_2-TC(Q)$ будут иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial PR(Q)}{\partial q_1}=\frac{\partial TR(Q)}{\partial q_1}-\frac{\partial TC(Q)}{\partial q_1}=0, \\ \frac{\partial PR(Q)}{\partial q_2}=\frac{\partial TR(Q)}{\partial q_2}-\frac{\partial TC(Q)}{\partial q_2}=0, \end{cases}$$

где $Q=q_1+q_2$ – суммарный объем продаж монополии на двух частях рынка.

Каждое из данных равенств можно расписать в следующем виде:

$$\frac{\partial PR}{\partial q_i}=\frac{\partial (TR_1(q_1)+TR_2(q_2))}{\partial q_i}-\frac{\partial TC}{\partial q_i}=\frac{\partial TR_i(q_i)}{\partial q_i}-\frac{\partial TC}{\partial q_i}=MR_i\,(q_i)-\frac{\partial TC}{\partial Q}\,\frac{\partial Q}{\partial q_i}=MR_i\,(q_i)-MC(Q)\,\frac{\partial (q_1+q_2)}{\partial q_i}=MR_i\,(q_i)-MC(Q)=0, i=\{1,2\}.$$

Итак, предельный доход на каждом из рынков равен предельным издержкам монополиста при производстве оптимального объема продукции Q_Σ, продаваемого на всех сегментах рынка, а значит, и предельным издержкам производства на каждом из

рыночных сегментов:

$$MR_1\,(q_1)=MR_2\,(q_2)=MC(Q).$$

На первом сегменте будет назначена цена p_1 и будет продано q_1 единиц продукта. На втором сегменте спроса цена будет установлена на уровне p_2, а объем продаваемой продукции будет равен q_2 (рис. 7.6). При этом осуществляющая дискриминацию третьего рода монополия не изменяет суммарный выпуск продукции по сравнению с ситуацией единого рынка продукта. Монополист, учитывая при ценообразовании рыночную сегментацию, перераспределяет тот же объем производства между сегментами спроса с разной эластичностью.

При ценовой дискриминации третьей степени функция предельного дохода будет непрерывной, состоящей из двух участков – MR_Σ и MR_1 (последний из которых соответствует верхнему сегменту суммарного спроса). В точке их пересечения будет наблюдаться излом графика суммарной предельной выручки, означающий недифференцируемость функции совокупной выручки фирмы (рис. 7.6).

Очевидно, что суммарный предельный доход строится как “горизонтальная” сумма функций предельной выручки на каждом из сегментов рынка: при каждом уровне предельных издержек, а значит, и данной, единой величине предельного дохода на каждом из сегментов, совокупный объем производства фирмы будет представлять собой сумму продаж на всех сегментах.

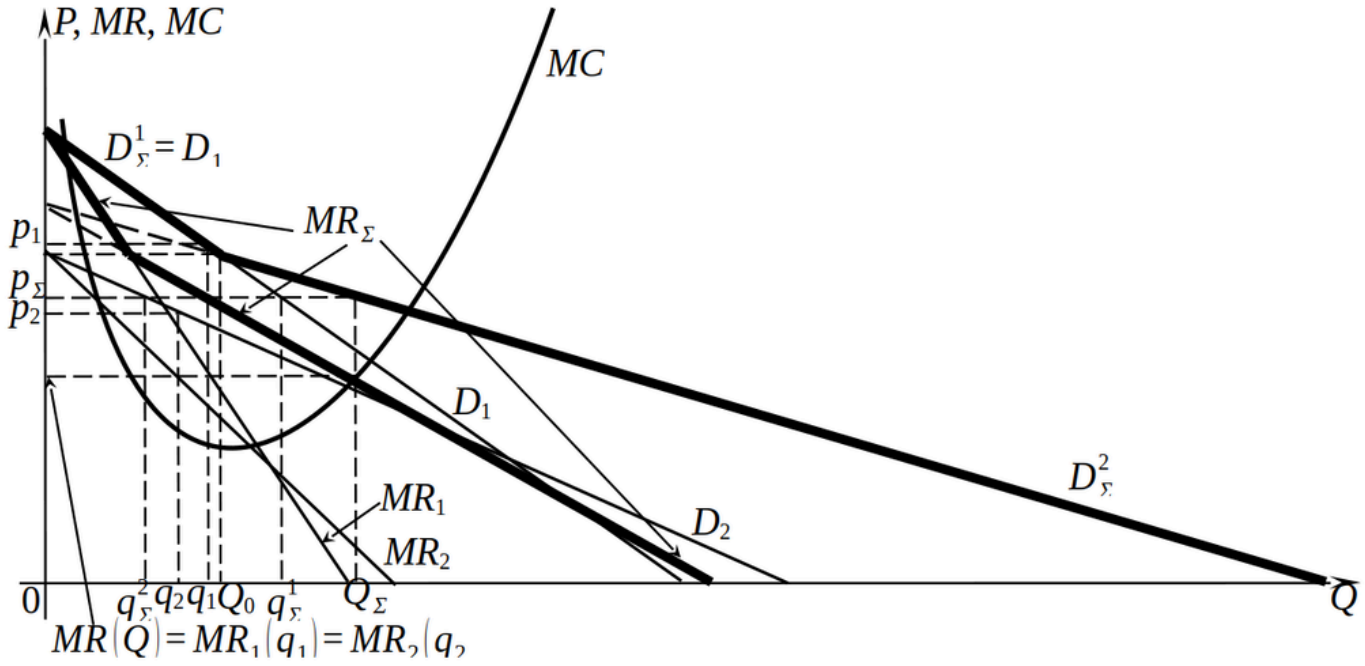


Рисунок 7.6. Ценовая дискриминация на сегментированном рынке

При отсутствии дискриминации монополия устанавливает единую цену для всех покупателей на уровне p_Σ. При этом единственным фактором, влияющим на величину предельной выручки, остается ценовая эластичность спроса. Напомним, что монополист всегда работает на эластичных участках спроса – там, где предельная выручка положительна, а общая выручка является возрастающей функцией объема продаж. Другими словами, при увеличении продаж выручка будет расти, а при их сокращении – падать. Если предельная выручка на одном сегменте спроса (D_1) в исходной ситуации меньше предельного дохода от второго подмножества покупателей (D_2), то монополии будет выгодно дифференцировать цены для данных двух групп, – повысить цену для первой группы (от p_Σ до p_1) и снизить цену для второй (от p_Σ до p_2). При этом в силу различий в значениях предельной выручки сокращение доходов при снижении объема продаж (от q^1_Σ до q_1) на первом сегменте окажется меньше по абсолютной величине по сравнению с ростом доходов при соответствующем увеличении объемов продукции (от q^2_Σ до q_2), реализуемых на втором сегменте (рис. 7.6).

Действительно, если расписать в условии оптимизации для ценовой дискриминации третьей степени выражения предельного дохода на каждом из сегментов через соответствующие коэффициенты эластичности спроса по цене:

$$MR_1=p_1\left(1+\frac{1}{E_p^{d_1}}\right)=p_2\left(1+\frac{1}{E_p^{d_2}}\right)=MR_2,$$

то можно видеть, что превышение цены, назначаемой первой группе покупателей, над ценой для второй группы будет тем больше, чем менее эластичен первый сегмент и чем более эластичен второй сегмент спроса:

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{1+\frac{1}{E_p^{d_2}}}{1+\frac{1}{E_p^{d_1}}}.$$

Числовой пример

Пусть максимизирующий прибыль монополист продает продукцию на двух изолированных друг от друга рынках с функциями спроса P_1=144–0,75Q_1 и P_2=43–1,25Q_2. Определим, сколько продукции и по какой цене ему следует продавать на каждом из рынков, если TC=4Q+0,25Q^2, где Q – совокупный объем производства монополиста на двух рынках. Поскольку MR_1=144–1,5Q_1, MR_2=43–2,5Q_2, MC=4+0,5(Q_1+Q_2), получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 144\text{-}1,5Q_1=4+0,5\,(Q_1+Q_2), \\ 43\text{-}2,5Q_2=4+0,5\,(Q_1+Q_2); \end{cases}$$

откуда $Q_1=69,65$, $Q_2=\text{-}1,39$. Таким образом, второй сегмент рынка оказывается для монополиста убыточным, и он будет продавать 70 единиц продукции только на первом сегменте (в соответствии с условием MR_1=144–1,5Q_1=MC=4+0,5Q_1) по цене P_1=91,5.

Рассчитаем теперь, сколько продукции и по какой цене следует продавать монополии, если ценовая дискриминация запрещена. Поскольку Q_1=192–$^4/_3P_1$, Q_1(43)=134⅔, а Q_2=34,4–0,8P_2, постольку составная функция спроса на продукцию монополиста будет иметь вид:

$$P=\begin{cases} 144\text{-}0,75Q, при Q\in[0,134⅔]; \\ 106,125\text{-}\frac{15}{32}Q, при Q\in(134⅔,226,4]. \end{cases}$$

Предельный доход также будет иметь излом:

$$MR=\begin{cases} 144\text{-}1,5Q, при Q\in[0,134⅔); \\ 106,125\text{-}\frac{15}{16}Q, при Q\in(134⅔,226,4]. \end{cases}$$

Максимизируя прибыль, проверяем условие $MR=MC$ на каждом из сегментов рынка: во-первых, 144–1,5Q=4+0,5Q, и Q=70≣(0, 134⅔); и, во-вторых, 106,125–$^{15}/_{16}$Q=4+0,5Q, т.е. $Q\notin(134⅔,226,4]$. Итак, объем производства и цена будут такими же, как и в случае ценовой дискриминации.

Числовой пример

Допустим, что коэффициент ценовой эластичности спроса покупателей первой группы составляет –2,5; а коэффициент ценовой эластичности спроса покупателей второй группы равен –4. Задача фирмы состоит в том, чтобы определить, какую скидку целесообразно предоставить покупателям второй группы с более эластичным спросом.

Условие оптимальности требует равенства предельных доходностей продаж на каждом из рыночных сегментов, которая представляет собой произведение цены на коэффициент, равный обратной величине ценовой эластичности спроса, увеличенной на единицу. Следовательно, отношение оптимальных цен, назначаемых для данных сегментов спроса, будет обратно пропорционально отношению данных коэффициентов:

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{1+\frac{1}{E_P^{D_2}}}{1+\frac{1}{E_P^{D_1}}}=\frac{1\text{-}\frac{1}{2,5}}{1\text{-}\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}.$$

Таким образом, величина скидки для представителей второй группы должна составлять 20%.

Одна из дискуссий, которые ведутся вокруг ценовой дискриминации третьей степени, посвящена вопросу о ее влиянии на общественное благосостояние.

Необходимым условием роста общественного благосостояния является рост совокупного отраслевого выпуска. Проверим, как он изменяется при переходе от единой цены к ценовой дискриминации третьей степени.

Пусть предельные издержки монополиста равны нулю, а на рынке присутствуют две группы потребителей с разными функциями спроса:

$$x_1=a_1\text{-}b_1p_1,$$
$$x_2=a_2\text{-}b_2p_2.$$

Случай 1.

Если монополист будет продавать свою продукцию на обоих сегментах рынка по единой цене, он будет ориентироваться на кривую рыночного спроса, которая имеет вид:

$$x_1+x_2=a_1+a_2\text{-}\,(b_1+b_2)p.$$

В этом случае его оптимальный объем выпуска будет равен:

$$x_1+x_2=\frac{a_1+a_2}{2}.$$

При проведении ценовой дискриминации третьей степени монополист будет продавать следующие оптимальные объемы:

$$x_1 = \frac{a_1}{2} \text{ и } x_2 = \frac{a_2}{2}.$$

Очевидно, что суммарный объем продаж при единой цене и при ценовой дискриминации третьей степени один и тот же: $(a_1 + a_2)/2$.

Следовательно, в этом случае роста общественного благосостояния не происходит.

Случай 2.

Если спрос на одном из сегментов рынка оказывается настолько низким, что при установлении единой цены монополист игнорирует этот сегмент, тогда переход к ценовой дискриминации третьей степени приведет к росту совокупного отраслевого выпуска за счет вовлечения сегмента рынка с низким спросом (рис. 7.7).

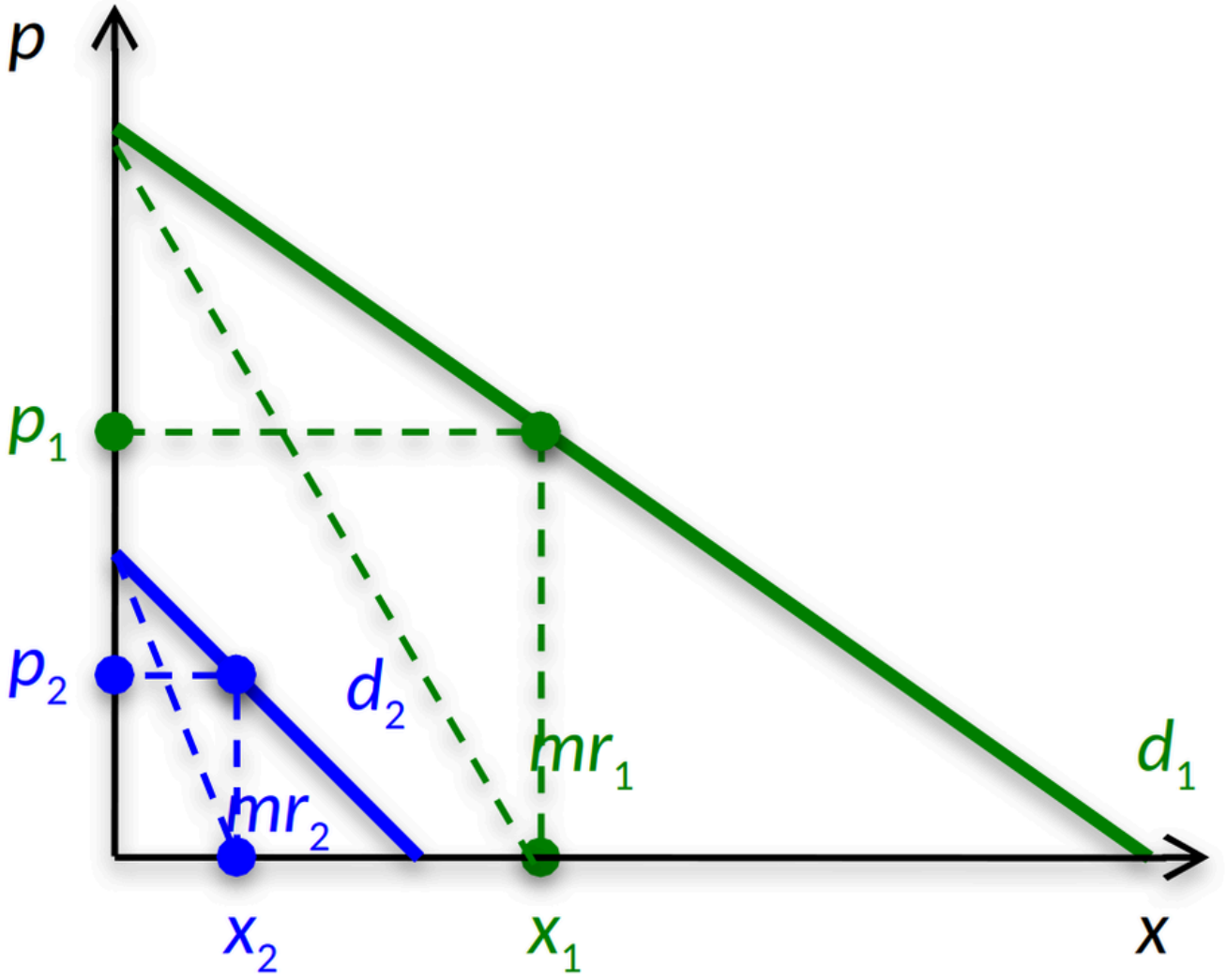


Рисунок 7.7. Ценовая дискриминация и общественное благосостояние

При переходе к ценовой дискриминации третьей степени: $\Delta x_1 = 0, \Delta x_2 > 0$.

Следовательно, если продажи на новом рынке открываются за счет ценовой дискриминации третьей степени, то имеет место типичное Парето-улучшение, а значит и рост общественного благосостояния.

Наблюдательный микроэкономист: Ценовая дискриминация 2 и 3-й степени

Знакомство с ценовой дискриминацией на практике можно совместить с походом в музей!

Государственный Эрмитаж – уникальный музей произведений искусства, мировых шедевров. Попасть в музей можно по входному билету. В ценовой политике в отношении билетов прослеживается сочетание нескольких принципов ценовой дискриминации.

Прежде всего, предусмотрена стандартная цена билета, который действителен в определенный день и в определенное время для самостоятельного осмотра постоянных экспозиций и временных выставок. В соответствии с ценовой

дискриминацией второй степени (по времени) входной билет с открытой датой стоит почти в 2,5 раза дороже.

Принцип ценовой дискриминации третьей степени воплощен с помощью льготной цены для пенсионеров и отдельных категорий посетителей (дети от 14 до 18 лет, многодетные семьи, студенты, аспиранты, адъюнкты, интерны, врачи-ординаторы), которым необходимо предъявить документы, удостоверяющие личность и принадлежность к льготной категории. При предъявлении соответствующих документов в любой рабочий день музея его могут посетить бесплатно представители большого числа льготных категорий: дети до 14 лет, инвалиды I и II группы, ветераны, сотрудники музеев и др.

Ценовая дискриминация третьей степени сочетается с ценовой дискриминацией второй степени: каждый третий четверг месяца посещение музея для пенсионеров (граждан России и ЕАЭС) и льготных категорий - бесплатно!

Подробнее о Государственном Эрмитаже и его ценовой политике Вы можете узнать на официальном сайте музея: https://www.hermitagemuseum.org/



Источник рисунка: личный фотоархив авторов учебника



Источник: официальный сайт ГМИИ имени А.С. Пушкина <https://pushkinmuseum.art/events/archive/2016/exhibitions/bakst/index.php?lang=ru>

7.1.5. Ценовая дискриминация на рынке труда

7.1.5.1. Стимулирующие контракты

Методы ценообразования, применяемые в рамках ценовой дискриминации на рынке труда, когда рыночное предложение сегментировано, но работодатель не может отождествить конкретного индивида, с которым он встречается на рынке труда, с тем или иным сегментом предложения, служат инструментарием выработки оптимальных стимулирующих контрактов. Такие контракты ориентированы на увеличение доли выигрыша работника, которая перераспределяется в пользу работодателя и становится его прибылью. По этой причине обладающий экономической властью работодатель заинтересован в выработке такого оптимального договора найма рабочей силы, в котором были бы заложены стимулы для работников проявить свою готовность к эффективному труду.

Рассмотрим один из вариантов построения такой системы стимулирующих контрактов на рынке труда. Допустим, что существуют две группы работников: обладающих высокой (S_2) и низкой (S_1) эффективностью. Пусть работники внутри каждой из групп идентичны. Работодатель не знает, какой из работников более производителен, тогда как работники вполне осознают свой потенциал. Целью работодателя является разработка такой системы контрактов, которая мотивировала бы исполнителей проявить свои способности и максимизировала бы тем самым прибыль предприятия.

Это можно реализовать путем выплаты заранее оговоренной компенсации за определенный объем трудовых усилий, причем размер платы должен увеличиваться медленнее, чем возрастает трудовой вклад работника.

В частности, работодатель может предложить рынку труда следующее меню контрактов (рис. 7.8):

- выплата за объем трудовых усилий L_e^1 компенсации в размере $S_{0CAL_e^1}$ либо
- выплата денежной суммы, равной $S_{0CAL_e^1}+S_{L_e^1EBL_e^2}$, за объем трудовой деятельности L_e^2.

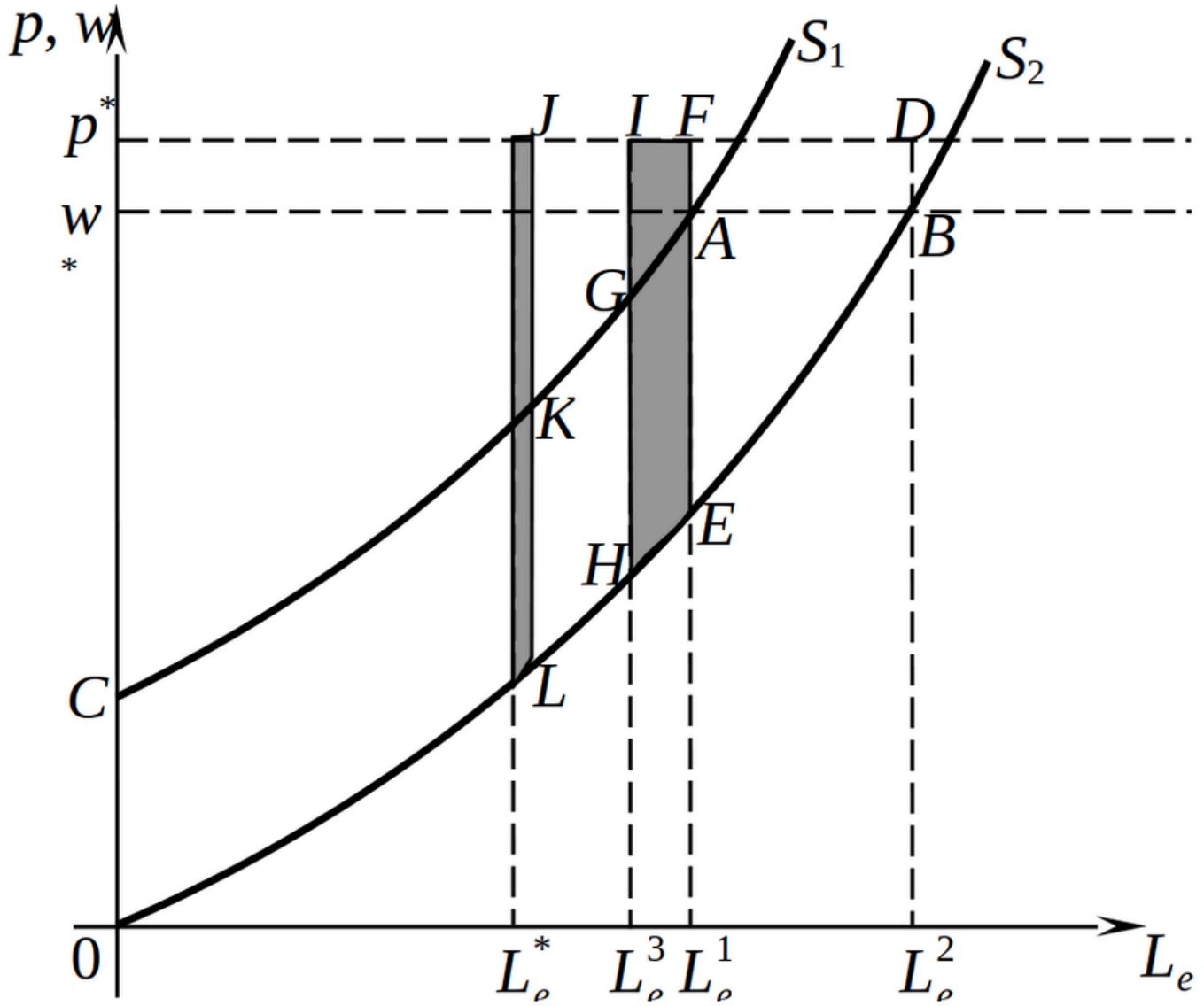


Рисунок 7.8. Оптимизация трудовых контрактов при неявных различиях в эффективности работников

Очевидно, что работник из первой группы будет готов отработать только L_e^1 часов труда, т.е. выберет первый из двух контрактов, поскольку плата в размере $S_{0CAL_e^1}$ является минимальной денежной суммой, которую он готов получить за данный объем трудовой деятельности. Работник из второй группы будет готов отработать L_e^1 часов за минимальную компенсацию в размере, определяемом площадью под его графиком предложения труда, т.е. $S_{0EL_e^1}$. Если ему за данный объем трудовых усилий будет выплачена сумма в размере $S_{0CAL_e^1}$, которая превышает ту минимальную плату, за которую он согласен столько работать, то он получит выигрыш в размере S_{0CAE}. Если ему предложат работать L_e^2 часов, то он согласится это сделать за плату, хотя бы равную соответствующей площади под своей функцией предложения труда, т.е. $S_{0BL_e^2}$, или превышающую ее по размеру. По сравнению с этой минимальной компенсацией плата в размере $S_{0CAL_e^1}+S_{L_e^1EBL_e^2}$ обеспечит ему выигрыш, равный S_{0CAE}. Таким образом, работнику из второй группы будет безразлично, какой из предложенных зарплатных планов выбрать, ведь в итоге у него все равно останется один и тот же выигрыш S_{0CAE}.

Будем считать, что за один час труда с заданной эффективностью производится единица продукта либо услуги, которая реализуется данным предприятием по рыночной цене p^*. Предпринимателю выгоднее, чтобы более производительный работник выбрал именно второй зарплатный план, ведь при этом прибыль фирмы составит $PR_H=p^* \bullet L_e^2 - \left(S_{0CAL_e^1}+S_{L_e^1EBL_e^2}\right)=S_{Cp^*FA}+S_{EFDB}$, что будет больше, чем прибыль при выборе работником данного типа первой зарплатной схемы, т.е. $PR_L=p^* \bullet L_1^2 - S_{0CAL_e^1}=S_{Cp^*FA}$. Очевидно, что первый зарплатный план создан для менее производительных работников, от которых работодатель как раз и рассчитывает получить прибыль $PR_L=S_{Cp^*FA}$. Если вероятности встретить на рынке труда работников обоих типов – одинаковы, то ожидаемая прибыль предпринимателя при выборе сотрудниками соответствующих зарплатных схем составит $EPR=\frac{1}{2}PR_H+\frac{1}{2}PR_L=S_{Cp^*FA}+\frac{1}{2}S_{EFDB}$. Высокопроизводительного работника можно побудить к выбору второй зарплатной схемы, увеличив на предельно малую величину плату за трудовые усилия L_e^2, что сделает этот контракт более предпочтительным для данного сотрудника. Таким образом, система зарплатных планов реализует механизм самоотбора персонала, которые, выбирая определенный тип договора найма, обозначают свою принадлежность тому или иному сегменту предложения труда, охватывающему работников определенной производительности.

Необходимо отметить, что рассмотренное выше меню контрактов не является оптимальным с точки зрения работодателя. Для увеличения прибыли ему может быть выгодно уменьшить требуемый объем труда менее эффективных работников, скажем, до

L_e^3 с одновременным снижением компенсации для данной категории персонала до величины $S_{0CGL_e^3}$, а для высокопроизводительных работников – до $S_{0CGL_e^3}+S_{L_e^3HBL_e^2}$ за прежний объем трудового вклада L_e^2. При этом на первом сегменте предложения труда работодатель потеряет прибыль в размере S_{GIFA}, тогда как за счет второй группы исполнителей рабочей силы он сможет увеличить свою прибыль на величину S_{HGAE}.Предпринимателю будет выгодно поступить таким образом, поскольку в итоге его совокупная прибыль возрастет, ведь $S_{HGAE} > S_{GIFA}$.

Работодатель будет заинтересован действовать по аналогичной логике и далее, снижая требуемый объем трудовых усилий для первой подгруппы рабочей силы до тех пор, пока снижение прибыли на данном сегменте будет перекрываться приростом чистого дохода от действий исполнителей из второй группы.

Меню контрактов станет оптимальным, т.е. прибыль предпринимателя будет максимальной при величине трудового вклада L_e^* низкопроизводительных работников, когда прирост потерь на каждом исполнителе из первого сегмента сравняется с увеличением прибыли, получаемой за счет каждого работника из второй группы:

$$\lim_{L_e \to L_e^*} \frac{\Delta S_{AFJK}}{(L_e\text{-}L_e^*)} = \lim_{L_e \to L_e^*} \frac{\Delta S_{AELK}}{(L_e\text{-}L_e^*)},$$

т.е.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p^* \int\limits_{L_e^1}^{x} dL_e - \int\limits_{L_e^1}^{x} w_1(L_e) dL_e\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_{L_e^1}^{x} w_1(L_e) dL_e - \int\limits_{L_e^1}^{x} w_2(L_e) dL_e\right),$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{L_e^1}^{x} \left(p^* + w_2(L_e)\right) dL_e = 2\frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{L_e^1}^{x} w_1(L_e) dL_e.$$

Используя формулу дифференцирования собственного интеграла по параметру, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{L_e^1}^{x} w_i(L_e) dL_e = w_i(x)\frac{\partial x}{\partial x} - w_i(x)\frac{\partial L_e^1}{\partial x} + \int\limits_{L_e^1}^{x} \frac{\partial}{\partial x}(w_i(L_e)) dL_e = w_i(x), i = \{1, 2\};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{L_e^1}^{x} p^* dL_e = p^*\frac{\partial x}{\partial x} - p^*\frac{\partial L_e^1}{\partial x} + \int\limits_{L_e^1}^{x} \frac{\partial p^*}{\partial x} dL_e = p^*.$$

Следовательно, оптимальный объем трудового вклада первой группы работников $\left(L_e^*\right)$, который является ключевым в выработке стимулирующего контракта, должен удовлетворять соотношению

$$p^* + w_2\left(L_e^*\right) = 2w_1\left(L_e^*\right),$$

или

$$2\left(p^* - w_1\left(L_e^*\right)\right) = p^* - w_2\left(L_e^*\right).$$

Таким образом, соотношение прибылей, получаемой фирмой с одного работника каждого типа, должно равняться рыночным долям данных сегментов предложения труда:

$$\frac{p^* - w_1(L_e^*)}{p^* - w_2(L_e^*)} = \rho = \frac{1}{2}.$$

В итоге оптимальное меню контрактов, реализующее механизм самоотбора работников, будет таким (рис. 7.8):

- выплата за объем трудовых усилий L_e^* компенсации в размере $S_{0CNL_e^*}$ либо
- выплата денежной суммы, равной $S_{0CNL_e^*}+S_{L_e^*OBL_e^2}$, за объем трудовой деятельности L_e^2.

Рассуждения, проведенные выше, предполагали, что количество работников в обоих сегментах предложения труда одинаково, т.е. что вероятность для монополиста встретить на рынке высоко- и низкопроизводительного работника равна ½. В более общем случае при оптимизации меню контрактов следует учитывать, как правило, неравные доли работников из разных сегментов предложения труда, и делать поправку на соответствующие вероятности при анализе потенциальных потерь и выгод.

Пусть доля высокопроизводительных специалистов равна ρ, а вероятность повстречать на рынке труда низкопроизводительного работника – соответственно, $1\text{-}\rho$. Тогда при бесконечно малом изменении объема трудового вклада сотрудника, обладающего низкой эффективностью, потери на первом сегменте предложения труда составят $(1\text{-}\rho)\left(p^* - w_1\right)$, а соответствующий выигрыш на втором сегменте будет равен $\rho(w_1\text{-}w_2)$. В оптимальном меню контрактов эти величины должны быть одинаковыми:

$$(1\text{-}\rho)\left(p^* - w_1\left(L_e^*\right)\right) = \rho\left(w_1\left(L_e^*\right) - w_2\left(L_e^*\right)\right),$$

или

$$p^* - w_1\left(L_e^*\right) = \rho\left(p^* - w_2\left(L_e^*\right)\right).$$

Таким образом, соотношение прибылей, получаемой фирмой с каждого работника первого и второго типа, должно равняться доле высокопроизводительных специалистов на рынке труда:

$$\frac{p^* - w_1(L_e^*)}{p^* - w_2(L_e^*)} = \rho.$$

Аналогично механизму ценовой дискриминации второго рода на продуктовых рынках при выработке оптимального меню контрактов на рынке труда используются два типа ограничений.

Это, во-первых, «ограничение участия», которое состоит в том, что заинтересованность индивида в участии в данном виде экономической деятельности должна быть, как минимум, равна его издержкам, связанным с ней. Данное ограничение актуально для низкопроизводительных работников. Действительно, плата за объем трудовых усилий L_e^* равна минимальной денежной сумме, за которую они будут готовы столько работать, т.е. площади под соответствующим графиком предложения труда.

Вторым условием, используемым при выработке оптимального контракта найма рабочей силы, является «ограничение совместимости стимулов». Оно утверждает, что уровень удовлетворения индивида при выборе контракта, предназначенного для него, должен быть не ниже его заинтересованности в выборе контракта, выработанного для индивида другого типа. Это ограничение применяется к высокопроизводительным работникам. Действительно, меню контрактов, реализующих механизм самоотбора персонала, подобрано таким образом, что выигрыш работников данного типа оказывается одинаковым (S_{0CNO}) независимо от того, какой из двух контрактов он предпочтет.

7.1.5.2. Явная рыночная сегментация

Возможна симметричная, по отношению к рассмотренной выше сегментации спроса, ситуация негладкости функции предложения, в частности, на рынках факторов производства. Наличие обособленных составляющих предложения может привести к возникновению дискриминации на рынке рабочей силы, когда предприниматели применяют такую практику найма, при которой у одинаково производительных работников различаются ставки заработной платы. Эту ситуацию следует отличать от квалификационных различий в оплате труда, при которых работникам, обладающим разной производительностью, выплачивается различная заработная плата [4] .

В условиях явной рыночной сегментации, когда монопсония может четко отождествить конкретного работника с определенным сегментом рынка рабочей силы, фирма может увеличить общую прибыль, устанавливая для своих сотрудников разные ставки заработной платы на разных субрынках труда, для каждого которых характерна своя собственная функция предложения: $w_1{=}f_1(L_1)$, $w_2{=}f_2(L_2)$. При этом монопсония будет практиковать дискриминацию по заработной плате третьей степени, аналогичную практике ценообразования в условиях монополии.

Для упрощения анализа рассмотрим поведение монопсонии на рынке труда в условиях совершенной конкуренции на рынке продукции. Допустим, что изначально при сегментации предложения труда монопсония не проводит дискриминацию по заработной плате. При этом на данном, едином рынке будет присутствовать излом функции суммарного предложения (при объеме занятости L_0 на рис. 7.9). Ему будет соответствовать излом функции общих денежных трудозатрат и разрыв в предельных издержках на труд. При этом, даже если график стоимости предельного продукта труда будет проходить в разрыве предельных издержек на труд, он все равно будет пересекать и первый $\left(MC_L^1\right)$, и второй $\left(MC_L^\Sigma\right)$ участки этой функции. Первоначально MC_L^1 лежит ниже MC_L^Σ, то есть касательная к графику TC_L^1 – более пологая, по сравнению с касательной к графику TC_L^Σ, а значит, TC_L^1 первоначально лежит ниже TC_L^Σ. Но в точке их пересечения L_0 – ситуация уже обратная: $MC_L^1 > MC_L^\Sigma$, то есть касательная к TC_L^1 – более крутая, чем касательная к TC_L^Σ. Следовательно, правее точки L_0 TC_L^Σ меньше TC_L^1 (рис. 7.9).

Возможны три случая. Если график предельного продукта труда в стоимостном выражении пересекает только первый сегмент предельных издержек $\left(MC_L^1\right)$ и при этом выполняется достаточное условие максимума прибыли $(p \bullet MP_L^{'} \le MC_L^{'})$, то на рынке будет присутствовать только первая группа работников. Вторая, более вероятная возможность – это пересечение графиков предельных издержек и стоимости предельного продукта труда (при выполнении достаточного условия максимизации прибыли $p \bullet MP_L^{'} \le MC_L^{'}$) на более эластичном участке суммарного предложения рабочей силы, когда монопсония нанимает все группы работников. Эта ситуация изображена на рис. 7.9. Оптимальный объем занятости для фирмы составит L_Σ^*, а ставка заработной платы будет установлена на уровне w_m. При этом работники первой группы будут трудиться L_1^* часов, а сотрудники, относящиеся ко второму сегменту, отработают L_2^* часов.

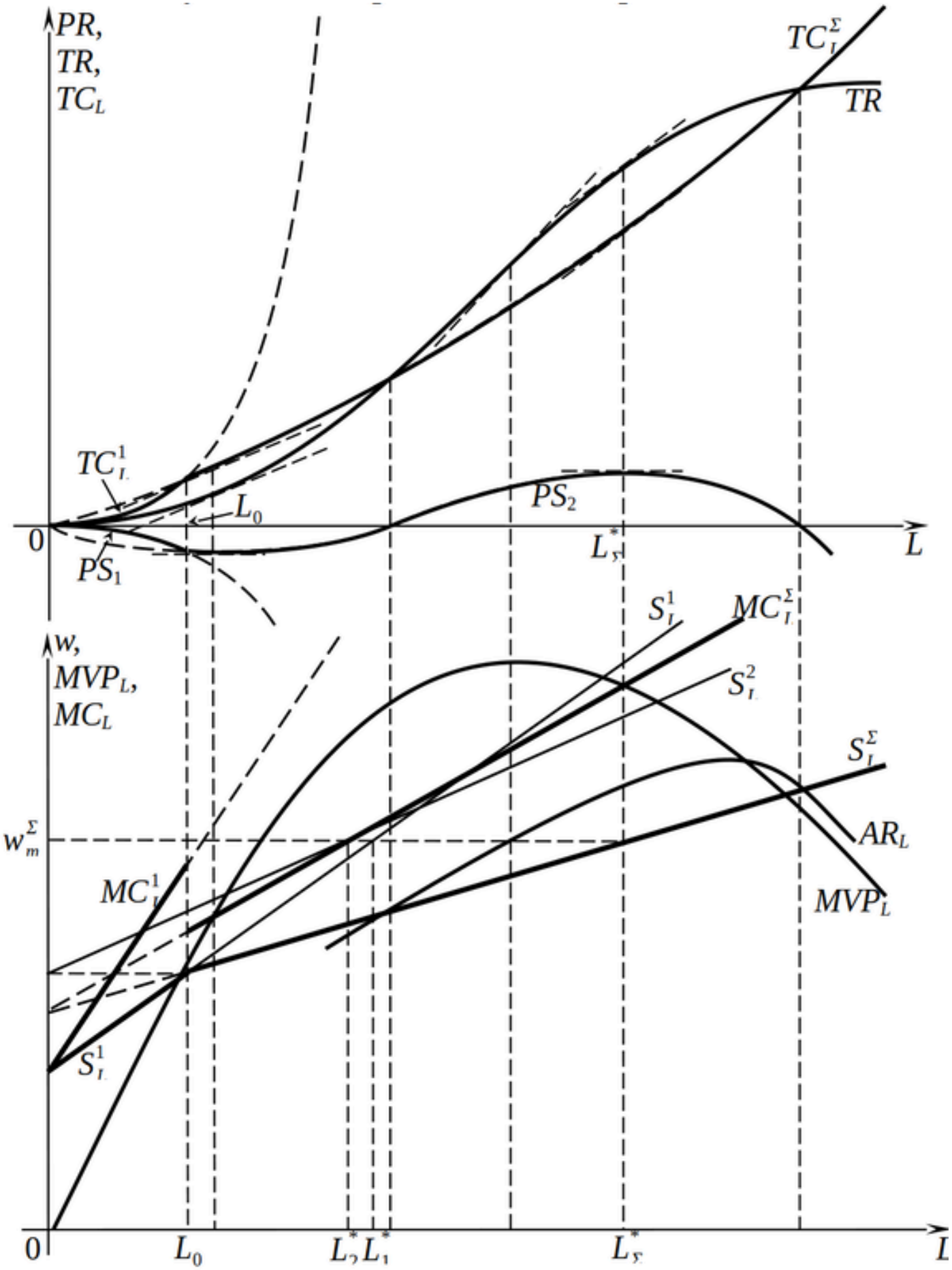


Рисунок 7.9. Отсутствие дискриминации по заработной плате

Наконец, даже если график предельного продукта труда в стоимостном выражении будет проходить в разрыве предельных издержек на труд, он все равно будет пересекать и первый $\left(MC_L^1\right)$, и второй $\left(MC_L^\Sigma\right)$ их участки. Максимум прибыли монопсонии будет соответствовать пересечению MVP_L с участком суммарных предельных издержек на труд $\left(MC_L^\Sigma\right)$.

Необходимые условия максимума прибыли дискриминирующей монопсонии при наличии двух сегментов предложения труда $PR=TR-TC_L^1-TC_L^2=pQ(L)-w_1\left(L_1\right)L_1-w_2\left(L_2\right)L_2$ будут иметь вид:

$$\begin{cases}\frac{\partial PR(L)}{\partial L_1}=\frac{\partial TR(L)}{\partial L_1}-\frac{\partial TC(L)}{\partial L_1}=0,\\ \frac{\partial PR(L)}{\partial L_2}=\frac{\partial TR(L)}{\partial L_2}-\frac{\partial TC(L)}{\partial L_2}=0,\end{cases}$$

где $L=L_1+L_2$ – суммарное количество рабочей силы, нанимаемое монопсонией на двух частях рынка труда.

Каждое из равенств можно расписать в следующем виде:

$$\frac{\partial PR}{\partial L_i}=\frac{\partial TR(L)}{\partial L_i}-\frac{\partial\left(TC_L^1(L_1)+TC_L^2(L_2)\right)}{\partial L_i}=\frac{\partial TR(L)}{\partial L_i}-\frac{\partial TC_L^i(L_i)}{\partial L_i}=p\bullet\frac{\partial Q(L)}{\partial L}\bullet\frac{\partial L}{\partial L_i}-\frac{\partial\left(w_i(L_i)\bullet L_i\right)}{\partial L_i}=$$
$$=p\bullet\frac{\partial Q(L)}{\partial L}\bullet\frac{\partial(L_1+L_2)}{\partial L_i}-MC_L^i\left(L_i\right)=MVP_L(L)-MC_L^i(L_i)=0,i=\{1,2\}.$$

Итак, для дискриминирующей монопсонии предельные издержки на труд по каждому из субрынков данного фактора производства должны равняться его предельному продукту в денежном выражении при использовании оптимального объема труда L_Σ^*, нанимаемого на всех сегментах рынка:

$$MVP_L\left(L_\Sigma^*\right)=MC_L^1\left(L_1^*\right)=MC_L^2\left(L_2^*\right).$$

На первом сегменте будет установлена ставка заработной платы w_m^1 и использован объем труда L_1^*. На втором сегменте предложения труда ставка заработной платы будет равна w_m^2, а объем нанимаемых трудовых ресурсов составит L_2^* (рис. 7.10). При этом осуществляющая дискриминацию третьего рода монопсония не изменяет совокупный объем использования ресурса по сравнению с ситуацией единого рынка ресурса. Монопсонист, учитывая при ценообразовании рыночную сегментацию, перераспределяет тот же объем используемых трудовых ресурсов между сегментами их предложения с разной эластичностью.

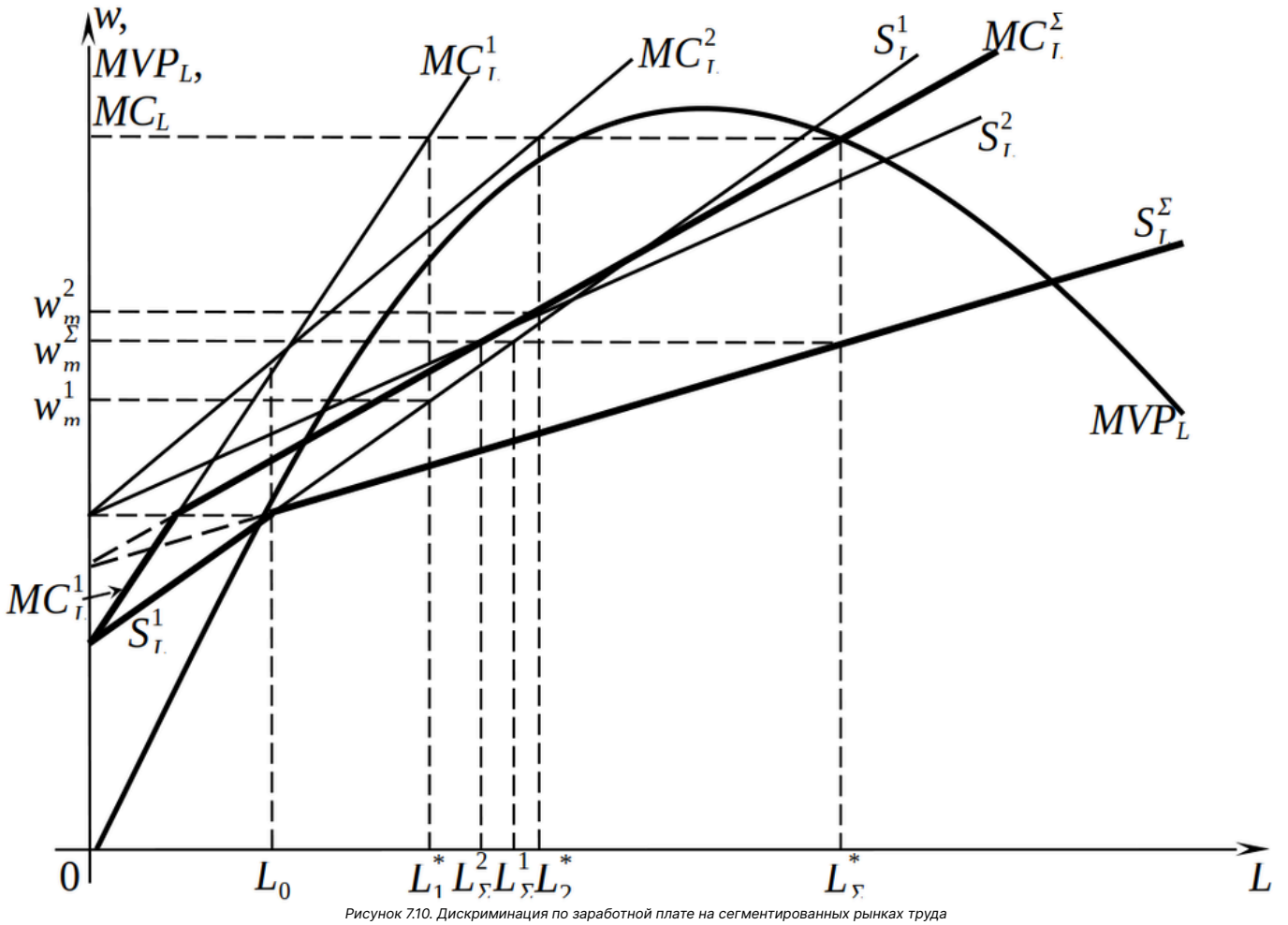


Рисунок 7.10. Дискриминация по заработной плате на сегментированных рынках труда

Следует обратить внимание на то, что при наличии ценовой дискриминации третьей степени излому графика суммарного спроса не будет соответствовать разрыв предельной выручки, наблюдаемый в случае единого рынка (рис. 7.9 - 7.10). При ценовой дискриминации третьей степени функция предельных издержек на труд будет непрерывной, состоящей из двух участков – MC_L^Σ

и MC_L^1 (последний из которых соответствует нижнему сегменту суммарного предложения). В точке их пересечения будет наблюдаться излом графика суммарных предельных издержек, означающий недифференцируемость функции совокупных издержек фирмы.

Очевидно, что суммарные предельные издержки строятся как "горизонтальная" сумма функций предельных издержек на каждом из сегментов рынка труда: при каждом уровне предельного продукта труда в стоимостном выражении, а значит, и данной, единой величине предельных издержек на каждом из сегментов, совокупный объем используемого труда на фирме будет представлять собой сумму величин занятости на всех сегментах. Таким образом, осуществление ценовой дискриминации на сегментированных рынках труда подразумевает отсутствие разрыва в функции предельных издержек на данный фактор производства (рис. 7.10).

При отсутствии дискриминации монопсония устанавливает единую ставку заработной платы для всех работников на уровне w_m^Σ. При этом единственным фактором, влияющим на величину предельных издержек на труд, остается ценовая эластичность предложения данного фактора. Общие издержки являются возрастающей функцией объема трудозатрат, т.е. при увеличении объема используемого труда издержки будут расти, а при его сокращении – падать. Если предельные издержки на одном сегменте предложения труда $\left(S_L^1\right)$ в исходной ситуации больше предельных издержек от найма сотрудников на втором подмножестве работников $\left(S_L^2\right)$, то монопсонии будет выгодно дифференцировать ставки заработной платы для данных двух групп персонала, – понизить ставку заработной платы для первой группы (от w_m^Σ до w_m^1) и повысить ставку заработной платы для второй (от w_m^Σ до w_m^2). При этом в силу различий в значениях предельных издержек сокращение издержек при снижении трудозатрат (от L_Σ^1 до L_1^*) на первом сегменте окажется большим по абсолютной величине по сравнению с ростом издержек при соответствующем увеличении использования рабочей силы (от L_Σ^2 до L_2^*), нанимаемой на втором сегменте (рис. 7.10).

Действительно, если в условии оптимизации для дискриминирующей монопсонии выражения предельных издержек на каждом из сегментов предложения труда записать через соответствующие коэффициенты эластичности предложения по ставке заработной платы:

$$MC_L^1 = w_1\left(1+\frac{1}{E_w^{L_s^1}}\right) = w_2\left(1+\frac{1}{E_w^{L_s^2}}\right) = MC_L^2,$$

то можно видеть, что превышение ставки заработной платы, назначаемой второй группе работников, над ставкой для первой группы будет тем больше, чем менее эластичен первый сегмент и чем более эластичен второй сегмент предложения труда:

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{1+\frac{1}{E_w^{L_s^1}}}{1+\frac{1}{E_w^{L_s^2}}}.$$

Числовой пример

Приведем числовой пример, иллюстрирующий гендерную дискриминацию. Допустим, что единственным работодателем на некотором локальном рынке труда является фирма-совершенный конкурент на рынке продукта. Персонал монопсонии состоит из мужчин и женщин: $L = L_{ж} + L_{м}$, где $L_{м}$ – количество отработанных часов мужчинами и $L_{ж}$ – количество отработанных часов женщинами.

Производственная функция этой фирмы имеет вид:

$$\begin{cases} Q = 50L - 0,25L^2 = 50\left(L_{ж}+L_{м}\right) - 0,25\left(L_{ж}+L_{м}\right)^2 при 0 \le L = L_{ж}+L_{м} \le 200, \\ Q = 0 при L = L_{ж}+L_{м} > 200. \end{cases}$$

Пусть цена продукта равна 2. Предложение труда мужчин описывается функцией $L_{м}^s = -20+2w$, а женщин – зависимостью вида $L_{ж}^s = 10+0,5w$. Рассчитаем, сколько женщин и мужчин будет принято на работу данной фирмой, практикующей дискриминацию по половому признаку. Оптимизация затрат женского труда будет выглядеть так:

$$MVP_L = p \bullet MP_L = 100 - L_{ж} - L_{м} = MC_L^{ж} = 4L_{ж} - 20.$$

Аналогично, в отношении мужской занятости имеем:

$$MVP_L = p \bullet MP_L = 100 - L_{ж} - L_{м} = MC_L^{м} = L_{м} + 10.$$

Итак, должна выполняться система условий:

$$\begin{cases} 100 - L_{ж} - L_{м} = 4L_{ж} - 20, \\ 100 - L_{ж} - L_{м} = L_{м} + 10. \end{cases}$$

Решая ее, получаем, что $L_{ж} \approx 16,6$; $L_{м} \approx 36,7$. Ставки зарплаты для женщин и мужчин, соответственно, составят: $W_{ж} \approx 2 \cdot 16,6 - 20 \approx 13,2$; $W_{м} \approx 0,5 \cdot 36,7 + 10 \approx 28,3$.

Определим теперь, каковы были бы ставки зарплаты и сколько женщин и мужчин было бы нанято, если бы фирма не могла применять дискриминацию рабочей силы по половому признаку. При отсутствии дискриминации единая функция предложения труда будет выглядеть так:

$$w = \begin{cases} -20+2L, при L \in [10, 15], \\ 4+0,4L, при L > 15; \end{cases}$$

а значит,

$$MFC_L = \begin{cases} -20+4L, при L \in [10, 15[, \\ 4+0,8L, при L > 15. \end{cases}$$

Используя условие максимизации прибыли монопсонией, получаем, что соответствующему диапазону занятости принадлежит лишь второе из возможных решений: L=53,(3). При этом единая ставка заработной платы составит: W=25,(3). Соответственно, будут использоваться следующие объемы мужского и женского труда: $L_м$(25,(3))=30,(6); $L_ж$(25,(3))=22,(6).

---

1. Материал этого раздела изложен частично в соответствии с подходом, использованным Х. Вэрианом в работе: Varian H.R. Microeconomic Analysis. - 3rd ed. – N.Y., L.: W.W. Norton & Company, 1992. Ch. 14 (pp. 241-253). ↩
2. Данная предпосылка может быть легко снята, и та же логика анализа применима к ситуации положительных предельных издержек. ↩
3. Резервная полезность (reservation utility) – это минимальный уровень полезности, необходимый индивиду для совершения соответствующего варианта выбора. ↩
4. В таком случае более высокая заработная плата, как правило, является результатом инвестиций в человеческий капитал работника. Кроме того, могут возникать компенсационные различия в оплате труда, отражающие сравнительную привлекательность либо, наоборот, тягость условий труда на конкретном производстве. ↩

7.2. Версионирование. Модель Вэриана

7.2.1. Версионирование

Версионирование основано на ценовой дискриминации второй степени, когда одна и та же ценовая шкала предлагается всем покупателям, классифицирующимся согласно готовности платить через самоидентификацию.

В качестве подхода к ценообразованию версионирование широко практикуется на быстро растущих в современной экономике рынках информационных благ.

*Информационными благами**Информационными благами* принято считать блага, которые представлены или *могут* (но не обязательно *должны*) быть представлены в цифровой форме. Такого широкого определения информационных благ придерживается большинство современных экономистов. Для экономического анализа «бейсбольный счет, книги, базы данных, журналы, кинофильмы, музыка, котировки акций и веб-страницы – информационные блага» [2], - подчеркивают К. Шапиро и Х. Вэриан.

БОЛЬШАЯ РОССИЙСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ	Заглянем в Большую российскую энциклопедию: Информационное благо

Версионирование получило распространение именно на рынках информационных благ, поскольку благодаря информационно-коммуникационным технологиям (ИКТ), которые обеспечивают массовое производство, обработку, хранение, передачу, просмотр, поиск, копирование информационных благ, выполняются следующие условия:

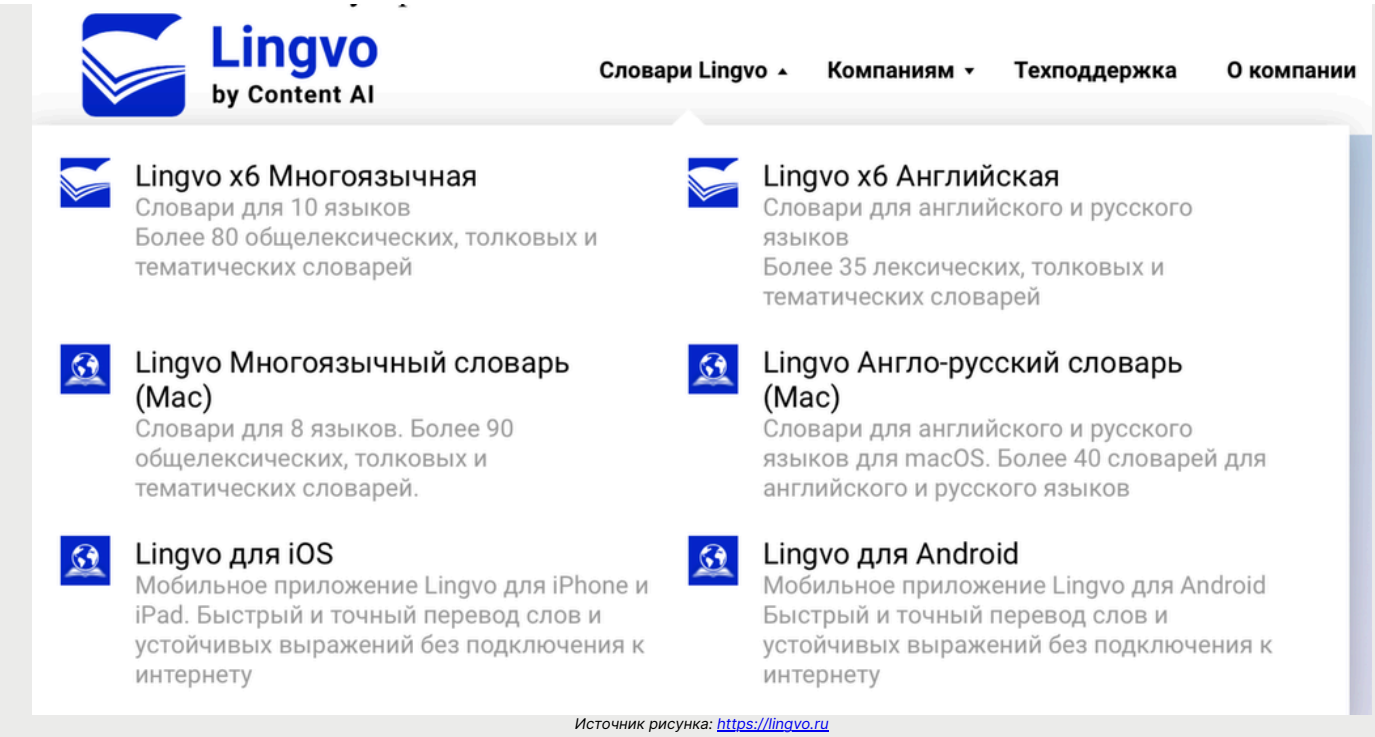
1. Производство версий технологически довольно просто реализовать с минимальными (близкими к нулю) предельными издержками. Поэтому их производители изначально, еще на стадии разработки, проектируют возможные версии, учитывающие потребительские вкусы и сегментацию рынка. Наиболее распространенные принципы версионирования основаны на следующих моментах: дизайн интерфейса, удобство и гибкость использования, быстрота выполнения операций, множественность функций, техническая поддержка и многое другое.
2. Сначала разрабатывается самая полная версия информационного продукта на основе правила: оптимальным является тот выбор, когда предельная готовность потребителя с самым высоким спросом платить за дополнительную качественную характеристику равна предельным издержкам производства этой дополнительной качественной характеристики. Затем выпускаются менее насыщенные версии путем исключения (говоря образно – нажатия кнопки “delete”) тех или иных качественных характеристик из полной версии.
3. Продавцами используются знания возможностей, определяющих покупку и потребление информационных благ (зачастую как онлайн через Интернет, так и оффлайн).



Наблюдательный микроэкономист: Версионирование электронных словарей Lingvo

Простейшими видами версионирования являются, к примеру, электронные словари, разрабатываемые Content AI (ООО «Контент ИИ») — российской компанией, предлагающей решения в области интеллектуальной обработки информации.

Электронные словари выпускаются в различных версиях для различных операционных систем и мобильных устройств.



Источник рисунка: https://lingvo.ru

7.2.2. Модель Вэриана

Модель ценообразования на основе версионирования информационных благ предложена Хэлом Вэрианом [3]. Рассмотрим эту модель подробно, показав ее место среди других подходов к ценообразованию с использованием ценовой дискриминации и без.

7.2.2.1. Условия модели

Пусть на рынке информационного блага предъявляют спрос две группы покупателей, отличающихся с точки зрения готовности платить за *«качественные характеристики»* блага, под которыми могут подразумеваться дизайн интерфейса, скорость выполнения операций, удобство в использовании и т.п. Кривая спроса первой группы покупателей с меньшей готовностью платить представлена на рис. 7.11(а), а кривая спроса второй группы покупателей с большей готовностью платить представлена на рис. 7.11(б). При этом по горизонтальной оси откладывается не количество *единиц* товара, а количество *«качественных характеристик»* блага: чем больше x, тем больше качественных параметров имеет продукт (или его версия).

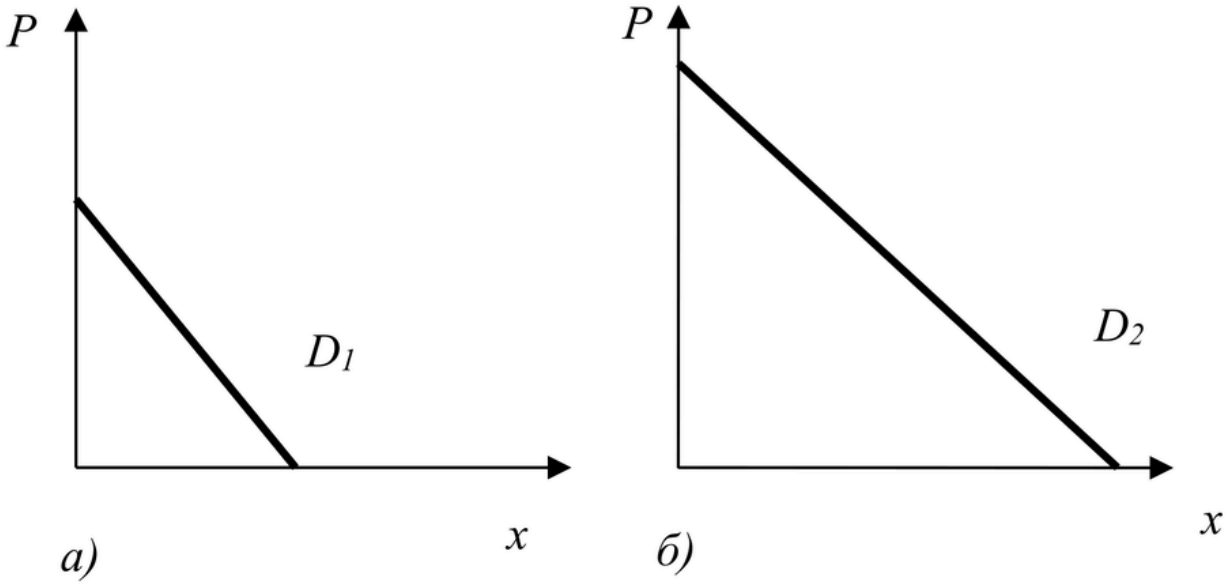


Рисунок 7.11. Спрос на качественные характеристики блага со стороны двух групп потребителей с разной готовностью платить

7.2.2.2. Модель

Если продавец знает, что среди его покупателей есть группы с разной готовностью платить, но не может отличить их, и ценовая дискриминация разрешена, тогда продавец при назначении цен должен опираться на эндогенные качественные характеристики товара.

Верной стратегией будет изготовление двух версий продукта, отличающихся с точки зрения качества и цены. Делается это для того, чтобы покупатели совершили самоотбор: потребители с низкой готовностью платить купили бы дешевую версию низкого качества, а потребители с высокой готовностью платить купили бы дорогую версию высокого качества.

Однако какие следует выбрать комбинации «качественных характеристик» и цен?

Для ответа на этот вопрос совместим кривые спроса обеих групп покупателей на рисунке 7.12(а). Если предлагать x_1^0 «качественных характеристик» по цене $P_1 = A$ (на уровне потребительского излишка первой группы) и x_2^0 «качественных характеристик» по цене $P_2 = A + B + C$ (на уровне потребительского излишка второй группы), то для потребителей второй группы не будет исключена возможность покупать x_1^0 «качественных характеристик» по цене $P_1 = A$. Самоотбора не произойдет. В случае если потребители обеих групп будут покупать дешевую и менее качественную первую версию продукта, прибыль фирмы составит:

$$\pi A + (1 - \pi)A = A.$$

Если же первая версия продукта с набором «качественных характеристик» x_1^0 будет предложена по цене $P_1 = A$, а вторая версия продукта с набором «качественных характеристик» x_2^0 будет предложена по цене $P_2 = A + C$, то среди потребителей произойдет самоотбор. Потребители с низким спросом приобретут первую, дешевую версию продукта, и их потребительский излишек будет равен нулю. Потребители с высоким спросом купят вторую, дорогую версию продукта, и их потребительский излишек будет равен B. В итоге прибыль продавца составит:

$$\pi(A + C) + (1 - \pi)A = A + \pi C.$$

Очевидно, что самоотбор повышает прибыль продавца.

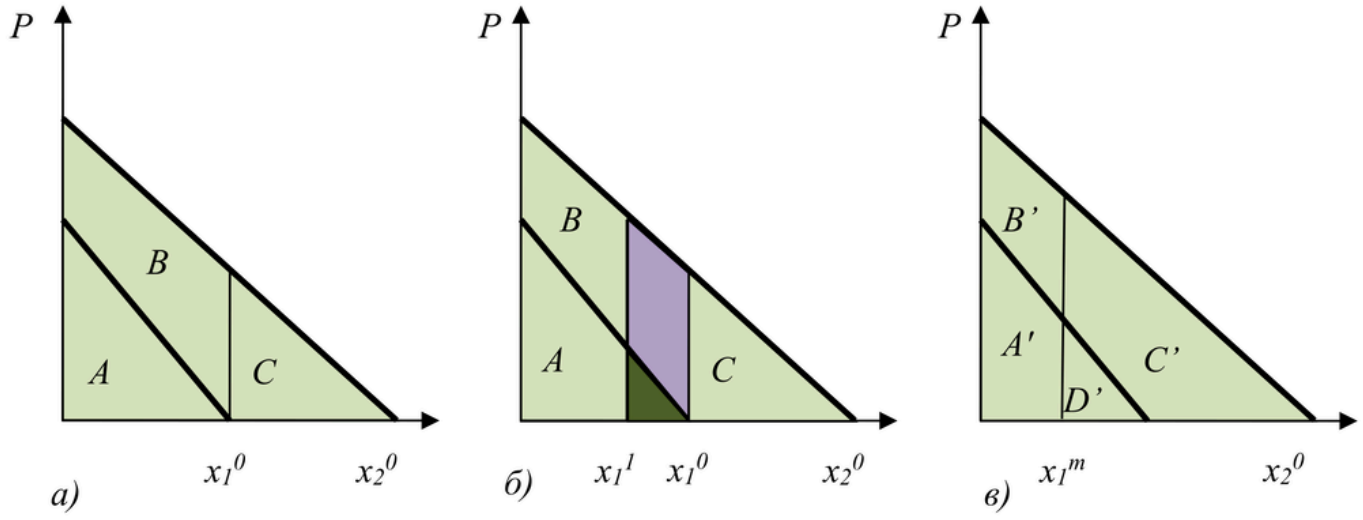


Рисунок 7.12. Версионирование и самоотбор

Реализуя эту стратегию, продавец присваивает себе часть излишка потребителей с высоким спросом, равную площади C, которая оставалась бы у них при покупке дешевой и худшей версии продукта. Однако уплата этой части потребительского излишка ассоциируется у потребителей с повышением качества продукта от x_1^0 до x_2^0.

Тем не менее, несмотря на рост прибыли, предпринятый подход не является максимизирующим прибыль. Фирма может повысить прибыль, снизив набор «качественных характеристик», рассчитанный на группу потребителей с низким спросом.

Как показано на рисунке 7.12(б), сокращая набор «качественных характеристик» в первой версии продукта от x_1^0 до x_1^1, и, соответственно, снижая ее цену (площадь *A* уменьшается), продавец теряет часть прибыли, получаемой им на первом сегменте рынка с низким спросом. Величина этих потерь равна площади маленького темного треугольника. Однако расширив площадь C, входящую в цену более качественной и дорогой версии за счет площади трапеции, образовавшейся при сдвиге от x_1^0 до x_1^1, продавец не только покроет потери, но и увеличит прибыль.

Таким образом, снижая качество и цену одной версии и одновременно повышая цену другой версии продукта, продавец увеличивает прибыль. Максимум прибыли фирма получит в том случае, когда предельные потери на сегменте рынка с низким спросом сравняются с предельными выгодами на сегменте с высоким спросом.

Предположим, что это условие выполняется, если менее качественная версия будет иметь набор «качественных характеристик», равный x_1^m (как показано на рисунке 7.12(в)). Покупая эту версию по цене $P_1 = A'$, потребители первой группы останутся с нулевым потребительским излишком. В этом случае цена второй версии с набором «качественных характеристик» x_2^0 должна быть равна $P_2 = A' + C' + D'$. Тогда потребители второй группы получат излишек, равный B'.

В итоге прибыль продавца составит:

$$\pi(A' + C' + D') + (1 - \pi)A' = A' + \pi(C' + D').$$

7.2.2.3. За рамками модели: другие подходы к ценообразованию

Рассмотрим ситуацию, в которой готовность платить каждой группы потребителей наблюдаема (рис. 7.13).

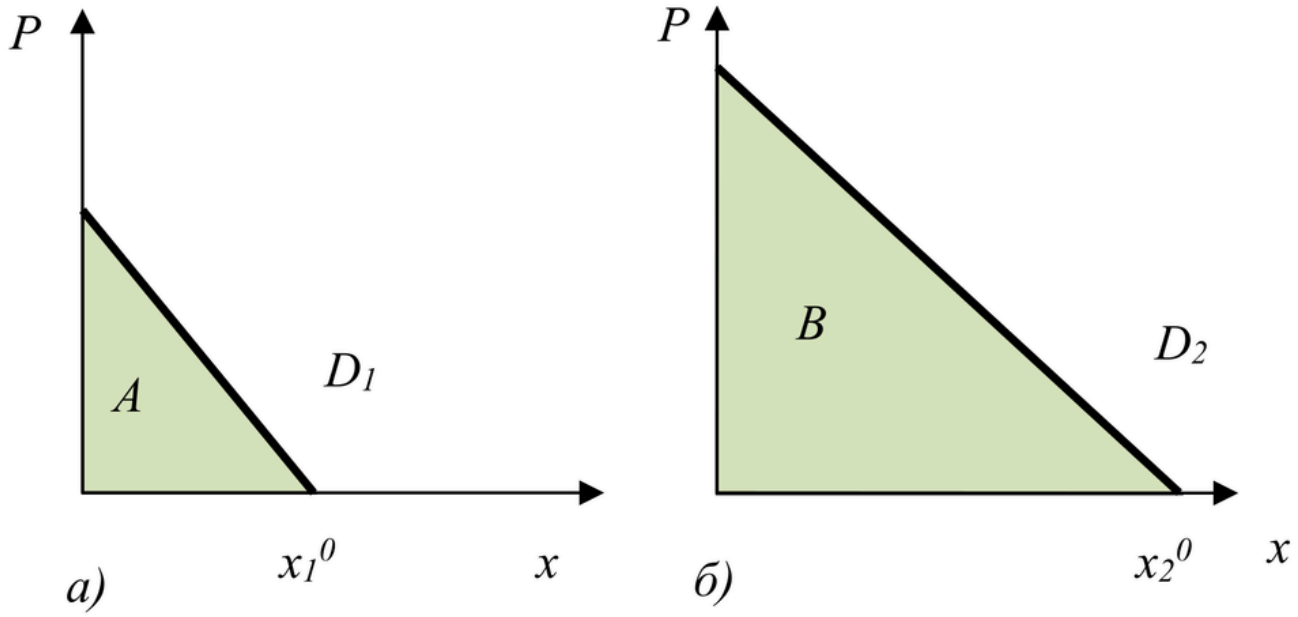


Рисунок 7.13. Установление цен на информационное благо при наблюдаемой у потребителей двух групп готовности платить

Случай 1: ценовая дискриминация разрешена

Если готовность каждой группы платить за «качественные характеристики» блага можно точно определить по какому-либо наблюдаемому признаку – полу, возрасту, почтовому индексу и т.п., - максимизирующая прибыль фирма прибегнет к помощи политики совершенной ценовой дискриминации, направленной на полное изъятие потребительских излишков. Тогда, при упрощающем предположении о нулевых предельных издержках производства информационного блага, фирма установит за предназначенное для первой группы количество «качественных характеристик» x_1^0 цену P_1, равную величине потребительского излишка A, а за предназначенное для второй группы количество «качественных характеристик» x_2^0 - цену P_2, равную величине потребительского излишка B.

Очевидно, что установившееся в этом случае равновесие будет эффективным по Парето, поскольку будет невозможно увеличить суммарный потребительский излишек (равный нулю), не уменьшив при этом суммарного излишка продавца (равного $A + B$).

Случай 2: ценовая дискриминация запрещена

В случае если ценовая дискриминация не осуществима, производитель будет вынужден продавать свой товар по единой цене. Если π – доля потребителей с высокой готовностью платить, а $(1 - pi)$ – доля потребителей с низкой готовностью платить, то производитель должен будет рассмотреть два варианта ценовой политики – когда его товар будут покупать только потребители с высоким спросом, и когда его товар будут покупать представители обеих групп.

Установив цену на уровне готовности платить у потребителей с высоким спросом, фирма получит прибыль πB, и среди покупателей окажутся только представители второй группы. Установив цену на уровне готовности платить у потребителей с низким спросом, фирма привлечет обе группы покупателей и получит прибыль, равную $\pi A+(1-\pi)A=A$. Очевидно, что производитель выберет тот подход, который принесет ему большую прибыль.

7.2.2.4. Версионирование и общественное благосостояние

На первый взгляд версионирование, связанное со снижением качества одной из версий продукта и повышением цены другой, может показаться несправедливым при любых условиях. Тем не менее, при тщательном анализе обнаруживаются обстоятельства, когда его справедливость может быть оправдана. Для этого сопоставим в таблице основные параметры каждого из рассмотренных подходов к ценообразованию – ценовой дискриминации, единой цены на уровне высокой готовности платить, единой цены на уровне низкой готовности платить и оптимального версионирования. В качестве параметров выделим следующие: P_1^L – цена для потребителей с низким спросом, P_2^H – цена для потребителей с высоким спросом, CS_1^L – потребительский излишек группы с низким спросом, CS_2^H – потребительский излишек группы с высоким спросом, PS – излишек производителя, TS – суммарный излишек продавца и покупателей (см. Таблицу 7.1).

Таблица 7.1 Основные параметры четырех подходов к ценообразованию

	Ценовая дискриминация	Единая цена на уровне высокой готовности платить	Единая цена на уровне низкой готовности платить	Версионирование
	(1)	(2)	(3)	(4)
P_1^L	A	$A+B+C$	A	A'
P_2^H	$A+B+C$	$A+B+C$	A	$A'+C'+D'$
CS_1^L	0	0	0	0
CS_2^H	0	0	B	B'
PS	$A+\pi(B+C)$	$\pi(A+B+C)$	A	$A'+\pi(C'+D')$
TS	$A+\pi(B+C)$	$\pi(A+B+C)$	$A+\pi B$	$A'+\pi(B'+C'+D')$

Поочередное сопоставление величин совокупных излишков, которые дают (1), (2) и (3) подходы с величиной совокупного излишка при версионировании (4) дает следующие результаты:

$TS_1 - TS_4 = (1 - \pi)D'$ – потери качества потребителей с низкой готовностью платить при версионировании;

$TS_4 - TS_2 = (1-\pi)A'$ – выигрыш потребителей с меньшей готовностью платить при версионировании;

$TS_4 - TS_3 = \pi C - (1-\pi)D'$ – разница между добавочными расходами потребителей с высокой готовностью платить и потерями качества продукта для потребителей с низкой готовностью платить при версионировании.

Очевидно, что только переход от единой цены, установленной на уровне большей готовности платить, к версионированию всегда приводит к росту общественного благосостояния [4] . В двух других случаях о последствиях перехода к версионированию нельзя судить однозначно. Однако одно из условий снижения общественного благосостояния можно сформулировать определенно.

Утверждение

Если при политике единой цены бо'льшую прибыль приносит установление цены для обеих групп потребителей на уровне меньшей готовности платить и πB-(1-π)A'>0, то при переходе к версионированию общественное благосостояние снизится.

Доказательство

Если при политике единой цены бо'льшую прибыль приносит установление цены для обеих групп потребителей на уровне меньшей готовности платить, то должно выполняться условие:

$A > \pi(A + B + C)$,

которое может быть переписано в виде:

$(1-\pi)A - \pi B - \pi C > 0$.

Сложив это неравенство с приведенным в утверждении, получаем:

$(1-\pi)(A - A') - \pi C > 0$.

С учетом того, что $D' = A - A'$, получаем:

$\pi C - (1-\pi)D' < 0$,

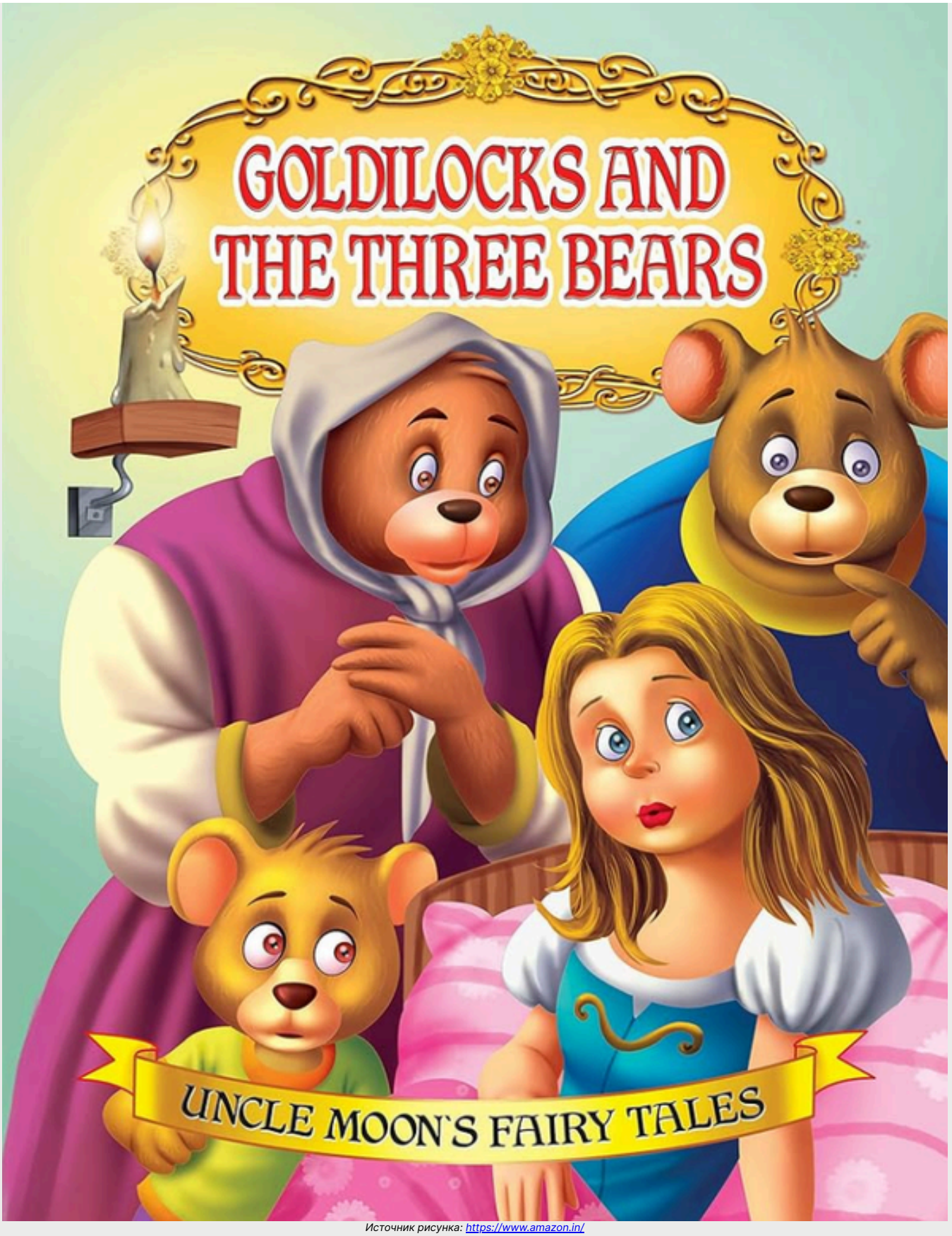
что означает снижение общественного благосостояния при переходе к версионированию от политики единой цены для обеих групп потребителей на уровне меньшей готовности платить. ■

7.2.2.5. Выводы для государственной политики

Ключевым вопросом для государственной политики в отношении версионирования являются последствия этого подхода к ценообразованию с точки зрения его воздействия на объем выпуска и качество продукции. Определенно, если при версионировании снижается отраслевой выпуск, то благосостояние экономических субъектов также снижается. Напротив, если версионирование способствует расширению рынка (и появлению новых рынков), благосостояние экономических субъектов растет.

Микроэкономика в сказках и художественной литературе:
Версионирование по принципу «для Голдилокс»

Сказку «Три медведя» с детства знает каждый. Ее наиболее известная версия принадлежит Льву Толстому, пересказавшему знаменитую английскую детскую сказку «Голдилокс и три медведя». Главная героиня этого пересказа – «одна девочка» - получила имя Маша, а в английском оригинале ее зовут Голдилокс (Златовласка).



Источник рисунка: https://www.amazon.in/

Какое же отношение эта замечательная сказка имеет к версионированию?

Для реализации политики версионирования число версий продукта в идеале должно быть равно числу разновидностей вкусов потребителей на рынке и, соответственно, их готовности платить. Но зачастую количество разновидностей вкусов может оказаться очень большим. Самое распространенное решение для такой ситуации: производство двух версий – стандартной и усовершенствованной. Однако современные маркетинговые исследования показывают, что версий должно быть не две, а три [5] *. Вот здесь и заключена связь с сюжетом знаменитой сказки: и Голдилокс, и Маша выбирали для себя*

подходящую тарелку каши, стул и кровать из трех, принадлежащих Медведю, Медведице и Мишутке. Идея чрезвычайно проста и основана на психологии поведения: к примеру, в ресторане люди часто попадают в замешательство при выборе между большой порцией еды и маленькой, и очень часто тот, кто не готов съесть большую порцию, берет маленькую. Это снижает выручку ресторана. Но если в меню оказывается средняя порция – и по объему, и по цене – многие из тех, кто при прочих условиях взял бы маленькую порцию, склоняют свой выбор в пользу средней, что положительно сказывается на выручке. Именно поэтому производители программных продуктов часто выпускают стандартную, профессиональную и «золотую» версию программ.

Разновидностями версионирования являются *продажа товаров наборами и связанные продажи*, которые дают возможность сократить дисперсию готовности платить, позволяя фирме установить более высокие оптимальные цены и получить большую прибыль.

---

1. ***В тексте параграфа использованы материалы книги: Антипина О.Н. Информационная экономика: современные технологии и ценообразование. – М.: Экономический факультет МГУ, ТЕИС, 2009. Глава 5 (п. 5.2.5).*** ↩
2. Shapiro C., Varian H. Information Rules: A Strategic Guide to the Network Economy. - Boston, Mass.: Harvard Business School Press, 1999. P. 3. ↩
3. Модель изложена на основе текста статьи: Varian H. Versioning Information Goods. Prepared for Digital Information and Intellectual Property, Harvard University, January 23-25, 1997. <*http://people.ischool.berkeley.edu/~hal/Papers/version.pdf*> ↩
4. Этот вывод Х. Вэриан подкрепляет также ссылкой на работу: Deneckere R.J., McAfee R.P. Damaged goods // *Journal of Economics and Management Strategy*, 1996, Vol. 5, №2, pp. 149–174, где доказывается, что переход от политики единой цены, установленной на уровне большей готовности платить, к версионированию приводит к Парето-улучшению: растет благосостояние обоих групп потребителей и излишек производителя. ↩
5. Исследуя этот вопрос, Х. Вэриан обратил внимание на работы: Simonson I., Tversky A. Choice in context: Tradeoff contrast and extremeness aversion // *Journal of Marketing Research*, Vol. 29, 1992, pp. 281–295. Smith G.E., Nagle Th.T. Frames of reference and buyers' perception of price and value // *California Management Review*, Vol. 38, №1, 1995, pp. 98–116. ↩

7.3. Продажа товаров наборами и связанные продажи

7.3.1. Понятия и определения [1]

Продажа товаров наборами и связанные продажи – широко применяющиеся на практике инструменты ценовой дискриминации. В экономической литературе эти понятия часто используются как тождественные, однако с точки зрения теории они отличаются.

Продажа товаров наборами имеет место тогда, когда фирма продает пакеты, состоящие как минимум из двух единиц одного и того же товара или услуги. В этом случае потребители, покупая различные пакеты, проявляют свою готовность платить в отношении различных количеств одного и того же блага. Так, потребители, сильнее предпочитающие большее количество блага, выберут больший пакет в отличие от тех, которые менее сильно предпочитают большее количество блага и выберут меньший пакет или даже одну единицу блага, если такая покупка будет возможна.

Связанные продажи имеют место тогда, когда фирма продает пакеты, состоящие как минимум из двух разных товаров или услуг. В этом случае потребители, покупая различные пакеты, проявляют свою готовность платить в отношении различных благ, которые продаются совместно с основным благом.

Оба подхода – продажа товаров наборами и связанные продажи – представляют собой разновидности нелинейного ценообразования, предполагающего, что цена единицы блага варьируется в зависимости от общего количества приобретаемых потребителем единиц.

7.3.2. Продажа товаров наборами

Практикуя продажу товаров наборами, продавцы обычно называют ее «скидкой за объем», акцентируя внимание покупателей на том, что в этом случае средняя цена единицы блага в пакете ниже, чем ее регулярная цена при поштучных продажах. Однако при этом продажа товаров наборами увеличивает потребительские расходы и прибыль продавца, а не снижает их.

Пусть $p^b(q)$ – цена набора блага, состоящего из q единиц, а $GCS(q)$ – валовой потребительский излишек при покупке этого набора, тогда потребитель совершит покупку набора только в том случае, если:

$$GCS(q) \geq p^b(q).$$

Или, если $NCS(q, p^b)$ – чистый потребительский излишек:

$$NCS(q, p^b) \geq 0.$$

Зачастую продавцы увеличивают свою прибыль, предлагая различные по количеству единиц блага наборы, а также оставляя возможность приобретения одной единицы блага.

В целом возможны следующие варианты наборов:

- Идентичные (или простые) наборы – это наборы, в каждом из которых содержится одинаковое количество единиц блага, но не менее двух единиц.
- Неидентичные наборы – это наборы, содержащие разное количество единиц блага, причем, по крайней мере, в одном наборе содержится не менее двух единиц блага.

Рассмотрим принципы максимизации прибыли для каждого варианта, обозначив c – величину предельных издержек (MC), а $FC = f$ – величину постоянных издержек продавца.

7.3.2.1. Идентичные наборы

а) Единственный покупатель, дискретный спрос.

Если продавец предлагает простой набор единственному покупателю (рис. 7.14), то оптимальное число единиц товара в наборе q^b будет определяться точкой пересечения линии предельных издержек и индивидуального спроса покупателя, а цена этого набора (площадь выделенной на рис. 7.13 фигуры) будет равна: $p^b(q) = GCS(q)$.

Тогда прибыль продавца (π^b) будет равна:

$$\pi^b(q) = (p^b(q) - cq) - f.$$

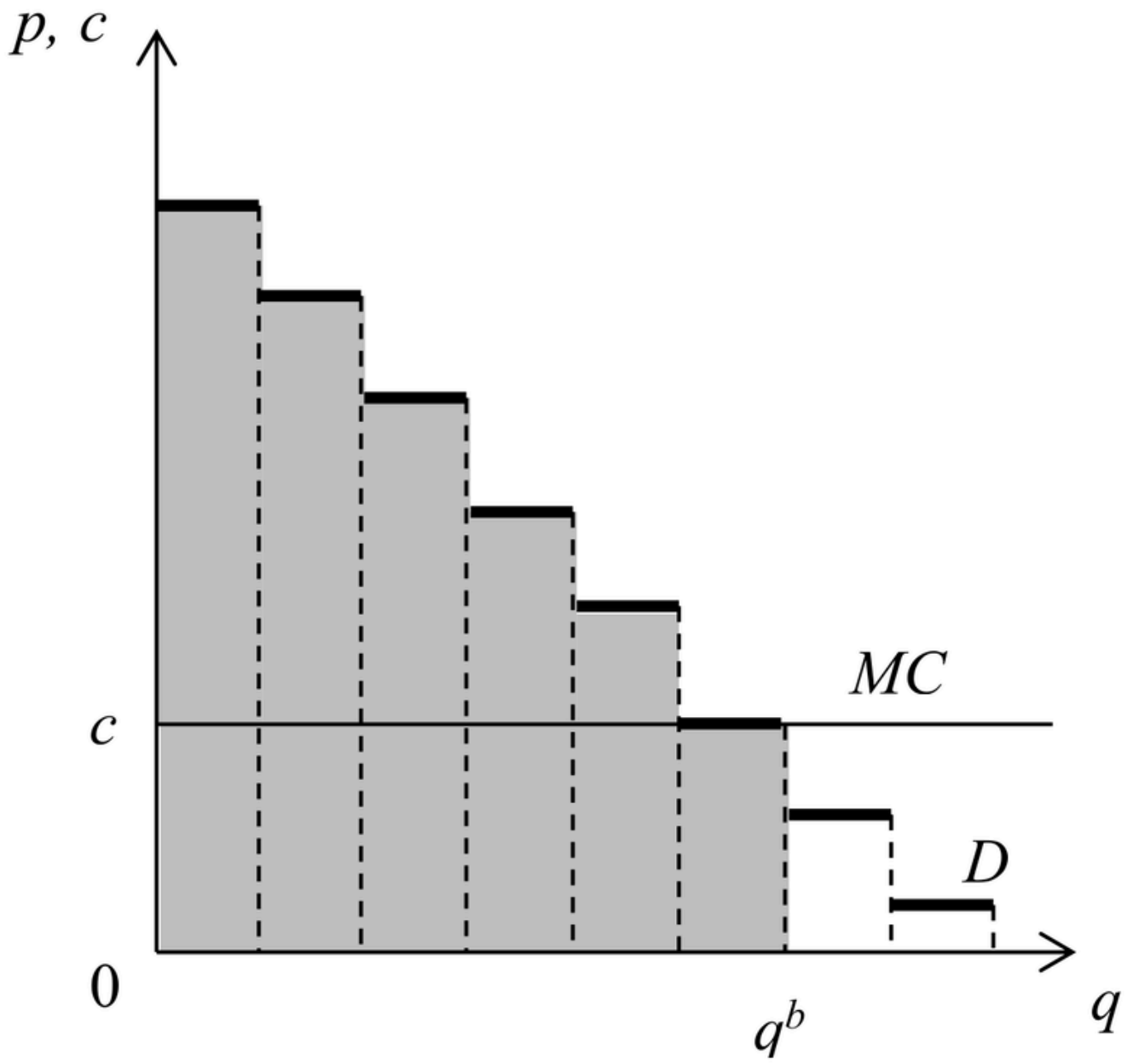


Рисунок 7.14. Продажа товаров наборами: единственный покупатель, дискретный спрос

Очевидно, что результат этого взаимодействия продавца и покупателя будет эквивалентен результату, получаемому в условиях совершенной ценовой дискриминации, когда монополист устанавливает для каждой единицы блага отдельную цену на уровне цены спроса и присваивает себе весь чистый потребительский излишек, потерь от мертвого груза не возникает, а благосостояние общества в целом максимально.

б) N одинаковых покупателей, дискретный спрос.

Если продавец предлагает простые наборы \(N) одинаковым покупателям, то его прибыль будет равна:

$$\pi^b(q) = N(p^b(q) - cq) - f.$$

в) N одинаковых покупателей, непрерывный спрос.

Пусть обратная функция спроса непрерывна, линейна и задана как $p(q) = a - bq$, тогда задачу максимизации прибыли фирмы можно записать следующим образом:

$$\max_q \pi = N\left[GCS(q) - cq\right] - f = N\left[\frac{(2a - bq)q}{2} - cq\right] - f.$$

Из условия первого порядка получаем:

$$a - bq - c = 0,$$

откуда мксимизирующее прибыль количество единиц товара в наборе:

$$q^b = \frac{a-c}{b}.$$

Тогда цена набора (площадь выделенной на рис. 7.15 фигуры) и прибыль фирмы будут равны:

$$p^b = GCS\left(q^b\right) = \frac{a^2 - c^2}{2b},$$

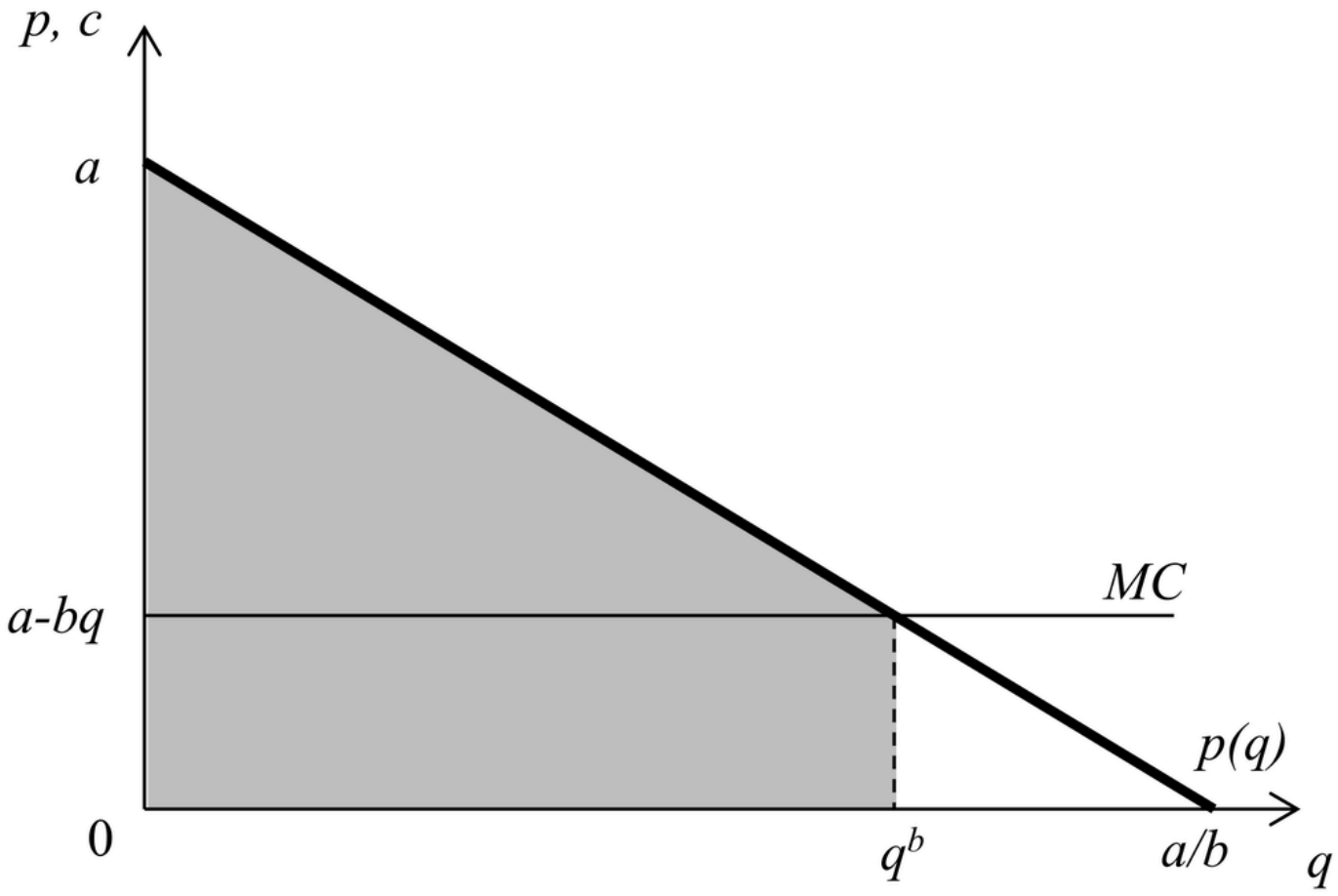


Рисунок 7.15. Продажа товаров наборами: N покупателей, непрерывный спрос

Поскольку функцию обратного спроса можно интерпретировать как функцию предельного валового потребительского излишка (marginal gross consumer surplus function) [2], условие, определяющее оптимальное количество единиц блага в наборе можно представить как равенство предельного валового потребительского излишка и предельных издержек. Иными словами, как показано на рис. 7.16, продавец определяет максимальное расстояние между кривой валового потребительского излишка $GCS(q)$ и кривой общих переменных издержек $VC(q) = cq$.

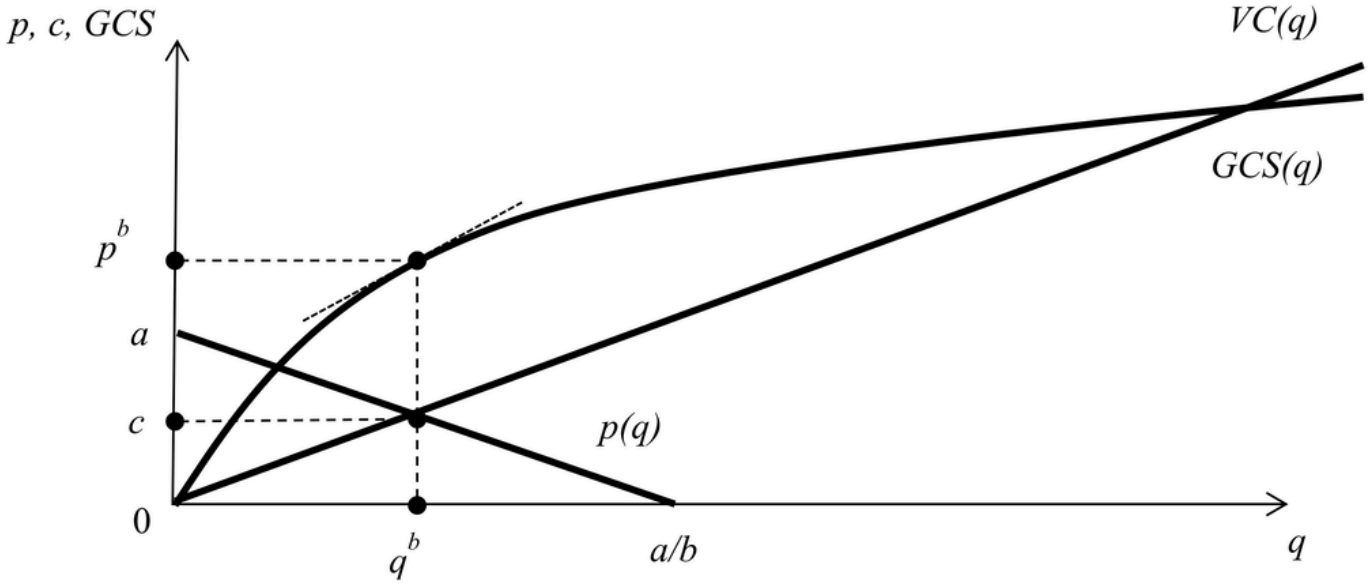


Рисунок 7.16. Продажа товаров наборами: максимизация прибыли в случае непрерывного линейного спроса

г) Два типа покупателей, непрерывный спрос.

Пусть на рынке представлены две группы потребителей $(l = 1, 2)$, отличающиеся функциями спроса на товар. Потребители первого типа N_1 входят в первую группу, потребители второго типа N_2 – во вторую.

Тогда максимальную цену, которую отдельный потребитель готов заплатить за набор из q единиц блага, можно выразить так:

$$p_l^b(q) \stackrel{def}{=} GCS_l(q) = \frac{(2a_l - b_l q)q}{2},$$

а максимальная цена набора, которая устроит потребителей обоих типов, будет равна:

$$p_{1,2}^b(q) \stackrel{def}{=} \min\left\{p_1^b, p_2^b\right\},$$

где p_1^b – максимальная готовность платить за набор из q единиц потребителями первого типа, p_2^b – максимальная готовность платить за набор из q единиц потребителями второго типа.

Очевидно, если $p_1^b > p_2^b$, то $p_{1,2}^b = p_2^b$, и наоборот, если $p_1^b < p_2^b$, то $p_{1,2}^b = p_1^b$.

Для определения максимизирующего прибыль количества единиц товара в наборе необходимо установить, при каком q будет наибольшим одно из трех возможных значений прибыли:

- если набор покупается одной из групп потребителей: $\pi_l(q) = N_l(p_l^b(q) - cq) - f$.
- если набор покупается обеими группами потребителей:

$$\pi_{1,2}(q) = (N_1 + N_2)\left(p_{1,2}^b(q) - cq\right) - f.$$

Таким образом, для каждого $q = 1, 2, \ldots, q^{max}$ (где q^{max} – это максимальный размер набора, который хотя бы одна группа потребителей готова приобрести при строго положительном значении цены) необходимо сравнить три возможных значения прибыли: $\pi_1(q)$ – если набор покупается только первой группой, $\pi_2(q)$ – если набор покупается только второй группой, $\pi_{1,2}(q)$ – если набор покупается обеими группами потребителей. Оптимальный размер набора будет соответствовать максимальному из возможных значений прибыли.

7.3.2.2. Неидентичные наборы

Пусть у продавца имеется возможность предлагать наборы, содержащие разное количество единиц блага, причем, по крайней мере, в одном наборе содержится не менее двух единиц.

Успешная реализация этой возможности будет иметь место, если на рынке представлены как минимум две группы потребителей, отличающиеся готовностью платить за наборы разной комплектации. Если, к примеру, покупатели первого типа извлекают больший чистый потребительский излишек от потребления лишь нескольких единиц блага, а покупатели второго типа – от больших объемов этого блага, продавец имеет шанс максимизировать прибыль, предложив к продаже наборы двух видов: «малый» - для потребителей первого типа и «большой» - для потребителей второго типа.

Обозначим A - «малый» набор, содержащий q_A единиц товара и продающийся по цене p_A, и B – «большой» набор, содержащий q_B единиц товара и продающийся по цене p_B.

Для достижения максимума прибыли должны выполняться три условия:

- Условие участия - потребители обоих типов предпочитают покупать данный товар отказу от его приобретения. Формально это означает:

$$GCS_1(q_A) - p_A \geq 0,$$
$$GCS_2(q_B) - p_B \geq 0.$$

- Условие сортирования – для потребителей первого типа покупка набора A предпочтительнее, чем покупка набора B, а для потребителей второго типа покупка набора B предпочтительнее, чем покупка набора A. Формально это означает:

$$GCS_1(q_A) - p_A = NCS_1(q_A, p_A) \geq NCS_1(q_B, p_B) = GCS_1(q_B) - p_B,$$
$$GCS_2(q_B) - p_B = NCS_2(q_B, p_B) \geq NCS_2(q_A, p_A) = GCS_2(q_A) - p_A.$$

- При продаже одинаковых наборов $(q_A) = (q_B)$ продавец получает меньшую прибыль, чем при продаже наборов, содержащих разные количества единиц блага $(q_A) \neq (q_B)$.

Выполнение этих условий позволит обнаружить скрытое качество – готовность потребителей платить за наборы разных объемов. Удовлетворяющие им количества единиц блага и цены наборов будут обеспечивать самоидентификацию покупателей по их готовности платить, которая даст продавцу возможность сегментировать рынок.

7.3.3. Связанные продажи

7.3.3.1. Понятия и определения

Связанные продажи (или комплектование) – это продажа пакетов (или комплектов), состоящих из различных товаров и/или услуг, в отличие от наборов, объединяющих несколько единиц одного и того же блага. Комплектование широко применяется в различных отраслях. Например, распространены продажи пакетов программ кабельного ТВ и туристических пакетов. Зачастую в комплекты входят даже блага, удовлетворяющие различные потребности, довольно далекие друг от друга. К примеру, подключение пакета кабельных телевизионных программ объединяется с подключением к Интернету и/или телефонной сети, а вместе с книгой продается футболка или чашка с логотипом издателя или книжного магазина.

Виды связанных продаж:

- Чистое комплектование – товары продаются только в комплекте;

- Смешанное комплектование – товары продаются как в комплекте так и по отдельности;
- Многопакетное комплектование – продажа более одного вида пакетов, причем по крайней мере два вида пакетов содержат как минимум два разных блага.

7.3.3.2. Условия моделей

Рассмотрим, как различные типы потребителей $(l = 1, \ldots, M)$ принимают решения о покупке благ либо по отдельности, либо в комплектах.

Пусть:

- $i = A, B$ – товары;
- $l = 1, 2$ – типы потребителей, каждый из которых может приобрести либо единицу A, либо единицу B, либо комплект $A + B$;
- N_l – количество потребителей типа l;
- V_1^A и V_1^B – ценности (максимальные готовности платить) благ для потребителей 1-го типа;
- V_2^A и V_2^B – ценности (максимальные готовности платить) благ для потребителей 2-го типа;
- P_A – цена блага A, P_B – цена блага B;
- P_{AB} – цена набора благ $A + B$;
- Потребители предъявляют единичный спрос на каждое благо;
- Единичные функции спроса потребителей типов 1 и 2 на блага A и B отрицательно коррелированы (к примеру, как показано на рис. 7.17, потребитель первого типа имеет большую готовность платить за товар A, а потребитель второго типа – за товар B: $V_1^A > V_1^B$ и $V_2^A < V_2^B$);
- Предельные издержки производства товаров: $MC^i = c^i$;
- Постоянные издержки производителя: $FC = f$.

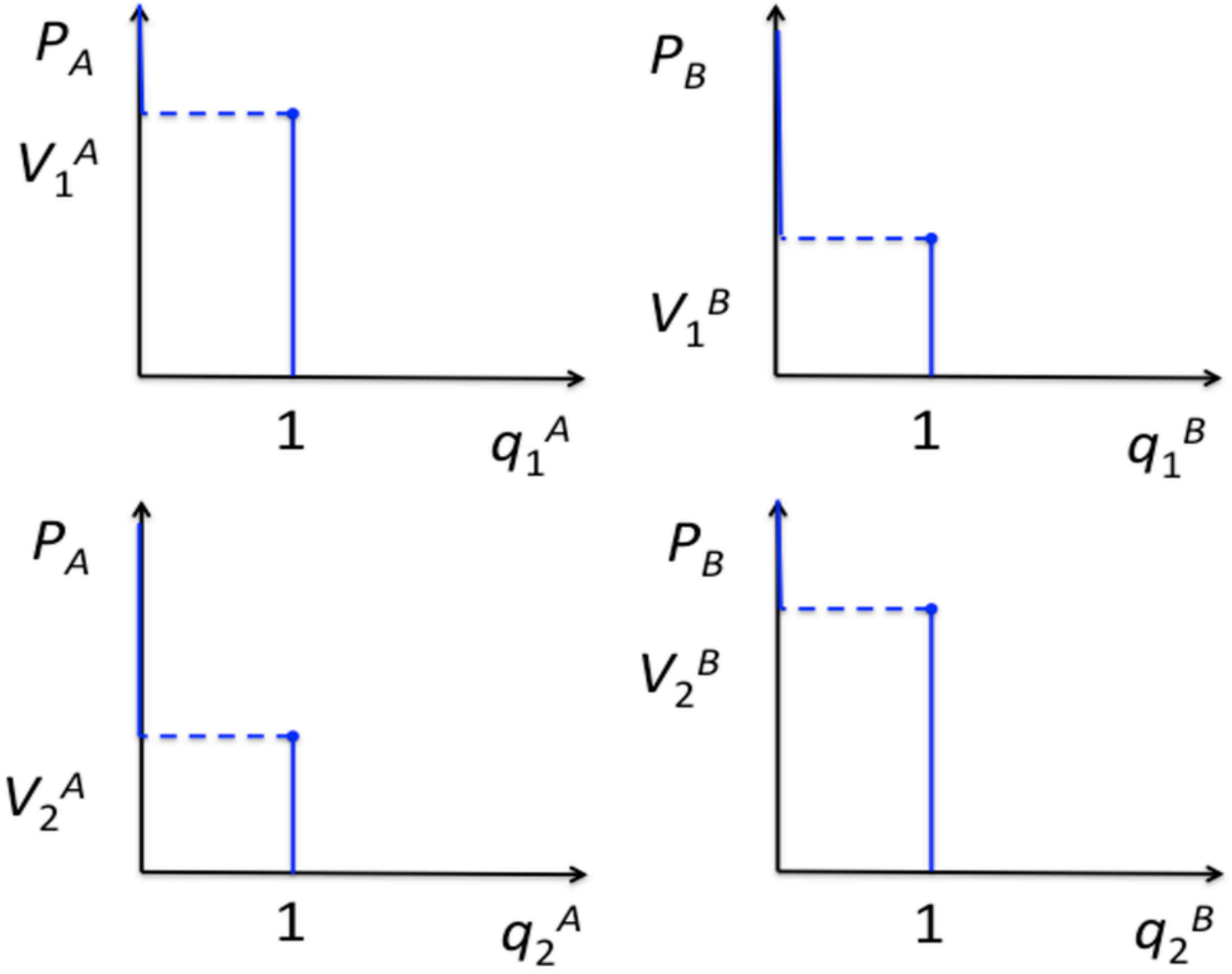


Рисунок 7.17. Отрицательно коррелированные единичные функции спроса

7.3.3.3. Отсутствие комплектования

В отсутствие комплектования товары A и B продаются отдельно. Потребитель l покупает A, если $V_l^A \geq P_A$ и B, если $V_l^B \geq P_B$ (рис. 7.18).

Если готовность платить за товар i у потребителей первого типа выше, чем у потребителей второго типа, т.е. $V_1^i > V_2^i$, то установление цены на уровне $p_i{=}V_1^i$ приведет к тому, что покупать его будут только потребители первого типа, а установление цены на уровне $p_i{=}V_2^i$ позволит представителям обеих групп приобрести этот товар.

Функция прибыли от реализации блага i в этом случае имеет вид:

$$\pi_i{=}\begin{cases} N_1\left(V_1^i\text{-}c^i\right) & \text{если } p_i{=}V_1^i \backslash \& V_1^i > V_2^i \\ (N_1{+}N_2)\left(V_2^i\text{-}c^i\right) & \text{если } p_i{=}V_2^i \backslash \& V_1^i \geq V_2^i \end{cases}$$

Или через сравнение двух значений прибыли получаем:

$$\pi_i{=}\begin{cases} N_1\left(V_1^i\text{-}c^i\right) & \text{если } N_1\left(V_1^i\text{-}V_2^i\right) > N_2\left(V_2^i\text{-}c^i\right) \backslash \& V_1^i > V_2^i \\ (N_1{+}N_2)\left(V_2^i\text{-}c^i\right) & \text{если } N_1\left(V_1^i\text{-}V_2^i\right) \leq N_2\left(V_2^i\text{-}c^i\right) \backslash \& V_1^i \geq V_2^i \end{cases} \quad (7.3.1)$$

Экономический смысл условий в выражении $(7.3.1)$ состоит в сравнении дополнительного выигрыша $N_1\left(V_1^i\text{-}V_2^i\right)$, который получает продавец от продажи товара только потребителям первого типа, и потерь $N_2\left(V_2^i\text{-}c^i\right)$ в результате исключения потребителей второго типа из числа покупателей товара.

Аналогично, если готовность платить за товар i у потребителей второго типа выше, чем у потребителей первого типа, т.е. $V_2^i > V_1^i$, имеем:

$$\pi_i{=}\begin{cases} N_2\left(V_2^i\text{-}c^i\right) & \text{если } p_i{=}V_2^i \backslash \& V_2^i > V_1^i \\ (N_1{+}N_2)\left(V_1^i\text{-}c^i\right) & \text{если } p_i{=}V_1^i \backslash \& V_2^i \geq V_1^i \end{cases}$$

Или:

$$\pi_i{=}\begin{cases} N_2\left(V_2^i\text{-}c^i\right) & \text{если } N_2\left(V_2^i\text{-}V_1^i\right) > N_1\left(V_1^i\text{-}c^i\right) \backslash \& V_2^i > V_1^i \\ (N_1{+}N_2)\left(V_1^i\text{-}c^i\right) & \text{если } N_2\left(V_2^i\text{-}V_1^i\right) \leq N_1\left(V_1^i\text{-}c^i\right) \backslash \& V_2^i \geq V_1^i \end{cases} \quad (7.3.2)$$

Объединив случаи $(7.3.1)$ и $(7.3.2)$, получаем функцию общей прибыли продавца, осуществляющего продажи, не прибегая к комплектованию:

$$\pi{=}\sum_i \pi_i\text{-}f, \text{ где } \pi_i{=}\begin{cases} (7.3.1), \text{ если } V_1^i \geq V_2^i \\ (7.3.2), \text{ если } V_1^i < V_2^i \end{cases} \quad (7.3.3)$$

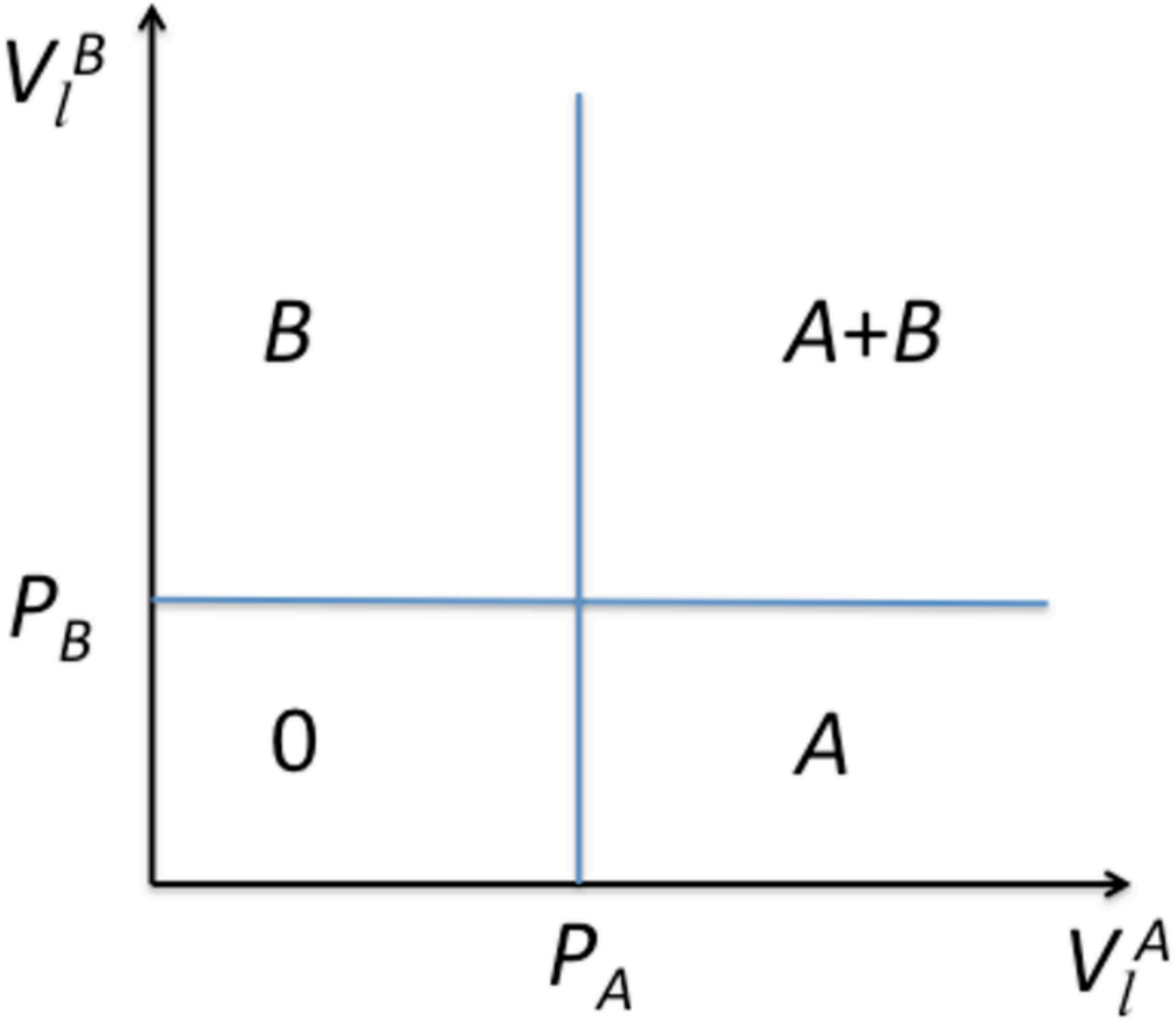


Рисунок 7.18. Отсутствие комплектования

7.3.3.4. Чистое комплектование

В случае чистого комплектования потребитель l будет покупать набор $A\&B$, если для него $V_l^A + V_l^B \geq P_{AB}$ (рис. 7.19).

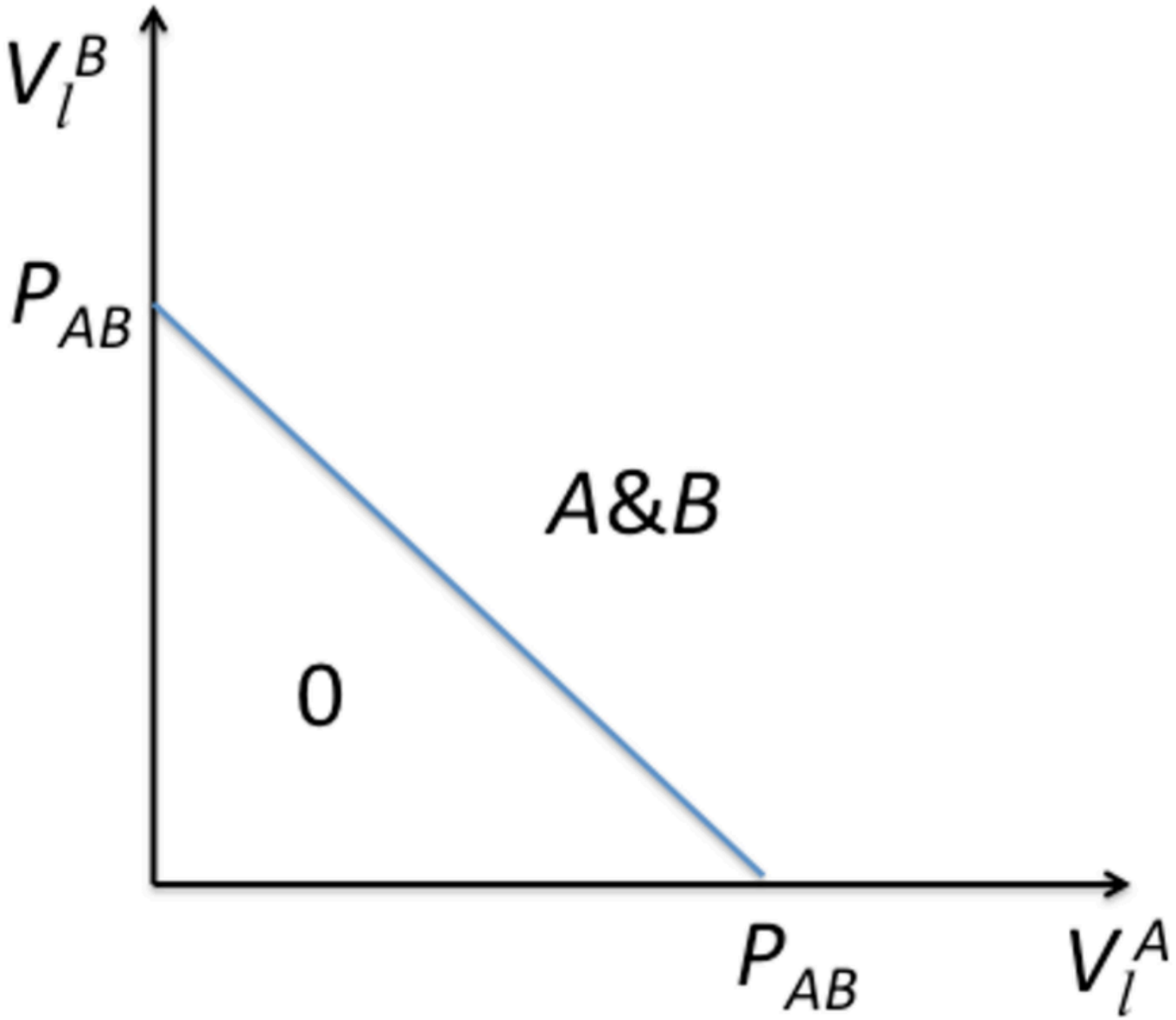


Рисунок 7.19. Чистое комплектование

Потребители первого типа будут приобретать комплект, если $p_{AB} \leq V_1^A+V_1^B$. Аналогично, потребители второго типа будут приобретать комплект, если $p_{AB} \leq V_2^A+V_2^B$.

Продавец должен установить оптимальную цену набора p_{AB}, содержащего единицу товара A и единицу товара B.

Если готовность платить за комплект у потребителей первого типа выше, чем у потребителей второго типа, т.е. $V_1^A+V_1^B > V_2^A+V_2^B$, то установление цены $p_{AB}=V_1^A+V_1^B$ приведет к тому, что будет куплено количество наборов, равное N_1, а установление цены $p_{AB}=V_2^A+V_2^B$ приведет к тому, что число покупок составит $N_1+ N_2$.

Следовательно, при $V_1^A+V_1^B > V_2^A+V_2^B$ прибыль продавца от реализации наборов будет равна:

$$\pi=\begin{cases} N_1\left(V_1^A+V_1^B-c^A-c^B\right) & \text{если } p_{AB}=V_1^A+V_1^B \\ (N_1+N_2)\left(V_2^A+V_2^B-c^A-c^B\right) & \text{если } p_{AB}=V_2^A+V_2^B \end{cases}$$

Если интерпретировать прибыль продавца через решение о сравнении дополнительного дохода $N_1\left(V_1^A+V_1^B-V_2^A-V_2^B\right)$ от «наценки» для потребителей первого типа и потерь $N_2\left(V_2^A+V_2^B-c^A-c^B\right)$ от исключения потребителей второго типа из числа покупателей наборов, для случая $V_1^A+V_1^B > V_2^A+V_2^B$ имеем:

$$\pi=\begin{cases} N_1\left(V_1^A+V_1^B-c^A-c^B\right) & \text{если } \frac{N_1(V_1^A+V_1^B-V_2^A-V_2^B)}{N_2(V_2^A+V_2^B-c^A-c^B)} > 1 \\ (N_1+N_2)\left(V_2^A+V_2^B-c^A-c^B\right) & \text{если } \frac{N_1(V_1^A+V_1^B-V_2^A-V_2^B)}{N_2(V_2^A+V_2^B-c^A-c^B)} \leq 1 \end{cases} \quad (7.3.4)$$

Аналогично для случая, когда готовность платить за комплект у потребителей второго типа выше, чем у потребителей первого типа, т.е. $V_2^A+V_2^B \geq V_1^A+V_1^B$, получаем:

$$\pi=\begin{cases} N_2\left(V_2^A+V_2^B\text{-}c^A\text{-}c^B\right) & \text{если } p_{AB}=V_2^A+V_2^B \\ (N_1+N_2)\left(V_1^A+V_1^B\text{-}c^A\text{-}c^B\right) & \text{если } p_{AB}=V_1^A+V_1^B \end{cases}$$

Или:

$$\pi=\begin{cases} N_2\left(V_2^A+V_2^B\text{-}c^A\text{-}c^B\right) & \text{если } \frac{N_2(V_2^A+V_2^B\text{-}V_1^A\text{-}V_1^B)}{N_1(V_1^A+V_1^B\text{-}c^A\text{-}c^B)}>1 \\ (N_1+N_2)\left(V_1^A+V_1^B\text{-}c^A\text{-}c^B\right) & \text{если } \frac{N_2(V_2^A+V_2^B\text{-}V_1^A\text{-}V_1^B)}{N_1(V_1^A+V_1^B\text{-}c^A\text{-}c^B)}\le 1 \end{cases} \quad (7.3.5)$$

Объединив случаи (7.3.4) и (7.3.5), получаем функцию общей прибыли продавца, прибегающего к комплектованию:

$$\pi_{AB}=\pi\text{-}f, \text{ где } \pi=\begin{cases} (7.3.4), \text{ если } V_1^A+V_1^B>V_2^A+V_2^B \\ (7.3.5), \text{ если } V_2^A+V_2^B\ge V_1^A+V_1^B \end{cases} (7.3.6)$$

Таким образом, продавец, решающий вопрос о целесообразности продажи товаров по отдельности или комплектами, должен сравнить величины прибыли в выражениях (7.3.3) и (7.3.6).

7.3.3.5. Смешанное комплектование

В случае смешанного комплектования потребителям предлагаются блага A и B как в комплектах по цене p_{AB} за комплект, так и по отдельности: A - по цене p_A за единицу, B - по цене p_B за единицу. На рис. 7.20 показаны четыре зоны, в каждой из которых потребителю l выгоден один из вариантов покупки.

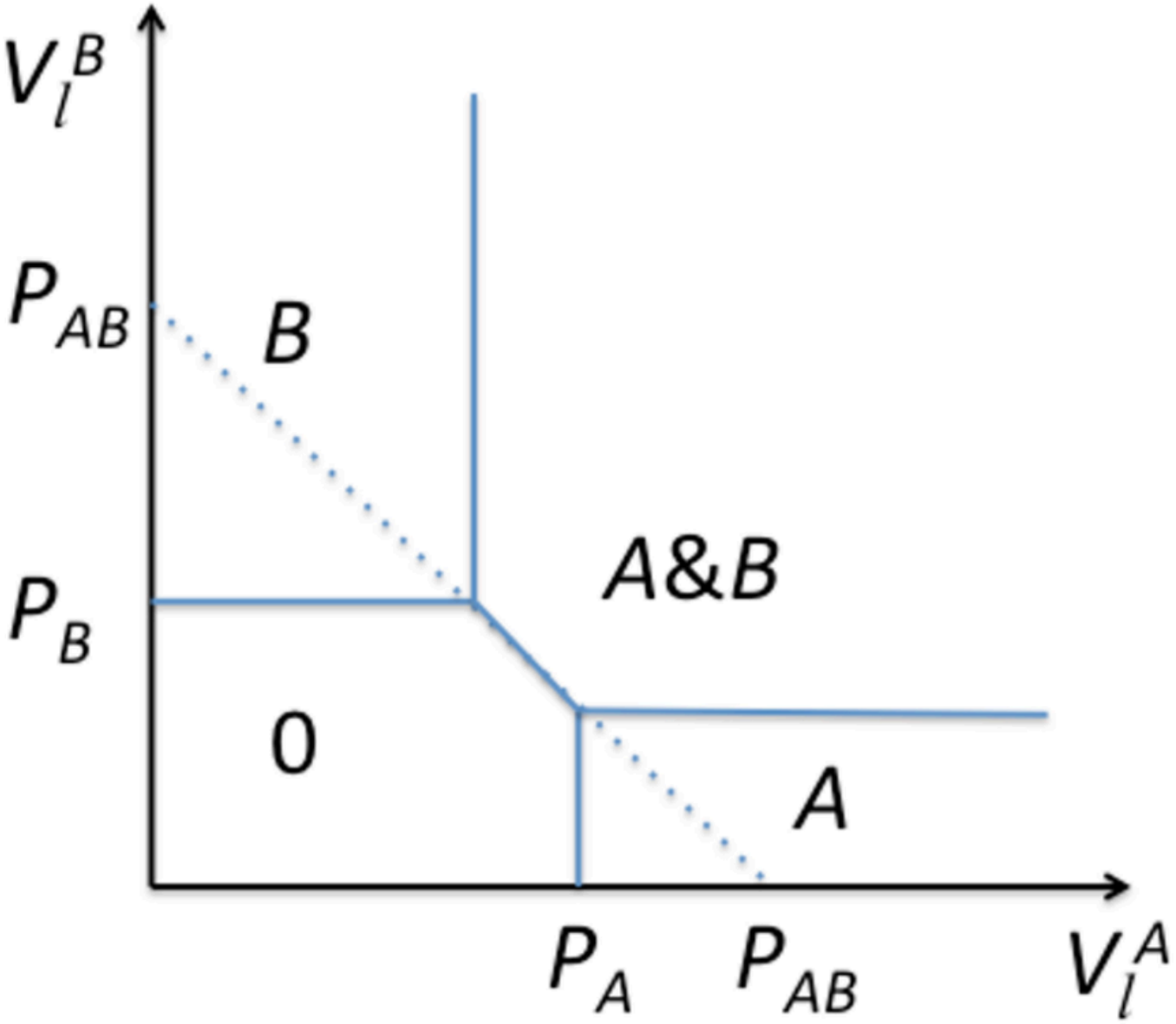


Рисунок 7.20. Смешанное комплектование

Потребитель типа l не будет совершать покупок, если $V_l^A<p_A, V_l^B<p_B$ и $V_l^A+V_l^B<p_{AB}$. Он будет приобретать только благо A, если для него выполняются условия:

$$V_l^A \geq p_A \text{ и } V_l^B < p_{AB}\text{-}p_A.$$

Разность p_{AB}-p_A во втором условии дает представление о ценности блага B для потребителя типа I, который уже готов приобрести благо A.

Аналогично, потребитель типа I будет приобретать только благо B, если для него выполняются условия:

$$V_l^B \geq p_B \text{ и } V_l^A < p_{AB}\text{-}p_B.$$

Наконец, потребитель типа I будет приобретать комплект A&B, если:

$$V_l^A \geq p_{AB}\text{-}p_B \text{ и } V_l^B \geq p_{AB}\text{-}p_A$$

или:

$$V_l^A + V_l^B\text{-}p_{AB} \geq \max\left\{V_l^A\text{-}p_A, V_l^B\text{-}p_B\right\}.$$

7.3.3.6. Многопакетное комплектование

В отличие от смешанного комплектования, многопакетное комплектование предполагает, что потребителю предлагается широкий выбор различных пакетов. Многопакетное комплектование может позволить продавцу получить наибольшую прибыль по сравнению с продажей товаров по отдельности, чистым и смешанным комплектованием, если будут выполнены следующие условия:

a. Потребители могут быть сгруппированы по своим предпочтениям.

Иными словами, все потребители могут быть разделены на группы по идентичной готовности платить за ряд благ, которые и будут объединяться в наборы.

b. Хотя бы между несколькими группами должна наблюдаться отрицательная корреляция готовности платить.

Многопакетное комплектование широко применяется в телевизионной индустрии, где среди потребителей одновременно есть, к примеру, те, которые имеют более высокую готовность платить за просмотр спортивных каналов и низкую готовность платить за просмотр каналов, демонстрирующих сериалы, и наоборот, предпочитающие сериалы в большей степени, чем спортивные состязания. В таком случае имеет смысл предлагать для подключения два пакета каналов, в одном из которых будут преобладать спортивные, а в другом – сериальные каналы.

---

1. В разделе использованы материалы: Shy O. How to Price. A Guide to Pricing Techniques and Yield Management. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. Ch. 4. P. 115-149. ↩

2. $\frac{dGCS(q)}{dq} = a\text{-}bq = p(q)$ ↩

7.4. Двухчастные и многочастные тарифы

7.4.1. Понятия и определения[1]

Двухчастные и многочастные тарифы также относятся к разновидностям нелинейного ценообразования. Суть их сводится к наличию фиксированной части тарифа и платы за отдельные единицы блага, которая может варьироваться в зависимости от числа покупаемых единиц, что в некоторой мере роднит двухчастные и многочастные тарифы с продажей товаров наборами. Подобные подходы к ценообразованию широко распространены и встречаются, к примеру, тогда, когда:

- оператор мобильной связи взимает фиксированную плату за подключение и назначает цену за каждую минуту разговора или предлагает пакеты, цена которых варьируется в зависимости от числа входящих в них минут;
- парк развлечений продает входные билеты и билеты на каждый отдельный аттракцион или абонементы на несколько аттракционов;
- спортклуб назначает членский взнос и предоставляет возможность оплачивать индивидуальные тренировки или их пакеты.

При этом двухчастные тарифы могут рассматриваться как частный случай многочастных тарифов.

7.4.2. Двухчастные тарифы

7.4.2.1. Двухчастный тариф для потребителей одного типа

Двухчастный тариф, как непосредственно следует из термина, состоит из двух компонентов:

- фиксированная плата (за подключение, вход, членство и т.п.) - f;
- цена за единицу - p.

Таким образом, двухчастный тариф после внесения фиксированной платы дает право приобретения желаемого количества единиц товара (или услуг) по соответствующей цене.

На рис. 7.21 показана функция валовой выручки продавца TR (которая также может быть интерпретирована как функция валовых расходов покупателя), использующего двухчастный тариф:

$$y(q)=f+p \bullet q,$$

где f – фиксированная плата (y=f при q=0), p – цена за единицу (равна тангенсу угла наклона TR).

Пусть:

- N потребителей блага составляют однородную группу с идентичными индивидуальными функциями спроса:

$$p(q)=a-bq;$$

- c – предельные издержки производства товара, причем $a > c$ (выполнение этого условия означает, что готовность потребителей платить за первую единицу товара выше предельных издержек);
- φ – постоянные издержки производителя.

Установление двухчастного тарифа, максимизирующего прибыль производителя, происходит в три шага (рис. 7.22).

Шаг 1. Цена единицы товара фиксируется на уровне предельных издержек: $p=c$.

Шаг 2. Определяется величина спроса при нулевой фиксированной плате (т.е. при f=0):

$$q=\frac{a-c}{b}.$$

Шаг 3. Назначается максимально возможная фиксированная плата – на уровне, при котором чистый потребительский излишек не отрицателен ($ncs \geq 0$), т.е.:

$$f=ncs=\frac{(a-c)^2}{2b}.$$

Тогда прибыль производителя будет равна:

$$\pi=\frac{N(a-c)^2}{2b}-\varphi.$$

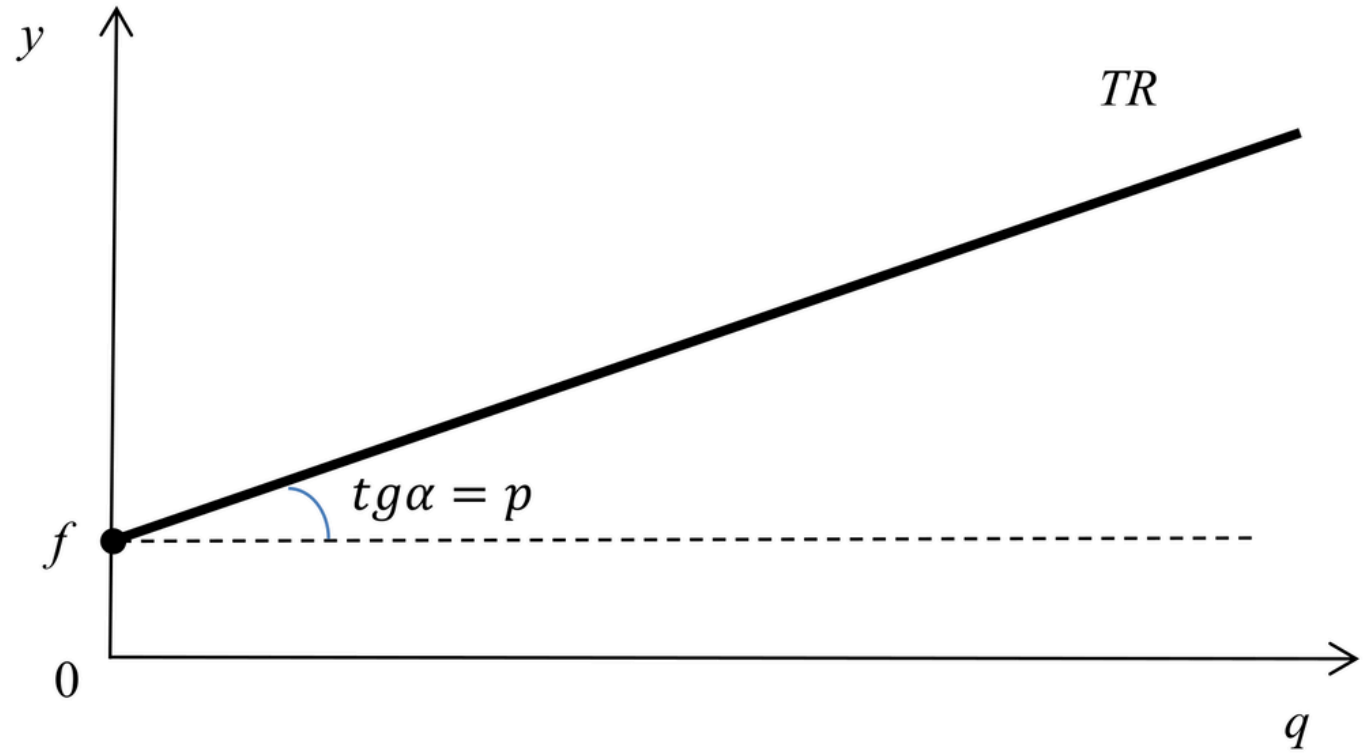


Рисунок 7.21. Валовая выручка продавца (валовые расходы покупателя) при двухчастном тарифе

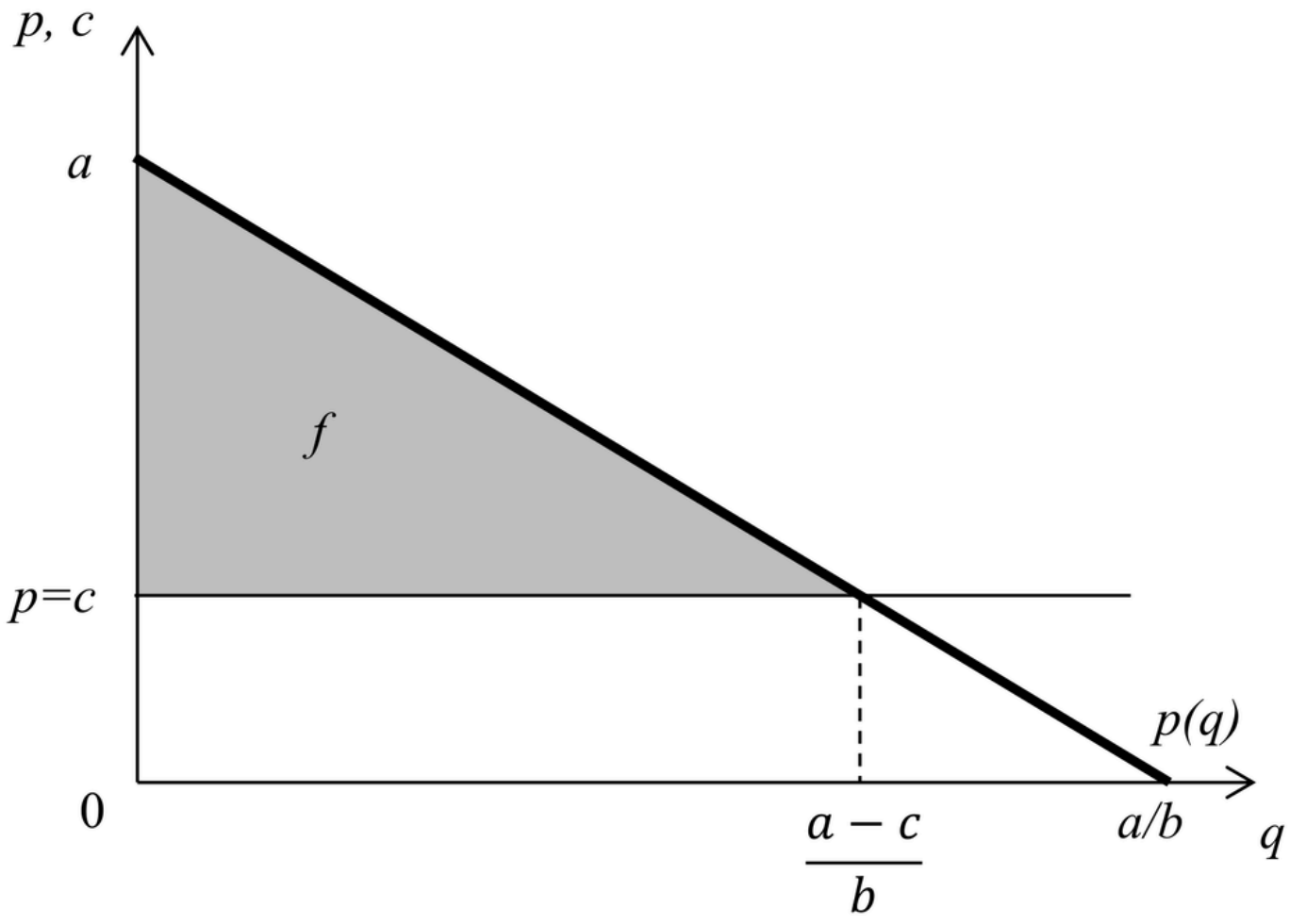


Рисунок 7.22. Двухчастный тариф для потребителей одного типа

7.4.2.2. Два двухчастных тарифа для потребителей двух типов

Если потребители не однородны по готовности платить за товар и имеют разные функции спроса, то, как правило, единый двухчастный тариф (единая для всех комбинация f и p) не позволяет производителю максимизировать прибыль путем максимального извлечения потребительского излишка. В таком случае лучшим решением для производителя станет меню двухчастных тарифов.

Очевидно, что решение производителя предложить потребителям возможность выбора одного из двух тарифов A(f_A, p_A) и B(f_B, p_B) оправданно, только если $f_A<f_B$ и $p_A>p_B$ или $f_A>f_B$ и $p_A<p_B$, ибо при $f_A \leq f_B$ и $p_A \leq p_B$, все потребители выберут более дешевый тариф A.

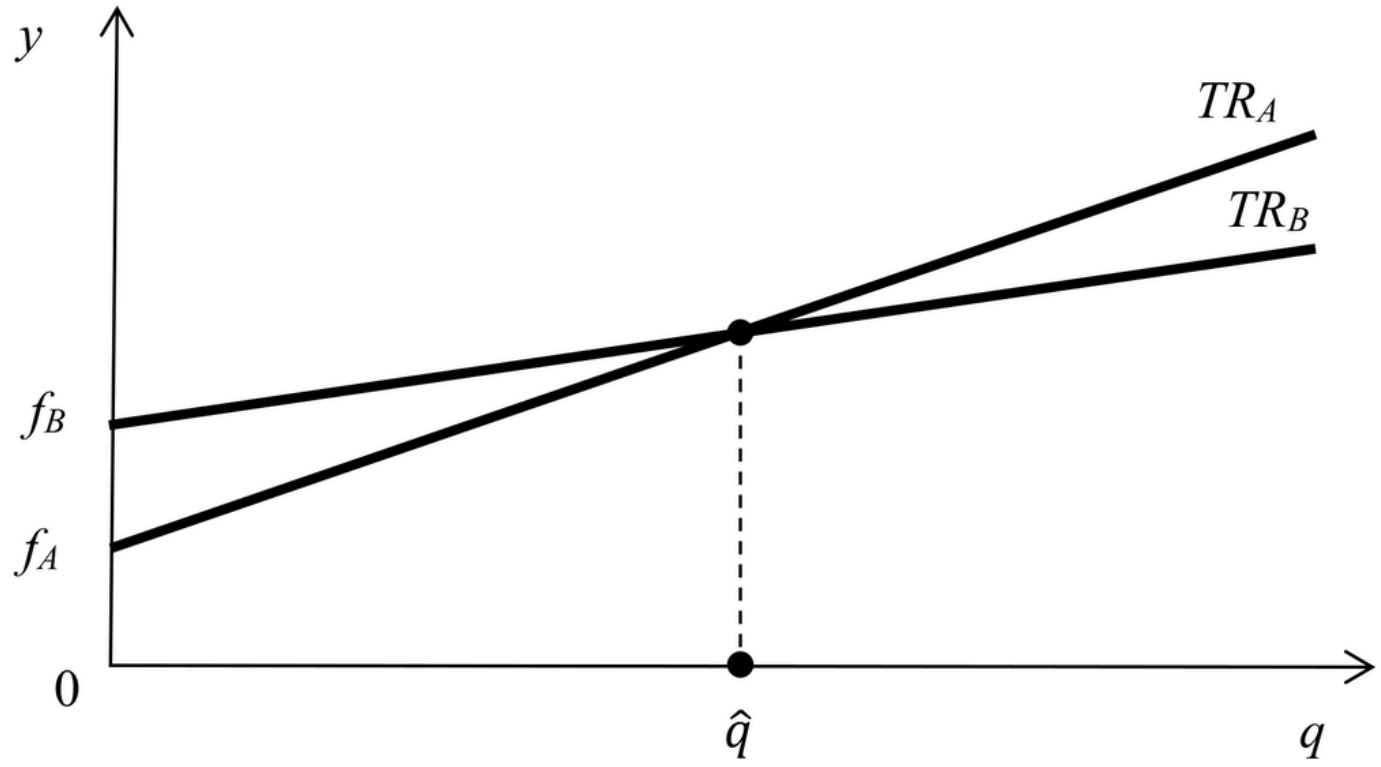


Рисунок 7.23. Валовая выручка продавца (валовые расходы покупателей) и выбор двухчастного тарифа

Валовая выручка продавца (валовые расходы покупателей) составят:

$$y_A(q)=f_A+p_A \bullet q$$ – для тарифа A (TR_A);

$$y_B(q)=f_B+p_B \bullet q$$ – для тарифа B (TR_B).

Как показано на рис. 7.23, если $f_A<f_B$ и $p_A>p_B$, потребители будут выбирать тариф A, если товар приобретается в количестве, меньшем, чем $\hat{q}$ единиц, и тариф B – если товар приобретается в количестве, превышающем $\hat{q}$, где:

$$\hat{q}=\frac{f_B-f_A}{p_A-p_B}.$$

Наибольшую сложность при дизайне меню тарифов представляет отсутствие у производителя информации о распределении потребителей по типам в соответствии с готовностью платить. При этом меню предполагает разработку тарифов таким образом, что потребители разных типов выбирают разные тарифы из предложенных производителем.

Следовательно, если потребители Типа 1 готовы платить больше за в целом небольшое количество единиц товара, а потребители Типа 2 готовы покупать большее количество единиц товара, но дешевле, то для максимизации прибыли производителю следует прибегнуть к скринингу и сегментировать рынок для самоидентификации покупателей и их сортирования. Для достижения этой цели должны выполняться «ограничения совместимости стимулов»:

$$ncs_1(q_A; f_A, p_A)=gcs_1(q_A)-f_A-p_Aq_A \geq gcs_1(q_B)-f_B-p_Bq_B=ncs_1(q_B; f_B, p_B),$$

$$ncs_2(q_B; f_B, p_B)=gcs_2(q_B)-f_B-p_Bq_B \geq gcs_2(q_A)-f_A-p_Aq_A=ncs_2(q_A; f_A, p_A).$$

и «ограничения участия»:

$$gcs_1(q_A)-f_A-p_Aq_A \geq 0,$$

$$gcs_2(q_B)-f_B-p_Bq_B \geq 0.$$

Тогда «ограничения совместимости стимулов» будут гарантировать самоотбор - выявление скрытой от производителя готовности потребителей платить за товар и выбор потребителями каждого типа «предназначенного» для них тарифа. «Ограничения участия» позволяют обеспечить потребителям неотрицательную выгоду от потребления приобретаемого количества блага (рис. 7.24).

Интерактивный рисунок из 4-х частей (Информация для технического специалиста: в качестве образца для оформления рисунка используйте Figure 7.4a, 7.4b по ссылке: https://www.core-econ.org/the-economy/microeconomics/07-firm-and-customers-02-breakfast-cereal.html#figure-7-4ad)

Рисунок 7.24. Двухчастный тариф и самоотбор покупателей: оптимальное меню контрактов

7.4.2.3. Меню двухчастных тарифов

В практике фирм широко распространено применение меню двухчастных тарифов. К примеру, операторы сотовой связи сегментируют рынок на множество групп потребителей по готовности платить, доходу, корпоративной принадлежности, локации.

Оз Шай дает следующее определение меню двухчастных тарифов: «Меню из $B \geq 2$ двухчастных тарифов состоит из набора пар (f_1, p_1), (f_2, p_2)..., (f_B, p_B) таких, что $f_1<f_2<...<f_B$ и $p_1>p_2>...>p_B \geq \mu$, где μ – предельные издержки производства» [2].

На рис. 7.25 показано, как изменяется валовая выручка продавца (валовые расходы покупателей) при изменении количества единиц покупаемого товара и тарифного плана. Если соблюдается принцип монотонности, т.е. $f_1<f_2<f_3$ и $p_1>p_2>p_3$, потребители будут выбирать Тариф 1, если товар приобретается в количестве, меньшем, чем $\widehat{q_{1,2}}$ единиц, Тариф 2 – при выборе от $\widehat{q_{1,2}}$ до $\widehat{q_{2,3}}$ единиц и Тариф 3, если товар приобретается в количестве, превышающем $\widehat{q_{2,3}}$ единиц. Для этого должно выполняться условие:

$$\widehat{q_{1,2}}=\frac{f_2-f_1}{p_1-p_2} < \frac{f_3-f_2}{p_2-p_3}=\widehat{q_{2,3}}.$$

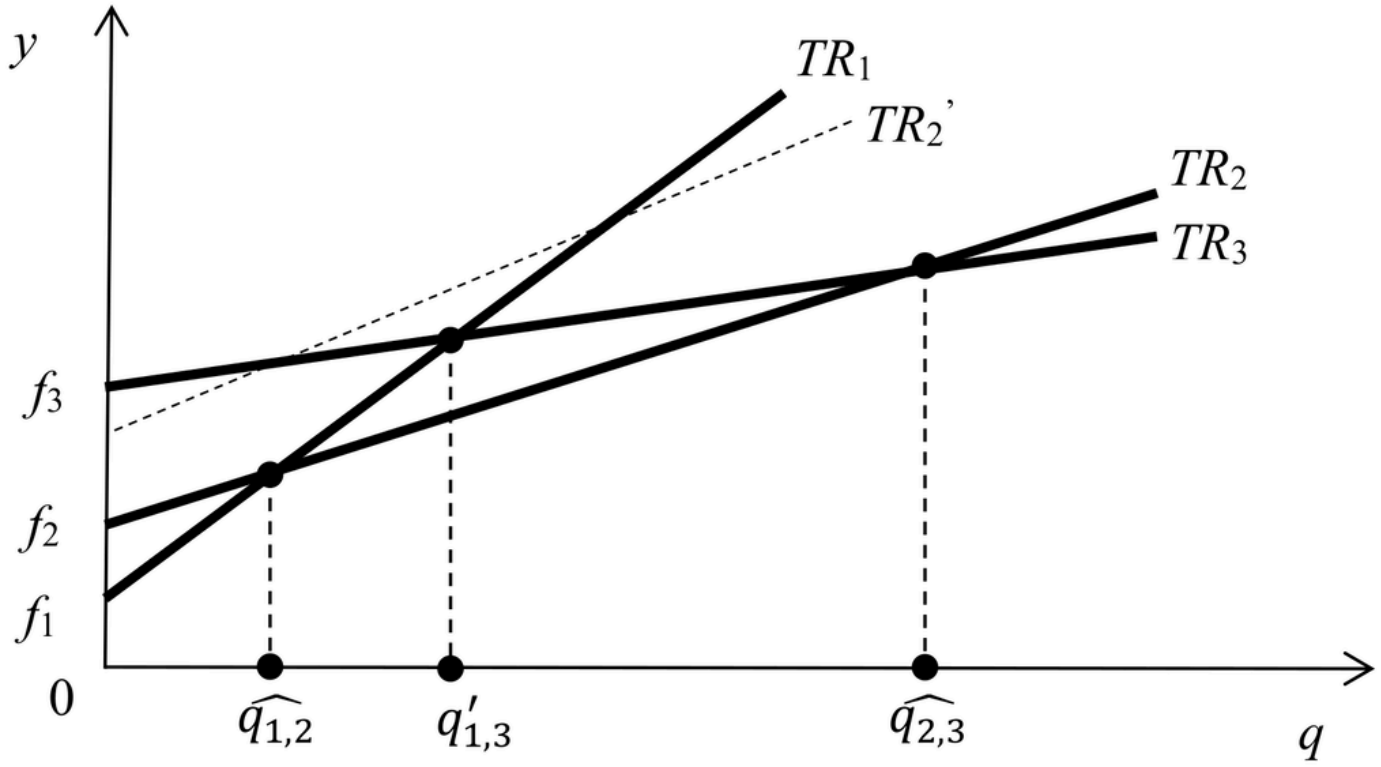


Рисунок 7.25. Валовая выручка продавца (валовые расходы покупателей) в случае меню из трех двухчастных тарифов

Пример линии валовой выручки продавца (валовых расходов покупателей) при неудачном – не удовлетворяющем условию монотонности – конструировании Тарифа 2 приведен на рис. 7.25 пунктиром. В этом случае потребители переключались бы с Тарифа 1 на Тариф 3 при $q'_{1,3}$, не выбирая Тариф 2.

Таким образом, для того чтобы меню двухчастных тарифов было практически применимым для максимизации прибыли, производитель должен придерживаться следующих правил:

1. Размер меню: количество предлагаемых тарифов не должно превышать количество групп потребителей (M) с разной готовностью платить:
$$B \leq M.$$
2. Монотонность:
$$\frac{f_2-f_1}{p_1-p_2} < \frac{f_3-f_2}{p_2-p_3} < \ldots < \frac{f_B-f_{B-1}}{p_{B-1}-p_B}.$$
3. Ограничение совместимости стимулов должно гарантировать, чтобы каждому типу потребителей оказался выгоден выбор своего тарифа. Тогда для потребителей типа n выбранный тарифный план i должен приносить чистый потребительский излишек не меньший, чем любой другой план j из предложенного меню:
$$ncs_n(q_i; f_i, p_i) \geq ncs_n(q_j; f_j, p_j).$$
4. Ограничение участия: для каждого тарифного плана i из предложенного меню $i=1,\ldots,B$ существует группа потребителей, для которых $ncs_n(q_i; f_i, p_i) \geq 0$.

5. Относительная прибыльность: меню двухчастных тарифов должно быть выгоднее, т.е. приносить бóльшую прибыль, чем единый двухчастный тариф (рис. 7.26).

Интерактивный рисунок из 5 частей (Информация для технического специалиста: в качестве образца для оформления рисунка используйте Figure 7.4a, 7.4b по ссылке: https://www.core-econ.org/the-economy/microeconomics/07-firm-and-customers-02-breakfast-cereal.html#figure-7-4ad)

Рисунок 7.26. Меню двухчастных тарифов

Числовой пример

Допустим, что спрос на продукт предъявляется двумя равными по численности группами покупателей, состоящими из идентичных индивидов с функциями спроса, соответственно, P_1=3,5–2q и P_2=4–q. Рассмотрим процесс принятия решений монополистом, который, производит некоторый однородный продукт при постоянных предельных издержках MC=AC=2 и не имеет возможности идентифицировать покупателей с различными функциями спроса (рис. 1).

Запишем ограничения при принятии решений монополистом.

«Ограничение участия» (ограничение по резервной полезности) для первого покупателя имеет вид:

$$\frac{(3{,}5+p_1(q_1))}{2}q_1-p_1(q_1)\bullet q_1-F_1=\frac{(3{,}5+(3{,}5-2q_1))}{2}q_1-(3,5-2q_1)q_1-F_1=\frac{(3{,}5-(3{,}5-2q_1))}{2}q_1-F_1\geq 0.$$

В оптимальном контракте ограничение будет жестким, т.е.

$$F_1=q_1^2.$$

«Ограничение совместимости стимулов», необходимое для самоотбора, для второго покупателя будет выглядеть так:

$$\frac{(4+p_2(q_2))}{2}q_2-p_2\left(q_2\right)\bullet q_2-F_2\geq\frac{(4+p_2(q_1))}{2}q_1-p_1\left(q_1\right)\bullet q_1-F_1,$$

т.е.

$$\frac{(4+(4-q_2))}{2}q_2-\left(4-q_2\right)q_2-F_2\geq\frac{(4+(4-q_1))}{2}q_1-\left(3,5-2q_1\right)q_1-F_1.$$

Поскольку в оптимальном контракте ограничение будет активным, постольку, проводя очевидные преобразования, получаем:

$$F_2=\frac{q_2^2}{2}-\frac{3q_1^2}{2}-\frac{q_1}{2}+F_1=\frac{q_2^2}{2}-\frac{q_1^2}{2}-\frac{q_1}{2}.$$

Монополист максимизирует функцию ожидаемой прибыли, в которой с вероятностями ½ присутствуют разности между выручкой и издержками производства для каждой из групп покупателей:

$$EPR=\frac{1}{2}\left(p_1\left(q_1\right)\bullet q_1-AC\bullet q_1+q_1^2\right)+\frac{1}{2}\left(p_2\left(q_2\right)\bullet q_2-AC\bullet q_2+F_2\right)=\frac{1}{2}\left((3,5-2q_1)q_1-2q_1+q_1^2\right)+\frac{1}{2}\left((4-q_2)q_2-2q_2+\frac{q_2^2}{2}-\frac{q_1^2}{2}-\frac{q_1}{2}\right)=\frac{q}{2}$$

Выписывая необходимые условия максимизации прибыли:

$$\begin{cases}\frac{\partial PR}{\partial q_1}=\frac{1}{2}-\frac{3q_1}{2}=0,\\ \frac{\partial PR}{\partial q_2}=1-\frac{q_2}{2}=0;\end{cases}$$

получаем оптимальное меню контрактов, реализующее механизм самоотбора покупателей:

право приобрести $q_1=\frac{1}{3}$ единицы товара стоит $F_1=S_{Ap_1E}=\frac{1}{9}$, при этом за каждую купленную единицу товара взимается плата $p_1=2\cdot\frac{5}{6}$;

право покупки $q_2=2$ единицы товара стоит $F_2=S_{Ap_1p_2CE}+S_{CFG}=1\cdot\frac{5}{6}$, при этом за каждую купленную единицу товара взимается плата $p_2=2$.

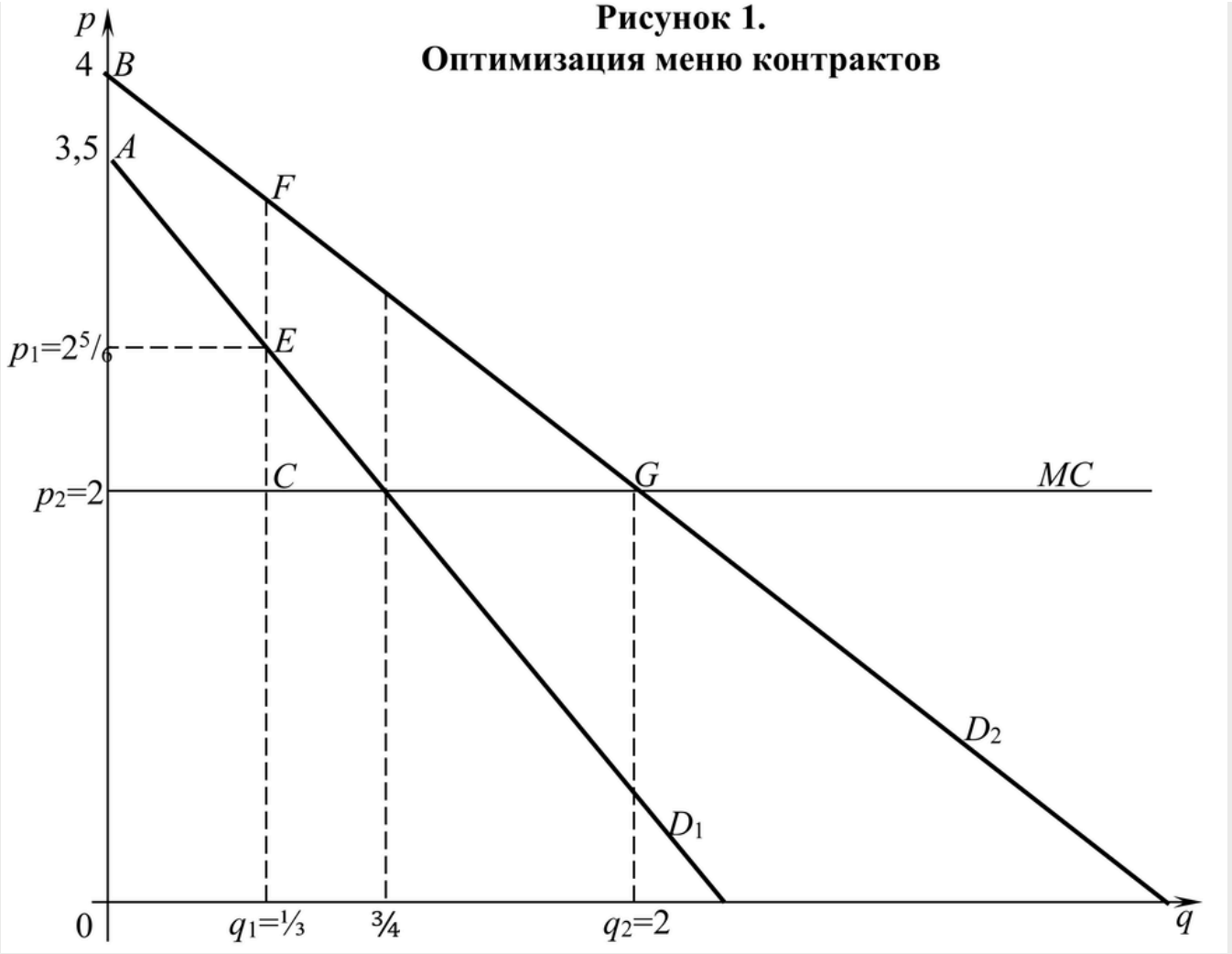


Рисунок 1. Оптимизация меню контрактов

Обратим внимание на то, что система оптимальных контрактов может оказаться вырожденной, когда монополисту будет выгоднее присвоить весь потребительский излишек покупателей с высокой готовностью платить за товар, пренебрегая спросом со стороны других, менее доходных групп потребителей.

Продемонстрируем такую ситуацию на числовом примере. Допустим, что на рынке присутствуют две одинаковые по количеству группы потребителей с индивидуальными функциями спроса $Q_1=12-P_1$ (рис. 2) и $Q_2=12-2P_2$ (рис. 3). Предельные издержки производства блага стабильны, равны средним и составляют 3 денежные единицы. Разработаем систему контрактов самоотбора, позволяющую монополисту присвоить максимальную часть потребительского излишка.

Выпишем «ограничение участия» для представителя второй группы, оценивая полезность величиной потребительского излишка:

$$U_2\left(q_2\right)-F_2=\frac{(6+(6-0,5q_2))q_2}{2}-(6-0,5q_2)q_2-F_2\geq U_2(0)=0.$$

В силу жесткости ограничения, получаем соотношение: $F_2=\frac{q_2^2}{4}$.

«Ограничение совместимости стимулов» для первой группы покупателей имеет вид:

$$U_1\left(q_1\right)-F_1=\frac{(12+(12-q_1))q_1}{2}-(12-q_1)q_1-F_1\geq U_1\left(q_2\right)-F_2=\frac{(12+(12-q_2))q_2}{2}-(6-0,5q_2)q_2-F_2.$$

Данное ограничение является активным, следовательно, с учетом «ограничения участия» для первой группы приходим к соотношению: $\frac{q_1^2}{2}-F_1=6q_2-F_2$.

Или:

$$F_1=\frac{q_1^2}{2}-6q_2+F_2=\frac{q_1^2}{2}+\frac{q_2^2}{4}-6q_2.$$

С учетом ограничений выражение для ожидаемой прибыли монополиста имеет вид:

$$EPR=\frac{1}{2}((12-q_1)q_1-3q_1+F_1)+\frac{1}{2}((6-0,5q_2)q_2-3q_2+F_2)=4,5q_1-\frac{q_1^2}{2}+\frac{F_1}{2}+1,5q_2-\frac{q_2^2}{4}+\frac{F_2}{2}=4,5q_1-\frac{q_1^2}{2}+\frac{q_1^2}{4}+\frac{q_2^2}{8}-3q_2+1,5q_2-\frac{q_2^2}{4}+\frac{q$$

Система необходимых условий максимума ожидаемой прибыли будет выглядеть так:

$$\begin{cases} \frac{\partial EPR}{\partial q_1} = 4,5 - \frac{1}{2} q_1 = 0, \\ \frac{\partial EPR}{\partial q_2} = -1,5. \end{cases}$$

Очевидно, что система оптимальных контрактов оказывается вырожденной: $q_1 = 9$, $F_1 = 40,5$, $P_1 = 3$; $q_2 = 0$, т.е. на рынке останутся только покупатели из первой группы.

Монополия присваивает весь потенциальный излишек потребителей первой группы: CS_1= =0,5(12–3)9=40,5 (рис. 2). Потенциальная выгода потребителя из второй группы могла бы составлять величину: CS_2=0,5(6–3)6=9 (рис. 3). Поскольку плата за право приобретения блага будет установлена на уровне 40,5, постольку ее не смогут заплатить потребители второй группы, она будет доступна только для первой группы покупателей. Цена за каждую единицу товара будет установлена на уровне предельных издержек и будет равняться 3.

Полученный двухставочный тариф реализует механизм самоотбора покупателей. Поскольку в данном примере функции спроса на обоих сегментах исходят из одной и той же точки на оси абсцисс, постольку механизм реализации контракта самоотбора вырождается в отказ от продажи услуги на сегменте покупателей с низкой готовностью платить и максимизации прибыли за счет присвоения всего потребительского излишка покупателей с «высоким» спросом.

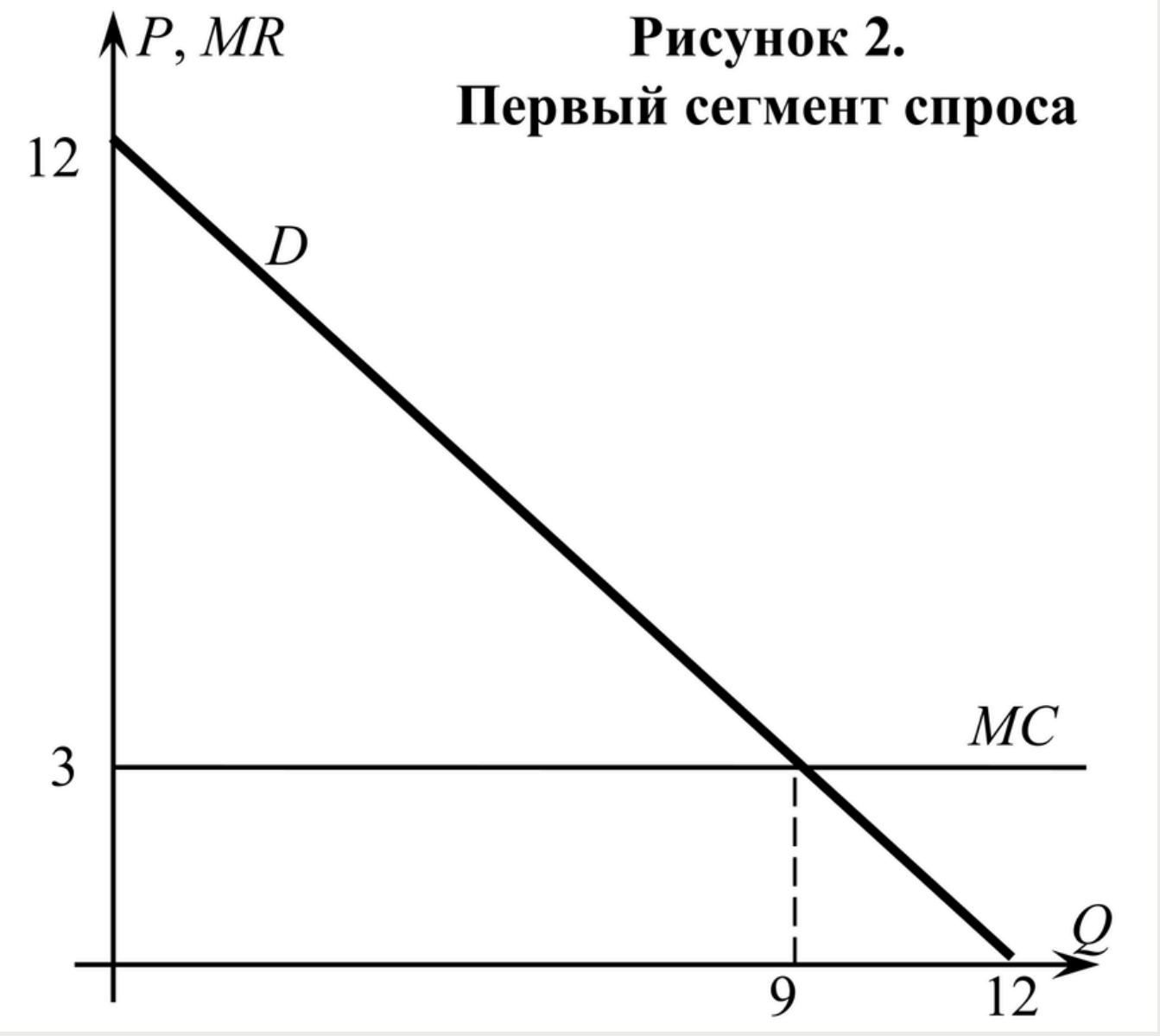


Рисунок 2. Первый сегмент спроса

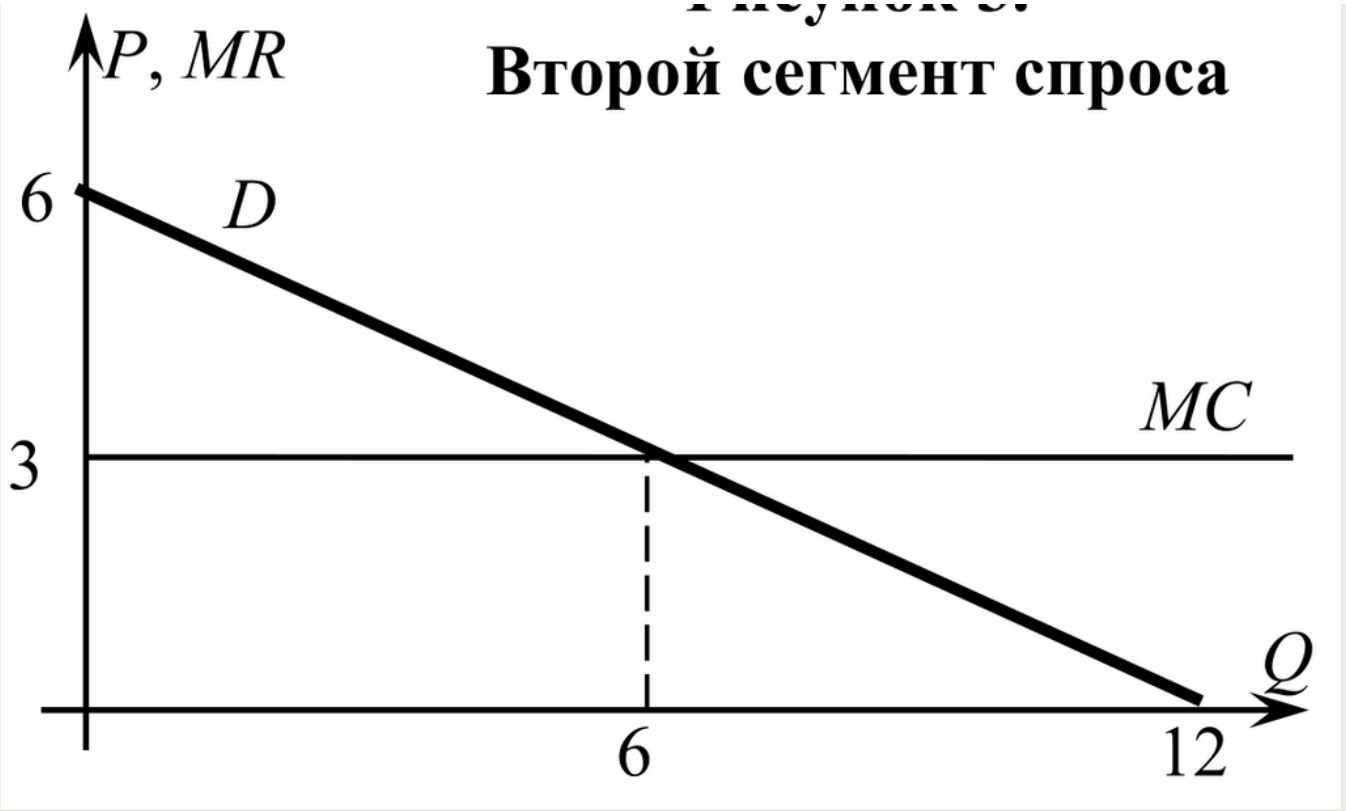


Рисунок 3. Второй сегмент спроса

7.4.3. Многочастный тариф

«Многочастный тариф – это ценовой план, предполагающий плоскую фиксированную плату и две или более ступени для цены за единицу» [3], - такое определение дает Шай.

Таким образом, многочастный тариф состоит из фиксированной платы $f^{mp} \geq 0$ и $B \geq 1$ ступеней для цены за единицу:

$$p^{mp}(q)=\begin{cases} p_1, если 0 \leq q \leq \widehat{q_1}, \\ p_2, если \widehat{q_1} \leq q \leq \widehat{q_2}, \\ \vdots \\ p_B, если \widehat{q_{B\text{-}1}} \leq q \leq \widehat{q_B}, \end{cases}$$

где $0 < q_1 < q_2 < \ldots < q_B \leq +\infty$.

Экономический смысл неравенства $q_B \leq +\infty$ состоит в следующем:

- $q_B < +\infty$ означает, что производитель практикует рационирование, ограничивая величиной q_B возможность приобретения товара;
- $q_B = +\infty$ означает, что производитель назначает B цен за единицу для всех уровней потребления, превышающих $q_{B\text{-}1}$ единиц;
- $q_B = 1$ означает, что многочастный тариф превращается в двухчастный с фиксированной платой и одной ценой за единицу.

7.4.4. Эквивалентность меню двухчастных тарифов и многочастного тарифа

С технической точки зрения меню, состоящее из множества двухчастных тарифов, может отличаться от многочастного тарифа лишь тем, как «скомбинированы» фиксированная плата и цена за единицу. При этом экономическая выгода – прибыль – от этих схем будет одинакова.

Пример эквивалентности меню из B двухчастных тарифов и (B+1)-частного тарифа показывает последовательность значений фиксированной платы [4]:

$$f_1 = f^{mp},$$
$$f_2 = f_1 + (p_1 - p_2)\widehat{q_1},$$
$$\vdots$$
$$f_i = f_{i\text{-}1} + (p_{i\text{-}1} - p_i)\widehat{q_{i\text{-}1}},$$
$$\vdots$$
$$f_B = f_{B\text{-}1} + (p_{B\text{-}1} - p_B)\widehat{q_{B\text{-}1}},$$

базирующаяся на предположении о том, что приобретение бóльшего количества компенсируется понижающейся ценой: $p_1>p_2>...>p_B$. Если последовательность нарушается, то многочастный тариф не дает нужного результата – максимизации прибыли.

Обнаруживаемая эквивалентность меню двухчастных тарифов и многочастного тарифа вызывает необходимость обоснования выбора той или иной схемы ценообразования.

Несмотря на относительно меньшую распространенность многочастного тарифа, он занимает прочное место в ряде отраслей сферы услуг. Для потребителя многочастный тариф предпочтительнее в тех случаях, когда необходимо выбрать схему оплаты до того момента, когда у него сложатся представления о фактически необходимом объеме услуг. Гибкость многочастного тарифа может затруднять планирование расходов, но позволяет экономнее оплатить неожиданное увеличение объема потребления. В свою очередь, жесткость двухчастного тарифа приводит к относительному перерасходу в случае небольшого числа покупаемых единиц в пределах установленной цены за единицу.

Для производителя дизайн многочастного тарифа может иметь сложности в плане точного определения ступеней цен за единицу, от чего зависит успех сегментации рынка.

Эквивалентность этих тарифных планов достигается, если у потребителя, выбравшего двухчастный тариф, имеется возможность без дополнительных издержек оперативно изменить его в процессе потребления.

---

1. В разделе использованы материалы: Shy O. How to Price. A Guide to Pricing Techniques and Yield Management. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. Ch. 5. P. 151-180. ↩
2. Shy O. How to Price. A Guide to Pricing Techniques and Yield Management. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. P. 169. ↩
3. Shy O. How to Price. A Guide to Pricing Techniques and Yield Management. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. P. 172. ↩
4. Ibid. P. 175. ↩

7.5. Ценообразование с учетом пиковой загрузки и многопериодная ценовая дискриминация

7.5.1. Ценообразование с учетом пиковой загрузки

Ценообразование с учетом пиковой загрузки практикуется в случаях, когда в силу сезонных или иных причин наблюдаются пики в колебаниях спроса. С подобными явлениями сталкиваются, к примеру, энергетические компании, дома отдыха и отели в горах и у моря, где в зависимости от климата пики спроса случаются в зимний или летний период. Цель учета пиковой загрузки в походе к ценообразованию состоит в извлечении прибыли, большей по сравнению с политикой единой цены.

Отличие ценообразования с учетом пиковой загрузки от ценовой дискриминации 3-й степени состоит в том, что обладающая монопольной властью фирма решает две задачи максимизации прибыли отдельно: $MC=MR_1$ и $MC=MR_2$ для периодов пика и спада спроса (рис. 7.27). В результате прибыль фирмы оказывается выше по сравнению с политикой единой цены. При этом достигаются и более общественно-эффективные объемы производства: суммарные излишки производителя и потребителей ($PS+CS$) больше.

Если политику ценообразования с учетом пиковой загрузки проводит социальный объект (к примеру, санаторий на морском или горнолыжном курорте), то регулируемые цены на уровне конкурентных (P_1^{per} и P_2^{per}) позволяют максимизировать суммарные излишки рыночных агентов в обоих периодах или в одном из них.

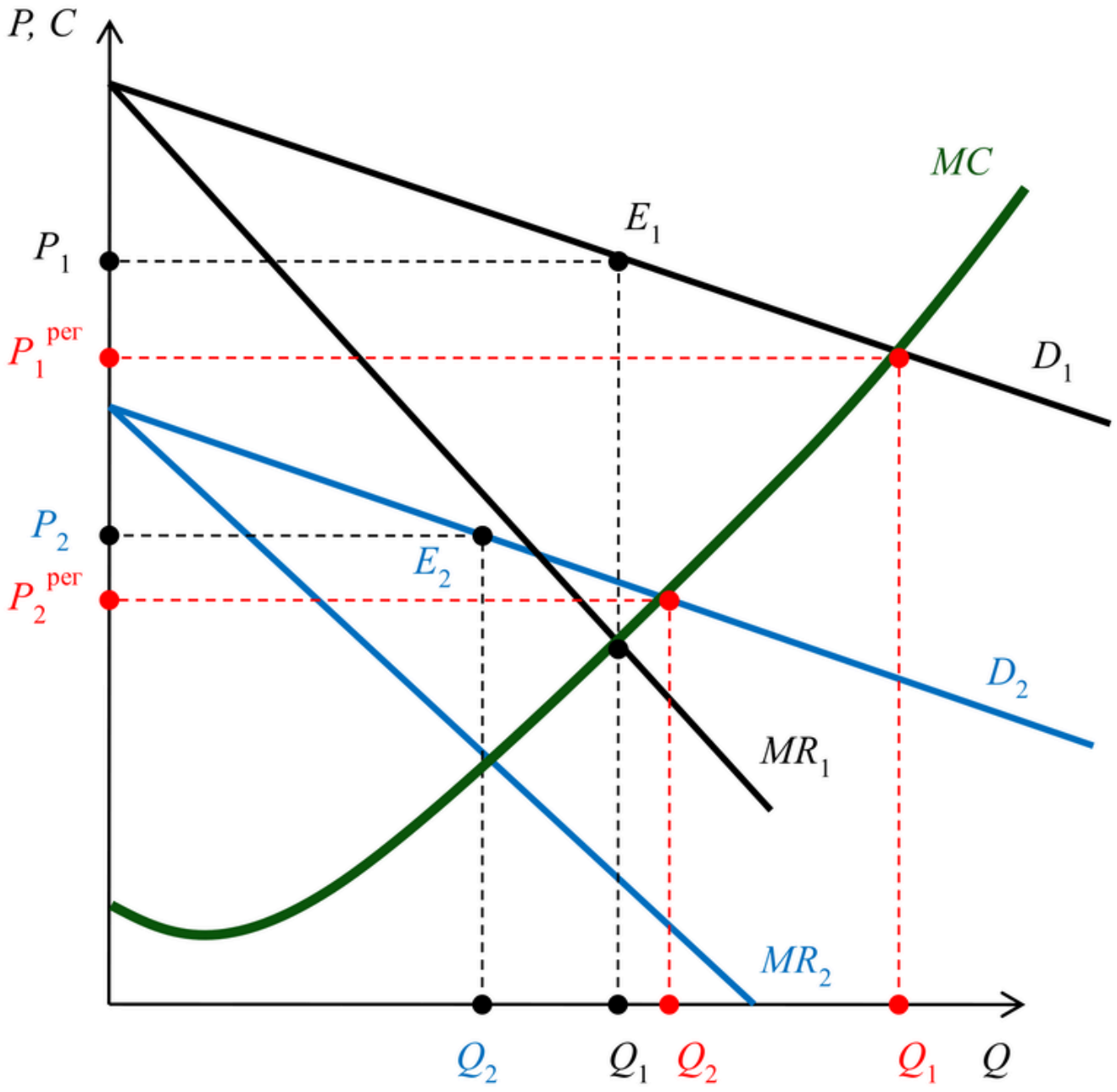


Рисунок 7.27. Ценообразование с учетом пиковой загрузки

7.5.2. Многопериодная ценовая дискриминация

Многопериодная ценовая дискриминация – это установление разных цен в разные периоды в соответствии с разными функциями спроса.

К примеру:

D_1 – спрос первого периода (на технические новинки, первые просмотры кинофильма, издание книги в жестком переплете и т.п.) предъявляет небольшая группа покупателей;

D_2 – спрос второго периода (на уже знакомую технику, кинофильмы в широком показе, издание книги в мягком переплете и т.п.) предъявляет большая группа покупателей.

Тогда, как и в случае ценообразования с учетом пиковой загрузки, обладающая монопольной властью фирма решает две задачи максимизации прибыли отдельно: $MC=MR_1$ и $MC=MR_2$ для первого и второго периодов (рис. 7.28). В результате прибыль фирмы оказывается выше по сравнению с политикой единой цены.

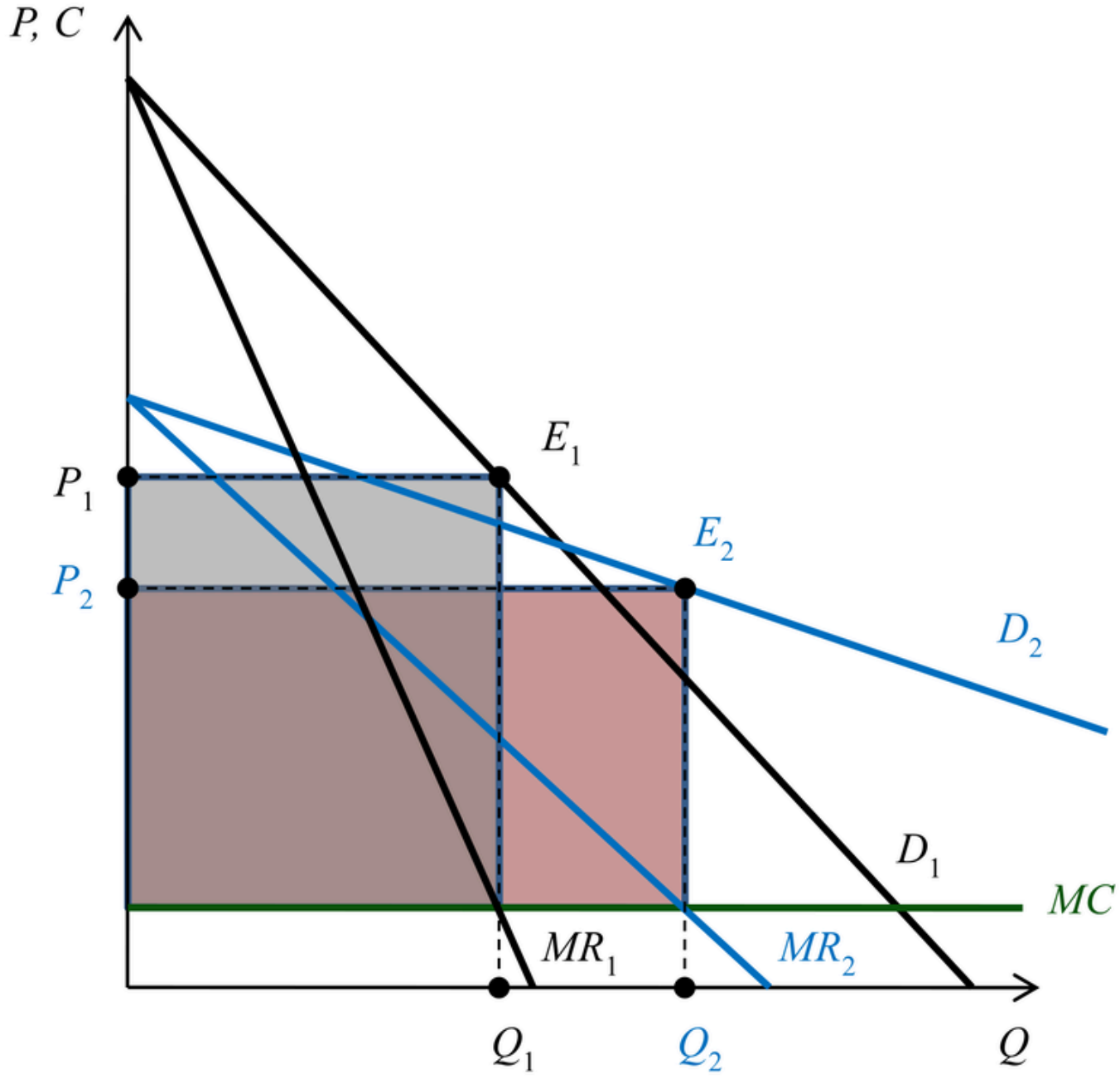


Рисунок 7.28. Многопериодная ценовая дискриминация

7.5.3. Динамическое ценообразование

Динамическое ценообразование (ДЦО) нацелено на установление цены для каждого покупателя на уровне его готовности платить. Оно представляет собой систему изменяющихся цен, с помощью которой компании могут увеличить прибыль или обеспечить больший объем продаж. При этом разные цены на один и тот же товар или услугу для разных потребителей устанавливаются по причинам, не связанным с себестоимостью продукции. Распространению стратегии динамического персонализированного ценообразования способствовало развитие технологий Big Data, которые позволили компаниям в режиме реального времени анализировать множество факторов, таких как лояльность клиентов, предпочтения потребителей, история покупок на сайте и т.д. На основе информации, полученной в результате этого анализа, происходят оперативные корректировки цен. Современные технологии позволяют компаниям, занимающимся электронной коммерцией, изменять цены с минимумом затрат времени, усилий и денег – практически незначимыми становятся «издержки меню», связанные с созданием новых каталогов, заменой ценников на товарах и т.п.

БОЛЬШАЯ РОССИЙСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ	Заглянем в Большую российскую энциклопедию: Издержки меню

ДЦО принято также называть пиковым ценообразованием, интеллектуальным ценообразованием, ценообразованием в реальном времени, ценообразованием на базе спроса и алгоритмическим ценообразованием. Выделяют следующие виды ДЦО:

- Расчет (оптимизация) индивидуальных цен для разных клиентских сегментов, например, для розничных, оптовых, мелкооптовых, крупнооптовых покупателей, для клиентов с картой лояльности и без неё, для покупателей с картами лояльности разных уровней, для физических и юридических лиц.
- Расчет цен на основе цен компаний-конкурентов. При таком подходе цена изменяется до определенной позиции при изменении цен конкурентами.
- Расчет цен в зависимости от региона продажи. При этом учитывается наличие и количество конкурентов в регионе, покупательная способность и доходы населения и т.д.
- Расчет цен по товарам-индикаторам (*KVI – Key Value Indicator*), формирующим ценовой имидж компании. Низкие цены и низкую рентабельность таких товаров компания, как правило, компенсирует за счет остальных товаров, которые продаются по ценам, обеспечивающим прибыль.
- Расчет цен на основе спроса. Такое ценообразование может осуществляться с помощью алгоритмов машинного обучения, анализирующих факторы спроса, конкуренции, внутренние показатели компании и определяющих цену, которую покупатели готовы заплатить, чтобы были достигнуты необходимые показатели прибыльности или продаж.
- Расчет цен на основе оборачиваемости товаров. В этом случае динамическое ценообразование может способствовать быстрой распродаже низколиквидных товарных остатков.
- Расчет цены по товарным остаткам. Такое ценообразование важно для товаров, которые должны быть постоянно в наличии, или для высоковостребованных товаров, у которых могут быть перебои в поставках. При формировании цены подобного товара принимаются во внимание его запасы как на складе компании, так и на складах партнеров, конкурентов, а также даты поступления товара, закупочные цены.
- Расчет цен в зависимости от временного периода. При использовании этого способа ценообразования необходимо определить отрезок времени, в течение которого рост или уменьшение цены вызовет увеличение продаж или прибыли компании. Это могут быть дни проведения различных акций («черные пятницы», ночные цены, цены выходного дня и т.п.).

Инструменты динамического ценообразования уже давно широко используются во многих отраслях, например, в авиаперевозках и гостиничном бизнесе. При этом цена на услугу изменяется в зависимости от внешних конъюнктурных факторов. Так, цена билетов на самолет возрастает в рождественские праздники и летний сезон, цена на отели вблизи горнолыжных курортов выше в период с декабря по март, чем с апреля по ноябрь.

Наблюдательный микроэкономист: Динамическое ценообразование

В России практика динамического ценообразования (ДЦО) внедрена в железнодорожных перевозках. Например, она охватывает 95% пассажирских перевозок, осуществляемых ОАО «РЖД» (в вагонах купе, люкс, спальных вагонах повышенной комфортности, вагонах с местами для сидения скоростных поездов). Главный принцип функционирования системы: чем выше спрос и меньше мест, тем выше цена на билеты. При этом цена билета зависит не только от расстояния и популярности маршрута, но и от таких факторов, как количество и расположение мест в вагоне, категория, сезон, день недели, время отправления и прибытия поезда, заблаговременность покупки билета.

Для каждого направления, поезда и участка маршрута следования применяется различная ценовая политика. Как правило, чем меньше дней осталось до отправления поезда, тем выше цена на билет. В частности, билеты по самым выгодным тарифам на Октябрьской железной дороге можно приобрести самое позднее за 30 суток до отправления поезда (рис. 1).

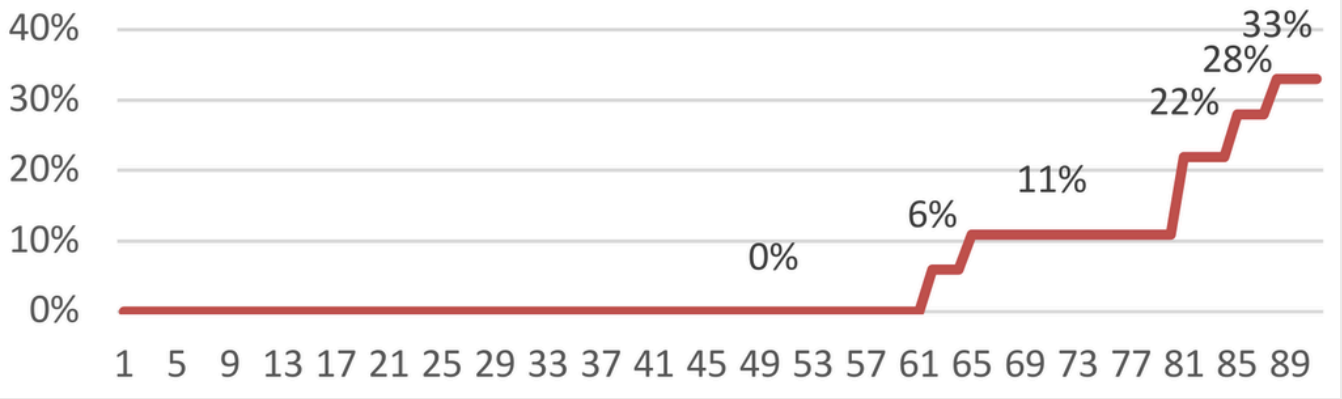


Рисунок 1. Наценка на билет Москва - Санкт-Петербург в зависимости от количества дней от его покупки до отправления поезда

Цена будет ниже на верхние места в купейном вагоне, пользующиеся меньшим спросом, и на поезд, отправляющийся в 4 или в 5 утра, а также в низкий сезон (например, после новогодних каникул). Например, самый выгодный месяц для путешествия в/из Санкт-Петербурга – февраль, а самый дорогой – июнь (рис. 2).

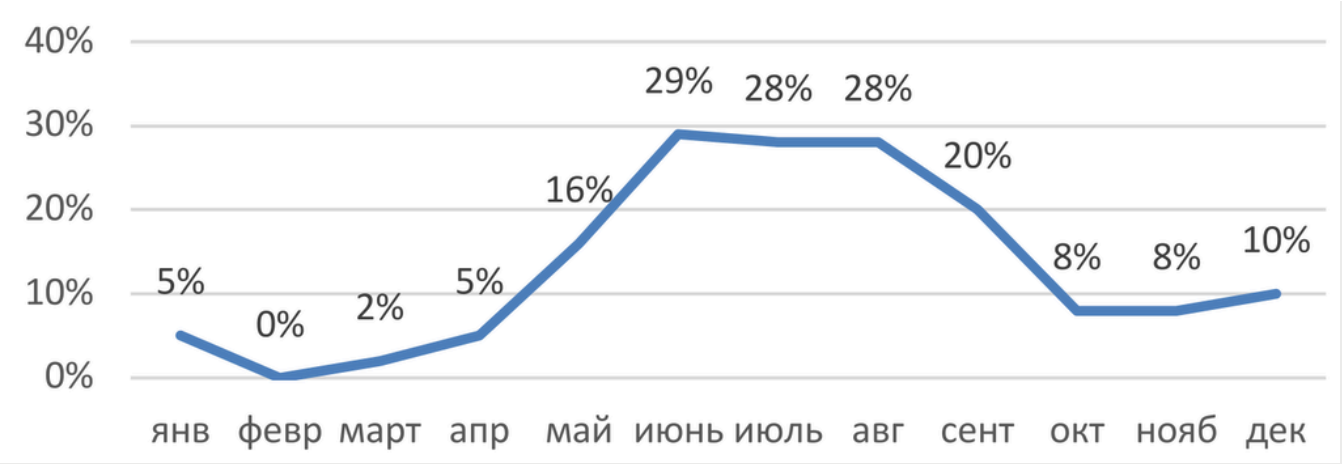


Рисунок 2. Сезонная наценка на билет Санкт-Петербург-Москва

Напротив, весьма ограничено количество билетов по низким тарифам на поезда в пятницу вечером туда и в воскресенье вечером обратно, так как многие отправляются в путешествие на выходных. В частности, с точки зрения экономии на стоимости билета, лучший день для поездки из Москвы в Санкт-Петербург – понедельник, а самый дорогой день – пятница (рис. 3). При этом лучший день для поездки из Санкт-Петербурга в Москву– вторник, а самый дорогой – воскресенье (рис. 4).

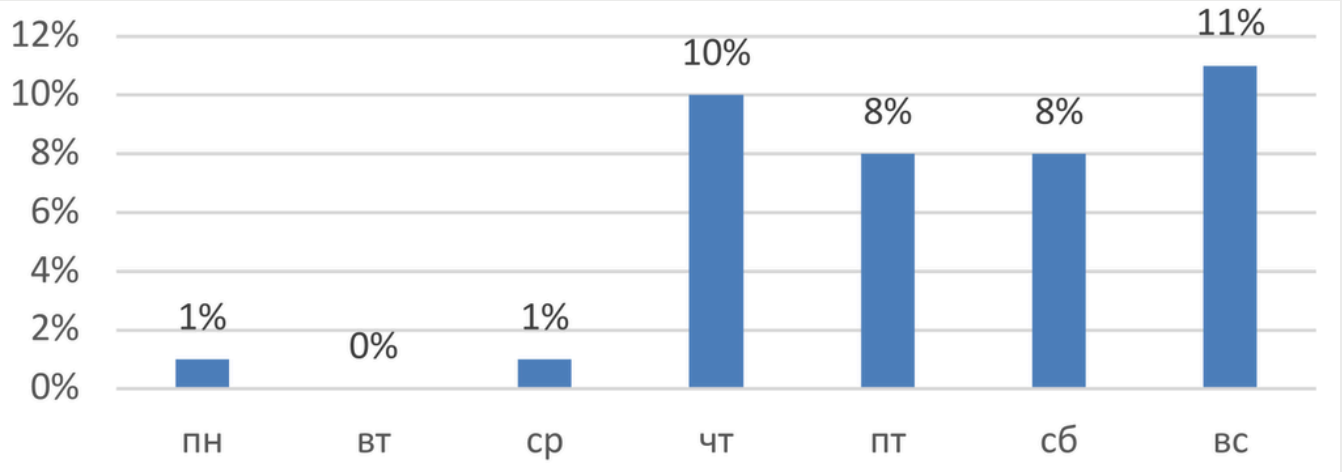


Рисунок 3. Наценка на билет на поезд Москва - Санкт-Петербург в зависимости от дня недели

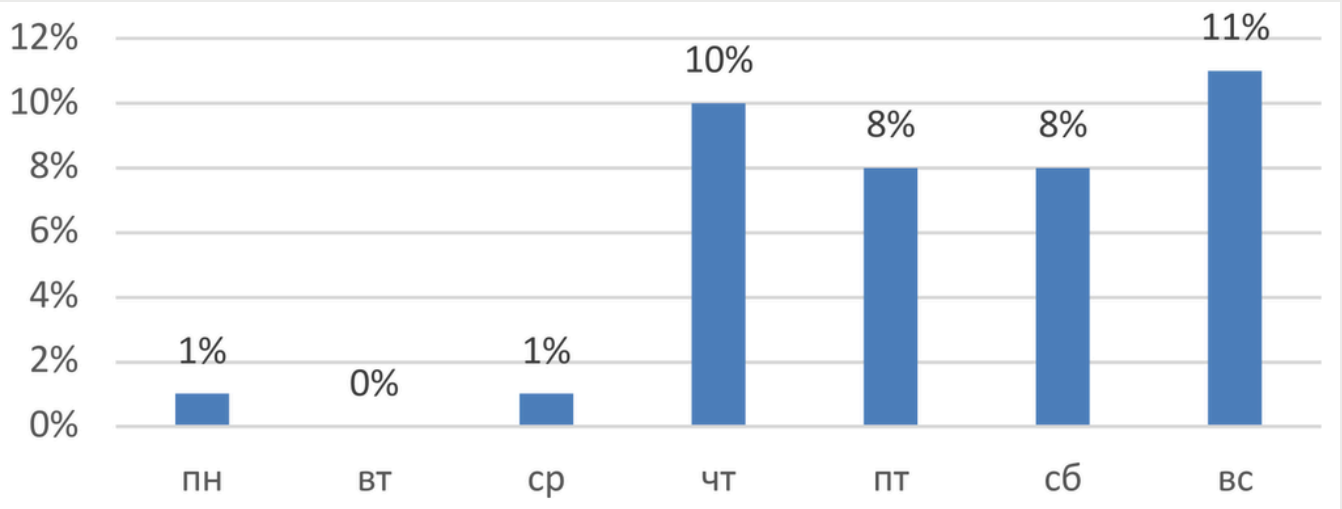


Рисунок 4. Наценка на билет на поезд Санкт-Петербург - Москва в зависимости от дня недели

$$(Q_m\text{-}Q_m^0) > (Q_c\text{-}Q_c^0)$$

Система ДЦО широко применяется для билетных программ в спортивном бизнесе. При этом, как и в других областях, ДЦО касается не только фактора времени, но подразумевает применение многофакторной модели.

Существует несколько основных способов установления цены на билеты на те или иные спортивные мероприятия. Из них можно выделить следующие: метод установления дифференцированных цен, метод гибких цен на сезонные абонементы и метод ДЦО как таковой.

Метод дифференцированных цен тесно связан с концепцией ценовой дискриминации, при которой за одну и ту же услугу взимается разная цена, в то время как затраты остаются практически неизменными. Но главным недостатком данного

метода является то, что цены в каждой из категорий (место на стадионе, уровень соперника) определяются в начале сезона и не могут быть изменены в зависимости от новых возникающих факторов.

Метод гибких цен позволяет болельщикам самостоятельно выбирать количество билетов и те матчи, на которые они будут их приобретать. В зависимости от набора игр скидка по сравнению с билетами на отдельные матчи различается (чем больше матчей в абонементе, тем больше размер скидки). С точки зрения клуба данный способ позволяет добиться максимальной посещаемости и корректировать ценовую политику от матча к матчу в зависимости от популярности игр.

ДЦО отличается от метода ценовой дифференциации тем, что стоимость билетов на одно событие изменяется в течение времени реализации билетов. Этим ДЦО напоминает вторичный рынок, но принципиальным отличием является то, что данную стратегию используют не перекупщики, а организаторы мероприятий.

При системе ДЦО цена может не только увеличиваться, но и уменьшаться под влиянием различных факторов. Установление низких цен на менее интересные матчи, которые не пользуются большой популярностью у болельщиков, обосновано с точки зрения заполняемости стадиона. Увеличение числа зрителей на трибунах позитивно сказывается на многих экономических показателях, таких как увеличение спонсорских контрактов, телевизионных рейтингов, лояльности болельщиков, доходов от продажи билетов, атрибутики, продуктов питания и фирменной продукции. Систему ДЦО можно охарактеризовать как «живую». Она позволяет в короткие сроки манипулировать ценами на билеты в зависимости от текущих результатов команд и вследствие этого устанавливать справедливую цену, не теряя ни болельщиков, ни прибыли.

В частности, в билетных программах футбольных клубов Российской премьер-лиги (РПЛ) могут использоваться, например, алгоритмы ДЦО, описанные в схемах 1-5. К факторам повышения или понижения цен при построении алгоритмов ДЦО, при этом относятся:

Соперники каждой команды здесь ранжируются на четыре категории. В категорию 1 входят команды топ-уровня Лиги чемпионов (ЛЧ) УЕФА; в категорию 2 – команды более низкого уровня, участвующие в ЛЧ УЕФА; в категорию 3 – топ-клубы РПЛ; в категорию 4 – команды более низкого уровня РПЛ.



Схема 1. Алгоритм подстройки базовой цены до начала продаж в зависимости от времени и категории матча



Схема 2. Алгоритм корректировки текущей цены перед туром (1-10 туры)



Схема 3. Алгоритм корректировки текущей цены перед туром (11-24 туры)



Схема 4. Алгоритм корректировки текущей цены перед туром (25-30 туры)

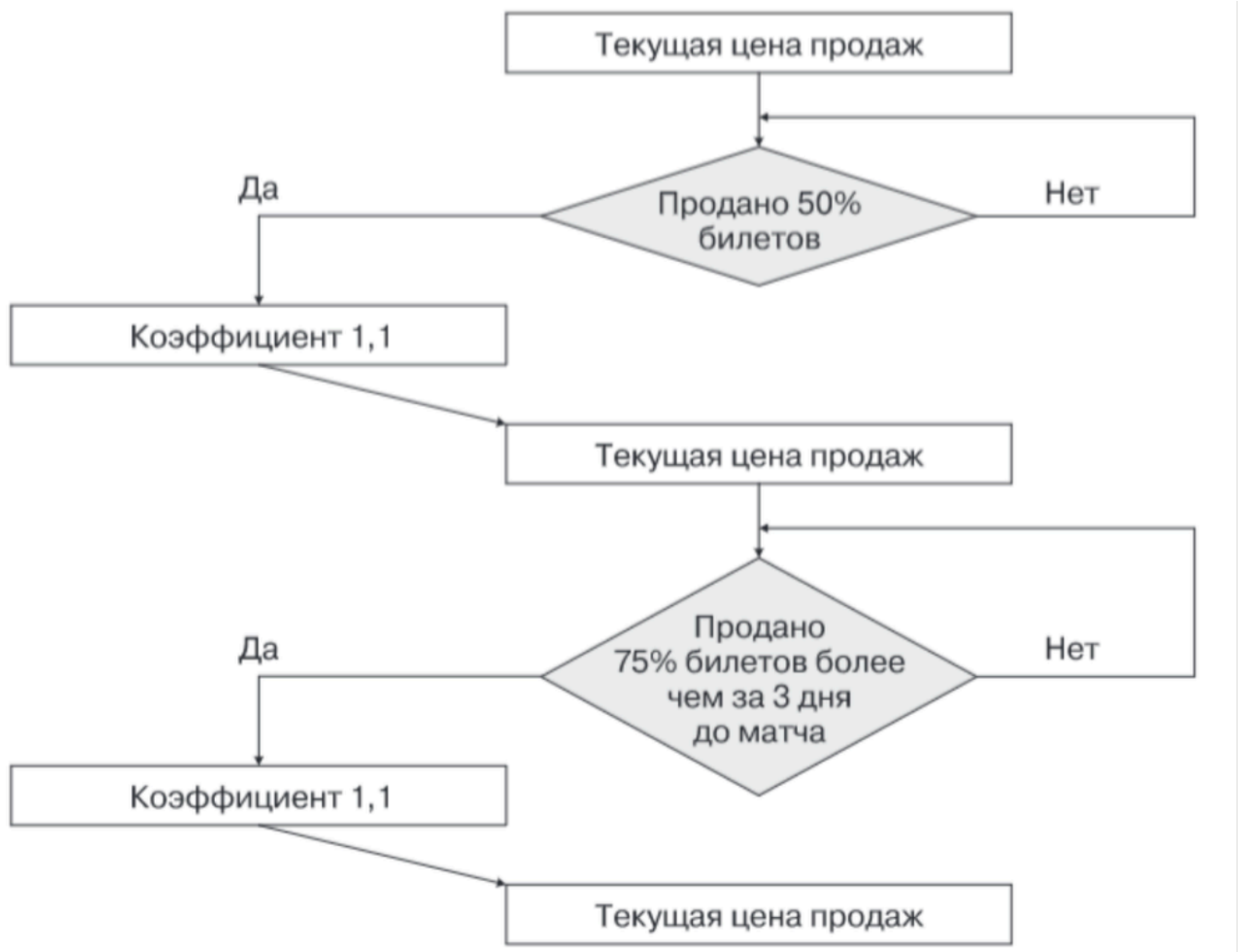


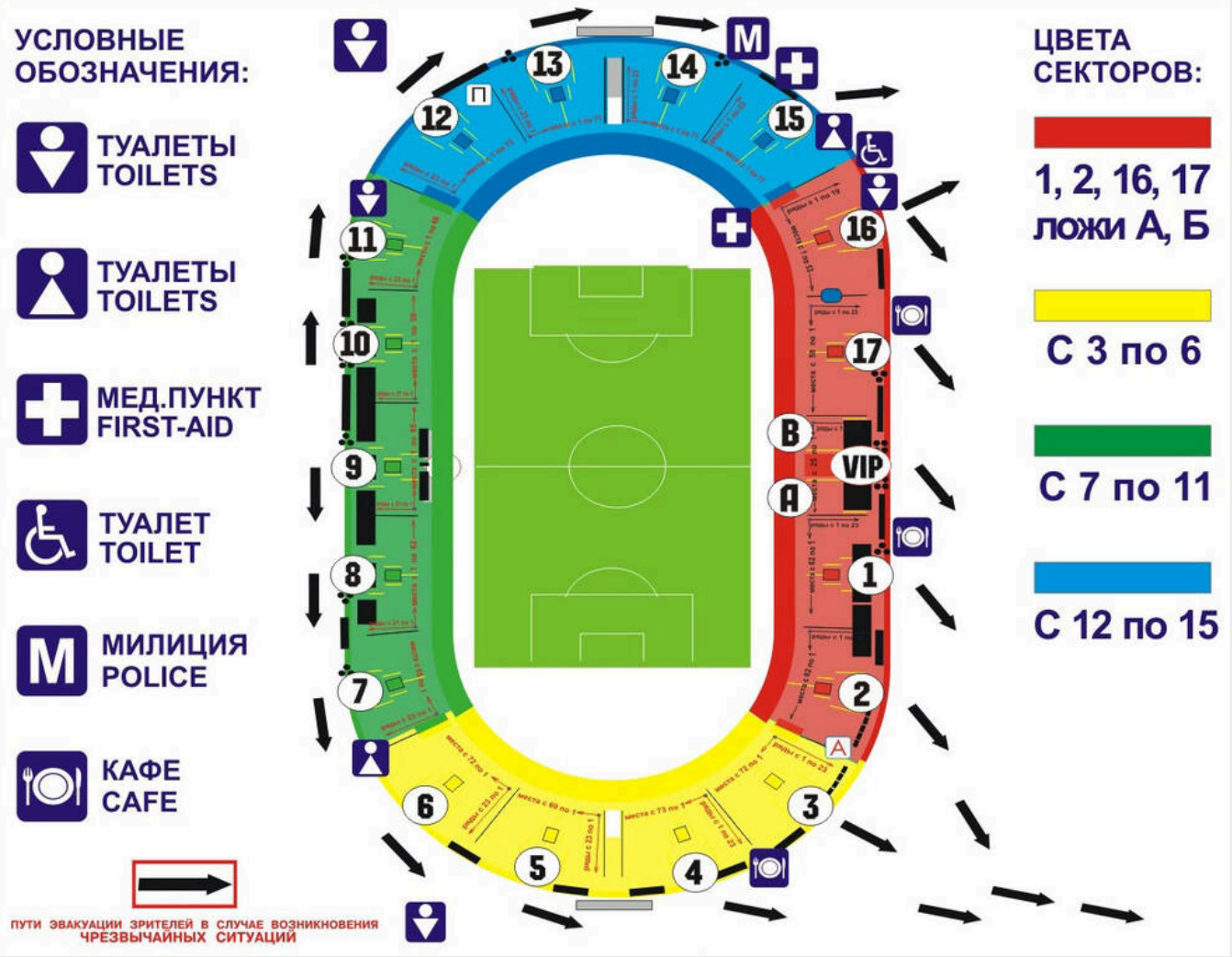
Схема 5. Алгоритм корректировки текущей цены с учетом фактического спроса в течение всего времени продаж

Справедливость и обоснованность цены являются важными характерными особенностями ДЦО. В частности, минимально допустимая цена разового билета не должна оказаться ниже стоимости посещения матча для владельцев абонементов. В противном случае даже самые лояльные болельщики могут почувствовать несправедливое к себе отношение. Фактически здесь подразумевается действие ограничения по сопоставимости стимулов.

Динамическое ценообразование является эффективной стратегией для определения обоснованной цены билета в каждый момент времени и может поспособствовать увеличению объема билетных продаж.

Источники: Официальный сайт ОАО «РЖД», URL: https://www.rzd.ru/api/media/resources/1572962. Иванов П.В., Солнцев И.В. Динамическое ценообразование билетных программ спортивного мероприятия: пример ЗАО «ФК Зенит» // Российский журнал менеджмента. Т. 12, № 4, 2014. С.79–98.

Кейс: Ценообразование на рынке билетных программ



Стадион «Петровский»
Источник рисунка: https://wolfhound2008.narod.ru/fanat.html

В качестве примера динамического ценообразования билетных программ рассмотрим ситуацию, связанную с продажей билетов на домашние матчи футбольного клуба (ФК) «Зенит» (г. Санкт-Петербург) в начале сезона 2013/2014 гг.

ФК «Зенит» – один из самых успешных клубов в истории российского футбола: чемпион СССР 1984 г., семикратный чемпион России, обладатель Кубка СССР 1944 г., четырёхкратный обладатель Кубка России, обладатель Суперкубка СССР 1985 г., шестикратный обладатель Суперкубка России, обладатель Кубка УЕФА сезона 2007/08 и Суперкубка УЕФА 2008 г. С 10 августа 1994 г. по 8 апреля 2017 г. домашней ареной «Зенита» являлся стадион «Петровский» вместимостью 21570 зрителей [1].

В табл. 1 приведена информация об актуальных ценах на домашние матчи ФК «Зенит» сезона 2013/2014 гг. В категорию ЧР I входят 6 матчей клуба «Зенит» в рамках чемпионата России (ЧР) по футболу с топ-клубами Российской премьер лиги (РПЛ) (среди них перед началом сезона были ФК «Спартак», «ЦСКА», «Динамо», «Локомотив», «Рубин» и «Анжи»); в ЧР II – 9 матчей РПЛ более низкого уровня; в ЛЧ I – 2 матча с командами топ-уровня Лиги чемпионов (ЛЧ) УЕФА [2]; в ЛЧ II – 3 матча с командами ЛЧ УЕФА более низкого уровня [3]. Абонемент позволяет посетить все 20 матчей обоих турниров. Цены устанавливались перед началом чемпионата России по футболу и оставались неизменными в течение всего сезона 2013/2014 гг.

Рассмотрим матч 5-го тура РПЛ между ФК «Зенит» и «Анжи» (г. Махачкала), который состоялся в субботу, 17 августа 2013 г. в 18:15 на стадионе «Петровский».

Летом 2013 г. (в начале игрового сезона) ФК «Анжи» воспринимался как один из главных фаворитов РПЛ.

Билеты на рассматриваемую игру поступили в продажу за неделю до 4 тура, т.е. 28 июля. По итогам 3-го тура и «Зенит», и «Анжи» располагались в середине турнирной таблицы. По итогам 4 тура (после 3 августа 2013 г.) ФК «Анжи» занимал 13 строчку в таблице, т.е. опустился в «зону вылета», а «Зенит» поднялся в пятерку лидеров.

Между 4-м и 5-м туром в чемпионате России был перерыв, и у болельщиков было достаточно времени, чтобы приобрести билеты на футбол. К 7 августа 2013 года было приобретено более 50% всех билетов на матч.

7 августа руководство ФК «Анжи» анонсировало смену курса развития клуба и продажу ведущих игроков, вследствие чего стало понятно, что состав махачкалинской команды в Санкт-Петербурге будет отнюдь не «звездным».

На матче «Зенит» – «Анжи» было заполнено 65% чаши стадиона «Петровский».

Таблица 1. Актуальные (фиксированные) цены разовых билетов и стоимость абонементов на домашние матчи ФК «Зенит» сезона 2013/2014 гг.

Категория места	Сектор (ряд)	Цена, руб., по категории матча				
		ЧР I	ЧР II	ЛЧ II	ЛЧ I	Абонемент
VIP I	1, 17 (14-23)	2 200	1 600	2 900	6 600	44 300
VIP II	1, 17 (4-13)	2 000	1 400	2 600	6 000	39 800
I	8B, 9, 10A (1-3)	1 500	1 100	2 000	4 500	24 900
	8B, 9, 10A (4-23)	1 800	1 300	2 400	5 400	36 300
II	8A, 10B (1-3)	1 300	1 000	1 700	3 900	23 300
	1, 17 (1-3)	1 300	1 000	1 700	3 900	23 300
	8A, 10B (4-23)	1 700	1 200	2 300	5 100	27 900
	1, 17 (4-23)	1 700	1 200	2 300	5 100	27 900
III	2 (1-3)	1 100	800	1 500	3 300	16 600
	7B (1-3)	1 100	800	1 500	3 300	13 500
	11 (1-3)	1 100	800	1 500	3 300	13 500
	16 (1-3)	1 100	800	1 500	3 300	15 900
	2 (4-23)	1 300	1 000	1 700	3 900	16 600
	7B (4-23)	1 300	1 000	1 700	3 900	15 900
	11 (4-23)	1 300	1 000	1 700	3 900	15 900
	16 (4-23)	1 300	1 000	1 700	3 900	15 900
Семейный сектор	2 (10-17)	650	500	850	1 950	16 600
IV	3 (1-3)	800	600	1 100	2 400	9 900
	7A (1-3)	800	600	1 100	2 400	9 900
	3 (4-23)	1 000	700	1 300	3 000	11 700
	7A (4-23)	1 000	700	1 300	3 000	11 700
V	4, 5 (1-3)	600	500	800	1 800	9 900
	4, 5 (4-23)	800	600	1 100	2 400	11 700

ФК «Зенит» предполагает использовать принципы динамического ценообразования в рамках своей билетной программы. Соответствующие алгоритмы изменения цен на матчи билетной программы футбольного клуба «Зенит» приводятся на схемах 1-5 вставки ***Динамическое ценообразование (гиперссылка)****. Соперники команды здесь ранжируются на четыре категории. В категорию 1 входят команды топ-уровня Лиги чемпионов УЕФА; в категорию 2 – команды более низкого уровня, участвующими в ЛЧ УЕФА; в категорию 3 – топ-клубы РПЛ; в категорию 4 – команды более низкого уровня РПЛ.*

Задание

1. *Исходя из данных табл. 1 рассчитайте повышающие коэффициенты (K1, K2, K3) для категорий матчей ЛЧ1, ЛЧ2 и ЧР1 по отношению к категории ЧР2 на билеты для 22-го ряда 9-го сектора.*
2. *Используя повышающие коэффициенты, полученные в предыдущем пункте задания, определите минимально допустимую стоимость билета категории ЧР2 на матч «Зенит» – «Анжи» для 22-го ряда 9-го сектора, заложенную в стоимости соответствующего абонемента.*
3. *На основе алгоритмов динамического ценообразования, отраженных в билетной программе клуба «Зенит», применительно к данному матчу для 22-го ряда 9-го сектора рассчитайте какой была бы:*
    a. *базовая цена билетов до начала продаж (до 28 июля 2013 г.);*
    b. *текущая цена билетов на 28 июля 2013 г.;*
    c. *текущая цена билетов на 7 августа 2013 г.;*
    d. *текущая цена билетов на 8–14 августа 2013 г.;*
    e. *текущая цена билетов на 15–17 августа 2013 г.*
4. *Подумайте, какие еще факторы, помимо используемых в приведенной выше билетной программе, могли бы повлиять на цены билетов и найти применение в методиках ДЦО билетных программ (можно использовать любую доп. информацию). Какие изменения в алгоритм билетной программы следовало бы тогда внести?*



Научная статья

Поскольку аудитория театра неоднородна с точки зрения цели посещения, способности воспринимать качество постановок, готовности платить, сегментация потребителей Пермского театра оперы и балета (г. Пермь), позволяет использовать разные маркетинговые инструменты для увеличения доходов театра с помощью политики ценовой дискриминации.

Подробнее об этом можно узнать из статьи: Ozhegov E.M., Ozhegova A. Segmentation of Theatre Audiences: A Latent Class Approach for Combined Data // Basic Research Program Working Papers, Series: Economics, WP BRP 198/EC/2018. *https://wp.hse.ru/data/2018/08/29/1154544049/198EC2018.pdf*

1. С 22 апреля 2017 г. домашней ареной «Зенита» является стадион «Газпром Арена». ↩

2. Это были ФК «Порту» и «Атлетико». ↩

3. В данном сезоне к ним относились ФК «Аустрия», «Пасуш де Феррейра» и «Нордшелланд». ↩

7.6. Социальные воздействия на цены



Наблюдательный микроэкономист: Гэри Беккер о социальных воздействиях на ресторанные цены



Источник рисунка: личный фотоархив авторов учебника

«Популярный рыбный ресторан в Паоло-Альто (Калифорния) не принимает предварительных заказов на столик, и каждый вечер в нем выстраиваются длинные очереди посетителей, ожидающих, когда освободиться место. Почти напротив него, на

противоположной стороне улицы, находится другой рыбный ресторан с аналогичным набором блюд, чуть более высокими ценами и примерно таким же качеством обслуживания. И тем не менее большую часть времени много столиков в этом ресторане пустует. Почему же популярный ресторан не повышает цены, что уменьшило бы очереди и увеличило бы прибыль?», - так начинается знаменитая статья Гэри Беккера «Несколько замечаний о ресторанных ценах и другие примеры социальных воздействий на цены» (1991).

Аналогичные «кейсы», относящиеся к бродвейским театрам, бейсбольным матчам и даже продажам книг-бестселлеров, были предложены Г. Беккером студентам Колумбийского университета. Ключ к пониманию всех этих и множества похожих ситуаций состоит в проявлении социального воздействия на цены, когда индивидуальный потребительский спрос на некоторое благо зависит от спроса других потребителей на это же благо.

Источник: Becker G.S. A Note on Restaurant Pricing and Other Examples of Social Influences on Price. Journal of Political Economy, 1991, Vol. 99, pp. 1109-1116 [На русском языке: Беккер Г.С. Несколько замечаний о ресторанных ценах и другие примеры социальных воздействий на цены. // Беккер Г.С. Человеческое поведение: экономический подход. Избранные труды по экономической теории. – М.: ГУ ВШЭ, 2003. С. 271-280. (Приведенная цитата - С. 271)].

Вопрос о социальных воздействиях на цены рассмотрим по статье Гэри Беккера «Несколько замечаний о ресторанных ценах и другие примеры социальных воздействий на цены» (1991) [1].

Если спрос на благо свободен от социальных воздействий, то максимизирующая прибыль фирма, обладающая определенной степенью монопольной власти, при нулевых предельных издержках, следуя правилу *MR=MC*, произведет его в объеме *Q** и продаст по цене *p** (рис. 7.29). Однако взаимодействие индивидов (под влиянием моды, наличия среди потребителей популярных людей и т.п.), начиная с некоторого момента, приводит к появлению положительной зависимости индивидуального потребительского спроса d_i от совокупного рыночного спроса *D*, что отражает функциональное уравнение:

$$D = \sum d_i(p, D) = F(p, D(p)),$$

где:

$$F_p = \frac{\partial F}{\partial p} < 0,$$

$F_d = \frac{\partial F}{\partial p} < 0$ - условие, которое приводит к положительной зависимости между ценой и величиной рыночного спроса.

Продифференцировав функциональное уравнение по *p*, получим:

$$\frac{\partial D}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial D}\frac{dD}{dp}.$$

Откуда:

$$\frac{dD}{dp} = \frac{F_p}{1-F_d},$$

или:

$$\frac{dp}{dD} = \frac{1-F_d}{F_p}.$$

Если, как утверждает Г. Беккер, социальное воздействие достаточно сильно, т.е. F_d>1, повышение величины совокупного рыночного спроса будет приводить к существенному росту цены спроса. Если F_d>1 при $D<Q_2$, F_d=1 при $D=Q_2$, и F_d<1 при $D>Q_2$, цена спроса будет возрастать вплоть до пика в точке *B*, где возможно установление локального равновесия, приводящего к получению большей прибыли при объеме продаж Q_S и цене p_e, чем в случае равновесия в точке *E**(*Q**,*p**) .

В итоге возможны два локальных равновесия, максимизирующих прибыль: первое (*E**) – при избыточных мощностях (Q_S - *Q**) и низкой цене (*p**), второе (*B*) – при избыточном спросе ($Q_2 – Q_S$) и высокой цене (p_e). «Разница между этими равновесиями соответствует разнице между борющимися за выживание ресторанами (или театрами) с пустующими столиками (или местами) и их крайне успешными конкурентами из категории популярных, которые уводят потенциальных потребителей» [2].

Очевидно, что второй тип локального равновесия предпочтительнее. Чтобы его достичь, фирмы предпринимают действия, направленные на усиление социального взаимодействия на рынках их продукции через рекламу, паблисити, социальные сети и т.п. Однако, если равновесие в точке *E** является локально устойчивым, то равновесие в точке *B* «неустойчиво к шокам, снижающим спрос, и ни то, ни другое не устойчиво по отношению к сильным изменениям» [3]. Понимая это, фирмы не увеличивают предложение, ибо совокупный рыночный спрос зависит также и от величины разрыва между величиной спроса и величиной предложения:

$$D = \sum d_i(p, D, \tfrac{D}{S}) = F(p, D, \tfrac{D}{S}) \text{ где } F_d = \frac{\partial F}{\partial(\frac{D}{S})} > 0.$$

Как отмечает Г. Беккер, «включение разрыва между спросом и предложением в функцию спроса для объяснения того, почему не происходит увеличение предложения, представляет собой введение *ad hoc* некоего специального «блага» с целью решения задачи» [4]. По этой причине не стоит преувеличивать значение этого разрыва, но, тем не менее, роль его важна.

Утрата социального воздействия (как это происходит с книгами, переставшими быть бестселлерами, но от этого не дешевеющими) может привести к смещению локального равновесия в точку *A*, характеризующуюся снижением продаж до Q_1, но сохранением цены на уровне p_e.

В современной микроэкономике включение в анализ социальных и поведенческих аспектов применяется все шире и позволяет получить новые, оригинальные выводы.

---

1. Беккер Г.С. Несколько замечаний о ресторанных ценах и другие примеры социальных воздействий на цены. // Беккер Г.С. Человеческое поведение: экономический подход. Избранные труды по экономической теории. – М.: ГУ ВШЭ, 2003. С. 271-280. ↩
2. Там же. С. 276. ↩
3. Там же. С. 278. ↩
4. Там же. С. 279. ↩

7.7. Инновации и рыночные структуры

7.7.1. Модель Эрроу

Предложенная К. Эрроу в 1962 г. модель [1] считается базовой неоклассической моделью, позволяющей проанализировать [2] стимулы к инновациям в двух полярных рыночных структурах – совершенной конкуренции и чистой монополии.

Предпосылки модели К. Эрроу:

1. В центре внимания - отрасль с неизменной отдачей от масштаба, что означает равенство и фиксированный уровень средних и предельных издержек фирм, которые до нововведения равны: *AC=MC=C*.
2. Рассматривается процессное нововведение, в результате которого происходит снижение средних и предельных издержек производства до *AC'=MC'=C'*, где *C'<C*.
3. Неопределенность результатов введения инновации игнорируется.
4. Издержки изобретения и его патентования не рассматриваются.

Случай 1: изобретатель принадлежит отрасли и осуществляет радикальное нововведение, в результате которого существенно снижаются средние и предельные издержки, так что в результате внедрения нововведения *P'<C*, где *P'* - цена после внедрения нововведения.

Если изобретатель – монополист, то, как показано на рис. 7.30, до нововведения его прибыль составляла *CPKM*, а после нововведения стала равна *C'P'K'M'*. Его стимул к нововведению представляет собой разность между этими величинами.

Если изобретатель – одна из конкурентных фирм, то до изобретения ее прибыль была равна нулю, а после изобретения при надежной патентной защите она может взимать совокупный лицензионный сбор *C'P'K'M'*, реализуя свою монополию на информацию.

Очевидно, что стимул к изобретениям у конкурентной фирмы выше.

Введение радикального нововведения приводит к росту отраслевого выпуска как при монополии, так и при конкуренции до одинакового уровня (Q_c=Q_m), и одинаковым потерям от мертвого груза: *DWL=K'E'M'*. Однако прирост выпуска при монополии превышает прирост выпуска конкурентной отрасли: $(Q_m\text{-}Q_m^0) > (Q_c\text{-}Q_c^0)$.

Интерактивный рисунок из 2-х частей (Информация для технического специалиста: в качестве образца для оформления рисунка используйте ***Figure 7.4a, 7.4b по ссылке:*** *https://www.core-econ.org/the-economy/microeconomics/07-firm-and-customers-02-breakfast-cereal.html#figure-7-4ad*)

Рисунок 7.30. Изобретатель принадлежит отрасли и осуществляет радикальное нововведение (P'<C)

Случай 2: изобретатель принадлежит отрасли и осуществляет нерадикальное нововведение, так что в результате внедрения нововведения *P'>C*, где *P'* – цена, устанавливаемая монополистом после внедрения нововведения.

Если изобретатель – монополист, то, как показано на рис. 7.31, его стимул к нововведению представляет собой разность между величиной прибыли, полученной в результате введения инновации, и прежней величиной прибыли: *C'P'K'M' - CPKM*.

Если изобретатель – одна из конкурентных фирм, то до внедрения изобретения ее прибыль была нулевой. После внедрения изобретения при надежной патентной защите, реализуя свою монополию на информацию, она может взимать совокупный лицензионный сбор, равный *C'CEA,* при роялти на единицу выпуска: *r=C-C'*.

Следовательно, и в этом случае стимул к изобретениям у конкурента выше, т.к. *BEAM'>NK'BM*, причем отношение стимулов к нововведению при конкуренции и монополии тем больше, чем меньше снижаются издержки.

Введение нерадикального нововведения приводит к росту выпуска при монополии, но оставляет выпуск монополиста ниже выпуска конкурентной отрасли, а потери от мертвого груза при монополии (DWL_m=*K'E'M'*) выше, чем после изменений в конкурентной отрасли (DWL_c=*EE'A*).

Интерактивный рисунок из 4-х частей (Информация для технического специалиста: в качестве образца для оформления рисунка используйте ***Figure 7.4a, 7.4b по ссылке:*** *https://www.core-econ.org/the-economy/microeconomics/07-firm-and-customers-02-breakfast-cereal.html#figure-7-4ad*)

Рисунок 7.31. Изобретатель принадлежит отрасли и осуществляет нерадикальное нововведение (P'>C)

Общий вывод, который делает К. Эрроу: «стимулы к изобретениям в условиях монополии ниже, чем при конкуренции», что справедливо в отношении как радикальных, так и нерадикальных изобретений, однако даже при конкуренции «они ниже желаемых обществом» [3] . Действительно, в случае радикального нововведения в условиях конкуренции потребительский излишек увеличивается на *CEK'P'*, и этот прирост не может быть присвоен изобретателем посредством лицензионного сбора. Однако, если бы он мог стать частью стимула, получаемого конкурентной фирмой-инноватором, она могла бы реализовать более дорогостоящее изобретение.

Интересные результаты дает анализ влияния нововведений на общественную эффективность в модели К. Эрроу:

1. Стимулы к изобретению, связываемые с патентной монополией, ведут к его недоиспользованию вследствие наличия потерь от мертвого груза.
2. В конкурентной отрасли по сравнению с монополией не только выше стимулы к новаторству, но и статическая эффективность в случае нерадикального нововведения (благодаря более высокому отраслевому выпуску).

7.7.2. Модель Демсеца

В 1969 г. Г. Демсец в порядке критики модели К. Эрроу предложил свою модель [4] , сопоставляющую стимулы к нововведениям при совершенной конкуренции и при монополии.

В модели Г. Демсеца сохранены предпосылки модели К. Эрроу, но к ним добавлены еще две:

1. Радикальное изобретение лицензируется внешним изобретателем (держателем патента).

2. Выпуск конкурентной отрасли и монополии совпадают (т.е. кривая спроса конкурентной отрасли D_c и кривая предельного дохода монополиста *MR* совпадают).

Ключевой вопрос модели Г. Демсеца: в каком случае лицензирование изобретения выгоднее – при конкуренции или при монополии?

Ответ на этот вопрос дается только для радикального нововведения, в результате которого происходит снижение средних и предельных издержек производства от *C* до *C'*, но для двух случаев: при назначении внешним изобретателем одинакового лицензионного платежа для всех фирм и при разных подходах к назначению лицензионного платежа для конкурентных фирм и для монополии.

Случай 1: держатель патента запрашивает одинаковый лицензионный платеж с монополиста и конкурентных фирм: *r=P'-C'*.

Как показано на рис. 7.32, лицензионный платеж обе фирмы включают в издержки и производят одинаковый выпуск, определяющийся точкой *L* – точкой пересечения *MC'+r* и $MR=D_c$.

Совокупный лицензионный сбор в обоих случаях составит: *P'LNC'*.

Интерактивный рисунок из 3-х частей (Информация для технического специалиста: в качестве образца для оформления рисунка используйте ***Figure 7.4a, 7.4b по ссылке:*** *https://www.core-econ.org/the-economy/microeconomics/07-firm-and-customers-02-breakfast-cereal.html#figure-7-4ad*)

Рисунок 7.32. Держатель патента запрашивает одинаковый лицензионный платеж с монополиста и конкурентных фирм: r=P'-C'

«Мы приходим к выводу, что конкурентная отрасль не обладает бо'льшим стимулом к изобретению, чем монополия» [5], - заключает Г. Демсец. Следовательно, стимулы к лицензированию изобретения в данном случае в обеих отраслях одинаковы.

Случай 2: держатель патента запрашивает разный лицензионный платеж с монополиста и конкурентных фирм (рис. 7.33).

Для конкурентной отрасли: роялти на ед. выпуска: *r=P'-C'*. Тогда максимальный совокупный лицензионный сбор составит *P'LNC'*.

Для монополиста: аккордное роялти, максимальная величина которого равна *R=P'LNC'+(LK'M'N-PKMC)* и представляет собой разницу между прибылью до внедрения изобретения и прибылью после внедрения изобретения.

Интерактивный рисунок из 3-х частей (Информация для технического специалиста: в качестве образца для оформления рисунка используйте ***Figure 7.4a, 7.4b по ссылке:*** *https://www.core-econ.org/the-economy/microeconomics/07-firm-and-customers-02-breakfast-cereal.html#figure-7-4ad*)

Рисунок 7.33. Держатель патента запрашивает разный лицензионный платеж с монополиста и конкурентных фирм

Очевидно, что в данном случае для изобретателя стимул лицензировать изобретение монополисту выше, чем конкурентной отрасли [6]. Отмечая бо'льшую заинтересованность монополистов в инновациях по сравнению с конкурентной рыночной структурой, Г. Демсец делает вывод о том, что по этой причине «антитраст должен исполняться с меньшим усердием, чем того требуют только лишь соображения относительно ограничения выпуска» [7].

Выводы из сравнения моделей Эрроу и Демсеца:

1. Модель Эрроу может служить аргументом в пользу активной политики деконцентрации, поскольку она доказывает, что переход отрасли от монополии к конкуренции приводит не только к увеличению статической эффективности, но и к увеличению стимулов к новаторству.
2. Модель Демсеца может служить неоклассическим аргументом в пользу гипотезы Шумпетера (потери общества от деятельности монополий компенсируются усовершенствованием технологий, которые обусловлены деятельностью этих же монополий, или, чем лучше позиция на рынке, которую занимает наиболее новаторская фирма, тем полнее она может использовать преимущества инноваций), доказывая бóльшую выгоду от внедрения новшества в случае сотрудничества изобретателей с монополиями.

7.7.3. Модель Барзела

В модели Барзела [8] рассматривается временнóй контекст инноваций в рамках полярных рыночных структур – совершенной конкуренции и монополии. Предметом анализа выступает выбор оптимального момента времени T осуществления инновации. Ниже приводится несколько видоизмененная версия данной модели [9], сохраняющая основные результаты авторской концепции Й. Барзела (1968).

Будем предполагать, что некоторая инновация будет приносить осуществившему ее экономическому агенту в каждый момент времени доход в размере *b*, но требует расходов, равных C_0 в начальный момент времени *t*=0, причем данные расходы, необходимые для осуществления инновационного проекта, в силу влияния НТП с течением времени уменьшаются темпом, равным *p*:

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}=-p,$$

или

$$\frac{dC(t)}{dt}=-pC(t).$$

Решение данного дифференциального уравнения

$$\int \frac{dC}{C}=\int d\ln C=\ln C=-p\int dt+\ln k=-pt+\ln k$$

дает экспоненциальную траекторию падения расходов на инновации, где константа интегрирования $k=C_0$ – это инновационные издержки в нулевом периоде:

$$C(t)=C_0e^{-pt}.$$

Очевидно, что расходы на изобретение в период T составят C_0e^{-pT}.

В модели инновационного процесса сравнивается поведение различных рыночных структур, в частности, монополии и конкуренции по отношению к техническому прогрессу. Что касается монополиста, то он максимизирует прибыль (PR) как квазиренту, или выигрыш производителя (PS), т.е. накопленную стоимость приведенных к начальному моменту доходов от инновации, за вычетом дисконтированной величины издержек:

$$PR=\int_T^\infty be^{-rt}dt-C_0e^{-(p+r)T}, \quad (7.7.1)$$

где *r* – ставка процента.

Для упрощения дальнейших выкладок здесь предполагается, что инновация будет генерировать бесконечный во времени поток доходов.

Вычислим интеграл квазиренты в выражении прибыли:

$$PR=\int_T^\infty be^{-rt}dt-C_0e^{-(p+r)T}=b\int_T^\infty e^{-rt}dt-C_0e^{-(p+r)T}=-\frac{b}{r}\int_T^\infty de^{-rt}-C_0e^{-(p+r)T}=-\frac{be^{-rt}}{r}\Big|_T^\infty-C_0e^{-(p+r)T}=\frac{be^{-rT}}{r}-C_0e^{-(p+r)T}.$$

Итак,

$$PR=\frac{be^{-rT}}{r}-C_0e^{-(p+r)T}. \quad (7.7.2)$$

Приравнивая, в силу необходимого условия максимума, производную прибыли (7.7.2) по времени осуществления инновации T нулю, получаем:

$$be^{-rT}=(p+r)C_0e^{-(p+r)T}. \quad (7.7.3)$$

Очевидно, что к этому результату (7.7.3) можно было прийти, продифференцировав исходную функцию прибыли фирмы по времени T.

В условиях совершенной конкуренции прибыль в долгосрочном периоде оказывается равной нулю:

$$be^{-rT}=rC_0e^{-(p+r)T}. \quad (7.7.4)$$

Покажем, что конкурентные фирмы быстрее вкладывают деньги в инновационные проекты и раньше осуществляют нововведения по сравнению с монополией. Другими словами, момент времени, в который будет реализована инновация, в ситуации конкуренции $\left(T_{конк}\right)$ наступит раньше, чем при монополии $\left(T_{мон}\right)$:

$$T_{конк}<T_{мон}. \quad (7.7.5)$$

Для монополии, исходя из равенства (7.7.3), имеем:

$$\frac{(p+r)}{b}C_0e^{-pT_{мон}}=1.$$

Прологарифмировав данное равенство $\ln\left(\frac{(p+r)}{b}C_0e^{-pT_{мон}}\right)=0$, получаем:

$$T_{мон}=\frac{\ln\left(\frac{(p+r)}{b}C_0\right)}{p}.$$

Для совершенной конкуренции, исходя из равенства (7.7.4), имеем:

$$\frac{rC_0}{b}=e^{pT_{конк}}.$$

Логарифмируя, получаем:

$$T_{конк}=\frac{\ln\left(\frac{r}{b}C_0\right)}{p}.$$

Очевидно, что в силу свойств всюду возрастающей логарифмической функции $\frac{\ln\left(\frac{(p+r)}{b}C_0\right)}{p}>\frac{\ln\left(\frac{r}{b}C_0\right)}{p}$, то есть монополия будет откладывать инновацию на более позднее время, по сравнению с совершенно конкурентной фирмой (7.7.5).

Возникает вопрос: какая рыночная структура более выгодна для общества с точки зрения технического прогресса. Для решения этой проблемы введем вспомогательный коэффициент k, показывающий отношение совокупного выигрыша общества от инновации, равного сумме изменения излишка потребителей и производителей, к выигрышу производителей:

$$k=\frac{PS+CS}{PS}.$$

Очевидно, что общество в целом должно максимизировать разницу между совокупным выигрышем, или общественным благосостоянием $(SW=PS+CS)$, и дисконтированными расходами на НИОКР:

$$\max_T\left(SW-C_0e^{-(p+r)T}\right)=\max_T\left(\frac{kbe^{-rT}}{r}-C_0e^{-(p+r)T}\right).$$

Здесь был использован тот факт, что, по определению, совокупное общественное благосостояние равно коэффициенту k, умноженному на избыток инноватора $PS=\frac{be^{-rT}}{r}$. Кроме того, здесь предполагается единая ставка процента для всего общества.

Необходимое условие максимума чистого общественного благосостояния выглядит так:

$$kbe^{-rT}=(p+r)C_0e^{-(p+r)T}. \quad (7.7.6)$$

Заметим, что, если $k=1$, то социальный оптимум совпадает с условием максимизации прибыли монополиста (7.7.3) и дает соответствующее время осуществления инновации $\left(T_{мон}\right)$. Действительно, при этом общественное благосостояние совпадает с

выигрышем производителя.

Найдем значение коэффициента k, при котором оптимальным для общества является момент времени, характерный для инноваций в условиях конкуренции $\left(T_{конк}\right)$. При этом одновременно должны выполняться условия (7.7.4) и (7.7.6).

Поделим равенство (7.7.6) на (7.7.4). Получаем, что оптимальное время для конкуренции является наилучшим также с точки зрения общества при $k=\frac{p+r}{r}$. В данном случае общество в большей степени учитывает значимость благосостояния потребителей.

Наглядное представление о периодизации оптимальных с точки зрения общества рыночных структур, в рамках которых осуществляются инновации, дает рис.7.34. На нем снизу помещена стрела времени с отложенными на ней оптимальными моментами осуществления инновации при конкуренции $\left(T_{конк}\right)$ и монополии $\left(T_{мон}\right)$. Выше отложена шкала изменения коэффициента общественной значимости потребителей k. Направления, обозначенные стрелками, при этом указывают на рост соответствующих параметров – T и k.

Монополия осуществляет производство (при $k=1$) с положительной экономической прибылью. В области $1 < k < \frac{p+r}{r}$ экономическая прибыль снижается, стремясь к нулевой величине. При $k=\frac{p+r}{r}$ достигается общественный оптимум осуществления инновации в рамках конкуренции как рыночной структуры, причем экономическая прибыль становится нулевой. В области же левее конкурентного оптимума на графике, то есть при $k > \frac{p+r}{r}$, прибыль становится отрицательной, предприятия несут убытки, и мы попадаем в область прямого государственного контроля за экономикой. При этом достигается наивысшее, по сравнению с монополией и конкуренцией, значение коэффициента *k*, а значит, доля потребителей, то есть населения, в совокупном выигрыше общества наиболее высока.

Отличительной особенностью системы государственного регулирования народного хозяйства является то, что в отдельных экономических ситуациях она может обеспечить функционирование производства даже при невыполнении условия безубыточности, то есть при превышении издержек над доходом. В условиях НТР современная экономика, тяготеющая к переходу от индустриальной к постиндустриальной ступени развития, может в большей мере выигрывать скорее от государственной централизованной структуры хозяйства, чем даже от конкурентного равновесия. Таким образом, при хозяйственной структуре, отвечающей государственному регулированию экономики, получаем наивысшее благосостояние населения как потребителей, что является весомым аргументом в пользу данной системы экономической координации в условиях НТР.

---

1. Arrow K. Economic Welfare and the Allocation of Resources for Inventions. – The Rate and Direction of Inventive Activity: Economic and Social Factors, 1962. Pp. 609-626. ↩
2. В разделе использована методика графического анализа, предложенная Н.Л. Фроловой в работе: Фролова Н.Л. Инновационный процесс: потенциал рынка и государства. М.: ТЕИС, 2001. С. 166-173. ↩
3. Arrow K. Economic Welfare and the Allocation of Resources for Inventions. – The Rate and Direction of Inventive Activity: Economic and Social Factors, 1962. Pp. 619. ↩
4. Demsetz H. Information and Efficiency: Another Viewpoint. *Journal of Law and Economics*, 1969, Vol. 12, №1, pp. 1-22. ↩
5. Demsetz H. Information and Efficiency: Another Viewpoint. *Journal of Law and Economics*, 1969, Vol. 12, №1. P. 17. ↩
6. Этот вывод Г. Демсец аргументирует не только с помощью графической иллюстрации, но и алгебраически. ↩
7. Demsetz H. Information and Efficiency: Another Viewpoint. *Journal of Law and Economics*, 1969, Vol. 12, №1. P. 19. ↩
8. Barzel Y. Optimal timing of innovations // Review of economics and statistics, 1968 (Aug.). Vol.50. P. 348-355. ↩
9. Ср.: Шеррер Ф.М., Росс Д. Структура отраслевых рынков. – М.: Инфра-М, 1997. – С. 627-629, 649. ↩

Литература

Основная литература

1. Антипина О.Н., Вереникин А.О. Микроэкономика продвинутого уровня: Учебное пособие. 2-е изд., исправл. и доп. — М.: Экономический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2021. §2.6, §3.6.
2. Бусыгин В.П., Желободько Е.В., Цыплаков А.А. Микроэкономика – третий уровень. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2003. Гл. 13 (с. 476-502).
3. Varian H.R. Microeconomic Analysis. - 3rd ed. – N.Y., L.: W.W. Norton & Company, 1992. Ch. 14 (pp. 241-253).

Дополнительная литература

1. Arrow K. Economic Welfare and the Allocation of Resources for Inventions. – The Rate and Direction of Inventive Activity: Economic and Social Factors, 1962. Pp. 609-626.
2. Becker G.S. A Note on Restaurant Pricing and Other Examples of Social Influences on Price. *Journal of Political Economy*, 1991, Vol. 99, pp. 1109-1116 [На русском языке: Беккер Г.С. Несколько замечаний о ресторанных ценах и другие примеры социальных воздействий на цены. // Беккер Г.С. Человеческое поведение: экономический подход. Избранные труды по экономической теории. – М.: ГУ ВШЭ, 2003. – С. 271-280].
3. Barzel Y. Optimal timing of innovations // Review of economics and statistics, 1968 (Aug.). Vol.50. P. 348-355.
4. Demsetz H. Information and Efficiency: Another Viewpoint. *Journal of Law and Economics*, 1969, Vol. 12, №1, pp. 1-22.
5. Deneckere R.J., McAfee R.P. Damaged goods // *Journal of Economics and Management Strategy*, 1996, Vol. 5, №2, pp. 149–174.
6. Katz M., Shapiro C. Network Externalities, Competition and Compatibility. *The American Economic Review*, 1985, Vol. 75, №3, pp. 424-440 [На русском языке: Кац М., Шапиро К. Сетевые внешние эффекты, конкуренция и совместимость. – Вехи экономической мысли. Теория отраслевых рынков. Т.5. – СПб.: Экономическая школа, 2003. С. 500-535].
7. *Ozhegov E.M., Ozhegova A.* Segmentation of Theatre Audiences: A Latent Class Approach for Combined Data // *Basic Research Program Working Papers, Series: Economics*, WP BRP 198/EC/2018. *https://wp.hse.ru/data/2018/08/29/1154544049/198EC2018.pdf*
8. Shapiro C., Varian H. Information Rules: A Strategic Guide to the Network Economy. - Boston, Mass.: Harvard Business School Press, 1999.
9. Shy O. How to Price. A Guide to Pricing Techniques and Yield Management. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. Ch. 4. P. 115-149, Ch. 5. P. 151-180.
10. Varian H.R. Price Discrimination and Social Welfare. *The American Economic Review*, 1985, Vol. 75, pp. 870-875.
11. Varian H.R. Versioning Information Goods. *Digital Information and Intellectual Property*, Harvard University Workshop, January 23-25, 1997.
12. Антипина О.Н. Сетевые отрасли информационной экономики: характерные особенности, отражение в теории и подходы к ценообразованию. - *Журнал экономической теории*, 2009, №1. С. 72-84.
13. Антипина О.Н. Информационная экономика: современные технологии и ценообразование. – М.: Экономический факультет МГУ, ТЕИС, 2009. Глава 5 (п. 5.2.1).
14. Иванов П.В., Солнцев И.В. Динамическое ценообразование билетных программ спортивного мероприятия: пример ЗАО «ФК Зенит» // *Российский журнал менеджмента*. Т. 12, № 4, 2014. С.79–98.
15. Фролова Н.Л. Инновационный процесс: потенциал рынка и государства. М.: ТЕИС, 2001. Глава 6. Моделирование взаимосвязи нововведений и рыночной структуры: сравнительно-статический анализ. Глава 7. Моделирование взаимосвязи нововведений и рыночной структуры: подход с позиции динамической эффективности. С. 166-203.

Глава 8. Асимметрия информации

8.1. Информация и эффективность рыночных исходов. Причины асимметрии информации
8.2. Скрытые характеристики. Неблагоприятный отбор

- 8.2.1. Неблагоприятный отбор на рынке товаров. Модель «рынка лимонов» Акерлофа
- 8.2.2. Неблагоприятный отбор на рынке страхования. Модель Ротшильда-Стиглица
- 8.2.3. Самоидентификация и самоотбор. Скрининг (фильтрация)
- 8.2.4. Неблагоприятный отбор на рынке труда. Сигнализирование

8.3. Скрытые действия. Моральный риск
8.4. Проблема заказчика-исполнителя
Тренировочные задания с решениями
Литература

8.1. Информация и эффективность рыночных исходов. Причины асимметрии информации

Информация в широком смысле — это сведения, передаваемые устным, письменным или каким-либо другим способом (например, с помощью условных сигналов, с использованием технических средств).

К экономическим свойствам информации относятся следующие:

- во-первых, производство информации, как правило, связано с высокими издержками, а воспроизводство (копирование) — с низкими;
- во-вторых, информация практически не подвержена физическому износу, но велика вероятность ее морального устаревания;
- в-третьих, информация неотчуждаема от ее владельца в акте купли-продажи;
- в-четвертых, информация физически не исчезает в акте потребления, но для получения полезного эффекта необходимо умение воспользоваться ею.

Информация играет принципиальную роль в принятии решений экономическими агентами, а значит функционировании рынков и экономики в целом. Благодаря информации становится возможным оптимальный выбор экономического субъекта, т.е. максимизация индивидуальной целевой функции, что в условиях совершенной конкуренции ведет к максимизации общественного благосостояния и Парето-эффективному общему равновесию.

Однако информационные несовершенства снижают эффективность рыночных исходов. Одним из таких несовершенств является *асимметрия информации — ситуация, когда некоторые экономические субъекты обладают большей долей рыночной информации, чем остальные.* Затрудняя оптимальный выбор экономических агентов и порождая дополнительные трансакционные издержки (издержки поиска информации), асимметрия информации приводит к неэффективному функционированию рынков, снижению общественного благосостояния, а также зачастую становится причиной ограничения конкуренции и появления монопольной власти.

Случаи информационной асимметрии довольно часто встречаются в экономической жизни, например: продавец продукта знает о его качестве больше, чем покупатель; получающий медицинскую страховку лучше осведомлен о состоянии своего здоровья, чем сотрудник страховой компании; работник имеет более полное представление о своих навыках и способностях, чем принимающий его на службу предприниматель.

Причины, вызывающие асимметрию информации, вытекают из ее свойств, перечисленных выше.

Первая причина – редкость: получение информации, как и любого другого экономического блага, сопряжено с альтернативными издержками.

Вторая причина - моральная недолговечность: вследствие устаревания информации у части экономических субъектов ее общее распределение становится неравномерным.

Третья причина – когнитивность: умение экономического субъекта выбрать из всего доступного объема нужную информацию, способность осмыслить и переработать ее для дальнейшего адекватного использования. Эта причина асимметрии информации играет решающую роль в современной цифровой экономике, особенно при работе с большими данными, отличительными чертами которых являются «три *V*»: объём (*volume*), скорость (*velocity*), многообразие (*variety*).

Эффекты, генерируемые асимметрией информации, имеют названия — неблагоприятный отбор *(adverse selection)* и моральный риск *(moral hazard)* [1].

Неблагоприятный отбор связан с доконтрактным оппортунизмом и становится следствием существования скрытых от экономических субъектов характеристик благ. *Неблагоприятный отбор — это выделение в качестве потенциальных партнеров по контракту тех экономических субъектов, выбор которых является наименее предпочтительным для рассматриваемого экономического субъекта. Он возникает вследствие наличия у собственника информации возможности использовать ее с целью личной выгоды до заключения сделки и реализация этой возможности.*

*Среди моделей неблагоприятного отбора выделяют модели со скринингом (*или фильтрацией*) и модели с сигнализированием. В основе этой классификации лежит рассмотрение взаимодействия информированной и неинформированной сторон как стратегической игры, в которой проявляет инициативу (делает первый шаг) либо одна, либо другая сторона* [2].

Скрининг (screening) – метод, который применяет неинформированная сторона для стимулирования самоидентификации и самоотбора представителей информированной стороны в соответствии с группами, различными по скрытым характеристикам. Для этого неинформированная сторона предлагает информированной стороне *меню контрактов*, построенное таким образом, что для каждой группы «свой» контракт привлекательнее «чужого». Самоидентификация и самоотбор происходят в результате выбора, сделанного информированной стороной из возможностей, предложенных неинформированной стороной, что и выявляет скрытые качества информированной стороны.

Сигнализирование (signaling) – это распространение информированной стороной таких общедоступных сведений, которые позволяют неинформированной стороне судить о скрытых характеристиках, необходимых для принятия решения о рыночной сделке.

Моральный риск олицетворяет постконтрактный оппортунизм. Моральный риск — это извлечение одной из сторон контракта выгоды в ущерб другой стороне благодаря сокрытию или скрытому использованию имеющейся у нее информации. К нему приводит возможность извлечения дополнительной выгоды одной стороной рыночных отношений уже после заключения сделки благодаря тому, что другая сторона не может проконтролировать действия первой.

Моральный риск как постконтратный оппортунизм проявляется в формате проблемы заказчика-исполнителя. Эта проблема возникает тогда, когда исполнитель может извлекать выгоды из достижения своих целей, не отвечающих интересам заказчика, который не имеет возможности проконтролировать действия исполнителя (типичный пример: отношения между акционерами (заказчиками) и наемными менеджерами (исполнителями) корпораций).

Активные исследования неблагоприятного отбора и морального риска начались в 1970-х гг., а в 2001 г. заложившие их основы американские экономисты - Дж. Акерлоф, А.М. Спенс и Дж.Ю. Стиглиц – были удостоены Нобелевской премии по экономике «за анализ рынков с асимметричной информацией».

БОЛЬШАЯ РОССИЙСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ	Заглянем в Большую российскую энциклопедию: Асимметрия информации

1. В учебной и научной литературе на русском языке в тех же значениях используются термины «отрицательный отбор» и «моральный ущерб». ↩

2. См.: Salanié B. The Economics of Contracts: A Primer. 2nd Ed. Cambridge: The MIT Press, 2005. P. 4. ↩

8.2. Скрытые характеристики. Неблагоприятный отбор

8.2.1. Неблагоприятный отбор на рынке товаров. Модель «рынка лимонов» Акерлофа
8.2.2. Неблагоприятный отбор на рынке страхования. Модель Ротшильда-Стиглица
8.2.3. Самоидентификация и самоотбор. Скрининг (фильтрация)
8.2.4. Неблагоприятный отбор на рынке труда. Сигнализирование

8.2.1. Неблагоприятный отбор на рынке товаров. Модель «рынка лимонов» Акерлофа

В 1970 г. Джордж Акерлоф в статье «Рынок “лимонов”: неопределенность качества и рыночный механизм» [1] показал проблему неблагоприятного отбора, порождаемого информационной асимметрией, на примере рынка подержанных автомобилей. Как он заметил, выбор этого рынка в качестве объекта исследования был продиктован в большей степени соображениями конкретности и лучшего понимания проблемы, чем полноты реалистичности рассматриваемой ситуации.

Интерпретация м*одели рынка «лимонов» базируется на следующих* предпосылках:

1. Предлагаемый к продаже товар имеет определенные градации качества. Для упрощения их может быть две — автомобили высокого качества (*H* — условно «сливы») и автомобили низкого качества (*L* — условно «лимоны», как их называют на американском слэнге).
2. Полной информацией о качестве каждой единицы товара обладают продавцы. Покупатели имеют представление лишь о визуальных характеристиках автомобилей — модели, возрасте, пробеге и т.п., — но не об их реальном техническом состоянии.
3. Структура предложения товара изначально четко определена: на рынке представлено 50% высококачественных единиц товара – «слив» и 50% низкокачественных единиц товара – «лимонов».
4. Ценность товара (*V*) для покупателей высококачественных автомобилей (V_H) выше, чем для покупателей низкокачественных автомобилей (V_L): $V_H>V_L$.
5. Издержки владения (*C*) у продавцов высококачественных автомобилей (C_H), выше, чем у продавцов низкокачественных автомобилей (C_L): $C_H>C_L$.

В условиях симметричной информации при $V_H>C_H$ и $V_L>C_L$ существует эффективное равновесие, в котором на рынке продаются оба типа автомобилей: высокого качества - по цене V_H и низкого качества – по цене V_L.

В условиях асимметрии информации возможны следующие варианты равновесия для дискретного случая рассматриваемой модели:

- Если $(V_H+V_L)/2$ \gt C_H, то на рынке продаются оба типа автомобилей по цене $(V_H+V_L)/2$.
- Если $(V_H+V_L)/2$ \lt C_H, то на рынке продаются только низкокачественные автомобили по цене V_L (рис. 8.1). В этом случае высококачественные автомобили оказываются полностью вытесненными с рынка.

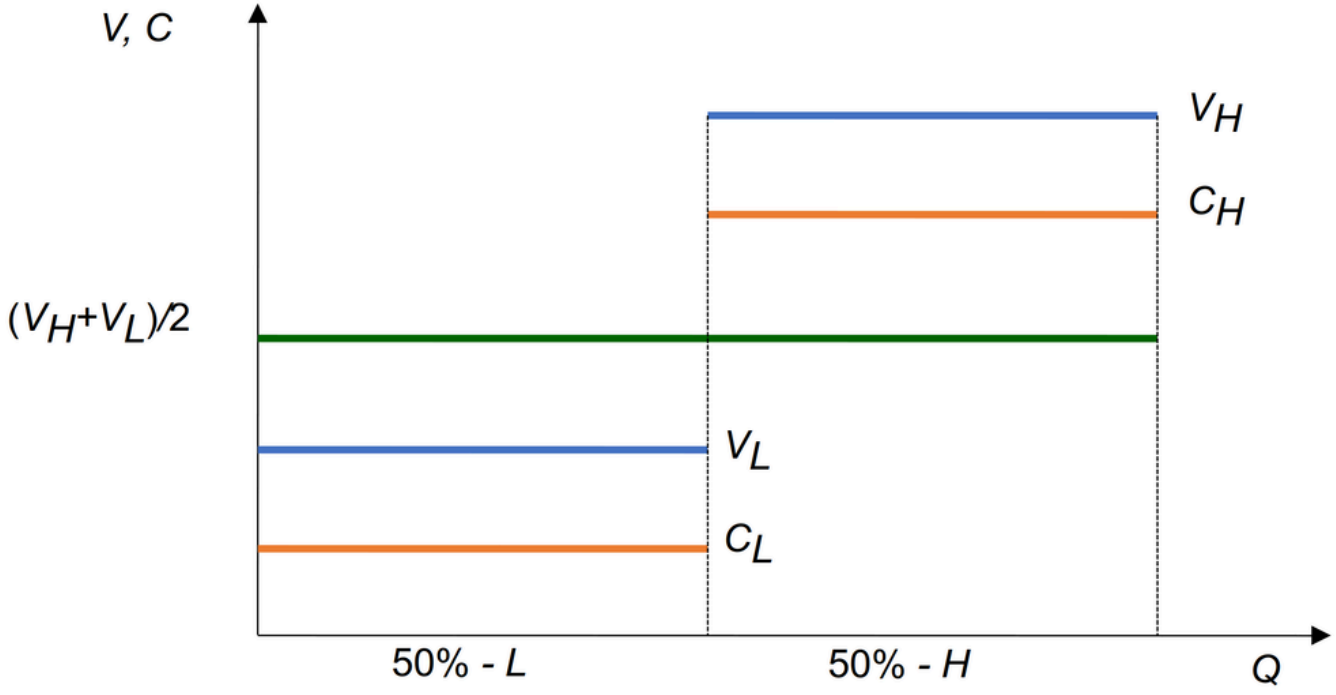


Рисунок 8.1. Равновесие в модели рынка «лимонов»: дискретный случай

Если в условиях асимметрии информации рассмотреть непрерывный случай, когда допускается существование континуума продавцов автомобилей: $\theta \sim U[0,1]$, где θ – качество автомобиля, а функции издержек владения $C(\theta)$, средней ценности $AV(\theta)$ и предельной ценности $MV(\theta)$ – строго возрастающие и $C(\theta)$ имеет больший наклон, то общественное равновесие будет соответствовать точке E^* при таком значении θ, при котором $C(\theta)=MV(\theta)$. Однако фактическое равновесие сложится в точке $E<E^*$ при θ, соответствующем $C(\theta)=AV(\theta)$, ибо, не имея точной информации, потребители будут ориентироваться на среднюю ценность товара (рис. 8.2).

С точки зрения общественной эффективности это будет означать меньшее число сделок с подержанными автомобилями худшего качества по сравнению с Парето-оптимальным, а потери от мертвого груза (*DWL*) будут соответствовать площади треугольника

ABC.

Следовательно, основные выводы из модели рынка «лимонов» таковы:

- В условиях асимметрии информации низкокачественные товары вытесняют высококачественные вплоть до полного исчезновения рыка при допустимости ситуации, когда $C(\theta)>minAV(\theta)$.
- Асимметрия информации приводит к снижению общественного благосостояния.

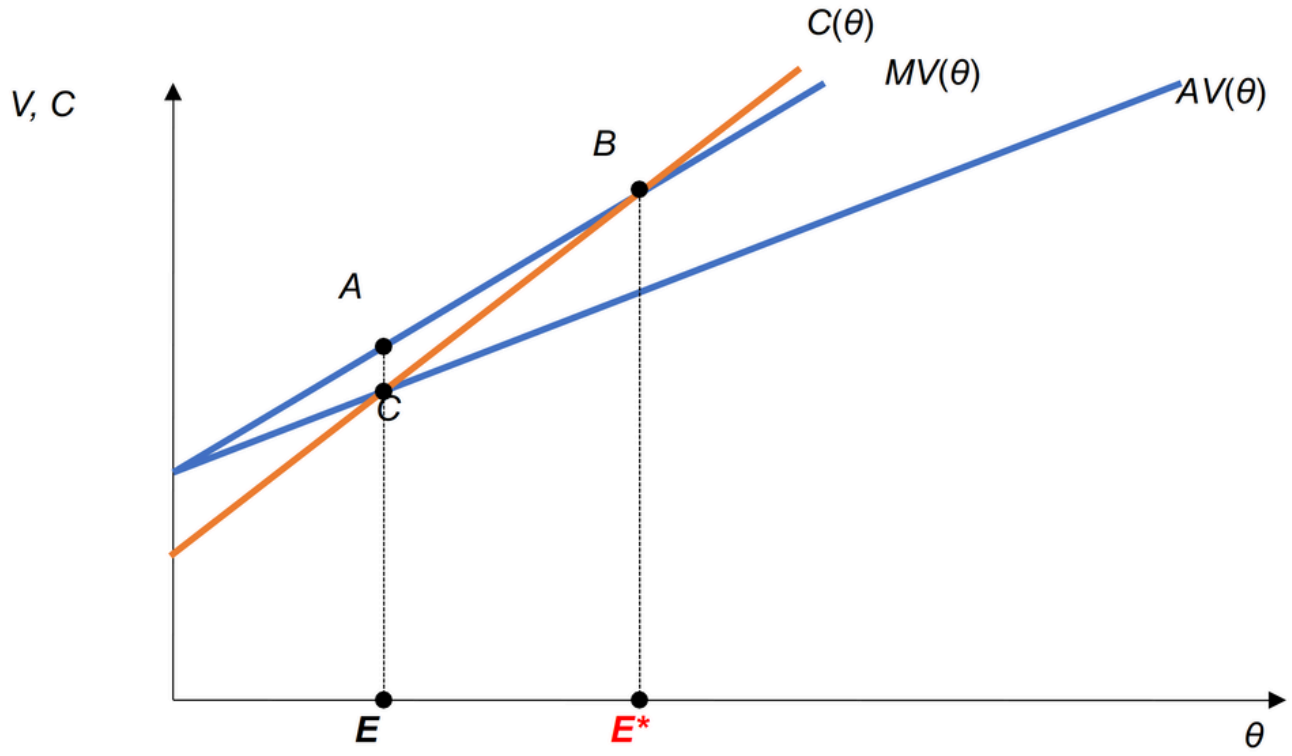


Рисунок 8.2. Равновесие в модели рынка «лимонов»: непрерывный случай

БОЛЬШАЯ РОССИЙСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ	Заглянем в Большую российскую энциклопедию: Негативный отбор
	Междисциплинарный взгляд: Скрытые характеристики и ухудшающий отбор (Материал интерактивного цифрового учебника «Институциональная экономика»)

Кейс:
Бум продаж подержанных машин - это неблагоприятный отбор?

В январе 2025 г. в России зафиксирован бум продаж подержанных автомобилей: количество сделок оказалось на 30% больше, чем за тот же месяц предыдущего года. Что берут? По данным аналитиков, автомобилисты бросились скупать вазовскую «классику» и самые дешевые иномарки. Более половины вторичного рынка пришлось на пять марок: Lada, Toyota, Kia, Hyundai, Nissan.

По словам экспертов и дилеров, опрошенных «Газетой.Ru», покупки на вторичке активизировались на фоне стремительного повышения цен на новые автомобили. Покупатели стали отдавать предпочтение крайне дешевым и старым моделям для снижения затрат на ремонт. Старые автомобили не только существенно дешевле новых (хотя за год цены на подержанные машины выросли на 11%), но и имеют преимущество в том, что для них есть большое количество запчастей, как оригинальных, так и нет.

Лидерство на рынке среди подержанных легковых машин сохраняет седан Lada 2107, несмотря на то что его прекратили выпускать еще в 2012 году. Дилеры считают, что секрет успеха модели — в очень низкой цене и высокой ремонтопригодности: она хорошо известна автосервисам, на нее можно легко найти запчасти и даже отказаться от сервисных центров, осуществив незначительные ремонтные работы самостоятельно.

При этом, китайские автомобили с пробегом также стали постепенно завоевывать доверие россиян, из них наиболее востребованы те, которые продаются в России достаточно давно и в большом количестве, т.е. имеют репутацию надежных автомобилей, по которым нет проблем с наличием запасных частей.

Задание

Аргументируйте ответ на вопрос: можно ли утверждать, что в январе 2025 г. на рынке подержанных автомобилей в России наблюдались признаки неблагоприятного отбора?

По материалам статьи: Жандарова М. В России бум продаж подержанных машин. Что берут? // Газета.Ru, 20 февраля 2025 г. URL: https://www.gazeta.ru/auto/2025/02/20/20585066.shtml?updated



Источник рисунка: https://www.gazeta.ru/auto/2025/02/20/20585066.shtml?updated

Научная статья

В XXI веке электронная коммерция стремительно развивается, но явление, когда некачественные товары вытесняют качественные, встречается часто, и рынок электронной коммерции даже называют «рынком лимонов».

Информация о репутации товаров на платформах электронной коммерции прежде всего включает отзывы потребителей, рейтинги продаж, сертификацию подлинности бренда, число просмотров карточки товара и т.п. Ложная репутационная информация через «денежные скидки за положительные отзывы», «накрутку кликов», «оплату за клик» и т.п., имеет низкие издержки получения и высокую эффективность, из-за чего стала «зоной серьезного бедствия».

Асимметрия информации о репутации на платформах электронной коммерции связана с несоответствием между «ожидаемой информацией о репутации продукта» и «реальной информацией о репутации продукта». Ожидаемая репутация, как правило, выше реальной, что, по сути, и отражает асимметрию информации.

Ответы на эти и другие вопросы даны в статье: Zhao M., Wang S., Xia T. The social welfare effect of e-commerce product reputation information asymmetry from the perspective of network externality. PLoS ONE, 2025, Vol. 20, №1, e0313852. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0313852

1. Akerlof G.A. The Market for «Lemons»: Quality Uncertainty and the Market Mechanism. *The Quarterly Journal of Economics*. 1970. Vol. 84. № 3. P. 488 — 500. С русским переводом этой статьи (Акерлоф Дж. Рынок «лимонов»: неопределенность качества и рыночный механизм) можно познакомиться в журнале THESIS. 1994. Вып. 5. С. 91-104. ↩

8.2.2. Неблагоприятный отбор на рынке страхования. Модель Ротшильда-Стиглица

Модель неблагоприятного отбора на рынке страхования изложена в статье Майкла Ротшильда и Джозефа Стиглица «Равновесие на конкурентном рынке страхования: эссе по экономике несовершенной информации» [1] (1976).

Модель имеет ряд *предпосылок и исходных условий*.

Прежде всего, предполагается, что:

- *W* – доход (богатство) индивида, *d* – величина потерь дохода (богатства) индивида при наступлении несчастного случая;
- $E(\widehat{W}_1, \widehat{W}_2)$ – начальный запас индивида, где $\widehat{W}_1 = W$, $\widehat{W}_2 = W\text{-}d$;
- ρ – вероятность наступления несчастного случая;
- $\widehat{a}_2$-страховая\ сумма, $a = (a_1, a_2)$ – вектор страхового контракта, где a_1 - плата за страховку (цена полиса), $a_2 = \widehat{a}_2\text{-}a_1$;
- $W_1 = W\text{-}a_1$ - доход (богатство) индивида, если страховой случай не наступает, $W_2 = W\text{-}d + a_2$ - доход (богатство) индивида при наступлении страхового случая;
- Каждый индивид максимизирует функцию ожидаемой полезности:

$$\widehat{V}(\rho, W_1, W_2) = (1\text{-}\rho)U(W_1) + \rho U(W_2),$$

где *U*(·) – элементарная функция полезности денежного дохода (богатства);

- Предпочтения индивидов не зависят от состояния;
- Все индивиды одинаково несклонны к риску (*U*”<0).

При определении *спроса на страховые контракты* в модели предполагается, что каждый их покупатель приобретает только один контракт, а его решение зависит от двух параметров:

- ожидаемая полезность при приобретении страхового контракта:

$$V(\rho, a) = \widehat{V}(\rho, W\text{-}a_1, W\text{-}d + a_2);$$

- ожидаемая полезность без приобретения страхового контракта:

$$V(\rho, 0) = \widehat{V}(\rho, W, W\text{-}d).$$

Максимизирующий ожидаемую полезность индивид приобретет контракт, если: $V(\rho, a) \geq V(\rho, 0)$.

Предложение страховых контрактов обеспечивается страховыми компаниями, нейтральными к риску.

Цель страховых компаний – максимизация ожидаемой прибыли:

$$\pi(\rho, a) = (1\text{-}\rho)a_1 \text{-} \rho a_2 = a_1 \text{-} \rho(a_1 + a_2).$$

Любой страховой контракт, на который есть спрос и который ожидается прибыльным, будет предложен.

Выбор страховой компании сводится к определению оптимальных цен полисов и страховых сумм.

В модели рассматривается совершенно конкурентный *рынок страховых контрактов* со свободным входом. Однако на нем может иметь место асимметрия информации, когда приобретающие страховки индивиды имеют точную информацию о вероятности несчастного случая, который может с ними произойти, а страховые компании – нет.

В случаях асимметрии информации модель фокусируется на *механизме самоотбора* (*self-selection mechanism*), предполагающем, что страховые компании стимулируют индивидов *самоидентифицироваться* - совершать выбор так, чтобы одновременно выявлялись их скрытые характеристики и заключались такие контракты, которые бы были оптимальными.

В *условиях равновесия* набор заключаемых контрактов таков, что выполняются:

i. *условие безубыточности*, т.е. нет контрактов, при которых $\pi(\rho, a) < 0$;
ii. *условие отсутствия входа,* т.е. за пределами рассматриваемого рынка не могут быть предложены контракты с $\pi(\rho, a) \geq 0$.

Тип рассматриваемого равновесия – равновесие Курно-Нэша: каждая страховая компания исходит из независимости решений конкурентов от ее собственных действий.

Возможно несколько вариантов равновесия.

Случай 1: Индивиды имеют идентичные вероятности наступления несчастного случая (ρ), которые известны страховым компаниям.

Исходя из предпосылок и условий модели, в условиях равновесия:

- у страховых компаний $\pi(\rho, a) = (1\text{-}\rho)a_1 \text{-} \rho a_2 = 0$;

- индивиды максимизируют ожидаемую полезность при покупке оптимального контракта a^* на полную сумму потерь по справедливой цене.

Тогда в точке равновесия $E^*(\widehat{W}_1\text{-}a_1, \widehat{W}_2+a_2)$ будет выполняться условие равенства предельной нормы замещения дохода при состоянии мира 2 доходом при состоянии мира 1 ($MRS_{W_1W_2}$) и тангенса угла наклона линии ясных шансов (γ) (рис. 8.3):

$$MRS_{W_1W_2}=tg\gamma,$$

где:

- $MRS_{W_1W_2}=\frac{(1\text{-}\rho)U'(W_1)}{\rho U'(W_2)}$,
- $tg\gamma=\frac{1\text{-}\rho}{\rho}$.

Точка равновесия *E** будет лежать на пересечении линии определенности (*C*) и линии ясных шансов.

Если все индивиды имеют различные ρ, которые известны страховым компаниям, рынок распадается на множество сегментов с соответствующими вероятностями несчастных случаев и соответствующими равновесными параметрами.

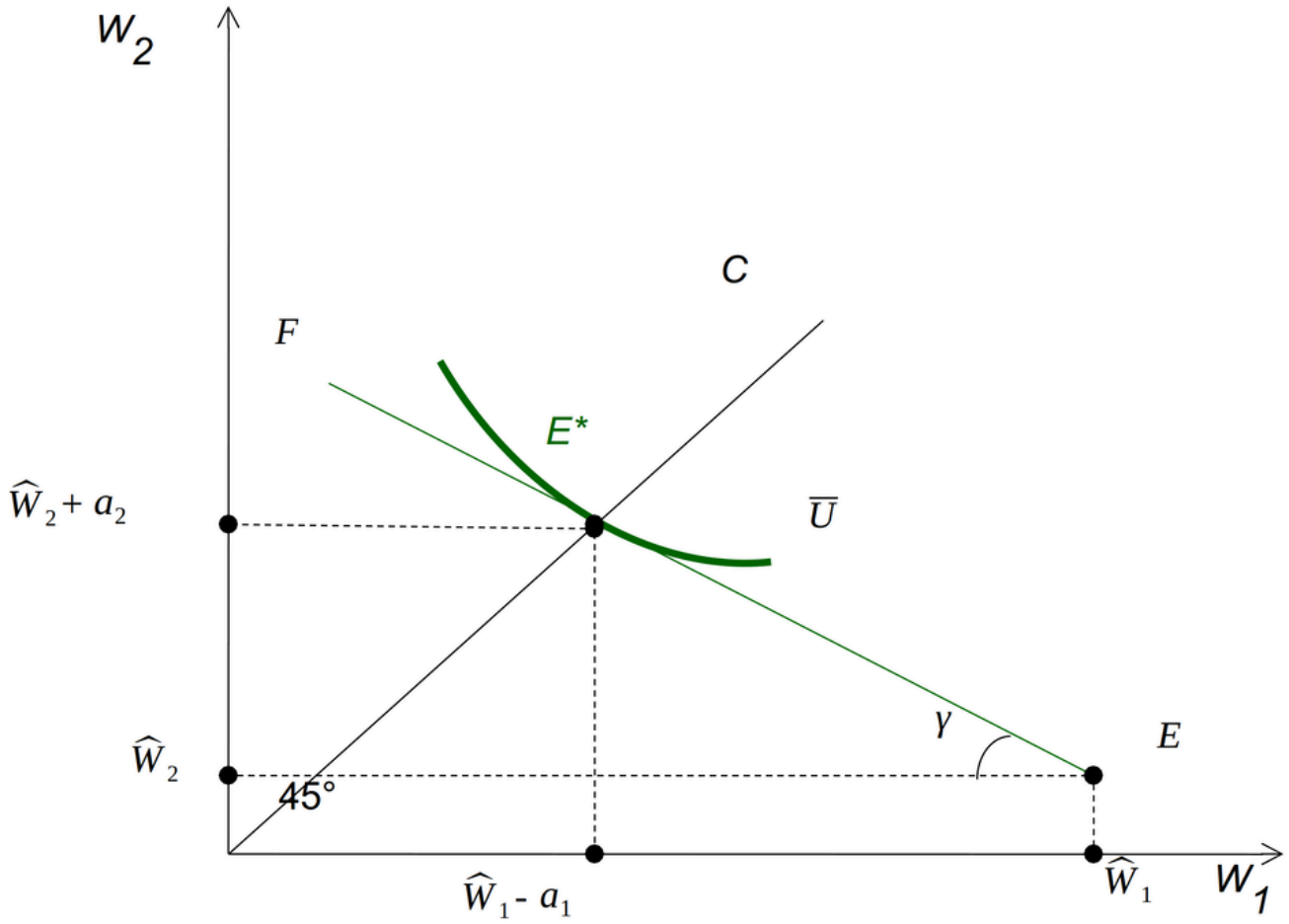


Рисунок 8.3. Равновесие на рынке страховых контрактов, когда индивиды имеют идентичные вероятности наступления несчастного случая

Случай 2: Две группы индивидов имеют различные вероятности наступления несчастного случая (ρ), которые известны страховым компаниям.

Два типа покупателей страховок имеют различные вероятности наступления страхового случая: низкорисковые – ρ^L и высокорисковые – ρ^H. Это означает, что $\rho^H > \rho^L$.

Доля высокорисковых индивидов равна λ, доля низкорисковых составляет (1-λ).

Если рынок страховых услуг является конкурентным и страховым компаниям удается точно отличить низкорискового клиента от высокорискового клиента, то складывается равновесие в условиях полной информации, при котором: $\alpha_1^L=\rho^L d$ и $\alpha_1^H=\rho^H d$, т.е. с каждым клиентом заключается справедливый контракт на полную сумму потерь, аналогично рассмотренному выше случаю.

Как показано на рис. 8.4, угол наклона линии ясных шансов для низкорисковых индивидов больше, чем для высокорисковых:

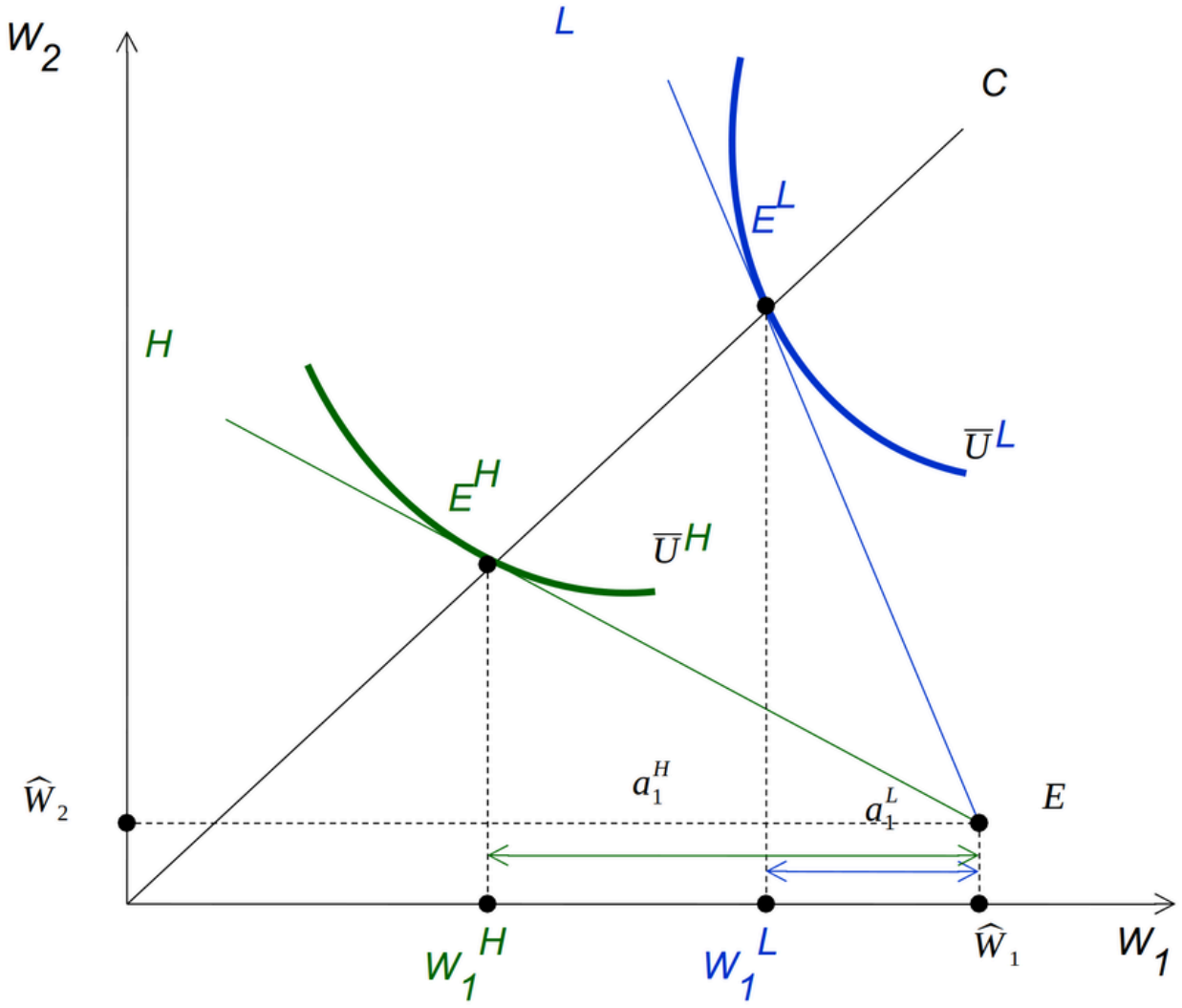


Рисунок 8.4. Равновесие на рынке страховых контрактов, когда индивиды имеют различные вероятности наступления несчастного случая, которые известны страховым компаниям

Случай 3: Две группы индивидов имеют различные вероятности наступления несчастного случая (ρ), которые не известны страховым компаниям и до заключения контракта они не могут отличить низкорисковых индивидов от высокорисковых.

В рамках этого случая возможны три варианта исходов.

Вариант 1. Если каждая страховая компания продолжит продавать полисы двух типов на полное страховое покрытие, как это было показано в Случае 2, то у высокорисковых клиентов появится возможность выдать себя за низкорисковых. В результате может сложиться такая ситуация, когда клиенты обоих типов покупают дешевые контракты. Таким образом, страховые компании станут убыточными и разорятся. Очевидно, что этот вариант нельзя признать оптимальным для страхового рынка.

Вариант 2. Страховые компании продают полисы, исходя из средней вероятности наступления страхового случая:

$$a=\overline{\rho}d, \text{ где: } \overline{\rho}=\lambda\rho^H+(1\text{-}\lambda)\rho^L.$$

Тогда контракт α, принадлежащий линии рыночных шансов (*market odds line*) EF с углом наклона φ, где $(tg\varphi=\frac{1\text{-}\overline{\rho}}{\overline{\rho}})$, не будет *объединяющим (агрегирующим) равновесием, при котором обе группы покупают одинаковый контракт*, так как $\pi\,(\overline{\rho},a)=0$, однако поскольку пересекающиеся в α кривые безразличия $\overline{U}^H$ и $\overline{U}^L$ имеют разные углы наклона, причем $\frac{1\text{-}\rho^L}{\rho^L} > \frac{1\text{-}\rho^H}{\rho^H}$, существует контракт, соответствующий β, который не выберут высокорисковые индививды, но предпочтут низкорисковые индивиды (рис. 8.5). Следовательно:

$$\pi\left(\rho^L,\beta\right) > \pi\,(\overline{\rho},a)=0,$$

что противоречит условию отсутствия входа (*ii*).

Это означает, что в состоянии равновесия каждый тип клиентов должен приобретать сепаратный контракт.

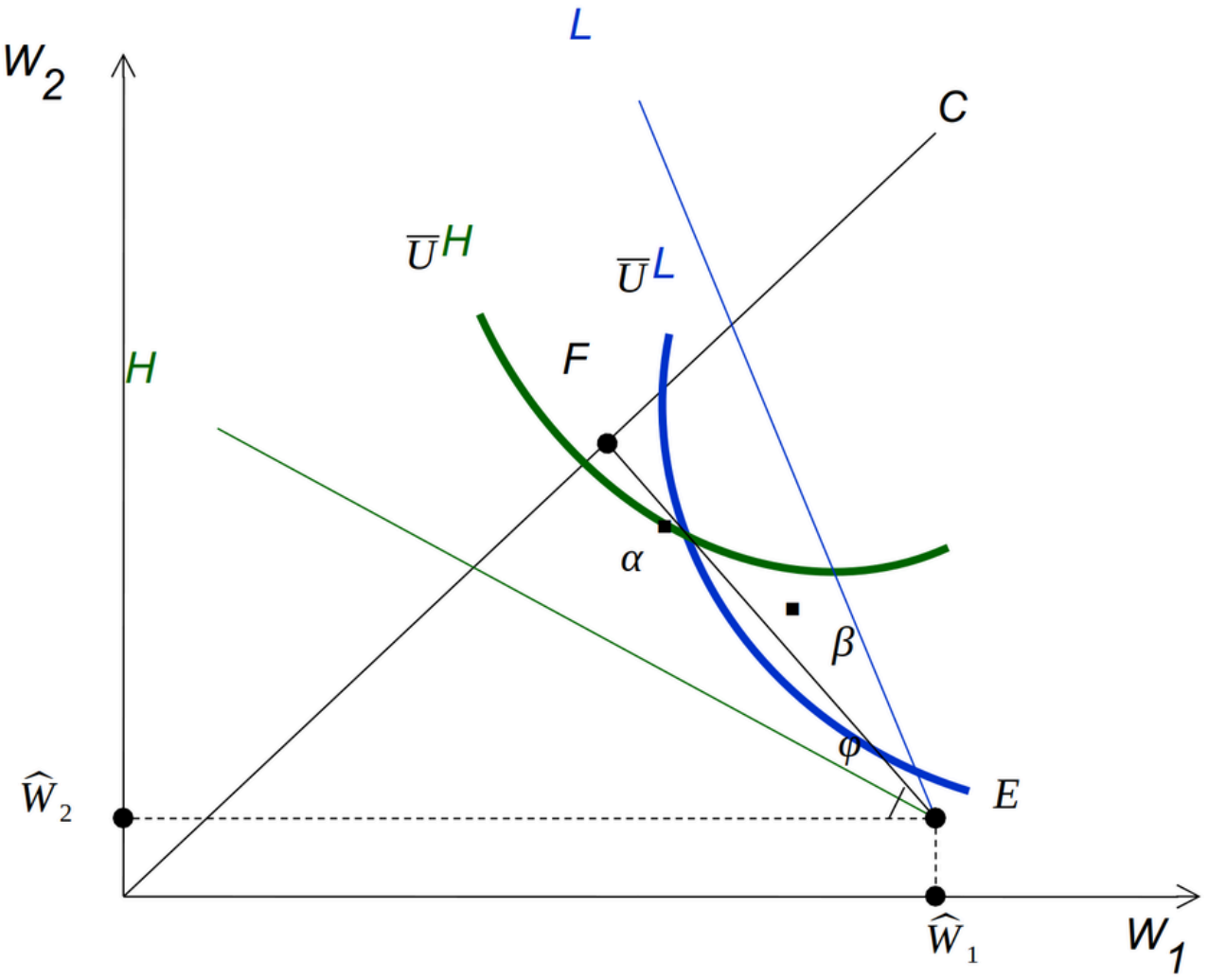


Рисунок 8.5. Рынок страховых контрактов, когда две группы индивидов имеют различные вероятности наступления несчастного случая, которые не известны страховым компаниям и они продают полисы, исходя из средней вероятности наступления страхового случая

Вариант 3. Разделяющее равновесие, когда страхователи разных типов выбирают различные контракты и выполняются следующие условия:

1. *Самоотбор* - индивиды должны самостоятельно предпочесть контракт, соответствующий их типу;
2. *Безубыточность* – каждый равновесный контракт дает $\pi=0$;
3. *Отсутствие входа* – исключается возможность появления другого контракта, который бы изменил поведение страхователей.

При таких условиях (α^H, α^L) – единственное разделяющее равновесие (рис. 8.6), где:

- α^H - оптимум высокорисковых индивидов на *EH* с наклоном $\frac{1-\rho^H}{\rho^H}$;
- α^L - оптимум низкорисковых индивидов на *EL* с наклоном $\frac{1-\rho^L}{\rho^L}$.

В ситуации асимметрии информации компания будет заинтересована в выработке такого оптимального договора страхования, в котором заложены механизмы самоотбора, стимулирующие страховщиков проявить индивидуальный уровень риска. Такой контракт должен подчиняться «ограничению совместимости стимулов»: для высокорисковой группы не должно быть выгодным выбирать контракт, предназначенный индивидам с низким риском наступления страхового случая, т.е.

$$EU_h = (1-\rho^H)U\left(W-\alpha^H\rho^H\right)+\rho^H U\left(W-d+(1-\rho^H)\alpha^H\right) \geq$$
$$\geq EU_h = (1-\rho^H)U\left(W-\alpha^L\rho^L\right)+\rho^H U\left(W-d+(1-\rho^L)\alpha^L\right).$$

Напомним, что при справедливом страховании цена полиса должна быть равна вероятности наступления страхового случая.

Чтобы последнее неравенство выполнялось, контракт, предлагаемый для высокорисковых индивидов, должен быть как можно более выгодным. Это увеличивало бы значение левой части неравенства. Поскольку, как было показано ранее, полезность страховщика возрастает при увеличении страхового покрытия, а значит, высокорисковой группе клиентов должен быть предложен контракт α^H (рис. 8.6) с полным покрытием: $\alpha^H=d$. При этом наиболее выгодным контрактом для низкорисковой группы будет такой, при котором последнее неравенство будет выполнено как равенство при условии полного покрытия для высокорисковых страховщиков:

$$U\left(W-\rho^H d\right) = (1-\rho^H)U\left(W-\alpha^L\rho^L\right)+\rho^H U\left(W-d+(1-\rho^L)\alpha^L\right).$$

Этот контракт α^L будет находиться на пересечении бюджетного ограничения низкорисковой группы с кривой безразличия высокорисковых клиентов (рис. 8.6). Очевидно, что при этом полезность низкорисковых клиентов не будет максимальной, то есть им будет предлагаться контракт с неполным покрытием: $\alpha^L < d$.

Условия, при которых разделяющее равновесие не существует:

- Издержки объединяющего равновесия низки (относительно мало высокорисковых индивидов или ρ^L и ρ^H мало отличаются);
- Издержки сепарирования, связанные с неготовностью индивидов покупать полные страховки, высоки (например, полярный случай, когда ρ^L очень низка).

Как показано на рис. 8.6, линии *E'*, *E**, *E"* соответствуют усредненной вероятности $\overline{\rho}=\lambda\rho^H+(1-\lambda)\rho^L$ при $\lambda = \lambda'$, λ^*, λ'' и имеют наклон $\varphi', \varphi^*, \varphi''$.

Линия *E** определяет критическое значение доли высокорисковых индивидов λ^*: для $\lambda' < \lambda^*$ равновесия не существует вообще, для $\lambda'' \geq \lambda^*$ существует разделяющее равновесие при контрактах, приводящих их покупателей в точки α^L и α^H.

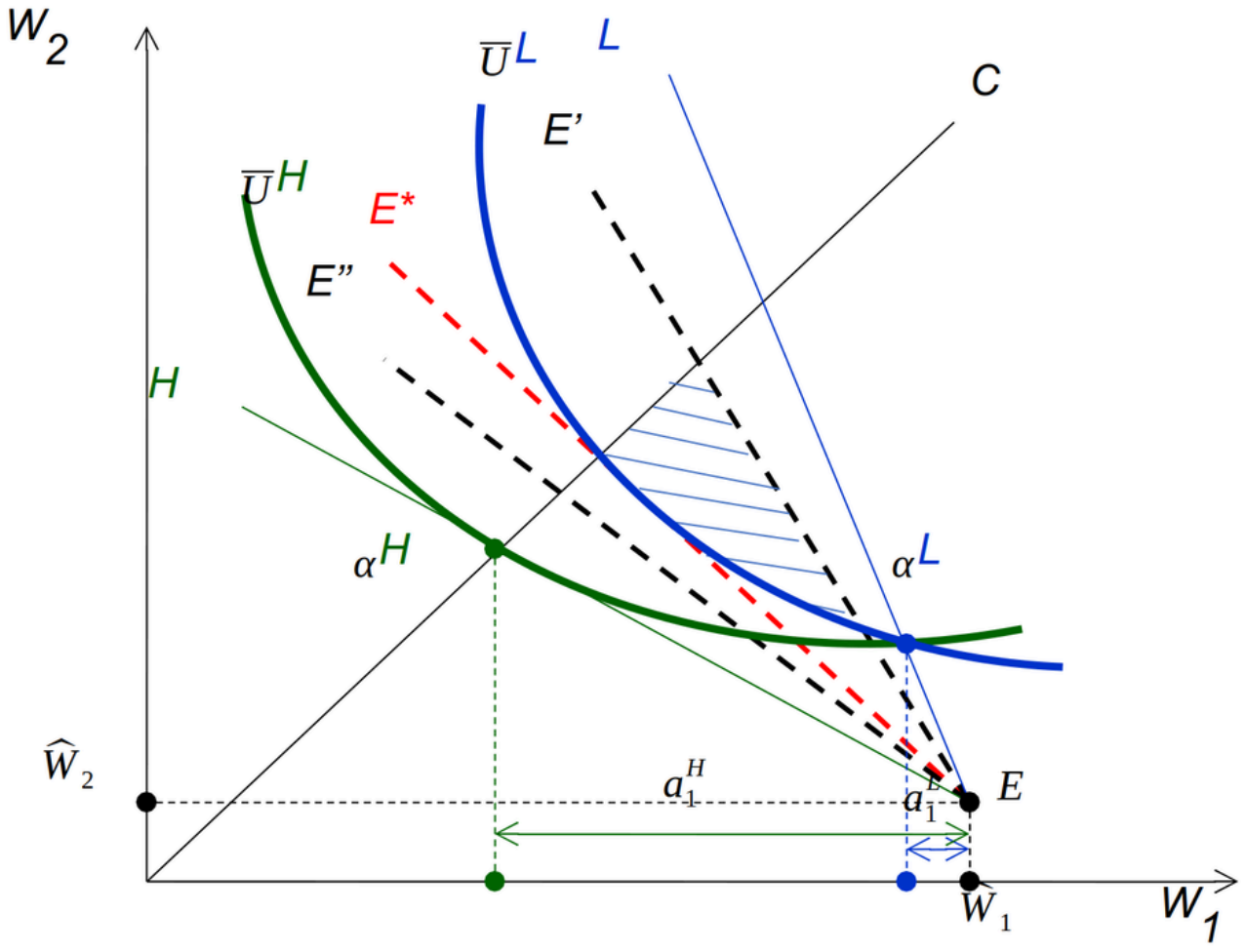


Рисунок 8.6. Разделяющее равновесие на рынке страховых контрактов

Выводы из модели неблагоприятного отбора на рынке страхования:

- Если λ столь низка, что равновесия не существует, то рынок страхования переживает постоянные изменения.
- Если λ высока, то плата за страховку, исходя из средней вероятности наступления страхового случая, чересчур высока по сравнению с a_1^L, поэтому низкорисковые индивиды не хотят покупать дополнительное страховое покрытие и выбирают справедливое страхование. На практике на рынке страхования предлагается устойчивый набор дифференцированных контрактов (например, стандартный контракт предполагает полное страховое покрытие по конкретной цене и возможность получения скидки при сокращении степени покрытия).
- На рынке страхования не достигается Парето-оптимальность: бремя неблагоприятного отбора несут низкорисковые индивиды, поскольку, чтобы исключить из числа покупателей их контрактов высокорисковых индивидов, страховая компания заставляет недостраховываться низкорисковых индивидов (по справедливой цене им предлагается лишь частичная компенсация, достаточная для попадания в точку α^L).

М. Ротшильд и Дж. Стиглиц справедливо отмечают существование *альтернативных концепций равновесия на рынке страховых контрактов*, которые отличаются допущениями относительно поведения страховых компаний и другими предпосылками. Одной из них является концепция Чарльза Уилсона (1976), в которой предложено следующее определение равновесного набора контрактов:

i. в нем нет контрактов с $\pi(\rho, a) < 0$ (условие безубыточности);

ii. не существует нового контракта (или набора контрактов), который, будь он предложен, принесет положительную прибыль, даже если все контракты, которые станут убыточными вследствие его появления, будут устранены.

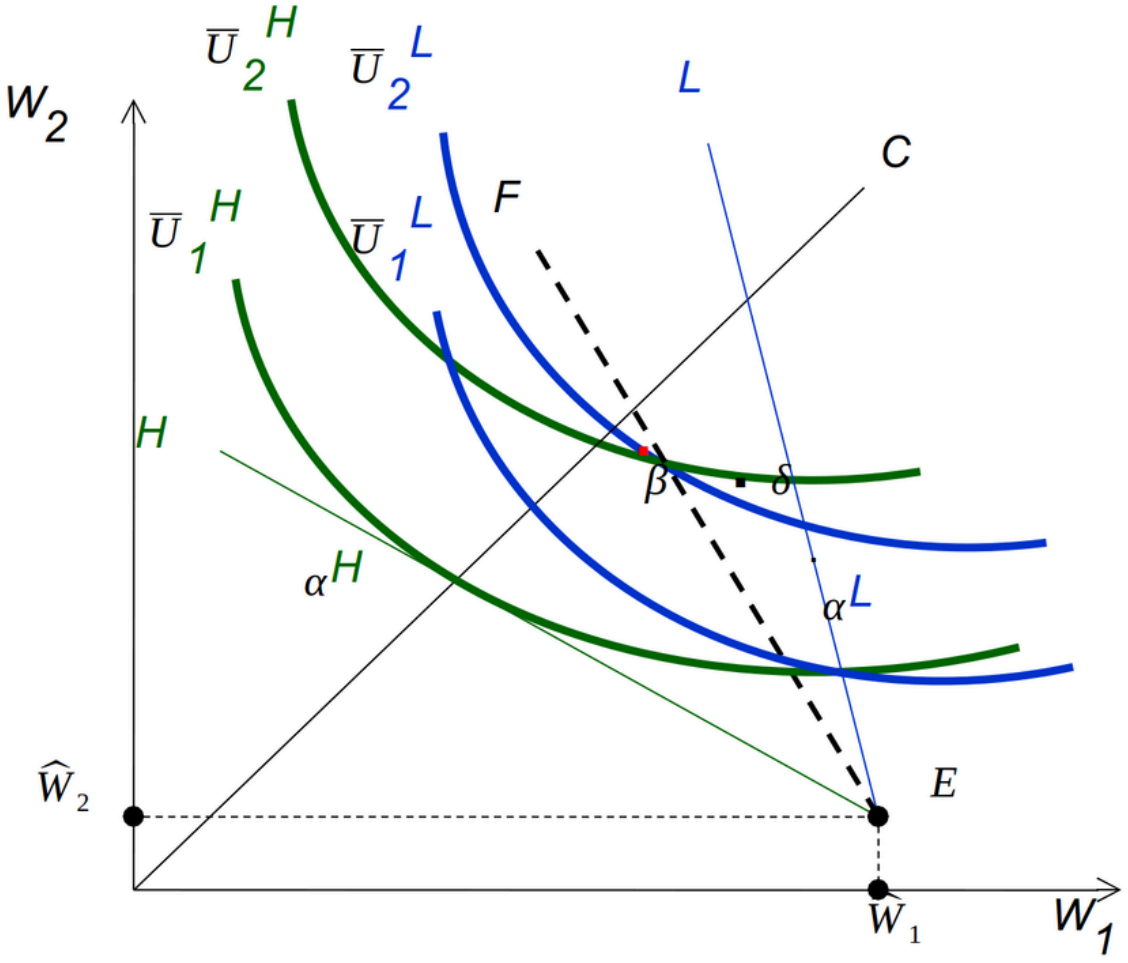


Рисунок 8.7. Равновесие по Ч. Уилсону

Очевидно, что, если разделяющее равновесие по Ротшильду-Стиглицу существует, оно также является равновесием по Уилсону.

Если разделяющего равновесия по Ротшильду-Стиглицу не существует, равновесие по Уилсону – это объединяющее равновесие, в котором максимизируется благосостояние низкорисковых индивидов.

Как показано на рис. 8.7, пример равновесия по Уилсону – это объединяющее равновесие β, максимизирующее благосостояние низкорисковых индивидов. Оно предпочтительнее разделяющего равновесия (α^H,α^L), которое не может существовать.

Наличие контракта δ по Ротшильду-Стиглицу не позволяет считать β равновесием. Однако по Уилсону появление δ сначала переключит на него низкорисковых индивидов, что сделает убыточным и приведет к отмене β, а затем убыточным станет δ, когда на него перейдут и высокорисковые индивиды. Таким образом, δ не может успешно конкурировать с β.

М.Ротшильд и Дж. Стиглиц подчеркивают, что концепция равновесия Уилсона – это «не близорукая концепция равновесия, которая более приемлема для моделей монополии (или олигополии), чем для моделей конкуренции» [2]. Действительно, в условиях конкуренции трудно представить себе возможности отдельной страховой компании прогнозировать все последствия появления предлагаемого ею нового контракта.

Числовой пример

Предположим, что нейтральная к риску страховая компания, работающая в условиях совершенной конкуренции, предлагает справедливые страховые полисы владельцам недвижимости (городских квартир) стоимостью 16 (ден.ед.), обладающим одинаковым первоначальным богатством $w=25$, в которое включена стоимость самих квартир, и одинаковыми функциями полезности $U=\sqrt{w}$, но различающимся вероятностями наступления страхового случая, связанного с утратой полной стоимости объекта недвижимости: у половины она составляет $\rho^L=\frac{1}{4}$, а у другой половины – $\rho^H=\frac{1}{2}$.

Рассмотрим вначале ситуацию полной информированности о вероятностях наступления страховых случаев как страхователя, так и каждого страховщика. Предполагая, что страхователь имеет возможность предлагать различные по характеристикам полисы для разных групп страховщиков, на основе проведенного ранее анализа принципов формирования оптимальных страховых контрактов, определяем, что все индивиды будут полностью страховать свой ущерб: $\alpha^H=\alpha^L=16$. При этом в условиях справедливого страхования лицам с низкой вероятностью наступления страхового случая будет

предложен единичный полис за $q^L=\rho^L=\frac{1}{4}$, тогда как индивидам, для которых характерен высокий риск инцидента, стоимость полиса будет выше: $q^H=\rho^H=\frac{1}{2}$.

Предположим теперь, что имеет место асимметрия информации в пользу страховщиков, которые точно знают вероятности наступления соответствующего ущерба, тогда как страхователь не располагает такими данными.

Индивиды с высоким риском будут полностью страховать вероятный ущерб: $\alpha^H=16$. При этом их выбор подчиняется ограничению совместимости по стимулам: $\sqrt{25-16}\bullet\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{25-\frac{1}{4}\alpha^L}+\frac{1}{2}\sqrt{25-16+\frac{3}{4}\alpha^L}$. Преобразуя данное условие: $2\sqrt{17}=\sqrt{25-\frac{\alpha^L}{4}}+\sqrt{9+\frac{3\alpha^L}{4}}$, или $34-\frac{\alpha^L}{2}=2\sqrt{25-\frac{\alpha^L}{4}}\sqrt{9+\frac{3\alpha^L}{4}}$, приходим к квадратному уравнению: $\alpha^{L2}-100\alpha^L+256=0$. Его решением могут быть две величины страхового полиса $\alpha^L=50\pm\sqrt{2244}$, из которых допустимым является меньшее. Таким образом, страховщики с низким риском выберут неполное страхование ущерба в размере $\alpha^L\approx 2,63$. Стоимости страховок будут такими же, как и в условиях полной информации.

---

1. Rothschild M., Stiglitz J.E. Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay on the Economics of Imperfect Information. *The Quarterly Journal of Economics*. 1976. Vol. 90. P. 630–649. ↩

2. Rothschild M., Stiglitz J.E. Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay on the Economics of Imperfect Information. *The Quarterly Journal of Economics*. 1976. Vol. 90. P. 647. ↩

8.2.3. Самоидентификация и самоотбор. Скрининг (фильтрация)

8.2.3.1. Модель Саланье

Модель неблагоприятного отбора со скринингом (или фильтрацией) для случая локального монополиста на рынке товара рассмотрим, следуя логике Бернара Саланье (2005), представившего ее в парадигме теории контрактов [1], где производитель взаимодействует с искушенными и неискушенными покупателями его товара, которых он не может идентифицировать по наблюдаемым признакам. В модели Саланье в качестве объекта рыночных сделок рассматривается вино. Им также мог бы быть мед, кофе или любой иной товар, в отношении изысканных сортов которого искушенные потребители – гурманы – проявляют более высокую готовность платить, а неискушенные потребители готовы платить меньше за менее престижные его разновидности. Отсюда – ключ к решению проблемы неблагоприятного отбора, в основе которого лежит сегментация рынка: продажа товара высокого качества по высокой цене искушенным потребителям и товара низкого качества по низкой цене - неискушенным потребителям. Однако для этого монополист должен предложить покупателям такие контракты, чтобы произошла их самоиднетификация по ненаблюдаемому признаку и самоотбор по соответствующим сегментам рынка.

Условия модели

Производитель:

- Несет издержки производства единицы товара качества q, равные $c(q)$, причем $c'(q)\geq 0$, $c''(q)\geq 0$, $c'(0)=0$ и $c'(\infty)=\infty$;
- Может производить товар любого качества: $q\in[0;\infty]$;
- Максимизирует прибыль: $\pi(q,p)=p-c(q)$, где p – цена единицы товара.

Потребители:

- За рассматриваемый период каждый потребитель планирует купить одну единицу товара;
- Каждый потребитель имеет функцию полезности: $u(q,p)=\theta\cdot q-p$, где θ – степень его искушенности;
- За одинаковый прирост качества товара искушенные потребители готовы заплатить больше, чем неискушенные, т.е.:

$$\forall\theta'>\theta, u\left(q,\theta'\right)-u\left(q,\theta\right) \text{ – возрастает по } q;$$

- Степень искушенности может принимать одно из двух значений: $\theta\in\{\theta_1,\theta_2\}$, где $0<\theta_1<\theta_2$, θ_1 – у неискушенных потребителей, θ_2 – у искушенных потребителей;
- β – доля неискушенных потребителей, т.е. вероятность $\rho(\theta=\theta_1)=\beta$.

Модель

Случай 1: симметричная информация – Парето-оптимальные контракты

Если бы информация о степени искушенности потребителей была распределена симметрично, производитель мог бы выявить тип потребителя θ_i до заключения сделок. Тогда оптимальные контракты определяются из решения задачи:

$$\begin{cases}\max_{q_i p_i}\left(p_i-c\left(q_i\right)\right),\\ \theta_i\bullet q_i-p_i\geq 0.\end{cases}$$

Итоговые контракты приводят к следующим результатам:

- потребителю θ_i предложен товар качества $q_i=q_i^*$ по цене $p^*=\theta_i\cdot q_i$;
- монополист присваивает весь потребительский излишек;
- получаемая потребителем полезность: $u(q_i,p_i)=0$.

На рис. 8.8 проиллюстрировано равновесие модели для Случая 1:

- линии u_0^1 и u_0^2 – кривые безразличия потребителей, получающих нулевую полезность: $p=\theta_1 q$ и $p=\theta_2 q$;

- кривые π_1 и π_2 – изопрофиты;

- q_1^* и q_2^* - эффективные уровни качества товара;

- так как $\theta_1<\theta_2$ и $c(q)$ – возрастающая функция, искушенный потребитель покупает товар более высокого качества, т.е. $q_2^*>q_1^*$;
- (q_1^*,p_1^*) и (q_2^*,p_2^*) – оптимальные контракты.

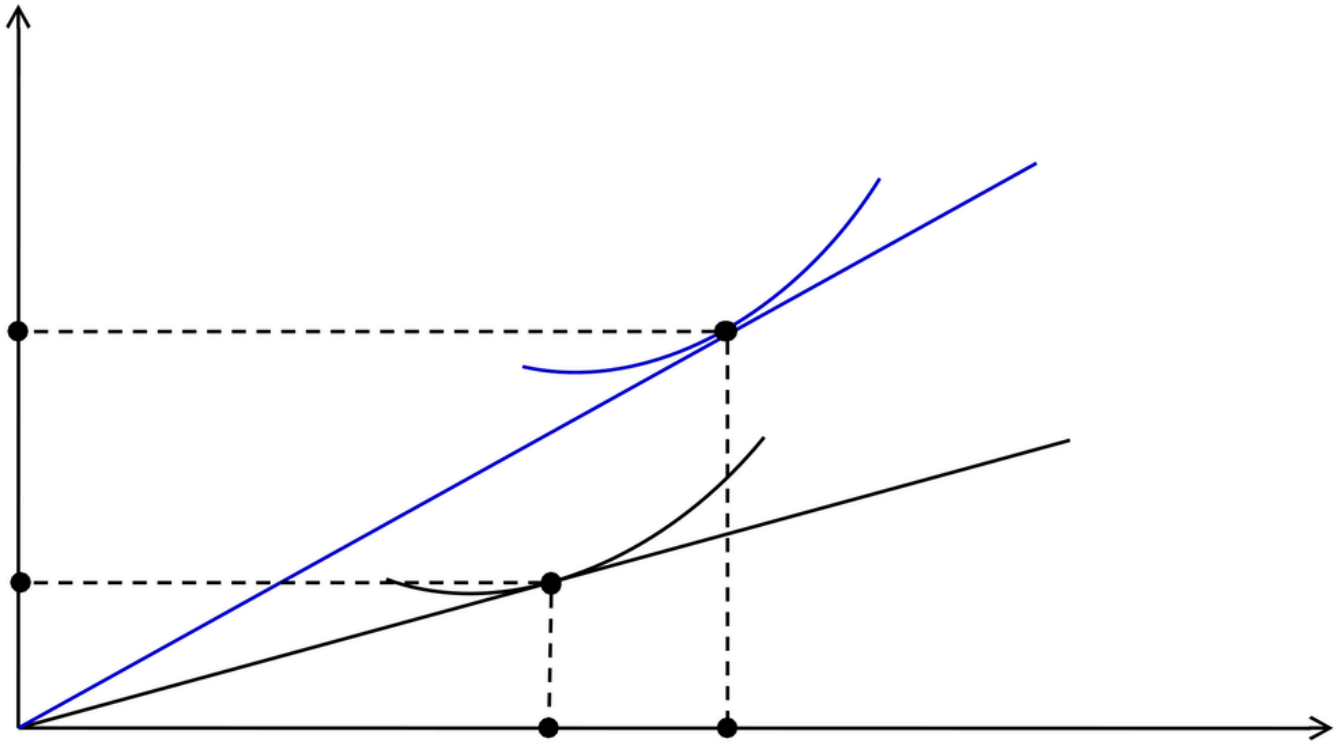


Рисунок 8.8. Равновесие при симметричной информации и Парето-оптимальных контрактах

Очевидно, что параметры сложившегося равновесия соответствуют ценовой дискриминации первой степени. При этом Саланье подчеркивает: «Этот тип дискриминации, называемый ценовой дискриминацией первой степени, как правило, запрещен законом, в соответствии с которым продажи должны быть анонимными: вы не можете отказать одному потребителю в точно такой же сделке, которую вы приготовили для другого потребителя. Однако для нас представляет интерес тот кейс, когда продавец не может непосредственно установить тип потребителя. В таком случае совершенная дискриминация невозможна вне зависимости от ее легального статуса» [2].

Случай 2: асимметричная информация – контракты «второго лучшего»

Если в условиях асимметрии информации производитель не может отличить потребителей по степени их искушенности и по-прежнему предложит контракты (q_1^*,p_1^*) и (q_2^*,p_2^*), оба типа потребителей могут выбрать контракт (q_1^*,p_1^*), т.к.:

$$\theta_2 \bullet q_1^*-p_1^* > 0=\theta_2 \bullet q_2^*-p_2^*.$$

Это будет означать падение прибыли производителя.

Как показано на рис. 8.9, производитель может получить более высокую прибыль, предложив контракт (q_1^*,p_1^*) и контракт A, который выберут только искушенные потребители (этот контракт будет расположен на более высокой изопрофите, чем π^1, и более высокой кривой безразличия [3], чем U_0^2).

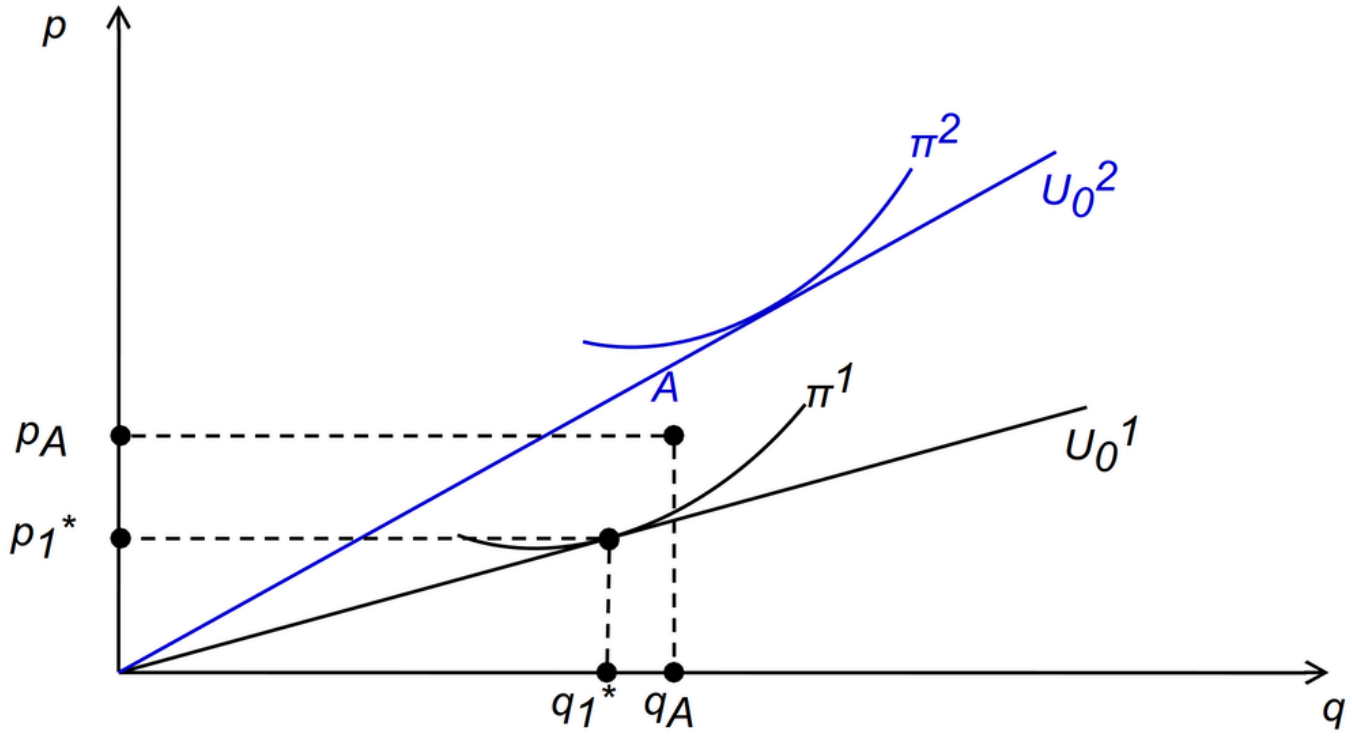


Рисунок 8.9. Возможные контракты «второго лучшего» при асимметричной информации

Для нахождения «второй лучшей» пары контрактов производитель решает задачу максимизации прибыли:

$$\max_{p_1,q_1,p_2,q_2} \{\beta \bullet [p_1\text{-}c(q_1)]+(1\text{-}\beta) \bullet [p_2\text{-}c(q_2)]\}$$

при ограничениях:

$$\theta_1 \bullet q_1\text{-}p_1 \geq \theta_1 \bullet q_2\text{-}p_2 \ (IC_1)$$
$$\theta_2 \bullet q_2\text{-}p_2 \geq \theta_2 \bullet q_1\text{-}p_1 \ (IC_2)$$
$$\theta_1 \bullet q_1\text{-}p_1 \geq 0 \ (IR_1)$$
$$\theta_2 \bullet q_2\text{-}p_2 \geq 0 \ (IR_2)$$

где:

- (IC_i), i=1,2 – «ограничения самоотбора» (self-selection constraints) или «ограничения совместимости стимулов» (incentive compatibility constraints);
- (IR_i), i=1,2 – «ограничения участия» (participation constraints) или «ограничения индивидуальной рациональности» (individual rationality constraints).

Для того чтобы решение задачи было найдено, по одному из ограничений в каждой паре должны выполняться как равенства. Исходя из условий модели, в равенства превращаются ограничения (IR_1) и (IC_2).

Таким образом, в оптимуме выполняются следующие условия:

1. (IR_1) превращается в равенство: $p_1=\theta_1 \cdot q_1$.
2. (IC_2) превращается в равенство, откуда: $p_2\text{-}p_1=\theta_2 \cdot (q_2\text{-}q_1)$.
3. Сложив (IC_1) и (IC_2) и приняв во внимание, что $\theta_1<\theta_2$, получаем: $q_2 \geq q_1$.
4. Можно пренебречь (IR_2) и (IC_1).
5. Искушенные потребители приобретают товар эффективного качества, т.е. $q_2=q_2^*$.

С помощью условий (1), (2) и (5) получаем:

$$\begin{cases} q_2=q_2^*, \\ p_1=\theta_1 \bullet q_1, \\ p_2=\theta_1 \bullet q_1+\theta_2 \bullet (q_2^*\text{-}q_1). \end{cases}$$

Подставим найденные выражения в функцию прибыли производителя:

$$\max_{q_1} \left\{ [\theta_1 q_1\text{-}c(q_1)]+\frac{(1\text{-}\beta)}{\beta} [\theta_1 q_1+\theta_2 q_2^*\text{-}\theta_2 q_1\text{-}c(q_2^*)] \right\}.$$

Из условия 1-го порядка:

$$c'(q_1)=\theta_1\text{-}\frac{(1\text{-}\beta)}{\beta}(\theta_2\text{-}\theta_1).$$

Отсюда: $c'(q_1) < \theta_1$.

Следовательно, качество товара, предлагаемого неискушенным потребителям, ниже эффективного.

Как показано на рис. 8.10, оптимальный контракт (q_1, p_1) лежит на кривой безразличия неискушенного потребителя, соответствующей нулевой полезности, а оптимальный контракт (q_2, p_2) – это точка касания изопрофиты продавца π^2 и кривой безразличия искушенного потребителя, проходящей через точку (q_1, p_1). При этом $q_2=q_2^*$, а $q_1<q_1^*$.

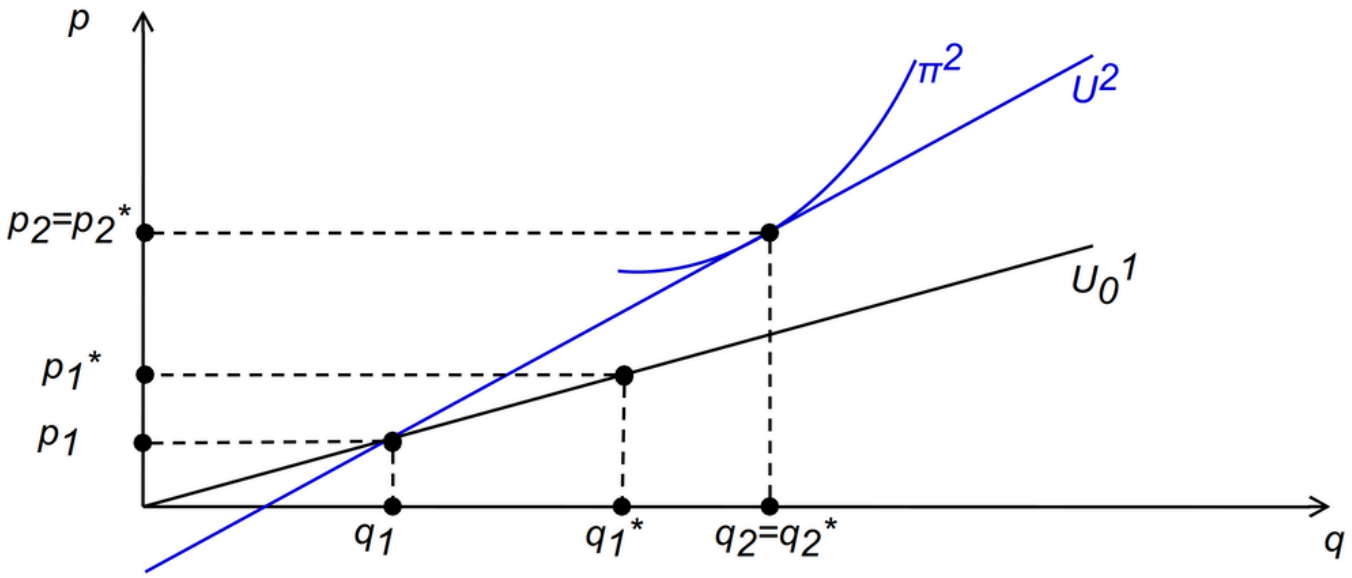


Рисунок 8.10. Равновесие при асимметричной информации: контракты «второго наилучшего»

Подводя итоги рассмотрения контрактов «второго наилучшего», Саланье обращает внимание на то, что «информационная рента – это центральная концепция моделей неблагоприятного отбора» [4] . *Информационная рента* – это потребительский излишек, который получает агент второго типа (искушенный потребитель), т.к. он всегда может выдать себя за агента первого типа (неискушенного потребителя) и, купив товар качества q_1, получить положительную полезность $\theta_2 \cdot q_1 - p_1$. Агент первого типа информационной ренты не получает (если он выдаст себя за агента второго типа, то получит отрицательную полезность $\theta_1 \cdot q_2 - p_2$).

Если на рынке существуют n типов агентов, таких, что $a_1<...<a_n$, то будут выполняться выделенные Саланье базовые свойства оптимального набора контрактов, характерные для моделей дискретного типа:

1. агенты с максимальным рангом (наиболее искушенные потребители) приобретают товары с эффективным уровнем качества;
2. агенты всех типов, кроме агентов с минимальным рангом (т.е. наименее искушенных потребителей), безразличны в выборе своего контракта и контракта агента со следующим меньшим рангом;
3. агенты каждого типа $a_2,...a_n$ будут получать информационную ренту, причем она будет возрастать от a_2 к a_n, а самый низший тип a_1 не получит ренты;
4. агенты всех рангов, кроме максимального, приобретают товары с неэффективным уровнем качества;
5. агенты с минимальным рангом получают нулевой излишек.

8.2.3.2. Модель скрининга: обобщение

Сформулируем задачу скрининга (фильтрации) покупателей в общем виде, а затем приведем числовой пример.

Допустим, что предельные издержки постоянны, т.е. что производитель работает в условиях постоянной отдачи от масштаба $(MC=AC=c=const)$ и продает количество $q \geq 0$ потребителю за общую плату в размере $F=F(q)$. Потребители могут быть двух типов: с высокой и с низкой оценкой товара. В модели обычно предполагается квазилинейность функций полезности покупателей. Предполагается, что они получают полезность в размере $U_i=\theta_i V(q)+M_i-F_i$, i=1,2; где M_i – доход потребителя, $V(q)$ – это валовой потребительский излишек, связанный с потреблением данного товара; причем $V(\bullet)$ известен всем, но информацией о θ_i располагает только потребитель. Будем предполагать для определенности, что $\theta_2 > \theta_1$.

В интересах производителя разработать контракты (q_i, F_i) таким образом, чтобы максимизировать ожидаемую прибыль: $EPR=\rho_1 (F_1-cq_1)+\rho_2 (F_2-cq_2)$.

Чтобы разработать стимулирующие контракты, максимизирующие прибыль в условиях неполной информации, монополист должен принимать во внимание «ограничения участия», или ограничения по гарантированному, резервному уровню полезности, для каждой группы покупателей:

$$\theta_i V(q_i)+M_i-F_i \geq \theta_i V(0)+M_i,$$

или

$$\theta_i V(q_i) \geq F_i+\theta_i V(0), i=\{1,2\};$$

а также «ограничения самоотбора» или «ограничения совместимости стимулов»:

$$\theta_i V(q_i)+M_i-F_i \geq \theta_i V(q_j)+M_i-F_j,$$

т.е.

$$\theta_i V(q_i)-F_i \geq \theta_i V(q_j)-F_j; i,j=\{1,2\}, i \neq j.$$

Поскольку должно выполняться «ограничение участия» для первой группы покупателей, постольку пассивным будет ограничение $(\theta_2 > \theta_1)$:

$$\theta_2 V(q_2) - F_2 \geq \theta_2 V(q_1) - F_1 > \theta_1 V(q_1) - F_1 \geq 0.$$

Итак, задача дискриминирующего монополиста принимает вид:

$$\max_{q_1,q_2,F_1,F_2} EPR = \max_{q_1,q_2,F_1,F_2} \left(\rho_1 (F_1 - TC_1(q_1)) + (1-\rho_1)(F_2 - TC_2(q_2))\right):$$
$$\theta_1 V(q_1) - F_1 \geq \theta_1 V(0),$$
$$\theta_1 V(q_1) - F_1 \geq \theta_1 V(q_2) - F_2,$$
$$\theta_2 V(q_2) - F_2 \geq \theta_2 V(q_1) - F_1.$$

Для решения данной задачи выписываем функцию Лагранжа:

$$L = \rho_1 (F_1 - cq_1) + (1-\rho_1)(F_2 - cq_2) + \lambda(\theta_1 V(q_1) - F_1 - \theta_1 V(0)) + \mu(\theta_1 V(q_1) - F_1 - \theta_1 V(q_2) + F_2) + \nu(\theta_2 V(q_2) - F_2 - \theta_2 V(q_1) + F_1).$$

Оптимальность деятельности монополиста предполагает равенство нулю производных лагранжиана по искомым переменным:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q_1} = -c\rho_1 + ((\lambda+\mu)\theta_1 - \nu\theta_2)\frac{\partial V(q_1)}{\partial q_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} = -c(1-\rho_1) + (\nu\theta_2 - \mu\theta_1)\frac{\partial V(q_2)}{\partial q_2} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial F_1} = \rho_1 - \lambda - \mu + \nu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial F_2} = 1 - \rho_1 + \mu - \nu = 0, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} ((\lambda+\mu)\theta_1 - \nu\theta_2)\frac{\partial V(q_1)}{\partial q_1} = c\rho_1, \\ (\nu\theta_2 - \mu\theta_1)\frac{\partial V(q_2)}{\partial q_2} = c(1-\rho_1), \\ \lambda + \mu - \nu = \rho_1, \\ \nu - \mu = 1 - \rho_1, \end{cases}$$

а также условиями дополняющей нежесткости:

$$\begin{cases} \lambda(\theta_1 V(q_1) - F_1 - \theta_1 V(0)) = 0, \lambda \geq 0, \theta_1 V(q_1) \geq F_1 + \theta_1 V(0), \\ \mu(\theta_1 V(q_1) - F_1 - \theta_1 V(q_2) + F_2) = 0, \mu \geq 0, \theta_1 V(q_1) - F_1 \geq \theta_1 V(q_2) - F_2, \\ \nu(\theta_2 V(q_2) - F_2 - \theta_2 V(q_1) + F_1) = 0, \nu \geq 0, \theta_2 V(q_2) - F_2 \geq \theta_2 V(q_1) - F_1. \end{cases}$$

Из первых двух равенств в предпоследней системе имеем эквимаржинальное условие оптимальности контракта:

$$\frac{\frac{\partial V(q_1)}{\partial q_1}}{\frac{\partial V(q_2)}{\partial q_2}} = \frac{\rho_1}{(1-\rho_1)} \bullet \frac{(\nu\theta_2 - \mu\theta_1)}{((\lambda+\mu)\theta_1 - \nu\theta_2)}.$$

Далее, сложив последние два равенства в предпоследней системе, получаем $\lambda = 1$, а значит, «ограничение участия» для первой группы покупателей является жестким:

$$F_1 = \theta_1 V(q_1) - \theta_1 V(0). \quad (8.2.1)$$

При этом второе из условий дополняющей нежесткости принимает вид:

$$\mu(\theta_1 V(0) + F_2 - \theta_1 V(q_2)) = 0, \mu \geq 0, \theta_1 V(q_2) - F_2 \leq \theta_1 V(0),$$

а эквимаржинальное условие, в силу того что $\mu = \nu + \rho_1 - 1$, будет выглядеть так:

$$\frac{\frac{\partial V(q_1)}{\partial q_1}}{\frac{\partial V(q_2)}{\partial q_2}} = \frac{\rho_1}{(1-\rho_1)} \bullet \frac{(\nu(\theta_2 - \theta_1) + (1-\rho_1)\theta_1)}{(\rho_1\theta_1 - \nu(\theta_2 - \theta_1))} = \frac{\rho_1}{(1-\rho_1)} \bullet \left(\frac{\theta_1}{(\rho_1\theta_1 - \nu(\theta_2 - \theta_1))} - 1\right).$$

Если $\nu = 0$, то $\mu = \rho_1 - 1 < 0$, что противоречит условию $\mu \geq 0$. Следовательно, $\nu > 0$ и «ограничение самоотбора» для второй группы покупателей является жестким:

$$\theta_2 V(q_2) - F_2 = \theta_2 V(q_1) - F_1 = (\theta_2 - \theta_1) V(q_1) + \theta_1 V(0),$$

т.е.

$$F_2 = \theta_2 V(q_2) - (\theta_2 - \theta_1) V(q_1) - \theta_1 V(0). \quad (8.2.2)$$

Предположим, что модифицированное «ограничение совместимости стимулов» для первой группы покупателей с учетом ее жесткого «ограничения участия» является активным, т.е. $\theta_1 V(q_2) = F_2 + \theta_1 V(0)$. Тогда из жесткости «ограничения самоотбора» для второй группы следует $(\theta_2 - \theta_1) V(q_2) = (\theta_2 - \theta_1) V(q_1)$, т.е. $V(q_2) = V(q_1)$, а значит, $q_1 = q_2$ и $\frac{\partial V(q_1)}{\partial q_1} = \frac{\partial V(q_2)}{\partial q_2}$. Тогда из эквимаржинального условия будет следовать соотношение $\frac{\rho_1}{(1-\rho_1)} \bullet \left(\frac{\theta_1}{(\rho_1\theta_1 - \nu(\theta_2 - \theta_1))} - 1\right) = 1$, или $\frac{\theta_1}{(\rho_1\theta_1 - \nu(\theta_2 - \theta_1))} = \frac{1}{\rho_1}$, а значит, $-\nu(\theta_2 - \theta_1) = 0$, т.е. $\theta_2 = \theta_1$, что противоречит постановке задачи оптимизации системы контрактов. Возникшее противоречие доказывает нежесткость «ограничения самоотбора» для первой группы покупателей $(F_2 > \theta_1 V(q_2) - \theta_1 V(0))$ и равенство нулю соответствующего множителя Лагранжа: $\mu = 0$. Это позволяет определить значение последнего множителя Лагранжа: $\nu = 1 - \rho_1$, а значит, и предельные полезности для первой и второй групп покупателей, соответственно:

$$\frac{\partial V(q_1)}{\partial q_1} = \frac{c\rho_1}{\theta_1 - (1-\rho_1)\theta_2}, \frac{\partial V(q_2)}{\partial q_2} = \frac{c}{\theta_2}.$$

Их значения задают объемы продаваемых товаров (услуг). С учетом рассчитанной выше стоимости данных партий товаров (8.2.1-8.2.2) получаем оптимальные контракты, которые дают возможность монополисту осуществить скрининг покупателей $(q_i, F_i), i=\{1,2\}$.

Числовой пример

Предположим, что монополист выпускает товар с постоянными предельными издержками c=¼ и продает количество q≥0 потребителю за общую плату в размере $F=F(q)$. Потребители могут быть двух типов: с высокой и с низкой оценкой товара. Они получают полезность в размере $U_i=\theta_i V(q)+M_i$-F_i, i=1,2; где выражение для потребительского излишка имеет вид $V(q)=\ln(q+1)$, а доходы потребителей – одинаковы $(M_1=M_2=M)$; причем $V(\bullet)$ известен всем, но информацией о θ_i располагает только потребитель. Продавец знает, что θ может принимать два значения $\theta_1=2$ либо $\theta_2=3$ с равной вероятностью $\rho_1=\rho_2=½$. В интересах производителя разработать контракты (q_i, F_i) таким образом, чтобы максимизировать ожидаемую прибыль: $EPR=\rho_1(F_1$-$cq_1)+\rho_2(F_2$-$cq_2)$.

Разработаем вначале оптимальные контракты при полной информации, минимизирующие потери общественного благосостояния. В такой ситуации монополист будет максимизировать ожидаемую прибыль $EPR=½(F_1$-$¼q_1)+½(F_2$-$¼q_2)$ при выполнении «ограничения участия» для каждой группы покупателей: $\theta_i\ln(q_i+1)\geq F_i, i=\{1,2\}$. Итак, задача монополиста имеет вид:

$$\max_{q_1,q_2,F_1,F_2} EPR=\max_{q_1,q_2,F_1,F_2}(½(F_1\text{-}¼q_1)+½(F_2\text{-}¼q_2)):$$
$$2\ln(q_1+1)\geq F_1,$$
$$3\ln(q_2+1)\geq F_2.$$

Решая данную задачу на связанный экстремум, выписываем функцию Лагранжа:

$$L=½(F_1\text{-}¼q_1)+½(F_2\text{-}¼q_2)+\lambda(2\ln(q_1+1)\text{-}F_1)+\mu(3\ln(q_2+1)\text{-}F_2).$$

Оптимальность прибыли монополиста будут характеризоваться равенством нулю производных лагранжиана по искомым переменным:

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial q_1}=\text{-}\frac{1}{8}+\frac{2\lambda}{q_1+1}=0,\\ \frac{\partial L}{\partial q_2}=\text{-}\frac{1}{8}+\frac{3\mu}{q_2+1}=0,\\ \frac{\partial L}{\partial F_1}=\frac{1}{2}\text{-}\lambda=0,\\ \frac{\partial L}{\partial F_2}=\frac{1}{2}\text{-}\mu=0,\end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases}\frac{2\lambda}{q_1+1}=\frac{3\mu}{q_2+1}=\frac{1}{8},\\ \lambda=\mu=\frac{1}{2};\end{cases}$$

а также условиями дополняющей нежесткости:

$$\begin{cases}\lambda(2\ln(q_1+1)\text{-}F_1)=0, \lambda\geq 0, 2\ln(q_1+1)\geq F_1,\\ \mu(3\ln(q_2+1)\text{-}F_2)=0, \mu\geq 0, 3\ln(q_2+1)\geq F_2.\end{cases}$$

Из предпоследней системы следует, во-первых, что $\frac{2}{q_1+1}=\frac{3}{q_2+1}=\frac{1}{4}$, и, во-вторых, что $\lambda=\mu>0$, а значит, в силу условий дополняющей нежесткости «ограничения участия» выполняются как равенства:

$$\begin{cases}2\ln(q_1+1)=F_1,\\ 3\ln(q_2+1)=F_2.\end{cases}$$

Таким образом, оптимальные контракты для первой и второй группы покупателей в условиях полной информации будут иметь вид:

$$(q_1; F_1)=(7; 2\ln 8),\ (q_2; F_2)=(11; 3\ln 12).$$

Разработаем теперь стимулирующие контракты, максимизирующие прибыль монополиста в условиях неполной информации, дополнительно к «ограничениям участия» потребуются «ограничения совместимости стимулов». Поскольку «ограничение совместимости стимулов» для первой группы будет пассивным, постольку задача дискриминирующего монополиста принимает вид:

$$\max_{q_1,q_2,F_1,F_2} EPR=\max_{q_1,q_2,F_1,F_2}(½(F_1\text{-}¼q_1)+½(F_2\text{-}¼q_2)):$$
$$2\ln(q_1+1)\geq F_1,$$
$$2\ln(q_1+1)\text{-}F_1\geq 2\ln(q_2+1)\text{-}F_2,$$
$$3\ln(q_2+1)\text{-}F_2\geq 3\ln(q_1+1)\text{-}F_1.$$

Для решения данной задачи выписываем функцию Лагранжа:

$$L=½(F_1\text{-}¼q_1)+½(F_2\text{-}¼q_2)+\lambda(2\ln(q_1+1)\text{-}F_1)+\mu(2\ln(q_1+1)\text{-}F_1\text{-}2\ln(q_2+1)+F_2)+\nu(3\ln(q_2+1)\text{-}F_2\text{-}3\ln(q_1+1)+F_1).$$

Оптимальность деятельности монополиста предполагает равенство нулю производных лагранжиана по искомым переменным:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q_1} = -\frac{1}{8} + \frac{2(\lambda+\mu)-3\nu}{q_1+1} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} = -\frac{1}{8} + \frac{3\nu-2\mu}{q_2+1} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial F_1} = \frac{1}{2} - \lambda - \mu + \nu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial F_2} = \frac{1}{2} + \mu - \nu = 0, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} q_1 = 16(\lambda+\mu) - 24\nu - 1, \\ q_2 = 24\nu - 16\mu - 1, \\ \lambda + \mu - \nu = \frac{1}{2}, \\ \nu - \mu = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

а также условиями дополняющей нежесткости:

$$\begin{cases} \lambda(2\ln(q_1+1) - F_1) = 0, \lambda \geq 0, 2\ln(q_1+1) \geq F_1, \\ \mu(2\ln(q_1+1) - F_1 - 2\ln(q_2+1) + F_2) = 0, \mu \geq 0, 2\ln(q_1+1) - F_1 \geq 2\ln(q_2+1) - F_2, \\ \nu(3\ln(q_2+1) - F_2 - 3\ln(q_1+1) + F_1) = 0, \nu \geq 0, 3\ln(q_2+1) - F_2 \geq 3\ln(q_1+1) - F_1. \end{cases}$$

Из первых двух равенств в предпоследней системе имеем эквимаржинальное условие оптимальности контракта:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{16(\lambda+\mu) - 24\nu - 1}{24\nu - 16\mu - 1}.$$

Сложив последние два равенства в предпоследней системе, получаем $\lambda = 1$, а значит, «ограничение участия» для первой группы покупателей является жестким: $2\ln(q_1+1) = F_1$.

При этом второе из условий дополняющей нежесткости принимает вид: $\mu(F_2 - 2\ln(q_2+1)) = 0, \mu \geq 0, 2\ln(q_2+1) - F_2 \leq 0$.

Если $\nu = 0$, то $\mu = -\frac{1}{2}$, что противоречит условию $\mu \geq 0$. Следовательно, $\nu > 0$ и «ограничение самоотбора» для второй группы покупателей является жестким: $3\ln(q_2+1) - F_2 = 3\ln(q_1+1) - F_1 = \ln(q_1+1)$, т.е. $F_2 = 3\ln(q_2+1) - \ln(q_1+1)$.

Предположим, что модифицированное «ограничение совместимости стимулов» для первой группы покупателей с учетом ее жесткого условия участия является активным, т.е. $2\ln(q_2+1) = F_2$. Тогда из жесткости «ограничения самоотбора» для второй группы следует $\ln(q_2+1) = \ln(q_1+1)$, а значит, $q_1 = q_2$. Тогда эквимаржинальное условия будет давать $\nu = 0$, чего не может быть. Возникшее противоречие доказывает нежесткость «ограничения самоотбора» для первой группы покупателей $(F_2 > 2\ln(q_2+1))$ и равенство нулю соответствующего множителя Лагранжа: $\mu = 0$. Это позволяет определить значение последнего множителя Лагранжа: $\nu = \frac{1}{2}$, а значит, и величины партий товара для первой и второй групп покупателей, соответственно: $q_1 = 3, q_2 = 11$.

Таким образом, оптимальные контракты, позволяющие монополисту осуществить скрининг покупателей, будут такими:

$$(q_1; F_1) = (3; 2\ln 4),\ (q_2; F_2) = (11; \ln 432).$$

Междисциплинарный взгляд:
Решение проблемы скрытых характеристик – сканирование рынка (Материал интерактивного цифрового учебника «Институциональная экономика»)

1. Salanié B. The Economics of Contracts: A Primer. 2nd Ed. Cambridge: The MIT Press, 2005. ↩

2. Ibid. P. 20-21. ↩

3. Полезность потребителя в рассматриваемой модели возрастает при сдвиге кривой безразличия вправо-вниз. ↩

4. Ibid. P. 26. ↩

8.2.4. Неблагоприятный отбор на рынке труда. Сигнализирование

8.2.4.1. Предварительные замечания и определения

Асимметрия информации и проблема неблагоприятного отбора широко распространены на рынке труда.

С одной стороны, в большинстве случаев работодатель не имеет точного представления о производственных способностях человека в момент его найма. Более того, эта информация также не обязательно становится доступной работодателю сразу после приема сотрудника на работу. Может потребоваться довольно продолжительное время, чтобы раскрылись положительные и негативные трудовые качества работника. Зачастую сотруднику необходимо время, чтобы освоиться или даже пройти специальную подготовку на рабочем месте. Следовательно, прием сотрудника на работу может быть рассмотрен как инвестиционное решение в условиях неопределенности.

С другой стороны, так же, как у работодателей нет полной информации о потенциальных сотрудниках, соискатели недостаточно информированы о качестве рабочих мест, рабочей среды и трудового коллектива.

Очевидно, что асимметрия информации, имеющая место на рынке труда до заключения контрактов, может приводить к неблагоприятному отбору. Сгладить эту проблему можно через сигнализирование.

«Термин «рыночное сигнализирование» не является полноправной частью четко определенного, технического словаря экономиста» [1], - так писал А. Майкл Спенс в 1973 г., когда исследования рынков с асимметричной информацией еще только вступали в активную фазу. В современной теории *сигнализирование* определяется как *наличие или распространение общедоступных сведений, позволяющих судить о скрытых характеристиках объекта рыночной сделки*, что снижает негативные последствия неблагоприятного отбора. Во многом благодаря Спенсу понятия «сигнал» [2] и «сигнализирование» утвердились в экономических исследованиях, поскольку значительное разнообразие рыночных и квазирыночных явлений можно с пользой рассмотреть через концептуальную призму, примененную американским экономистом к рынку труда, где сигнальную силу имеет образование, опыт работы, раса, пол и множество других наблюдаемых личностных характеристик. В связи с этим при исследовании сигнализирования на рынке с асимметричной информацией основное внимание должно быть уделено определению и свойствам сигнальных равновесий, а также аллокативной эффективности рынка.

Рассмотрим сигнализирование на рынке труда, прежде всего, придерживаясь базовой оригинальной модели Спенса, предложенной в 1973 г., затем покажем модификацию этой модели в Нобелевской лекции автора в 2001 г., а также проследим ее интерпретацию и развитие в парадигме теории контрактов с элементами теории игр.

БОЛЬШАЯ РОССИЙСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ	Заглянем в Большую российскую энциклопедию: Сигнал (в экономике)

8.2.4.2. Модель Спенса

8.2.4.2.1. Предпосылки модели

Предпосылки модели Спенса:

1. На рынке труда имеет место асимметрия информации: работодатель не может получить непосредственное представление о предельном продукте труда работника до его найма.
2. Фирма-работодатель нейтральна к риску.
3. Заработная плата работникам назначается на уровне ожидаемого фирмой предельного продукта труда, который определяется на основе наблюдаемых характеристик. Фактически, работодатель выплачивает индивиду в качестве заработной платы денежный эквивалент лотереи. «То, что он наблюдает, — это множество личных данных в форме наблюдаемых характеристик и атрибутов человека, и именно они должны в конечном итоге определить оценку лотереи, которую он покупает» [3].
4. В качестве наблюдаемой характеристики, выступающей в роли сигнала о производительности работника, рассматривается образование. Важно принимать во внимание разницу между наблюдаемыми индивидуальными признаками (раса, пол, возраст и др. – их Спенс называет «индексами»), которые не являются предметами выбора индивида, и сигналами, которыми индивид может манипулировать, чтобы претендовать на желаемую заработную плату в имеющемся на рынке труда меню заработных плат. В этом плане образование является именно сигналом, а не «индексом».
5. Подача сигнала – получение образования – сопряжена с издержками сигнализирования, которые индивид несет осознанно. «Издержки сигнализирования следует интерпретировать широко, включая в них психические, а также прямые денежные и другие затраты. Например, одним из элементов затрат является время» [4].
6. Инвестируя в образование, или выбирая сигнал для получения соответствующей заработной платы, индивид стремится максимизировать разницу между заработной платой и издержками сигнализирования.
7. Издержки сигнализирования и производительность индивидов отрицательно коррелированы для рассматриваемых рабочих мест (что может не соблюдаться для иных видов занятости). «Наиболее уместно рассматривать это как необходимое условие того, чтобы наблюдаемая изменяемая характеристика была постоянным информативным сигналом на рынке» [5].
8. В рассматриваемой системе имеет место циклическая ответная реакция. Соискатели рабочих мест выбирают уровень образования, который будет сигнализировать работодателю об их производительности. Представления работодателя о производительности индивидов отражаются в предложенном им меню заработных плат для различных уровней образования. Получив информацию о фактической взаимосвязи уровня образования и производительности работников после их найма, фирма корректирует меню заработных плат, что, в свою очередь, ведет к коррекции инвестиций в образование со стороны индивидов. Таким образом, каждый цикл порождает следующий.
9. Стационарность системы гарантируется рассмотрением представлений фирм как самоподтверждающихся, а поведения соискателей – как воспроизводящегося.
10. Равновесные значения параметров модели – это такие значения, которые циклически регенерируют сами себя. «Равновесие можно рассматривать как набор представлений работодателя, которые генерируют предлагаемое меню заработных плат, сигналы о решениях соискателя, прием на работу и затем - новые рыночные данные, которые с течением времени согласуются с первоначальными представлениями» [6].

8.2.4.2.2. Базовая версия модели

Условия базовой версии модели:

1. Соискателями рабочих мест фирмы-работодателя являются две группы индивидов: Группа 1, представители которой имеют постоянную предельную производительность, равную 1, и Группа 2, представители которой имеют постоянную предельную производительность, равную 2.
2. В общей численности соискателей рабочих мест доля представителей Группы 1 составляет q_1, а доля представителей Группы 2 равна 1-q_1.
3. Уровень (продолжительность и достижения) образования [7], которое выступает в роли единственного сигнала о качестве рабочей силы и является результатом индивидуального выбора, измеряется показателем *y*. При этом образование не влияет на производительность работников, а служит лишь сигналом о ней.

4. Получение *y* единиц образования сопряжено с денежными и психическими издержками: для представителя Группы 1 они равны $c_1(y)=y$, для представителя Группы 2 они составляют $c_2(y)=y/2$.

Модель

Представители обеих групп работников должны совершить свой оптимальный выбор, максимизирующий разницу между заработной платой и издержками получения образования.

Пусть работодатель полагает, что *y** - такой уровень образования, что если *уто предельная производительность работника составит 1, а если y>y*, то предельная производительность работника составит 2. Тогда предлагаемое работодателем меню заработных плат будет отражать график w(y), который имеет скачок в зарплате от 1 до 2 при получении индивидом уровня образования y*, как это представлено на рис. 8.11.*

Для тех индивидов, которые планируют получить образование в объеме *уоптимальным будет выбор y=0, поскольку образование сопряжено с издержками, которые необходимо минимизировать, но при любом 0≤узаработная плата не превысит 1. Такой выбор будет оптимальным для представителей Группы 1. Для тех индивидов, которые планируют получить образование в объеме y>y*, оптимальным будет выбор y=y*, поскольку сразу по достижении уровня образования y* заработная плата составит 2, что делает бессмысленными издержки на продолжение обучения. Этот выбор будет оптимальным для работников из Группы 2.*

Тогда представления работодателя подтвердятся и сложится *сигнальное разделяющее (сепарирующее) равновесие* при $y_1^*=0, w_1^*=1$ и $y_2^*=y^*, w_2^*=2$, в котором *y** служит сигналом, позволяющим работодателю сепарировать группы соискателей.

Условия, которые налагаются на поведение двух групп индивидов, чтобы представления работодателя были подтверждающимися, можно сформулировать алгебраически.

Представители Группы 1 выберут *y*=0, если: 1>2-*y**.

Представители Группы 2 выберут *y*=*y**, если: 2-*y**/2>1.

Совместив эти условия, получаем вывод о том, что параметр *y** должен удовлетворять неравенству:

$$1 < y^* < 2.$$

Следует обратить внимание на специфические черты сложившегося равновесия.

Во-первых, в рамках рассматриваемого в модели типа представлений работодателей существует бесконечное число возможных значений *y**. Это означает, что возможно бесконечное число равновесий, в каждом из которых работодатель может сделать точечные прогнозы относительно производительности любого человека на основе наблюдаемой характеристики - уровня образования. Это обстоятельство базируется на предположении, что затраты на образование отрицательно коррелируют с производительностью. Однако даже при таком предположении могут существовать равновесия, в которых работодатель испытывает неопределенность относительно производительности соискателей, что будет показано ниже.

Во-вторых, возможные равновесия не эквивалентны с точки зрения благосостояния экономических субъектов. Повышение уровня *y** ухудшает благосостояние Группы 2, не затрагивая интересы представителей Группы 1.

Интерактивный рисунок из 3-х частей (Информация для технического специалиста: в качестве образца для оформления рисунка используйте Figure 7.4a, 7.4b по ссылке: https://www.core-econ.org/the-economy/microeconomics/07-firm-and-customers-02-breakfast-cereal.html#figure-7-4ad)

Рисунок 8.11. Сигнальное разделяющее равновесие на рынке труда (образование не влияет на производительность работников)

В-третьих, в результате сигнализирования решается проблема асимметрии информации, но поскольку инвестирование в сигнал расточает ресурсы (денежные, психические и др.) без повышения производительности, результатом становится Парето-неэффективное сигнальное равновесие. Далее, «чтобы решить, насколько эффективна или неэффективна эта система, необходимо рассмотреть реальные альтернативы возможным в обществе рыночным процедурам сортирования. Следует обратить внимание, что даже в рамках рыночной модели существуют более или менее эффективные способы осуществления сортирования» [8], - отмечает Спенс. При этом увеличение *y** ни на йоту не улучшает качество сортирования, лишь увеличивая расходование ресурсов. Более эффективным будет равновесие, в котором $y_1^*=0, w_1^*=1$ и $y_2^*=y^*=1+\varepsilon, w_2^*=2$, где ε – небольшое положительное число (рис. 8.11). В таком равновесии избыточные инвестиции в сигнал, осуществляемые Группой 2, снижены до минимума.

В-четвертых, в отсутствие сигнализирования благосостояние представителей обеих групп могло бы быть выше, поскольку в *объединяющем (агрегирующем) равновесии* каждому работнику выплачивался бы достоверный эквивалент ожидаемого фирмой предельного продукта:

$$EMP=q_1+2\,(1-q_1)=2-q_1.$$

К примеру, если $q_1=0,5$, тогда *EMP*=1,5, что выше чистого дохода как в отсутствие издержек на получение образования, так и при получении образования (2-*y**/2<1,5, поскольку *y**>1) ради сигнализирования.

Общее правило для подобных случаев Спенс формулирует следующим образом: «Как правило, в случае дискретных групп агрегирование с группами более низкого уровня становится привлекательным, если они сравнительно малы» [9]. Происходит это потому, что группа с высокой производительностью теряет не так много из-за ошибочного представления, что ее производительность является средней, но при этом она не несет издержек сигнализирования. Тогда объединяющее равновесие становится Парето-доминирующим.

В-пятых, приблизить систему к более эффективному равновесию, снижающему избыточное расточительство ресурсов на инвестиции в сигнал без потери его информационной составляющей, можно, если ввести налог на образование. При этом налоговые поступления следует распределять всем работникам вне зависимости от их уровня образования, чтобы избежать влияния налога на выбор сигнала.

Пусть:

- *t* - ставка налога на образование;

- *k* – распределение общей (паушальной) суммы налоговых поступлений, которые поступают к каждому работнику вне зависимости от группы;
- *y** - сигнализирующий уровень образования, при котором происходит скачок в зарплате от 1 до 2.

Тогда условием рационального выбора индивидов из Группы 1 – не получать образование в качестве сигнала – станет:

$$2-(1+t)y^*+k<1+k.$$

Индивиды из Группы 2 рационально предпочтут получить образование как сигнал при условии:

$$2-(0,5+t)y^*+k>1+k.$$

Следовательно, равновесное значение *y** будет удовлетворять неравенству:

$$\frac{1}{1+t}<1<\frac{1}{0,5+t}.$$

Предположим, что работодатель выбирает наиболее эффективное значение сигнализационного уровня образования:

$$y^*=\frac{1+\varepsilon}{1+t},$$

где ε – небольшое положительное число.

Распределение общей (паушальной) суммы налоговых поступлений равно налоговым поступлениям:

$$k=\frac{1+\varepsilon}{1+t}t\,(1-q_1).$$

В итоге равновесные чистые доходы индивидов из Группы 1 (N_1) и Группы 2 (N_2) соответственно равны:

$$N_1=1+k,$$

$$N_2=2-\frac{(0,5+t)(1+\varepsilon)}{1+t}+k.$$

Чем меньше ε и больше *t*, тем сильнее *k* стремится к (1-q_1), а N_1 и N_2 стремятся к (2-q_1) – заработной плате индивидов в объединяющем равновесии.

Таким образом, в результате сниженного уровня сигнала складывается разделяющее равновесие, но с более эффективными результатами, характерными для объединяющего равновесия.

В-шестых, не всегда все индивиды проигрывают из-за наличия сигнализирования. Небольшой высокопроизводительной группе может оказаться выгодно выделиться благодаря сигналу. Покажем это, перейдя от рассмотренного примера к общему случаю, модифицировав условие модели относительно издержек.

Пусть получение образования сопряжено с денежными и психическими издержками для представителя Группы 1 в размере $c_1(y)=a_1y$, для представителя Группы 2 – в размере $c_2(y)=a_2y$, где $a_2<a_1$. С учетом этих затрат на сигнализирование для выбора, подтверждающего представления работодателя, должны выполняться условия:

$$1>2-a_1y^*$$

и

$$2-a_2y^*>1.$$

Общее условие будет следующим:

$$\frac{1}{a_2}<y^*<\frac{1}{a_1}.$$

Следовательно, благосостояние Группы 2 будет выше при сигнализировании, если:

$$2-\frac{a_2}{a_1}>EMP=2-q_1$$

или

$$q_1>\frac{a_2}{a_1}.$$

Таким образом, то, «насколько небольшим должно быть «меньшинство» Группы 2, чтобы иметь возможность получать выгоду от передачи сигналов, зависит от соотношения предельных затрат на передачу сигналов двух групп» [10].

Важно отметить, что на рассматриваемом рынке возможны и другие равновесия с совершенно иными свойствами.

Предположим, что представления работодателя имеют следующий вид:

- если $y<y^*$, то индивид представляет Группу 1 с вероятностью q_1 или Группу 2 с вероятностью 1-q_1;
- если $y\geq y^*$, то индивид представляет Группу 2 с вероятностью 1.

Если индивиды по-прежнему выбирают между уровнями образования $y=0$ или $y=y^*$, то заработная плата для $y=0$ должна быть равна ожидаемому предельному продукту труда $EMP=2-q_1$, а для $y=y^*$ она должна быть равна 2. Очевидно, что оптимальным выбором для всех индивидов станет $y=0$, если к представителям Группы 1 присоединятся представители Группы 2, для которых будет выполняться условие:

$$2-q_1>2-\frac{y^*}{2}$$

или

$$y^*>2q_1.$$

При выполнении этого условия представления работодателя подтверждаются, и складывается равновесие при y=0 и w=2-q_1 у всех работников. Однако в этом типе равновесия информация об образовании не передает никакого сигнала работодателю. Фактически сигнальное равновесие выглядит как равновесие в модели без сигналов.

При этом нельзя утверждать, что убеждения работодателя о связи между производительностью и образованием при $y \geq y^*$ не существуют. Они могут косвенно подтверждаться. К примеру, работодатель может не хотеть принимать на работу так называемых сверхквалифицированных индивидов. В таком случае представления работодателя «вытесняют» определенные категории соискателей на другой рынок труда (или его сегмент), что невозможно показать в простой модели с одним работодателем и одним рынком.

Существует также вариант сигнального равновесия, в котором каждый индивид выбирает уровень образования $y=y^*>0$. Необходимые для него представления работодателя заключаются в следующем:

- если $y<y^*$, то индивид представляет Группу 1 с вероятностью 1;
- если $y \geq y^*$, то индивид представляет Группу 1 с вероятностью q_1 или Группу 2 с вероятностью 1-q_1.

Если индивиды выбирают между уровнями образования y=0 или $y=y^*$, то заработная плата для y=0 должна быть равна 1, а для $y=y^*$ она должна быть равна ожидаемому предельному продукту труда EMP=2-q_1.

Следуя логике модели, представления работодателя подтверждаются в случае, когда к представителям Группы 2 присоединятся индивиды из Группы 1, и тогда каждый индивид получает уровень образования $y=y^*$. Это происходит при условии:

$$2\text{-}q_1\text{-}y^* > 1$$

или

$$y^*<1\text{-}q_1.$$

Вновь уровень образования не несет никакой сигнальной информации, но в данном случае инвестирование в образование становится рациональным решением. При ином выборе заработная плата индивидов была бы ниже, и потери превышали бы выгоды. Смысл этой версии сигнального равновесия состоит в том, что могут существовать стабильные требования для рабочих мест, что не предполагает заинтересованности в передаче сигнальной информации. Причем, это обстоятельство не зависит от соотношения затрат и производительности. К примеру, профессиональные требования к должности предполагают наличие высшего образования, индивидуальные издержки получения которого могут быть разными, но к сигнализированию они не имеют отношения.

При этом важно помнить, что в отсутствие отрицательной корреляции между затратами на образование и производительностью, образование в принципе не может быть эффективным сигналом на рынке труда. Однако отрицательная корреляция является необходимым, но не достаточным условием для передачи сигналов. Чтобы это показать, в контексте рассматриваемой модели Спенс предполагает, что y может принимать только два значения, равные 1 и 3. Тогда не будет существовать допустимого значения y^*, которое сделало бы получение образования выгодным для Группы 2. Три единицы — это слишком много, а одна единица не позволит отличить Группу 2 от Группы 1. Следовательно, эффективное сигнализирование зависит не только от отрицательной корреляции издержек сигнализирования и производительности, но и от наличия «достаточного» числа сигналов в пределах соответствующего диапазона.

Анализ аллокативной эффективности показывает, что в сигнальных равновесиях «каждый либо становится беднее, либо не становится богаче» [11], поскольку либо вынужден инвестировать в сигнал больше, чем это могло бы быть при полной информации, либо, не инвестируя, остается недооцененным. Разделяющее сигнальное равновесие при избыточном инвестировании в образование со стороны более производительной группы работников может быть отрегулировано через налогообложение с целью приближения к эффективному результату. Объединяющее равновесие может Парето-доминировать над разделяющим равновесием при наличии соответствующих условий (например, в случае, когда менее производительная группа работников относительно мала).

8.2.4.2.3. Модифицированная версия модели

«Теперь предположим, что существует нечто, называемое образованием, которое мы обозначим буквой E. Его можно получить и в него можно инвестировать» [12], - отмечает Спенс. Следуя этому предположению, рассмотрим, к каким результатам приведет усложнение модели за счет признания того факта, что образование не только выполняет сигнальную функцию, но и положительно влияет на производительность работников вследствие увеличения их человеческого капитала.

Условия модели с учетом влияния образования на производительность:

1. $c_1(E)$ и $c_2(E)$ – издержки инвестирования в E единиц образования работников Группы 1 и Группы 2, где $c_1(E)>c_2(E)$.
2. $s_1(E)$ и $s_2(E)$ – ценность для фирмы работников Группы 1 и Группы 2, где $s_1(E)<s_2(E)$.
3. $V_1(E)$ и $V_2(E)$ – чистый доход работников Группы 1 и Группы 2:

$$V_1(E) = s_1(E) - c_1(E),$$

$$V_2(E) = s_2(E) - c_2(E).$$

1. $V(E)$ - чистый доход работников Группы 1, если они «используют» сигнал работников Группы 2:

$$V(E) = s_1(E) - c_2(E).$$

1. Так как $c_i(E)$ – выпуклая функция, а $s_i(E)$ – вогнутая функция, $V_i(E)$ – вогнутая функция.

Модель

Модель предполагает три качественно отличающихся типа равновесия.

1. Эффективное разделяющее сигнальное равновесие складывается при условии: $E_2^* > \overline{E}$, где $\overline{E}$ таково, что $V\left(\overline{E}\right)=N_1\left(E_1^*\right)$, и скачок в заработной плате от w_1 до w_2 происходит при $E=\overline{E}+\varepsilon$, где ε – небольшое положительное

число. В таком случае инвестиции в образование представителей Группы 1 и Группы 2 составят E_1^* и E_2^*, принеся им максимальные значения чистого дохода (рис. 8.12).

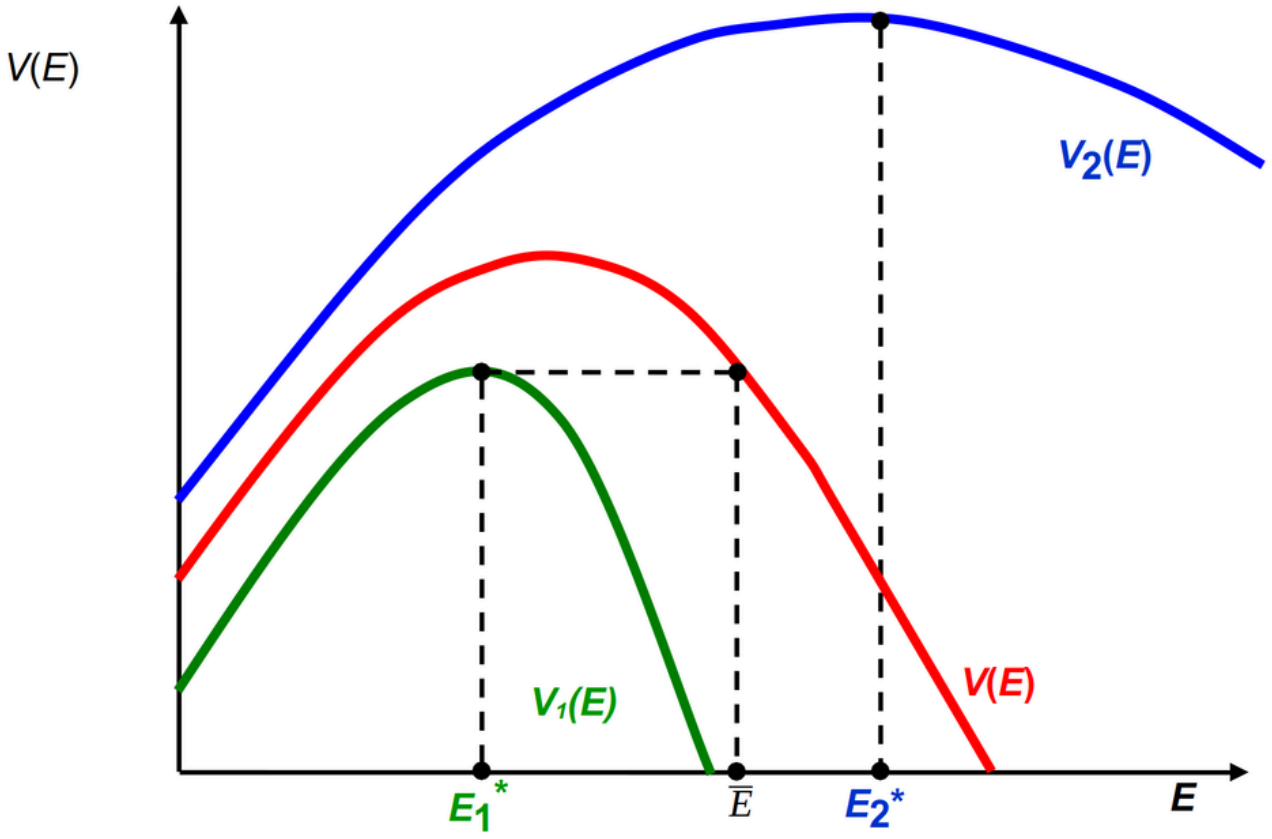


Рисунок 8.12. Эффективное разделяющее сигнальное равновесие на рынке труда (образование положительно влияет на производительность работников)

«Сигнал здесь несет точную информацию, а инвестиции в образование являются эффективными. Исход таков, как если бы на рынке имела место совершенная информация» [13], - так характеризует Спенс этот тип равновесия. Предпосылки для его возникновения связаны с тем, что две группы соискателей рабочих мест «достаточно разные» с точки зрения издержек сигнализирования и производительности.

1. Неэффективное разделяющее сигнальное равновесие складывается при условии: $E_2^* < \overline{E}$, где $\overline{E}$ таково, что $V\left(\overline{E}\right) = N_1\left(E_1^*\right)$, и скачок в заработной плате от w_1 до w_2 происходит при $E = \overline{E} + \varepsilon$, где ε – небольшое положительное число. В таком случае инвестиции в образование представителей Группы 1 составят E_1^*, а представители Группы 2 осуществляют инвестиции в образование в объеме $E = \overline{E} + \varepsilon$, превышая оптимум E_2^*, который имел бы место при совершенной информации. Таким образом, «излишние» инвестиции в образование, связанные с приобретением сигнала, выглядят как нерациональные расходы ресурсов (рис. 8.13). Тем не менее, сепарирование групп достигается, и асимметрия информации преодолевается.

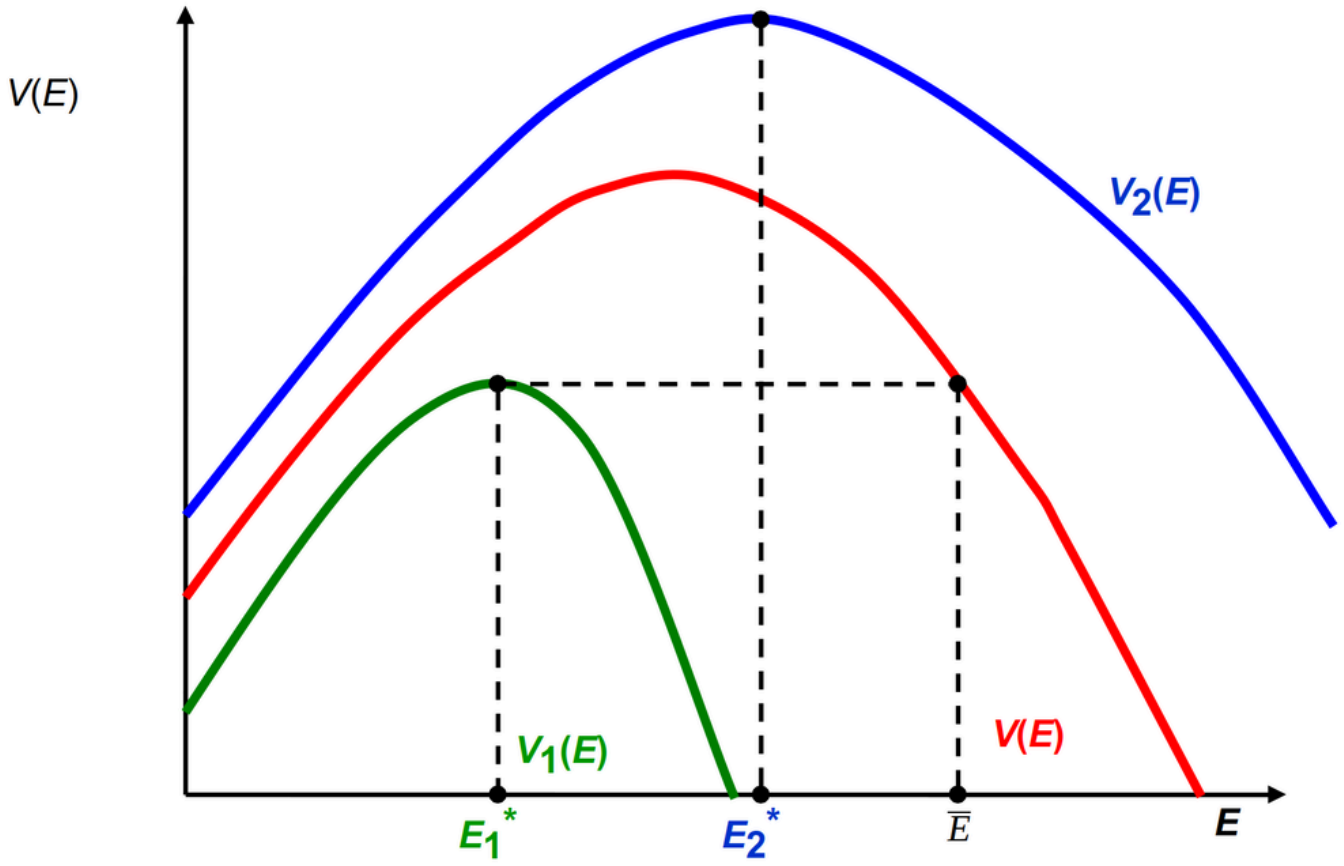


Рисунок 8.13. Неэффективное разделяющее сигнальное равновесие на рынке труда (образование положительно влияет на производительность работников)

По аналогии со случаем неэффективного разделяющего сигнального равновесия в модели, где образование не влияет на производительность работников, в рассмотренной версии равновесия при положительном воздействии образования на производительность также «можно в принципе сколь угодно близко подойти к эффективному результату через надлежащие налоги» [14] .

1. Объединяющее равновесие, способное разрушить разделяющее сигнальное равновесие, на рассматриваемом рынке также возможно, но не в случае, когда сигнал несет точную информацию о производительности работников, а инвестиции в образование являются эффективными. Объединяющее равновесие может разрушить разделяющее равновесие тогда, когда Группа 2 вынуждена ради сигнализирования превышать эффективный объем инвестиций в образование.

В объединяющем равновесии всем индивидам предлагается средняя ставка заработной платы:

$$w(E) = q_1 s_1(E) + (1-q_1)s_2(E).$$

Очевидно, что если q_1 - малая величина, т.е. доля Группы 1 мала, то $w(E)$ будет ближе к $s_2(E)$, что делает среднюю ставку заработной платы для Группы 2 приемлемее.

Исходя из рис. 8.13, также очевидно, что снижение $\overline{E}$ будет приводить к повышению $V(E)$ и $V_2(E)$.

Отсюда Спенс делает следующий вывод: «В случае неэффективного сепарирующего равновесия существуют агрегирующие равновесия, которые с точки зрения критерия Парето доминируют над сепарирующим равновесием при условии, что размер группы с более низкой производительностью труда ниже некоторого порогового уровня. Если рынок найдет способ получить агрегирующие равновесия, то они нарушат сепарирующее равновесие» [15] . К этому выводу автора примыкает проблема множественности равновесий и поиск критерия выбора оптимального или максимально близкого к нему равновесия, что, как будет показано ниже, стало направлением интерпретирования и развития модели Спенса.

Рассматривая сигнализирование на рынке труда в условиях асимметрии информации, следует также обратить внимание на возможную продуктивность самого информационного сигнала. Его наличие может быть полезно работодателю для повышения эффективности производства через более оптимальное распределение рабочих мест и решения о повышении квалификации сотрудников. Это обстоятельство еще раз подчеркивает высокую важность проблемы информационных провалов рынка с точки зрения аллокативной эффективности.

8.2.4.3. Интерпретация и развитие модели Спенса

Разработанная Спенсом модель сигнализирования на рынке труда получила ряд интерпретаций, в том числе в рамках парадигмы теории контрактов.

Интерпретация, приведенная Саланье [16] , - одна из наиболее часто использующихся в современной научной и учебной литературе как в области контрактной теории, так и в микроэкономике.

Она базируется на следующих *условиях*:

1. Соискатели рабочих мест на рынке труда имеют разную производительность, измеряемую предельным продуктом труда в денежном выражении θ:

$$\theta \in \{\theta_1, \theta_2\}, 0 < \theta_1 < \theta_2.$$

1. Доля группы работников с низкой производительностью θ_1 составляет *q*.
2. Фирмы-нанимателиконкурируют по Бертрану, т.е. в любом из равновесий их ожидаемая прибыль равна нулю.

Модель

Случай 1: симметричная информация

Если производительность работников известна фирме или может быть установлена без издержек, то представителям каждой группы назначается ставка заработной платы на уровне соответствующего предельного продукта труда:

$$\begin{cases} w_{\theta_1} = \theta_1, \\ w_{\theta_2} = \theta_2. \end{cases}$$

Результатом становится Парето-эффективное равновесие.

Случай 2: асимметричная информация при отсутствии возможности сигнализирования

Если производительность работников не известна фирме и не может быть установлена, то каждому работнику выплачивается ставка заработной платы, соответствующая ожидаемой производительности:

$$w = E\theta = q\theta_1 + (1\text{-}q)\theta_2.$$

Ставка заработной платы будет тем выше, чем меньше *q*, однако Парето-эффективность не достигается.

Случай 3: асимметричная информация при наличии возможности сигнализирования

Дополнительные *условия* для данного случая:

- *e* – количество лет образования, которое служит единственным сигналом о производительности работника.
- $c(e, \theta_i), i = 1, 2$ – издержки получения образования.
- Работники максимизируют индивидуальную функцию полезности:

$$U(w, e, \theta) = u(w)\text{-}c(e, \theta),$$

где *u'*>0, *u''*<0.

- Производительность работников не зависит от количества лет полученного образования, но издержки его получения выше у менее производительных работников, т.е. параметры *e* и θ отрицательно коррелированы:

$$\frac{\partial c}{\partial e} > 0, \frac{\partial c}{\partial \theta} > 0, \frac{\partial^2 c}{\partial e^2} > 0, \frac{\partial^2 c}{\partial e \partial \theta} < 0.$$

- $\mu(e)$–представления фирм о вероятности того, что работнику, выбравшему уровень образования *e*, присуща производительность θ_1.
- Если всеми работниками выбирается одинаковый уровень образования, то, согласно правилу Байеса, представления фирм о вероятности того, что соискатель имеет производительность θ_1, соответствуют доле работников с низкой производительностью: $\mu_0 = q$.
- Ожидаемая ставка заработной платы потенциального работника, выходящего на рынок труда:

$$w(e) = \mu(e)\theta_1 + (1\text{-}\mu(e))\theta_2.$$

Взаимодействие фирм и наемных работников может быть рассмотрено как сигнальная игра с неполной информацией, поскольку нанимателям не известна производительность соискателей рабочих мест.

Порядок этой сигнальной игры следующий:

1. Природа выбирает тип отправителя сигнала – производительность работника.
2. Зная свой тип, отправитель сигнала – работник – выбирает сигнал, получая образование в течение определенного количества лет.
3. Получатель сигнала – фирма – наблюдая сигнал, но не тип его отправителя, выбирает действие, т.е. формирует представление о вероятной принадлежности работника к одному из типов (высокопроизводительным или низкопроизводительным) и предлагает набор контрактов.
4. Работник соглашается на один из предложенных контрактов или отвергает их.
5. Определяются выгоды участников игры.

Вектор стратегий $\left(e_1^*, e_2^*, w^*\right)$ и система представлений μ^* составляют совершенное байесово равновесие в чистых стратегиях в рассматриваемой сигнальной игре, если:

1. Выбор потенциальным работником количества лет обучения *e* максимизирует его функцию полезности при заданной рынком труда функции заработной платы w^*:

$$\forall i = 1, 2, e_i^* \in \operatorname{argmax}_e \left(u\left(w^*(e)\right)\text{-}c\left(e, \theta_i\right)\right).$$

1. Фирмы нанимают работников с дипломом, свидетельствующим о количестве лет образования *e*, и выплачивают им ставку заработной платы:

$$w^*(e) = \mu^*(e)\theta_1 + (1\text{-}\mu^*(e))\theta_2.$$

1. Представления фирм о производительности работников $\mu^*(e)$ подтверждаются стратегиями *e**:

$$e_1^* \neq e^* \begin{cases} e=e_1^*, тогда \mu^*(e)=1, \\ e=e_2^*, тогда \mu^*(e)=0. \end{cases}$$

$$e_1^*=e_2^*=e, тогда \mu^*(e)=\mu_0.$$

Разделяющее равновесие

Разделяющее равновесие складывается тогда, когда низкопроизводительные работники выбирают уровень образования продолжительностью e_1^* лет, а высокопроизводительные работники обучаются в течение $e_2^* > e_1^*$ лет. В таком случае фирмы на основе предъявленных дипломов могут подтвердить свои представления о производительности соискателей рабочих мест. Однако если фирмы предложат ставку заработной платы θ_1 низкопроизводительным работникам, оптимальным решением этих работников будет $e_1^*=0$, поскольку именно в таком случае они минимизируют свои издержки. При этом высокопроизводительные работники, получившие образование в объеме e_2^* лет, получат заработную плату θ_2.

Иными словами, у низкопроизводительных работников не должно быть мотивации выдавать себя за высокопроизводительных, для чего должно выполняться условие:

$$u(\theta_1)\text{-}c(0,\theta_1) \geq u(\theta_2)\text{-}c\left(e_2^*,\theta_1\right),$$

которое означает, что e_2^* должно быть выше некоторого $\underline{e}$.

Аналогично, у высокопроизводительных работников не должно быть мотивации выдавать себя за низкопроизводительных, для чего должно выполняться условие:

$$u(\theta_2)\text{-}c\left(e_2^*,\theta_2\right) \geq u(\theta_1)\text{-}c(0,\theta_2),$$

из которого следует, что e_2^* должно быть ниже некоторого $\overline{e}$.

На рис. 8.14 показана одна из функций заработной платы, которая удовлетворяет условиям разделяющего равновесия:

$$\begin{cases} e_1^*=0, w=\theta_1, \\ e_2^*=e^*, e^* \in \left[\underline{e},\overline{e}\right], w=\theta_2. \end{cases}$$

Из приведенных условий следует существование континуума разделяющих равновесий, в которых уровень образования высокопроизводительных работников принадлежит конкретному интервалу, т.е. $e_2^* \in \left[\underline{e},\overline{e}\right]$.

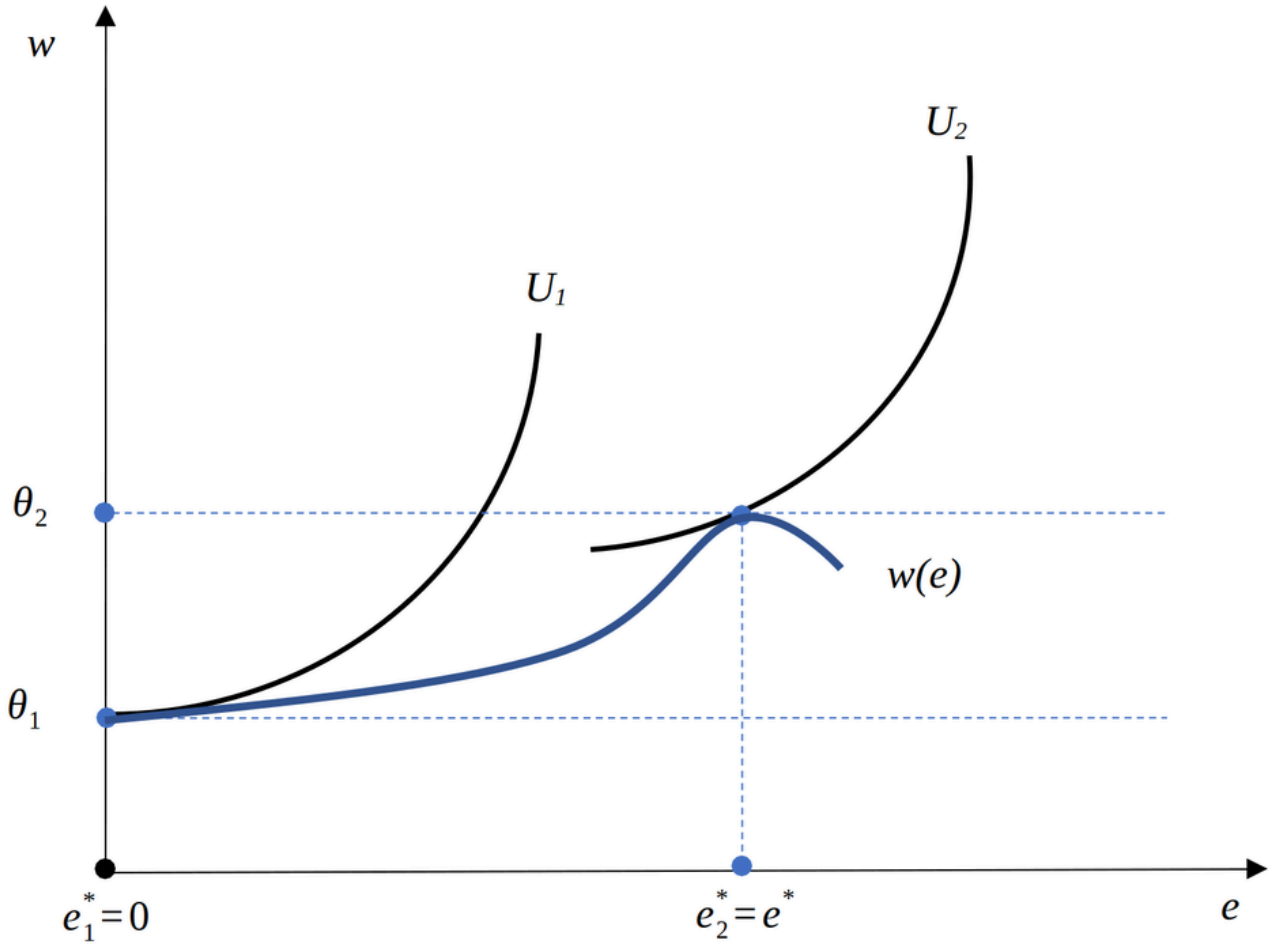


Рисунок 8.14. Разделяющее равновесие

Таким образом, разделяющее совершенное байесово равновесие не единственно относительно уровня образования. Не единственно оно и относительно представлений фирм, которые в равновесии определяются согласно правилу Байеса, а вне равновесия - произвольно.

Объединяющее равновесие

В рассматриваемой модели существует континуум объединяющих равновесий, когда оба типа работников выбирают один и тот же уровень образования $e^* \in [0, \acute{e}]$ и им выплачивается ставка заработной платы:

$$E_{\mu_0}\theta = \mu_0\theta_1 + (1\text{-}\mu_0)\theta_2.$$

Для того чтобы оба типа работников выбрали одинаковый уровень образования *e**, должны выполняться условия:

$$u(\mu_0\theta_1 + (1\text{-}\mu_0)\theta_2)\text{-}c(e^*, \theta_1) \geq u(\theta_1)\text{-}c(0, \theta_1),$$
$$u(\mu_0\theta_1 + (1\text{-}\mu_0)\theta_2)\text{-}c(e^*, \theta_2) \geq u(\theta_2)\text{-}c(0, \theta_2).$$

При этом количество лет обучения не должно превышать такое $\acute{e}$, что:

$$u(\mu_0\theta_1 + (1\text{-}\mu_0)\theta_2)\text{-}c(\acute{e}, \theta_1) = u(\theta_1)\text{-}c(0, \theta_1).$$

На рис. 8.15 показан вариант объединяющего равновесия для $e^* > 0$.

Однако если бы у работников не было возможности получать образование или они отказались бы от этой возможности, то их благосостояние было бы выше, поскольку они получали бы заработную плату $E_{\mu_0}\theta = \mu_0\theta_1 + (1\text{-}\mu_0)\theta_2$ при нулевых издержках обучения.

Следовательно, Парето-оптимальным будет объединяющее равновесие при *e**=0. Все остальные объединяющие равновесия Парето-доминируются этим равновесием.

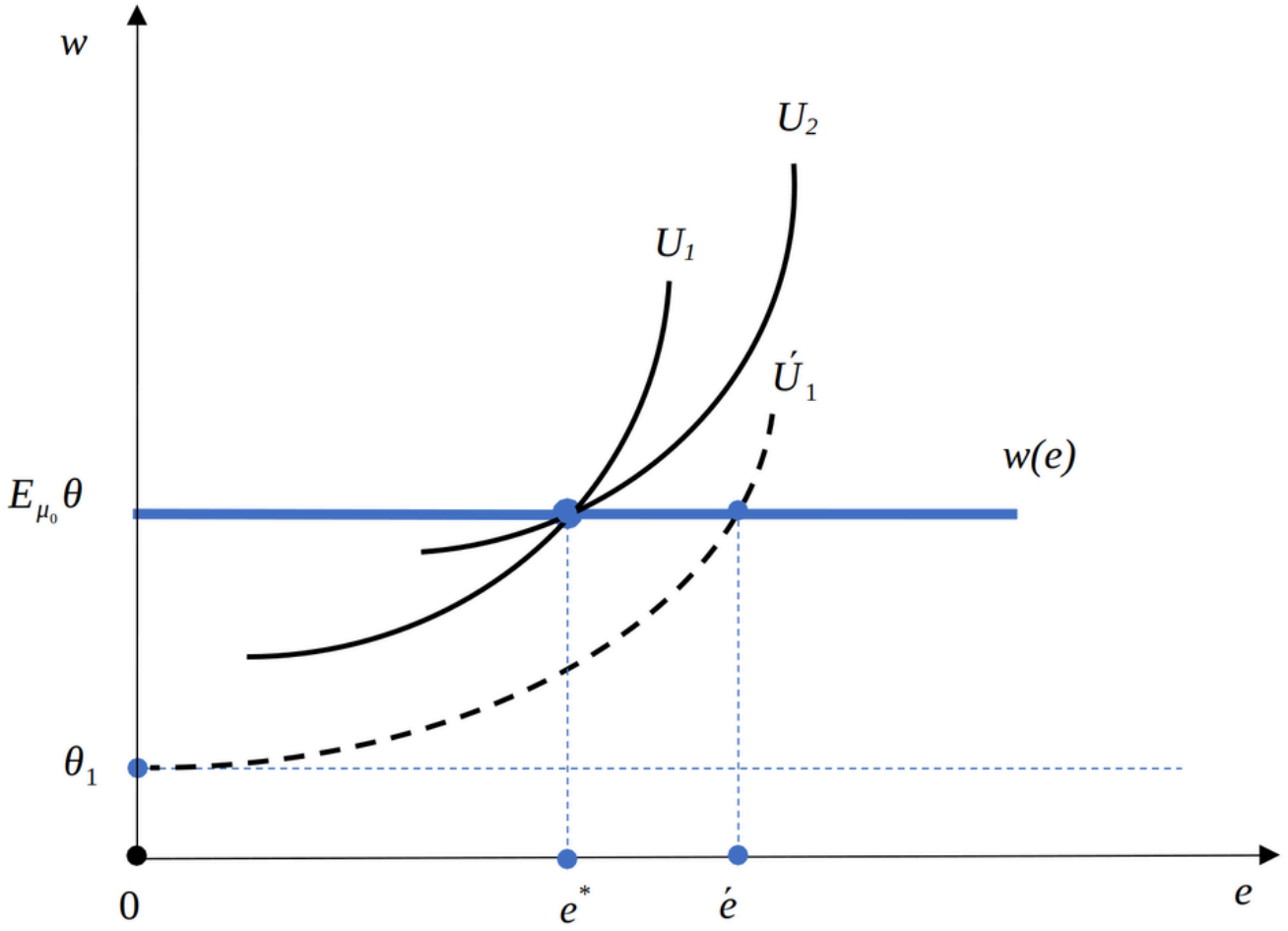


Рисунок 8.15. Объединяющее равновесие

Выбор равновесия

Итак, согласно модели, существует континуум разделяющих равновесий: e_1^*=0 и $e_2^* \in [\underline{e}, \bar{e}]$, и континуум объединяющих равновесий: $e^* \in [0, \acute{e}]$. При этом конкурирующие по Бертрану фирмы-нанимателя во всех равновесиях получают нулевую прибыль.

В этой связи Саланье отмечает: «Есть две причины, по которым множественное равновесие не желательно. Первая состоит в том, что множественность существенно ограничивает предсказательную силу теории. Вторая – в том, что сравнительная статика – любимое упражнение экономистов – обычно опирается на устойчивость единственного локального равновесия, принимая во внимание упрощение модели» [17].

Способ сократить количество равновесий и таким образом получить более реалистичные предсказания модели состоит в том, чтобы ограничить представления фирм $\mu^*(e)$ вне модели и, следовательно, функцию заработной платы *w**(*e*). Добиться этого позволяет *интуитивный критерий Хо-Крепса* [18], изложенный И.-К. Хо и Д.М. Крепсом в 1987 г.: «То, что образует равновесие, сильно зависит от «интерпретаций», которые *B* может дать сообщениям, которые *A мог бы* послать, но в состоянии равновесия *не* посылает... Если можно ограничить неравновесные представления (или гипотезы) *B*, то иногда можно устранить многие из равновесий» [19].

Использование интуитивного критерия Хо-Крепса дает возможность уточнить основные выводы из модели Спенса. Хо и Крепс доказывают, что с учетом интуитивного критерия (*intuitive criterion*) в модели Спенса для двух типов работников, отличающихся производительностью, единственным интуитивным равновесием становится так называемый *исход Рили* [20] (*Riley outcom*), суть которого состоит в следующем: «Тип 1 выбирает для себя лучший уровень образования, учитывая, что назначенная заработная плата будет подходящей для него... Тип 2 выбирает для себя наилучший уровень образования, предполагая, что ему будет выплачиваться заработная плата, соответствующая его типу, при условии, что Тип 1 не будет строго предпочитать этот уровень образования (и заработную плату)» [21].

Во-первых, ни одно из объединяющих равновесий, даже объединяющее равновесие при *e**=0, не удовлетворяет интуитивному критерию Хо-Крепса.

В качестве доказательства этого утверждения можно рассмотреть реакцию фирм на появление работника с уровнем образования $e \in [\underline{e}, e']$ (рис. 8.16). С одной стороны, выбрав даже минимальный уровень образования в этом интервале $e_2 = \underline{e}$, высокопроизводительные работники получили бы более высокую полезность, т.к. для них:

$$u(\mu_0\theta_1 + (1-\mu_0)\theta_2) - c(e^*, \theta_2) \leq u(\theta_2) - c(\underline{e}, \theta_2).$$

Причем, самый высокий из доступных в интервале $e \in [\underline{e}, e']$ уровень полезности соответствует именно $e_2 = \underline{e}$.

Следовательно, сигнал об образовании продолжительностью $\underline{e}$ лет даст фирмам основания полагать, что перед ними – высокопроизводительный работник, который достоин ставки заработной платы $w_2=\theta_2$. Понимание этого соискателями рабочих мест приведет к нарушению объединяющего равновесия, которое покинут высокопроизводительные работники в результате выгодного для них увеличения уровня образования от e^*до $\underline{e}$.

С другой стороны, у низкопроизводительных работников нет стимулов увеличивать свой уровень образования от e^*до $\underline{e}$, поскольку для них верно:

$$u\left(\mu_0\theta_1+(1\text{-}\mu_0)\theta_2\right)\text{-}c\left(e^*,\theta_1\right)\geq u\left(\theta_2\right)\text{-}c\left(\underline{e},\theta_1\right).$$

Однако низкопроизводительным работникам также выгодно выйти из объединяющего равновесия, выбрав нулевой уровень образования и избавившись от издержек обучения.

Таким образом, равновесием, которое удовлетворит интуитивному критерию и заменит собой объединяющее равновесие, станет разделяющее совершенное байесово равновесие:

$$\begin{cases} e_1^*=0, w_1=\theta_1, \\ e_2^*=\underline{e}, w_2=\theta_2, \end{cases}$$

где $\underline{e}$ удовлетворяет условию:

$$u\left(\theta_2\right)\text{-}c\left(\underline{e},\theta_1\right)=u\left(\theta_1\right)\text{-}c\left(0,\theta_1\right).$$

Во-вторых, в континууме разделяющих равновесий e_1^*=0 и $e_2^*\in\left[\underline{e},\overline{e}\right]$ только одно равновесие удовлетворит интуитивному критерию Хо-Крепса, и им станет то же самое разделяющее совершенное байесово равновесие:

$$\begin{cases} e_1^*=0, w_1=\theta_1, \\ e_2^*=\underline{e}, w_2=\theta_2, \end{cases}$$

поскольку низкопроизводительным работникам не выгодно отклоняться от нулевого уровня образования, а высокопроизводительным работникам выгодно минимизировать издержки обучения, выбрав тот уровень образования, который только позволит им претендовать на более высокую заработную плату без лишних расходов на обучение.

Полученное в итоге единственное интуитивное равновесие называется *наименее затратным разделяющим равновесием* (рис. 8.17). Оно не оставляет стимулов к получению образования низкопроизводительным работникам и одновременно позволяет высокопроизводительным работникам подать сигнал с минимальными издержками.

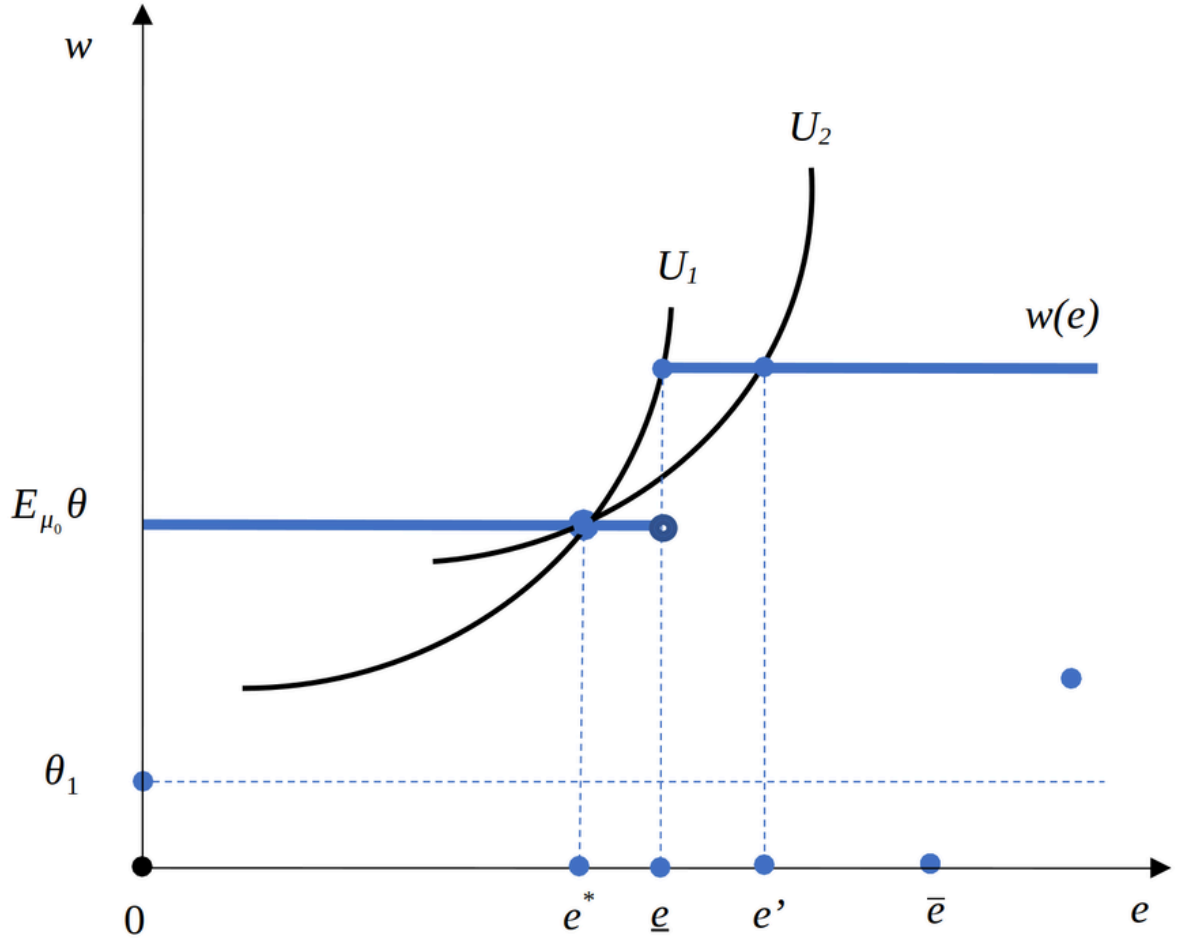


Рисунок 8.16. Применение интуитивного критерия Хо-Крепса к анализу объединяющего равновесия

Это равновесие можно рассматривать как своего рода оптимум в моделях с неблагоприятным отбором, поскольку:

- выполняется только одно из двух ограничений по стимулам – то, которое не позволяет низкопроизводительным работникам выдавать себя на высокопроизводительных;
- только один из двух типов работников – низкопроизводительные работники – находится в состоянии эффективного распределения ресурсов, не расходуя средства на образование как сигнал.

Рисунок 8.17. Наименее затратное разделяющее равновесие



Междисциплинарный взгляд: Решение проблемы скрытых характеристик – подача сигналов (Материал интерактивного цифрового учебника «Институциональная экономика»)



Наблюдательный микроэкономист: Дипломы больше не нужны?

В апреле 2023 г. в «Российской газете» было опубликовано сообщение о том, что две трети российских работодателей не требуют от соискателей наличия образования при трудоустройстве.

Почти четверть вакансий без требований о работе приходится на розничные сети: продавцов, менеджеров по продажам или по работе с клиентами. Также среди специальностей, на которые легко устроиться без образования, рабочий персонал, водители, экспедиторы, складские работники, курьеры и диспетчеры.

Далеко не всегда работодатели требуют от соискателей профильные дипломы. Причина этого в том, что высшее образование само по себе является ценностью, потому что оно формирует определенный стиль мышления, кругозор, умение работать с информацией и другие полезные навыки.

При этом большинство соискателей без диплома могут претендовать на своеобразный «потолок» дохода, поскольку работодатели не относят их к «хорошим» работникам, для попадания в число которых необходим достаточный уровень индивидуальных инвестиций в образование.

Из «белых воротничков» чаще всего работодатели не обращают внимание на образование ИТ-специалистов. По сообщению Superjob, только треть вакансий для них содержит требование об образовании. Среди соискателей также становится меньше кандидатов с дипломом, хотя пока они составляют большинство. К примеру, закончивших вуз программистов, сейчас на рынке 75%, а в 2020 году было на 3% больше. Популярность высшего образования в этой сфере снижается за счет большого количества выпускников онлайн-курсов. Правда, работодатели к такому образованию относятся настороженно. По результатам исследования IT-школы SkillFactory и сервиса Зарплата.ру, 15% компаний не готовы нанимать выпускников и студентов онлайн-курсов, не имеющих базового профильного образования. Однако в качестве повышения квалификации онлайн-курсы приветствуются работодателями и повышают конкурентоспособность соискателей.

«Как и в России, компании за рубежом трепетно относятся к дипломам, когда речь идет о должностях, требующих определенной степени, лицензии или сертификата для легального трудоустройства: от здравоохранения до права, инженерии и некоторых технических должностей... Так что дипломы не "вымрут", а вузы еще долго будут оставаться базой, где человек не просто получает знания, но и развивается как личность, приобретает культурный и социальный капитал», - такой вывод делает Ася Сафиуллина (ТАСС).

По материалам статей: Жандарова И. Эксперты вычислили потолок зарплат для сотрудников без образования. URL: https://rg.ru/2023/04/30/eksperty-vychislili-potolok-zarplat-dlia-sotrudnikov-bez-obrazovaniia.html

Сафиуллина А. Дипломы больше не нужны? А что тогда? Как меняются требования на рынке труда. URL: https://tass.ru/obschestvo/6254884

Междисциплинарный взгляд: Решение проблемы скрытых характеристик третьей стороной (Материал интерактивного цифрового учебника «Институциональная экономика»)

1. Spence M. Job Market Signaling. *The Quarterly Journal of Economics*. 1973. Vol. 87. No. 3. P. 356. ↩
2. В 2001 г. в своей Нобелевской лекции Спенс дал следующее определение сигналов: «Сигналы – это такие знаковые объекты, которые люди делают различными и которые отчасти предназначены для поддержания связи». Спенс А.М. Передача сигналов в ретроспективе и информационная структура рынков // Мировая экономическая мысль. Сквозь призму веков. В 5 т. Т. 5. Кн. 2. М.: Мысль, 2005. С. 485. ↩
3. Spence M. P. 357. ↩
4. Ibid. P. 359. ↩
5. Ibid. P. 358-359. ↩
6. Ibid. P. 362. ↩
7. Данный показатель может быть многомерной величиной, учитывающей количество лет обучения, репутацию учебного заведения, оценки, рекомендации и др. параметры. ↩
8. Ibid. P. 364. ↩
9. Спенс А.М. С. 493. ↩
10. Spence M. P. 365. ↩
11. Спенс А.М. С. 491. ↩
12. Там же. С. 490. ↩
13. Там же. С. 496. ↩
14. Там же. С. 498. ↩
15. Там же. С. 498. ↩
16. Интерпретация Саланье изложена по: Salanié B. Op. cit. P. 100-107. ↩
17. Salanié B. Op. cit. P. 104-105. ↩
18. Cho I.-K., Kreps D.M. Signaling Games and Stable Equilibria. *The Quarterly Journal of Economics*, 1987, Vol. 102, No. 2, pp. 179-222. ↩
19. Ibid. P. 180. ↩
20. *Riley J. Informational Equilibrium.* Econometrica*, 1979, Vol. 47, pp. 331-359.* ↩
21. Cho I.-K., Kreps D.M. P. 210. ↩

8.3. Скрытые действия. Моральный риск

8.3.1. Моральный риск на рынке труда[1]. Теория эффективной заработной платы: модель Шапиро-Стиглица

Модель, описывающая проблему морального риска на рынке труда, была создана американскими экономистами Карлом Шапиро и Джозефом Стиглицем в 1984 г. [2] Сфокусировав свое внимание на рынке труда, авторы справедливо отметили, что полученные ими выводы применимы и к другим рынкам (например, рынкам товаров или кредитов), поскольку проведенный ими анализ дает представление об упрощенной модели общего равновесия в экономике, в которой стоит проблема принципала-агента, и складывающееся равновесие в целом не является Парето-оптимальным.

Проблема принципала-агента возникает тогда, когда одна из сторон (принципал) нанимает другую сторону (агента) для выполнения какого-либо задания, но не имеет возможности проконтролировать ее, что приводит к скрытым действиям и моральному риску. В рассмотренной Шапиро и Стиглицем ситуации на рынке труда фирмы не имеют возможности проконтролировать добросовестность исполнения обязанностей нанятыми работниками, которые могут уклоняться от добросовестного труда, результатом чего может оказаться снижение благосостояния общества.

Предпосылки и условия модели

1. Рассматривается конкурентный рынок труда, для которого выполняются следующие условия:
   - спрос на труд предъявляет большое количество одинаковых фирм $(i = 1, \dots M)$;
   - все работники, общая численность которых составляет L^f, предлагают свои услуги фирмам и трудятся с одинаковой производительностью;
   - все фирмы имеют одинаковые производственные функции: $Q_i = f(L_i)$, где L_i – численность занятых на фирме;
   - кривая спроса на труд имеет отрицательный наклон и совпадает с кривой предельного продукта труда в денежном выражении: $MRPL = MPL \times P$, где P – цена единицы продукции;
   - все фирмы назначают своим работникам одинаковую ставку заработной платы;
   - у работников имеется полная информация о свободных рабочих местах и возможных вакансиях.
2. $U(w, e)$ – функция полезности работника, обладающая свойством сепарабельности (возможно разделение влияния аргументов на общий результат), где w – ставка заработной платы, e – величина издержек, связанных с трудовыми усилиями при честном исполнении обязанностей.
3. Работники нейтральны к риску.
4. Продолжительность трудоспособной жизни работника рассматривается как неограниченный временной горизонт.
5. На рынке труда имеет место моральный риск в виде ущерба от недобросовестного поведения работников.
6. Если недобросовестное поведение будет замечено, и работник будет уволен, он сможет немедленно найти работу в другой фирме.
7. Риск недобросовестного поведения устранится, если работнику повысить заработную плату. В этом случае он будет работать с присущей ему производительностью, а не снижать ее тайком от фирмы.

Модель

Поскольку e – величина издержек, связанных с трудовыми усилиями при честном исполнении обязанностей, тогда:

- $U = w - e$ – полезность, получаемая честным работником, где $e > 0$;
- $U = w$ – полезность, получаемая нечестным работником (так как для него $e = 0$).

Пусть для каждого работника существует некоторая вероятность b быть уволенным по причинам, не связанным с уклонением от своих обязанностей, и a - вероятность найти работу для тех, кто находится в рядах безработных.

Если работник ведет себя недобросовестно, то для него появляется вероятность q быть «пойманным» и уволенным именно по этой причине.

Пособие по безработице, которое получает уволенный работник, составляет $\dot{w}$.

Работники максимизируют текущую дисконтированную ценность получаемой ими полезности с учетом ставки процента r.

Если V_U – ожидаемая в течение жизни ценность полезности, получаемой безработным, то ожидаемая в течение жизни ценность полезности, получаемой честным работником (V_E^N), составляет:

$$rV_E^N = w\text{-}e + b\left(V_U\text{-}V_E^N\right). \quad (8.3.1)$$

Тогда ожидаемая в течение жизни ценность полезности, получаемой нечестным работником, равна:

$$rV_E^S = w + (b+q)\left(V_U\text{-}V_E^S\right). \quad (8.3.2)$$

Или:

$$V_E^N = \frac{(w\text{-}e)+bV_U}{r+b} \quad (8.3.3)$$

$$V_E^S = \frac{w+(b+q)V_U}{r+b+q} \quad (8.3.4)$$

Работники предпочтут не уклоняться от честного исполнения своих обязанностей, если будет выполняться *условие неуклонения* NSC *(no-shirking condition)*:

$$V_E^N \geq V_E^S$$

или:

$$w \geq rV_U + (r+b+q)\frac{e}{q} \equiv w_e, \quad (8.3.5)$$

где w_e - достаточная для честной работы *эффективная заработная плата,* которую фирмы назначают работникам, чтобы избежать их уклонений от добросовестного исполнения обязанностей.

Ставка эффективной заработной платы тем больше, чем:

- выше величина трудовых усилий, требующихся для честной работы e;
- выше ценность полезности, получаемой безработным V_U;
- ниже вероятность выявления отлынивания q;
- выше ставка процента r;
- выше вероятность увольнения работника по причинам, не связанным с отлыниванием b.

Ожидаемая в течение жизни ценность полезности, получаемой безработным:

$$rV_U=\overline{w}+a(V_E-V_U) \quad (8.3.6)$$

Поскольку в состоянии равновесия $V_E^N = V_E$, с помощью (8.3.1) и (8.3.6) преобразуем (8.3.5) и получаем *агрегированное условие неуклонения* (*aggregate* NSC):

$$w \geq \overline{w}+e+(a+b+r)\frac{e}{q} \equiv w_e \quad (8.3.7)$$

Таким образом, *эффективная заработная плата* (w_e) – это минимальное значение ставки заработной платы, удовлетворяющее условию неуклонения.

При отсутствии уклонений равновесие на конкурентном рынке труда установилось бы в точке E^* при ставке заработной платы w^* и полной занятости L^f. В случае установления эффективной заработной платы we, превышающей равновесное значение $(w_e > w^*)$, величина спроса на труд L^e окажется ниже уровня «полной занятости» L^f, и на рынке труда будет иметь место вынужденная безработица в размере $L^f - L^e$, а равновесие сложится в точке E_e^* (рис. 8.18). Шапиро и Стиглиц особо подчеркивают вынужденный характер возникающей безработицы: «С точки зрения рабочих безработица является вынужденной, поскольку те, кто потерял работу, согласны трудиться при ставке w_e или ниже, но они не могут дать гарантированного обещания не отлынивать при такой заработной плате» [3].

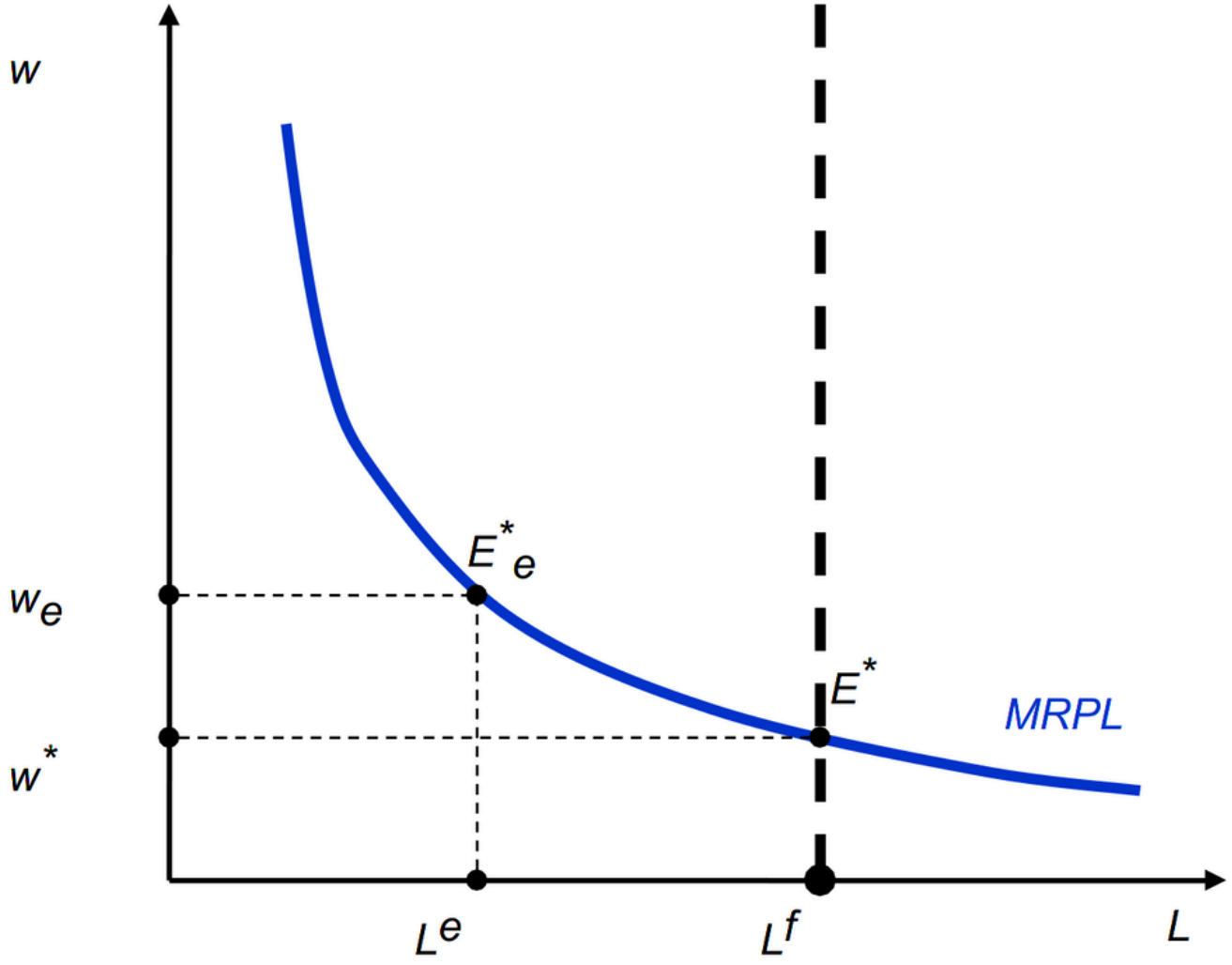


Рисунок 8.18. Равновесие на рынке труда при эффективной заработной плате

Пусть bL^e - поток работников, пополняющий ряды безработных в единицу времени.

Тогда, поскольку, согласно одной из предпосылок модели, у работников имеется полная информация о свободных рабочих местах и возможных вакансиях, $a(L^f - L^e)$ - поток работников, вливающийся в ряды занятых в единицу времени.

При выполнении всех условий модели эти потоки должны быть равны:

$$bL^e = a(L^f - L^e). \text{ (8.3.8)}$$

Из равенства (8.3.8):

$$a = \frac{bL^e}{L^f - L^e}. \text{ (8.3.9)}$$

Подставив (8.3.9) в выражение (8.3.7) для ставки эффективной заработной платы, получим:

$$w \geq \overline{w} + e + \left(\frac{bL^f}{L^f - L^e} + r\right)\frac{e}{q} = \overline{w} + e + \left(\frac{b}{u} + r\right)\frac{e}{q} \equiv w_e. \text{ (8.3.10)}$$

где $u = \frac{L^f - L^e}{L^f}$ - уровень безработицы.

По формуле (8.3.10) каждому уровню безработицы можно поставить в соответствие величину эффективной заработной платы, при которой работники прекращают уклоняться от эффективного труда.

Минимальные значения эффективной заработной платы будут лежать на *кривой отсутствия уклонений* (NSC), которая имеет положительный наклон, но не пересекает, а лишь приближается к вертикальной при уровне «полной занятости» кривой предложения труда L^s (рис. 8.19). Поскольку при $L^f = L^e$ значение we стремится к $+\inf$, любой отлынивающий работник был бы немедленно нанят, то есть при $L^f = L^e$ отсутствует «наказание» за отлынивание. Зная это, работники предпочли бы отлынивать. Следовательно, при любом значении эффективной заработной платы, превышающем равновесную ставку зарплаты на конкурентном рынке труда, имеет место вынужденная безработица.

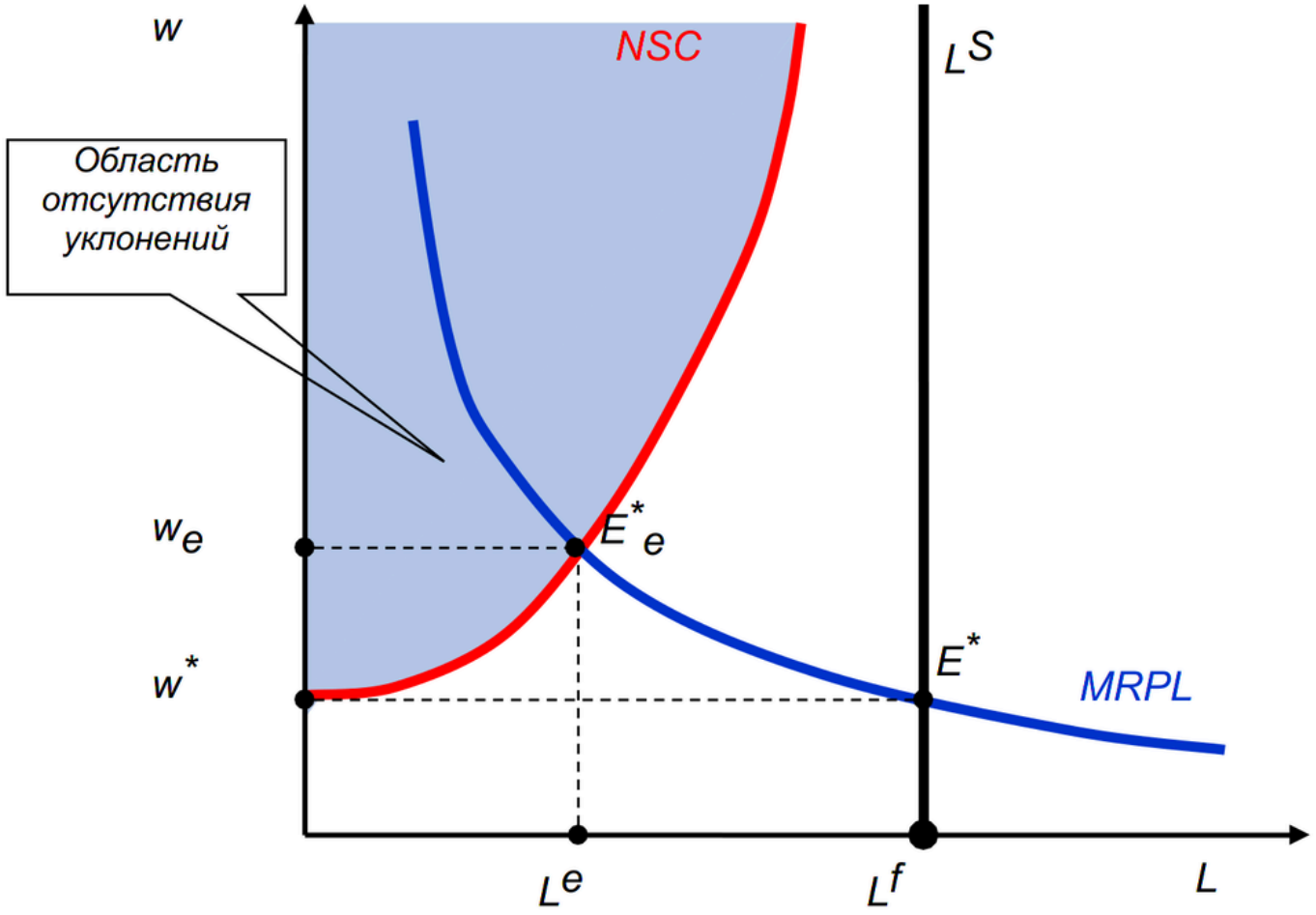


Рисунок 8.19. Равновесие на рынке труда при условии отсутствия уклонений

Положительный наклон кривой отсутствия уклонений подтверждается еще и тем фактом, что при высокой безработице разрыв между минимальной эффективной заработной платой и ее конкурентным равновесным значением невелик, поскольку потерявший работу индивид при таких условиях согласится и на небольшое вознаграждение за добросовестный труд. В случае же небольшой безработицы минимальная эффективная заработная плата, напротив, будет существенно выше конкурентной, поскольку работники будут вправе рассчитывать на существенный стимул к их добросовестному отношению к труду.

Исходя из полученного уравнения кривой отсутствия уклонений, увеличение параметра e или $\dot{w}$ приведет к параллельному сдвигу вверх кривой отсутствия уклонений (из положения NSC_1 в положение NSC_2), что выразится в росте эффективной заработной платы с w_e^1 до w_e^2 и снижении уровня занятости с L_1^e до L_2^e (рис. 8.20). Фактически, увеличение пособия по безработице или издержек, связанных с добросовестным выполнением трудовых обязанностей, вынуждает предпринимателей повышать уровень эффективной заработной платы при любом уровне занятости.

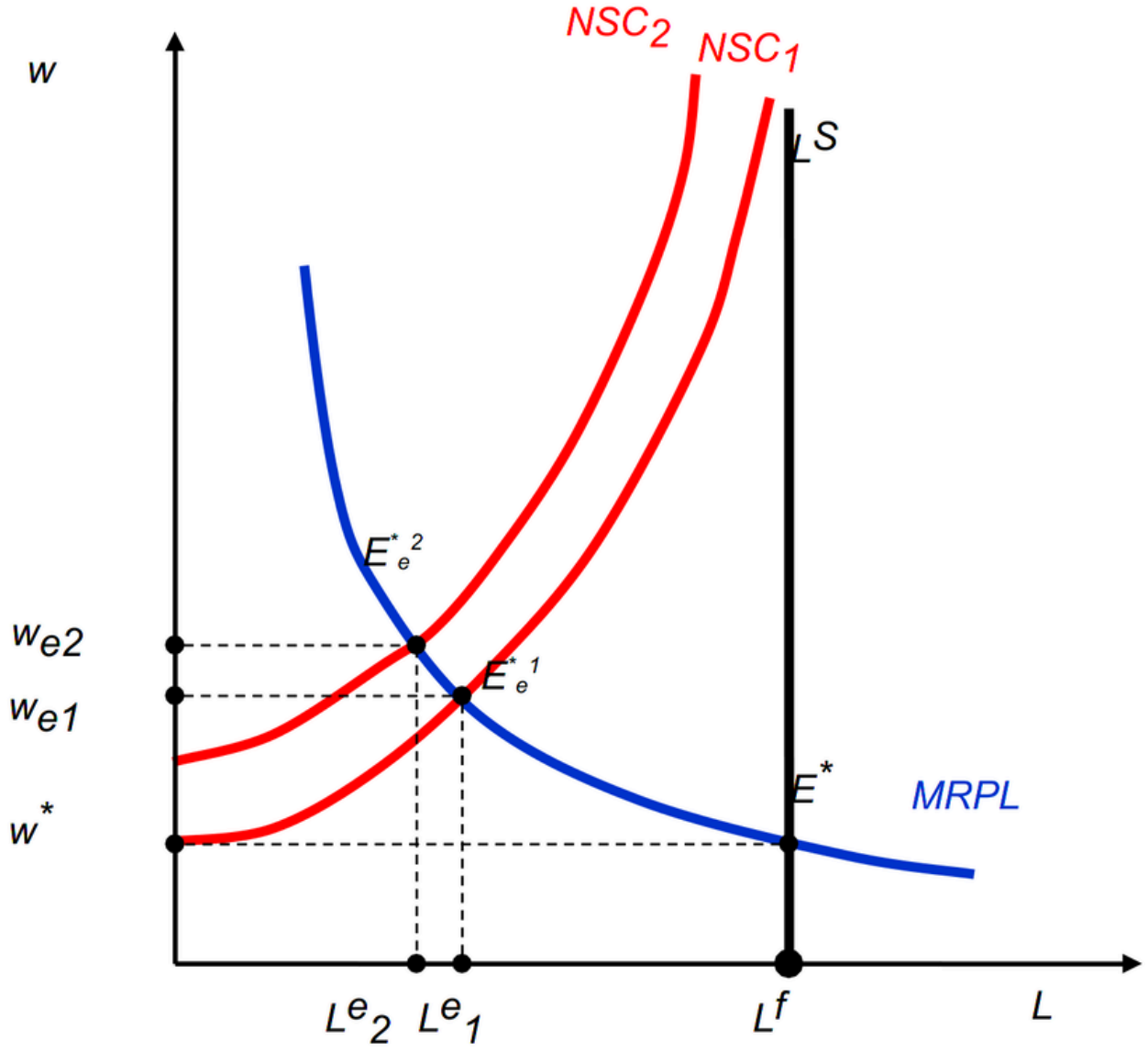


Рисунок 8.20. Сдвиг кривой отсутствия уклонений

Принципиальное значение для выводов из модели Шапиро-Стиглица имеет ответная реакция рынка труда на снижение спроса на труд $(MPL_1 \times P > MPL_2 \times P)$, результатом которой не станет немедленный переход равновесия из точки $E^*_{e^1}$ в точку $E^*_{e^2}$ при равновесной ставке заработной платы w^2_e и более низком уровне занятости L^2_e (рис. 8.21). Этот переход будет замедленным, поскольку фирмы, стараясь избежать уклонений наемных работников, будут снижать ставку эффективной заработной платы, не торопясь, в качестве постепенной реакции на рост безработицы.

Выводы из модели

Во-первых, на рынке труда, где имеет место постконтрактный оппортунизм, риск недобросовестного поведения работников устранится в результате установления эффективной заработной платы, благодаря чему они будет работать с присущей производительностью, а не снижать ее тайком от фирмы.

Во-вторых, результатом преодоления риска недобросовестного поведения на рынке труда становится установление рыночного равновесия, при котором уровень эффективной заработной платы оказывается выше конкурентного, а численность занятых - ниже конкурентной. Однако, благодаря возросшим расходам фирм на оплату труда, работники не повышают свою производительность в абсолютном выражении, а лишь только добросовестно трудятся с изначально присущим им усердием. Таким образом, установившееся на рынке труда равновесие не является Парето-оптимальным, т.е. эффективным с точки зрения общества, а повышение заработной платы работников выглядит как пустая трата средств.

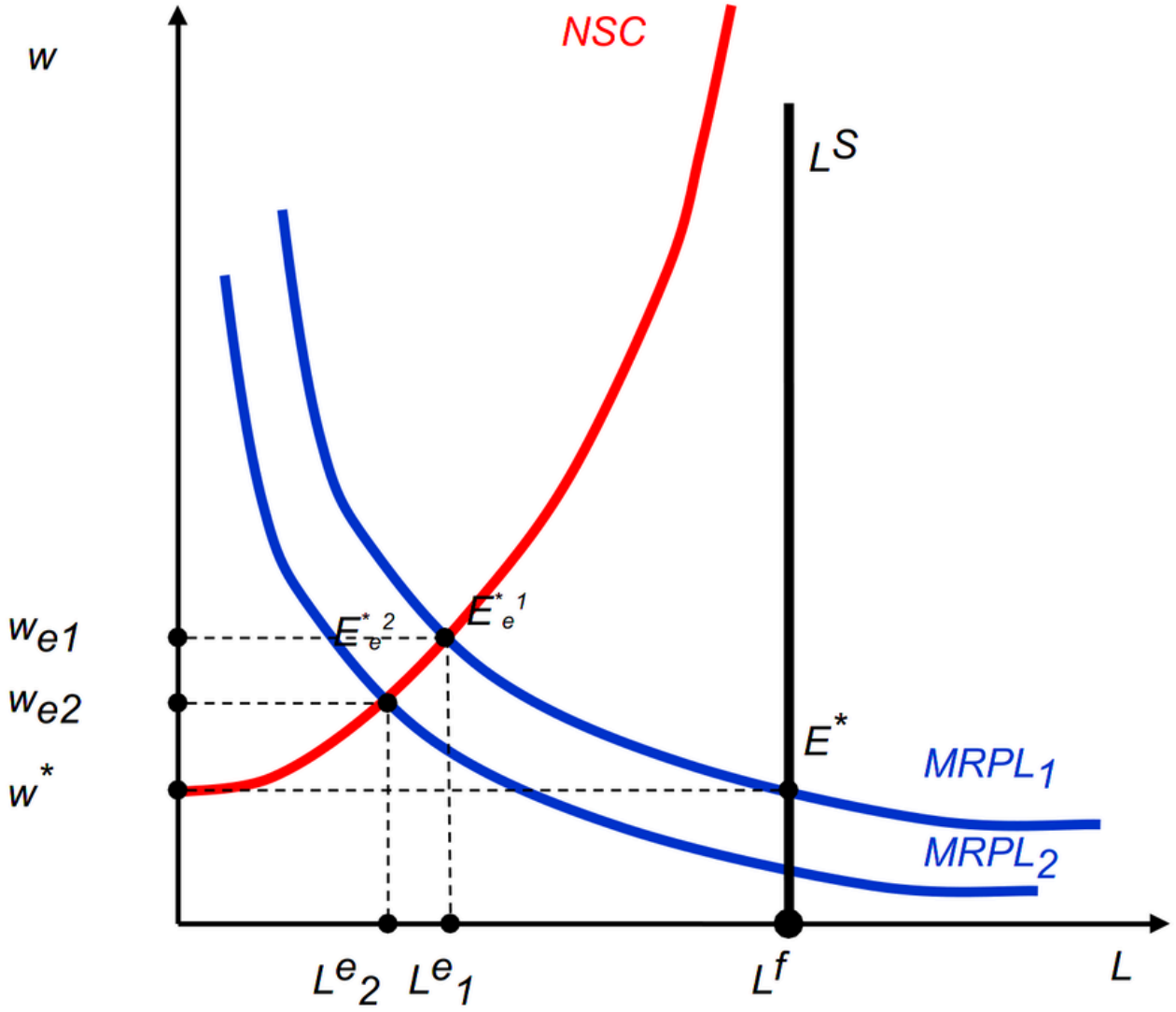


Рисунок 8.21. Сдвиг кривой спроса на труд

В-третьих, модель Шапиро-Стиглица входит в микроэкономические основы макроэкономической модели «новых кейнсианцев», которые полагают, что характерной особенностью функционирования рынка труда является наличие вынужденной безработицы. В качестве основных причин устойчивой вынужденной безработицы теоретики новой кейнсианской модели считают жесткость заработной платы и цен в условиях несовершенных рынков. Аргументируя эту позицию, Шапиро и Стиглиц отмечают следующее: «Сдвиг вниз кривой спроса на труд приводит к росту безработицы. Ввиду условия отсутствия уклонений (NSC), заработная плата не может снизиться настолько, чтобы полностью компенсировать снижение спроса на труд. Переход к равновесию при более высоком уровне безработицы не будет немедленным: снижение ставки заработной платы будет выгодно фирмам только на фоне роста армии безработных. Это и объясняет вялую реакцию ставки заработной платы» [4].

БОЛЬШАЯ РОССИЙСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ	Заглянем в Большую российскую энциклопедию: Моральный риск
	Междисциплинарный взгляд: Решение проблемы скрытых действий – создание стимулов (Материал интерактивного цифрового учебника «Институциональная экономика»)

8.3.2. Моральный риск на рынке страхования

Моральный риск встречается на рынке страхования, когда страховщик не имеет возможности проконтролировать соблюдение страхователем условий предотвращения неблагоприятного исхода, исходя из которых определена вероятность наступления страхового случая в договоре.

Рассмотрим отношения между страховой компанией и желающим приобрести страховку несклонным к риску индивидом, если:

α_0 – вероятность наступления страхового случая;

W^0 – начальный запас богатства индивида;

L – величина потерь при наступлении страхового случая (страховой ущерб);

$C = L$ – страховая сумма;

A – сумма, расходование которой на меры предотвращения страхового случая снижает вероятность его наступления с α_0 до α_A.

Если страховой компании удается точно установить, израсходовал ли индивид сумму A, ему предлагаются контракты двух типов: $P_0 = \alpha_0 L$ с равновесием в точке b и $P_A = \alpha_A L$ с равновесием в точке c. Очевидно, что максимизирующий полезность рациональный индивид предпочтет потратить сумму A на меры по предотвращению страхового случая.

Если страховщик не может проконтролировать расходование суммы A, то индивид, не тратя A, купит страховку по $P_0 = \alpha_0 L$ с равновесием в точке d (рис. 8.22).

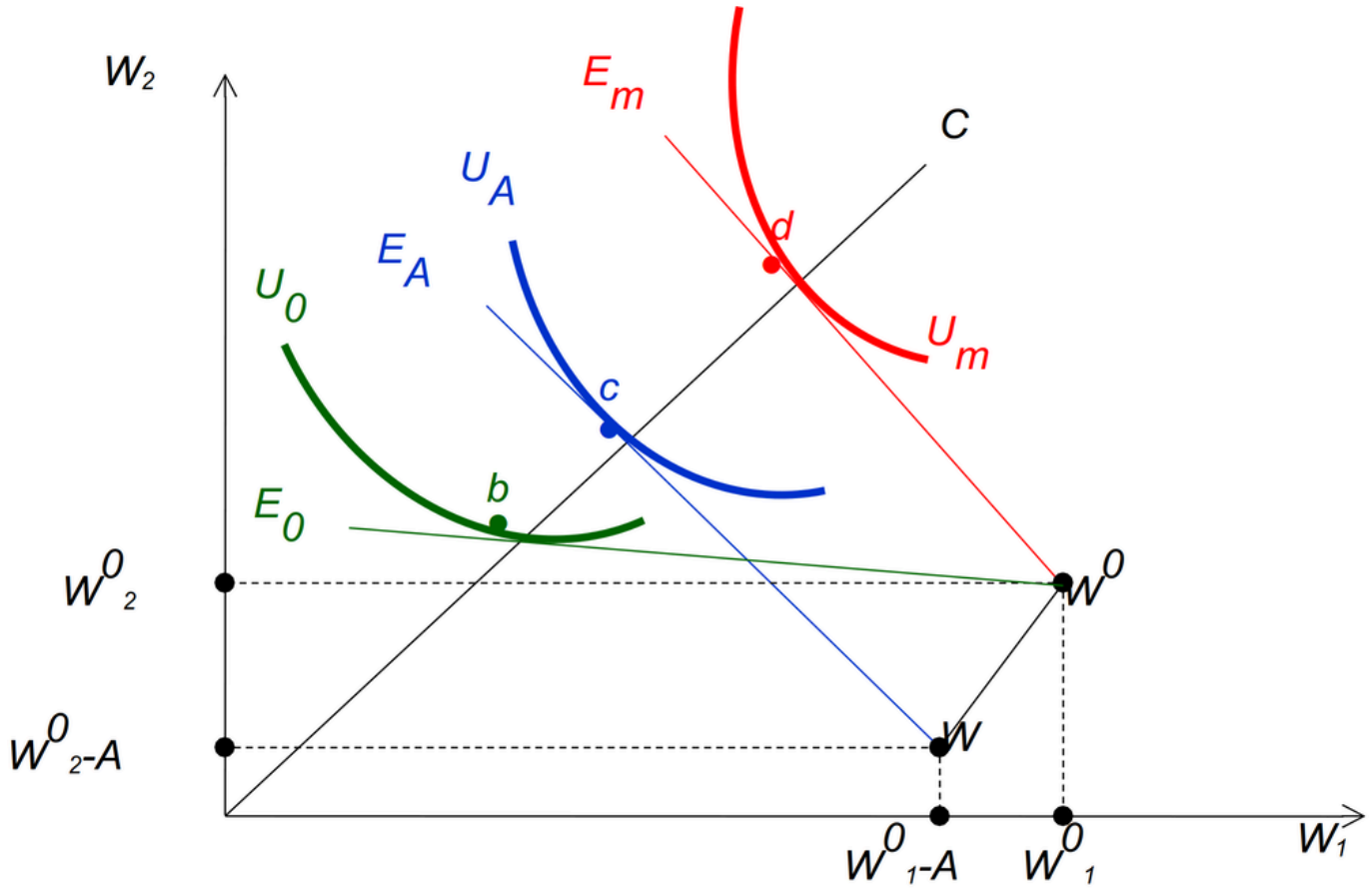


Рисунок 8.22. Моральный ущерб на рынке страхования

Решение возникшей проблемы морального риска состоит в том, чтобы предложить такой контракт, в рамках которого предполагаемая вероятность страхового случая в точности равна его вероятности при расходовании суммы A.

Пусть (как показано на рис. 8.23):

- Страховая компания предлагает контракт с компенсацией $C^* < L$ по цене $P^* = \alpha_A C^*$ такой, что при несении расходов A индивид переходит из W в точку e на U_{A^*}, а в отсутствие расходов – из W_0 в e' на U_{0^*}.
- Кривые безразличия U_{A^*} и U_{A^0} пересекаются в точке f на линии определенности $0C$, но различие между ними в том, что U_{A^*} рассчитывается на основе α_A, а U_{0^*} - на основе α_0.
- Чтобы побудить покупателя страховки истратить сумму A, должно быть: $U_{A^*} \geq U_{0^*}$ при выбранном C^*.

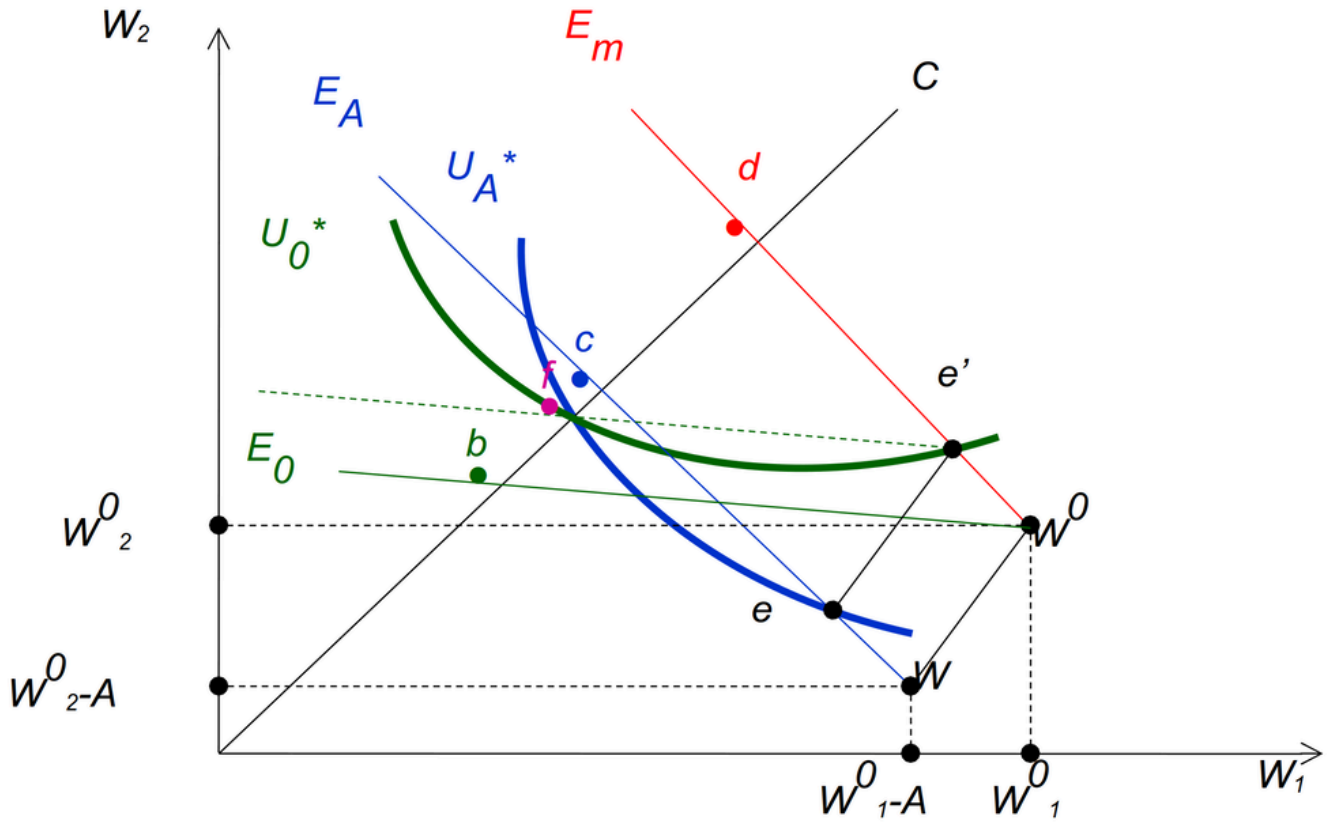


Рисунок 8.23. Решение проблемы морального ущерба на рынке страхования

Тогда, так как f лежит выше b, индивид предпочитает контракт $(\alpha_0 C^*, C^*)$ контракту $(\alpha_0 L^*, L^*)$, ибо сокращение страхового покрытия более чем компенсируется сокращением платы за страховку. Точка b не становится равновесной.

Проблема морального ущерба решается: индивид идет на расходы A, чтобы уменьшить вероятность незастрахованных потерь $L - C^*$. При этом, при выборе точки e контракт $(\alpha_A C^*, C^*)$ является безубыточным.

Таким образом, решение проблемы морального ущерба достигается благодаря тому, что предлагается неполная страховка по справедливой премии.

	Междисциплинарный взгляд: Почему важно различать скрытые характеристики и скрытые действия (Материал интерактивного цифрового учебника «Институциональная экономика»)

1. В тексте параграфа частично использованы авторские материалы из учебника: Никифоров А.А., Антипина О.Н., Миклашевская Н.А. Макроэкономика: научные школы, концепции, экономическая политика. Учебник. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во «Дело и сервис», 2010. С. 544-549. ↩

2. Shapiro C., Stiglitz J.E. Equilibrium Unemployment as a Worker Discipline Device. *The American Economic Review*. Vol. 74, June 1984. P. 433-444. ↩

3. Ibid. P. 438. ↩

4. Ibid. P. 439. ↩

8.4. Проблема заказчика-исполнителя

8.4.1. Скрытая информация

Рассмотрим проблему заказчика-исполнителя при асимметрии информации, порождающую неблагоприятный отбор, на примере взаимодействия заказчика – собственника предприятия и исполнителя – адвоката.

Пусть функция полезности адвоката i-го типа имеет квазилинейную форму $U_i\left(w,E\right)=V_i(w_i)\text{-}a_i$, где w_i – величина заработной платы, $a_i=\frac{x_i}{\theta_i}$, x_i – объем предоставленных юридических услуг, θ_i – уровень квалификации адвоката. Предположим для простоты, что возможен найм двух типов адвокатов $(i=\{1,2\})$, для которых показатели качества соотносятся следующим образом: $\theta_2>\theta_1$, следовательно, $a_2<a_1$. Пусть для определенности резервный уровень полезности адвоката равен нулю.

Прибыль заказчика имеет вид: $PR_i=x_i\text{-}w_i$. Здесь предполагается единичная цена юридических услуг.

Рассчитаем вначале оптимальные контракты в условиях полной информации. Оптимизационная задача для владельца предприятия будет выглядеть так:

$$\begin{cases}\max_{x_i,w_i}PR_i=\max_{x_i,w_i}\left(x_i\text{-}w_i\right):\\ V_i(w_i)\text{-}\frac{x_i}{\theta_i}\geq 0.\end{cases}$$

Функция Лагранжа для этой задачи будет иметь следующий вид:

$$L=x_i\text{-}w_i+\lambda\left(V_i(w_i)\text{-}\frac{x_i}{\theta_i}\right).$$

Необходимые условия экстремума подразумевают, прежде всего, оптимальность по искомым переменным – объему оказываемых услуг и уровню заработной платы:

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x_i}=1\text{-}\frac{\lambda}{\theta_i}=0;\\ \frac{\partial L}{\partial w_i}=\text{-}1+\lambda V_i^{'}\left(w_i\right)=0;\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}\lambda=\theta_i>0;\\ \lambda=\frac{1}{V_i^{'}(w_i)};\end{cases}$$

а значит,

$$V_i^{'}\left(w_i\right)=\frac{1}{\theta_i},$$

и

$$w_i=\left(V_i^{'}\right)^{\text{-}1}\left(\frac{1}{\theta_i}\right).$$

Кроме того, должны выполняться условия дополняющей нежесткости:

$$\lambda\frac{\partial L}{\partial\lambda}=\lambda\left(V_i(w_i)\text{-}\frac{x_i}{\theta_i}\right)=0,\lambda\geq 0,V_i(w_i)\text{-}\frac{x_i}{\theta_i}\geq 0.$$

В силу положительности λ, показанной выше, из условия дополняющей нежесткости можно сделать вывод, что ограничение по рациональности является активным: $V_i(w_i)=\frac{x_i}{\theta_i}$, следовательно, используя выражение для заработной платы, получаем оптимальный объем оказанных услуг: $x_i=\theta_iV_i\left(\left(V_i^{'}\right)^{\text{-}1}\left(\frac{1}{\theta_i}\right)\right)$.

Условием оптимальности контракта при полной информации является равенство предельной нормы замещения между заработной платой и объемом услуг для собственника и адвоката:

$$MRS_L^i=\text{-}\frac{dw_i}{dx_i}\Big|_{U_i=const}=\frac{\frac{\partial U_i}{\partial x_i}}{\frac{\partial U_i}{\partial w_i}}=\text{-}\frac{1}{\theta_iV_i^{'}(w_i)}=\text{-}1=\frac{\frac{\partial PR_i}{\partial x_i}}{\frac{\partial PR_i}{\partial w_i}}=\text{-}\frac{dw_i}{dx_i}\Big|_{PR_i=const}=MRS_O^i.\ (10.16)$$

Поскольку очевидно, что сами величины x_i и w_i для заказчика и исполнителя совпадают, это означает касание кривой безразличия адвоката и изопрофиты собственника фирмы (рис. 8.24).

Итак, в условиях полной информации будут существовать два типа оптимальных контрактов – соответственно, для исполнителя, демонстрирующего высокое либо низкое качество оказанных услуг: $\left(x_i^*,w_i^*\right)=\left(\theta_iV_i\left(\left(V_i^{'}\right)^{\text{-}1}\left(\frac{1}{\theta_i}\right)\right),\left(V_i^{'}\right)^{\text{-}1}\left(\frac{1}{\theta_i}\right)\right),i=\{1,2\}.$

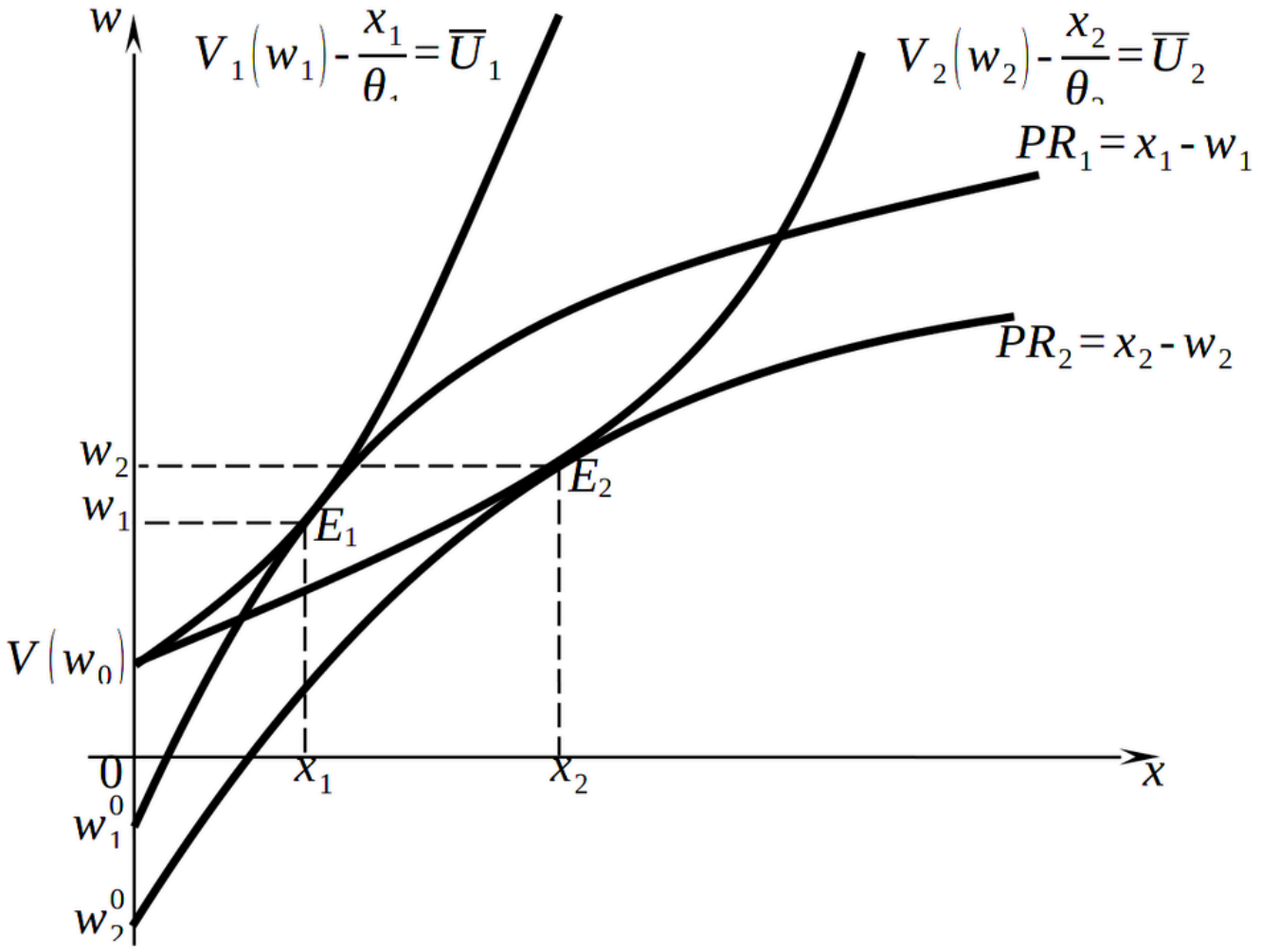


Рисунок 8.24. Отсутствие скрытой информации

Рассчитаем теперь субоптимальные контракты в условиях асимметричной информации. Ограничение по рациональности имеет вид:

$$V_1(w_1) - \frac{x_1}{\theta_1} \geq 0.$$

Ограничение по совместимости стимулов выглядит так:

$$V_2(w_2) - \frac{x_2}{\theta_2} \geq V_1(w_1) - \frac{x_1}{\theta_2}.$$

С точки зрения собственника фирмы, оптимизационная задача будет такова:

$$\begin{cases} \max_{x_1,w_1,x_2,w_2} EPR = \max_{x_1,w_1,x_2,w_2} \left(p_1 (x_1 - w_1) + (1-p_1)(x_2 - w_2)\right): \\ V_1(w_1) - \frac{x_1}{\theta_1} \geq 0, \\ V_2(w_2) - \frac{x_2}{\theta_2} \geq V_1(w_1) - \frac{x_1}{\theta_2}. \end{cases}$$

Функция Лагранжа для этой задачи будет иметь следующий вид:

$$L = p_1 (x_1 - w_1) + (1-p_1)(x_2 - w_2) + \lambda \left(V_1(w_1) - \frac{x_1}{\theta_1}\right) + \mu \left(V_2(w_2) - \frac{x_2}{\theta_2} - V_1(w_1) + \frac{x_1}{\theta_2}\right).$$

Условия оптимальности по искомым переменным – ставкам заработной платы в ситуации высокой либо низкой результативности фирмы – подразумевают, прежде всего, равенство нулю частных производных лагранжиана по искомым переменным – величинам заработной платы и юридических услуг:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial w_1} = -p_1 + (\lambda - \mu) V_1'(w_1) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial w_2} = p_1 - 1 + \mu V_2'(w_2) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 - \frac{\lambda}{\theta_1} + \frac{\mu}{\theta_2} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - p_1 - \frac{\mu}{\theta_2} = 0, \end{cases}$$

а значит,

$$\begin{cases} \lambda\text{-}\mu=\frac{p_1}{V_1^{'}(w_1)}, \\ \mu=\frac{1\text{-}p_1}{V_2^{'}(w_2)}>0, \\ \mu=(1\text{-}p_1)\theta_2>0, \\ \lambda=\theta_1>0. \end{cases}$$

Преобразуя данную систему, получаем:

$$\frac{1}{V_2^{'}(w_2)}=\theta_2,\ \frac{1}{V_1^{'}(w_1)}=\frac{\theta_1\text{-}(1\text{-}p_1)\theta_2}{p_1},$$

а значит, оптимальные значения заработной платы будут равны:

$$w_1=(V_1^{'})^{\text{-}1}\left(\frac{p_1}{\theta_1\text{-}(1\text{-}p_1)\theta_2}\right), w_2=(V_2^{'})^{\text{-}1}\left(\frac{1}{\theta_2}\right).$$

Кроме того, необходимо учитывать условия дополняющей нежесткости:

$$\lambda\frac{\partial L}{\partial\lambda}=\lambda\left(V_1(w_1)\text{-}\frac{x_1}{\theta_1}\right)=0, \lambda\geq 0, V_1(w_1)\text{-}\frac{x_1}{\theta_1}\geq 0.$$

$$\mu\frac{\partial L}{\partial\mu}=\mu\left(V_2(w_2)\text{-}\frac{x_2}{\theta_2}\text{-}V_1(w_1)+\frac{x_1}{\theta_2}\right)=0, \mu\geq 0, V_2(w_2)\text{-}\frac{x_2}{\theta_2}\text{-}V_1(w_1)+\frac{x_1}{\theta_2}\geq 0.$$

Поскольку $\lambda>0$ и $\mu>0$, постольку ограничения по рациональности и самоотбору являются жесткими:

$$V_1(w_1)=\frac{x_1}{\theta_1}, m.e.\ x_1=\theta_1 V_1(w_1),$$

и

$$V_2\left(w_2\right)\text{-}\frac{x_2}{\theta_2}=V_1\left(w_1\right)\text{-}\frac{x_1}{\theta_2},$$

т.е.

$$x_2=\theta_2\left(V_2\left(w_2\right)\text{-}V_1\left(w_1\right)\right)+x_1=\theta_2 V_2\left(w_2\right)\text{-}\left(\theta_2\text{-}\theta_1\right)V_1\left(w_1\right).$$

Следовательно, объемы юридических услуг в точке оптимума составят:

$$x_1=\theta_1 V_1\left(\left(V_1^{'}\right)^{\text{-}1}\left(\frac{p_1}{\theta_1\text{-}(1\text{-}p_1)\theta_2}\right)\right),$$

$$x_2=\theta_2 V_2\left(\left(V_2^{'}\right)^{\text{-}1}\left(\frac{1}{\theta_2}\right)\right)\text{-}\left(\theta_2\text{-}\theta_1\right)V_1\left(\left(V_1^{'}\right)^{\text{-}1}\left(\frac{p_1}{\theta_1\text{-}(1\text{-}p_1)\theta_2}\right)\right).$$



Числовой пример

Рассмотрим числовой пример, иллюстрирующий взаимодействие заказчика – собственника предприятия и исполнителя – адвоката. Пусть функция полезности адвоката i-го типа имеет квазилинейную форму $U_i\left(w,E\right)=V_i(w_i)\text{-}a_i$, где w_i – величина заработной платы, $a_i=\frac{x_i}{\theta_i}$, x_i – объем предоставленных юридических услуг, θ_i – уровень квалификации адвоката.

Предположим для простоты, что возможен найм двух типов адвокатов $(i=\{1,2\})$, для которых показатели качества соотносятся следующим образом: $\theta_2>\theta_1$, следовательно, $a_2<a_1$. Пусть для определенности $V_i\left(w_i\right)=\ln w_i$, $i=\{1,2\}$, а резервный уровень полезности адвоката равен нулю.

Прибыль заказчика имеет вид: $PR_i=x_i\text{-}w_i$. Здесь предполагается единичная цена юридических услуг.

Рассчитаем вначале оптимальные контракты в условиях полной информации. Оптимизационная задача для владельца предприятия будет выглядеть так:

$$\begin{cases} \max_{x_i,w_i} PR_i=\max_{x_i,w_i}\left(x_i\text{-}w_i\right): \\ \ln w_i\text{-}\frac{x_i}{\theta_i}\geq 0. \end{cases}$$

Функция Лагранжа для этой задачи будет иметь следующий вид:

$$L=x_i\text{-}w_i+\lambda\left(\ln w_i\text{-}\frac{x_i}{\theta_i}\right).$$

Необходимые условия экстремума подразумевают, прежде всего, оптимальность по искомым переменным – объему оказываемых услуг и уровню заработной платы:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i}=1\text{-}\frac{\lambda}{\theta_i}=0; \\ \frac{\partial L}{\partial w_i}=\text{-}1+\frac{\lambda}{w_i}=0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \lambda=\theta_i>0; \\ \lambda=w_i, \end{cases}$$

а значит,

$$w_i = \theta_i. \ (1)$$

Кроме того, должны выполняться условия дополняющей нежесткости:

$$\lambda \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda \left(\ln w_i - \frac{x_i}{\theta_i} \right) = 0, \lambda \geq 0, \ln w_i - \frac{x_i}{\theta_i} \geq 0.$$

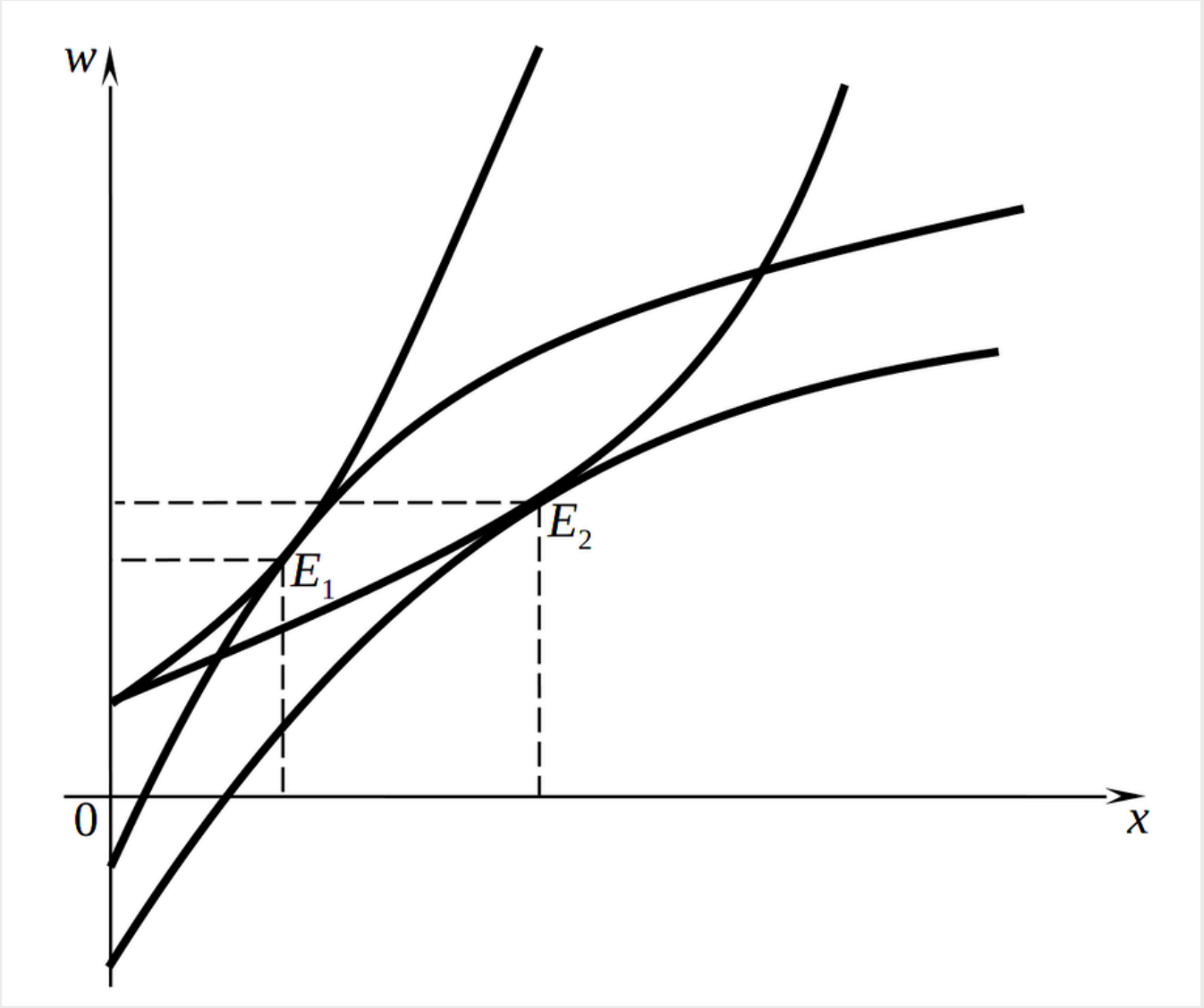
В силу положительности λ, показанной выше, из условия дополняющей нежесткости можно сделать вывод, что ограничение по рациональности является активным: $\ln w_i = \frac{x_i}{\theta_i}$, следовательно, используя выражение для заработной платы, получаем оптимальный объем оказанных услуг:

$$x_i = \theta_i \ln \theta_i. \ (2)$$

Условием оптимальности контракта при полной информации является равенство предельной нормы замещения между заработной платой и объемом услуг для собственника и адвоката:

$$MRS_L^i = - \frac{dw_i}{dx_i} \Big|_{U_i = const} = \frac{\frac{\partial U_i}{\partial x_i}}{\frac{\partial U_i}{\partial w_i}} = - \frac{w_i}{\theta_i} = -1 = \frac{\frac{\partial PR_i}{\partial x_i}}{\frac{\partial PR_i}{\partial w_i}} = - \frac{dw_i}{dx_i} \Big|_{PR_i = const} = MRS_O^i.$$

Поскольку очевидно, что сами величины x_i и w_i для заказчика и исполнителя совпадают, это означает касание кривой безразличия адвоката и изопрофиты собственника фирмы.



Отсутствие скрытой информации: пример

Итак, в условиях полной информации будут существовать два типа оптимальных контрактов – соответственно, для исполнителя, демонстрирующего высокое либо низкое качество оказанных услуг: $\left(x_i^*, w_i^* \right) = (\theta_i \ln \theta_i, \theta_i), i = \{1, 2\}$. Прибыль работодателя в каждом из случаев составит

$$PR_i^* = \theta_i \ln \theta_i - \theta_i = \theta_i \left(\ln \theta_i - 1 \right),$$

следовательно, ее ожидаемая величина в условиях оптимума при полной информации будет равна:

$$EPR^* = p_1 PR_1^* + (1 - p_1) PR_2^* = p_1 \theta_1 \left(\ln \theta_1 - 1 \right) + (1 - p_1) \theta_2 \left(\ln \theta_2 - 1 \right).$$

Рассчитаем теперь субоптимальные контракты в условиях асимметричной информации.

Ограничение по рациональности имеет вид:

$$\ln w_1\text{-}\frac{x_1}{\theta_1} \geq 0.$$

Ограничение по совместимости стимулов выглядит так:

$$\ln w_2\text{-}\frac{x_2}{\theta_2} \geq \ln w_1\text{-}\frac{x_1}{\theta_2}.$$

При оптимизации стимулирующего контракта данные ограничения будут активными:

$$x_1=\theta_1 \ln w_1,$$
$$x_2=\theta_2 \ln w_2+(\theta_1\text{-}\theta_2)\ln w_1.$$

При необходимости жесткость данных ограничений можно обосновать, выписав функцию Лагранжа и соответствующие условия стационарности по переменным – ставкам заработной платы и объемам юридических услуг, а также дополняющей нежесткости.

Итак, с точки зрения собственника фирмы, оптимизационная задача принимает вид:

$$\begin{cases} \max_{x_1,w_1,x_2,w_2} EPR=\max_{x_1,w_1,x_2,w_2}\left(p_1\left(x_1\text{-}w_1\right)+\left(1\text{-}p_1\right)\left(x_2\text{-}w_2\right)\right): \\ x_1=\theta_1 \ln w_1, \\ x_2=\theta_2 \ln w_2+(\theta_1\text{-}\theta_2)\ln w_1. \end{cases}$$

Будем решать данную задачу подстановкой ограничений в целевую функцию. Тем самым, данную задачу условной оптимизации можно свести к задаче безусловной максимизации ожидаемой прибыли по ставкам заработной платы:

$$\max_{w_1,w_2} EPR=\max_{w_1,w_2}\left(p_1\left(\theta_1 \ln w_1\text{-}w_1\right)+\left(1\text{-}p_1\right)\left(\theta_2 \ln w_2+(\theta_1\text{-}\theta_2)\ln w_1\text{-}w_2\right)\right)\text{-}=\max_{w_1,w_2}\left(\left(\theta_1\text{-}\left(1\text{-}p_1\right)\theta_2\right)\ln w_1\text{-}p_1 w_1+\left(1\text{-}p\right.\right.$$

Необходимые условия экстремума имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial EPR}{\partial w_1}=\frac{\theta_1\text{-}(1\text{-}p_1)\theta_2}{w_1}\text{-}p_1=0, \\ \frac{\partial EPR}{\partial w_2}=\frac{(1\text{-}p_1)\theta_2}{w_2}\text{-}\left(1\text{-}p_1\right)=0; \end{cases}$$

а значит,

$$\begin{cases} w_1=\frac{\theta_1\text{-}(1\text{-}p_1)\theta_2}{p_1}, \\ w_2=\theta_2. \end{cases}$$

Следовательно, объемы юридических услуг в точке оптимума составят:

$$x_1=\theta_1 \ln w_1=\theta_1 \ln\left(\theta_1\text{-}\left(1\text{-}p_1\right)\theta_2\right)\text{-}\theta_1 \ln p_1,$$
$$x_2=\theta_2 \ln w_2+(\theta_1\text{-}\theta_2)\ln w_1=\theta_2 \ln \theta_2+(\theta_1\text{-}\theta_2)\ln\left(\theta_1\text{-}\left(1\text{-}p_1\right)\theta_2\right)\text{-}(\theta_1\text{-}\theta_2)\ln p_1.$$

Итак, $w_2=w_2^*$, т.е. работнику, предоставляющему высококачественные услуги, выплачивается максимально возможная, с точки зрения эффективности функционирования предприятия, заработная плата, хотя объем оказанных услуг меньше оптимального уровня, который имеет место в условиях полной информации: $x_2<x_2^*$.

Асимметрия информации, наличие низкопроизводительных работников позволяет высококвалифицированному специалисту диктовать работодателю свои условия, претендовать на самый высокий из возможных уровень заработной платы и при этом проявлять оппортунистическое поведение, минимизируя затрачиваемые усилия, сокращая их уровень по отношению к оптимальному, с точки зрения владельца бизнеса, уровню. Заказчик в этих условиях пытается простимулировать его к осуществлению максимального трудового вклада, назначая по возможности наиболее высокую заработную плату, но объективно не в силах добиться поставленной цели, теряя в прибыли на данной группе сотрудников, по сравнению с ситуацией полной информации. Стремление компенсировать потери, понижая заработную плату работнику, предоставляющему низкокачественные услуги, по сравнению с уровнем при полной информации $w_1<w_1^*$, не приносит успеха, т.к. объем оказанных услуг таким исполнителем также ниже оптимального значения $x_1<x_1^*$, и при этом прибыль заказчика на данном сегменте персонала оказывается ниже максимально возможного уровня, достигаемого в условиях полноты информации, когда взаимосвязь между величиной трудового вклада исполнителя и его заработной платой описывается соотношением (2). Действительно, соответствующий оптимальной ситуации уровень заработной платы (1) дает максимум прибыли заказчика для каждой из групп исполнителей $PR_i^*=\theta_i \ln \theta_i\text{-}\theta_i, i=\{1,2\}$; и любое отклонение от этой точки будет приводить к снижению рентабельности бизнеса.

Таким образом, в условиях квазиоптимума величина ожидаемой прибыли собственника фирмы оказывается ниже уровня, соответствующего ситуации полноты информации, что порождает, тем самым, агентские издержки асимметрии информации.

8.4.2. *Скрытые действия*

Модели взаимодействия заказчика и исполнителя анализируют проблематику морального риска в контексте отделения собственности от управления.

Проблема заказчика-исполнителя возникает как проявление постконтрактного оппортунизма, когда одним индивидом (исполнителем) по поручению другого (заказчика) осуществляется некоторая деятельность. Она связана с тем, что исполнитель, формально действуя от имени заказчика, может преследовать свои цели, достижение которых не входит в интересы другой стороны. Скрыто действовать в собственных интересах исполнителю позволяет асимметрия информации: заказчик либо вовсе не может проконтролировать его, либо это оказывается крайне сложно и дорогостояще.

Отношения между заказчиком и исполнителем, осложненные информационной асимметрией, довольно распространены. Наиболее наглядно проблема этих отношений выглядит в корпорации. Две стороны отношений - акционеры, которые являются собственниками фирмы, и менеджеры, управляющие делами фирмы. Акционеры выступают в роли заказчиков, а менеджеры - в роли исполнителей. Заказчики не имеют полной информации о действиях исполнителей. К примеру, акционерам доступна информация о валовой прибыли корпорации, но им ничего не известно о тех усилиях менеджеров, которые они вложили в ее получение. Им также ничего не известно о том, каким образом будет использоваться менеджерами доля прибыли, направляющаяся на расширение производства, но их интересует та часть прибыли, которая пойдет на выплату дивидендов. Иными словами, акционеры не имеют возможности проконтролировать, были ли действия менеджеров адекватными стремлениям их как собственников корпорации.

Источники конфликта интересов собственников и менеджеров кроются в том, что каждая из сторон имеет личные цели и действует в разной рыночной среде. Акционеры преумножают свое богатство в виде акций, приносящих дивиденды, на фондовом рынке, а менеджеры стремятся максимально дорого продать свою рабочую силу на рынке труда. В этой связи у менеджеров появляется ряд оснований для того, чтобы управлять фирмой в разрез с интересами собственников.

Во-первых, у менеджеров возникают определенные предпочтения в области представительских расходов. Они могут счесть необходимым строительство фешенебельного офиса, найм огромного количества обслуживающего персонала, покупку шикарных представительских служебных машин для членов совета директоров и высших менеджеров и т.п. Менеджеры могут обосновывать эти расходы необходимостью, но на деле они могут служить в большей степени их собственному благу. Высокие представительские расходы могут приносить полезность менеджерам, одновременно повышая издержки и сокращая долю прибыли, остающуюся для выплаты дивидендов акционерам.

Во-вторых, менеджеры, как и большинство людей при прочих равных условиях предпочитают тяжелой работе отдых. Они способны предпринять усилия по реализации того или иного мероприятия только в том случае, если оно принесет им дополнительные выгоды большие, чем те издержки, которые им придется понести. Однако в том случае, если выгоды в виде растущих дивидендов будут доставаться акционерам, менеджеры предпочтут отказаться от лишних расходов собственных сил.

В-третьих, на поведение менеджеров будет оказывать влияние и их негативное отношение к риску. Как правило, акционеры диверсифицируют свой риск, приобретая акции различных компаний. Если дивиденды по акциям одних компаний снижаются, то акционерам удается компенсировать падение доходов за счет роста дивидендов по акциям других компаний. Судьба доходов менеджеров, напротив, целиком связана с деятельностью одной единственной компании, на благо которой они заставляют служить свой человеческий капитал. Следовательно, если ради получения высокой прибыли, а значит и выплаты высоких дивидендов акционерам, надо будет выбирать рискованную рыночную стратегию, грозящую в случае неудачи убытками или крахом компании, менеджеры вряд ли пойдут на это.

В-четвертых, реализация интересов менеджеров и акционеров может происходить в разных временных промежутках. К примеру, менеджеры могут быть в большей степени заинтересованы в достижении краткосрочных целей, а акционеры - долгосрочных. Так, очень часто жалование менеджеров напрямую зависит от того, какую долю общей выручки компания получила благодаря их персональной активности. Но не всегда рост общей выручки в коротком периоде способствует укреплению конкурентного преимущества фирмы и росту прибыли в долгом периоде, в котором заинтересованы акционеры.

Легко убедится, что перечисленные предпочтения менеджеров, исходя из которых они могут строить свое поведение, идут вразрез с интересами акционеров как собственников корпорации, состоящими в максимизации прибыли фирм, и, как следствие, - причитающихся им дивидендов.

Проанализируем типичную модель взаимодействия заказчика и исполнителя (рис. 8.25). Предположим, что существуют два состояния экономической среды: благоприятное (C_1), когда валовая прибыль фирмы – чистая выручка за вычетом всех издержек за исключением компенсации управляющего звена – будет высокой (NR_1), и неблагоприятное (C_2), при котором доходы низкие (NR_2). Нейтральный к риску собственник, или заказчик (принципал), которому принадлежит предприятие, нанимает для его управления менеджера, или исполнителя (агента), действующего в своекорыстных интересах и способного работать как с высокой самоотдачей (E_H), так и «спустя рукава» (E_L), если ему это будет выгодно. При этом полезность не склонного к риску управляющего описывается квазилинейной функцией: $U(w, E)=V(w)$-E, возрастающей по ставке заработной платы (w). Уровень трудовых усилий менеджера (E), который понижает величину полезности работника, сказывается на вероятности того, будет ли деятельность фирмы успешной или нет. Если он работает с высокой самоотдачей на благо предприятия (E_H), то и вероятность коммерческого успеха будет выше $\left(p_H > \frac{1}{2}\right)$, по сравнению с ситуацией, когда управленец будет прикладывать незначительные усилия для улучшения функционирования фирмы (E_L), полагаясь на то, что благоприятная экономическая конъюнктура скомпенсирует его оппортунизм, но прекрасно понимая, что такое развитие событий является не очень вероятным $(p_L < p_H)$. Система денежной компенсации менеджеру (*И*) выстраивается владельцем фирмы (*З*) с привязкой к результативности деятельности предприятия: если чистая выручка оказывается высокой, то соответствующей будет и заработная плата управляющего (w_1), и наоборот, при низкой валовой прибыльности фирмы менеджер будет получать меньший гонорар (w_2). Исполнитель волен отклонить контракт, предлагаемый заказчиком, соглашаясь на некоторый резервный (минимально гарантированный) уровень полезности $(V(0))$ и принося при этом нулевую чистую выручку фирме. Чистая прибыль фирмы представляет собой разность между валовой прибылью и компенсацией управляющему: NR_i-$w_i, i=\{1, 2\}$.

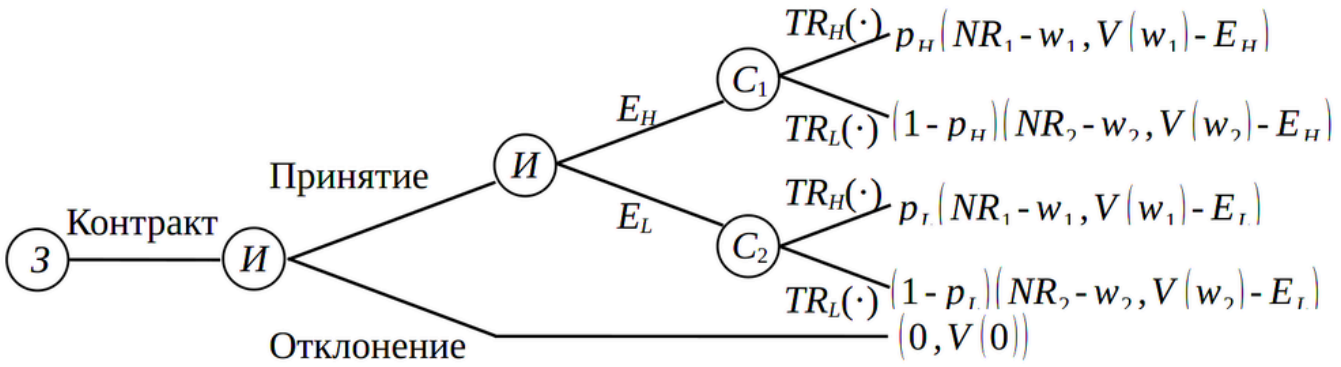


Рисунок 8.25. Взаимодействие заказчика и исполнителя

При полной информации оптимизационная задача состоит в максимизации ожидаемой прибыли фирмы:

$$EPR = p_j\left(NR_1 - w_1^j\right) + (1-p_j)\left(NR_2 - w_2^j\right),$$

где $j = \{H, L\}$ – уровень усилий менеджера, при условии выполнения ограничения по рациональности менеджера, в соответствии с которым его ожидаемая полезность должна быть не меньше некоторого гарантированного при любой ситуации (резервного) уровня:

$$p_j V\left(w_1^j\right) + (1-p_j)V\left(w_2^j\right) - E_j \geq U(0) = V(0), j = \{H, L\}.$$

Если ограничение по резервной полезности, или «ограничение участия», не выполняется, то очевидно, что рациональные экономические агенты откажутся от данного вида деятельности, предпочитая ему альтернативный.

Итак, оптимизационная задача для собственника предприятия при полной информации имеет вид:

$$\begin{cases} \max_{w_1^j, w_2^j} EPR_H = \max_{w_1^j, w_2^j}\left(p_j\left(NR_1 - w_1^j\right) + (1-p_j)\left(NR_2 - w_2^j\right)\right) : \\ EU_j = p_j V\left(w_1^j\right) + (1-p_j)V\left(w_2^j\right) - E_j \geq V(0), j = \{H, L\}. \end{cases}$$

Функция Лагранжа для этой задачи будет такова:

$$L = p_j\left(NR_1 - w_1^j\right) + (1-p_j)\left(NR_2 - w_2^j\right) + \lambda\left(p_j V\left(w_1^j\right) + (1-p_j)V\left(w_2^j\right) - E_j - V(0)\right).$$

Необходимые условия экстремума подразумевают, прежде всего, оптимальность по искомым переменным – уровням заработной платы, соответствующим разным состояниям экономической среды:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial w_1^j} = p_j\left(\lambda V'\left(w_1^j\right) - 1\right) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial w_2^j} = (1-p_j)\left(\lambda V'\left(w_2^j\right) - 1\right) = 0, \end{cases}$$

$$m.e.\ V'\left(w_1^j\right) = V'\left(w_2^j\right) = \frac{1}{\lambda} > 0,$$

$$\text{а значит}, w_1^j = w_2^j = w_j.$$

Кроме того, должны выполняться условия дополняющей нежесткости:

$$\lambda\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda\left(p_j V\left(w_1^j\right) + (1-p_j)V\left(w_2^j\right) - E_j - V(0)\right) = 0,$$

$$\lambda \geq 0, p_j V\left(w_1^j\right) + (1-p_j)V\left(w_2^j\right) - E_j \geq V(0).$$

Из этого условия видно, что поскольку в силу монотонности полезности по заработной плате $\lambda > 0$, постольку ограничение по рациональности является активным:

$$p_j V\left(w_1^j\right) + (1-p_j)V\left(w_2^j\right) - E_j = V(0).$$

Решение данной задачи будет найдено из данного равенства с учетом единого уровня заработной платы независимо от результативности функционирования предприятия:

$$w_j = V^{-1}\left(E_j + V(0)\right), j = \{H, L\}.$$

В данном случае нет распределения рисков. Весь риск несет собственник, который к нему нейтрален. При этом собственнику не причиняется никакого морального ущерба. Издержки агентского поведения отсутствуют, если менеджер ведет себя так, как того желает собственник.

В ситуации, когда действия менеджера можно наблюдать, оптимальные, с точки зрения общественного благосостояния, контракты в условиях полной информации эквивалентны контрактам, оговаривающим денежную компенсацию исполнителю в зависимости от его усилий. Действительно, поскольку по доказанному выше при решении каждой из двух оптимизационных задач, характеризующих ситуацию, когда агенты демонстрируют, соответственно, высокий либо низкий уровень трудозатрат,

уровень заработной платы оказывается инвариантным по отношению к состоянию экономической среды: $w_1=w_2$. Следовательно, постановку оптимизационной задачи в ситуации с работником, прилагающим большие усилия для выполнения производственных задач, можно упростить:

$$\begin{cases} \max_{w_j} EPR_j=\max_{w_j}\left(p_j\left(NR_1\text{-}w_j\right)+\left(1\text{-}p_j\right)\left(NR_2\text{-}w_j\right)\right): \\ U\left(w,E\right)=V(w_j)\text{-}E_j\geq V(0), j=\{H,L\}. \end{cases}$$

Оптимальность контракта предполагает равенство нулю производной лагранжиана

$$L=p_jNR_1+\left(1\text{-}p_j\right)NR_2\text{-}w_j+\lambda\left(V\left(w_j\right)\text{-}E_j\text{-}V(0)\right)$$

по уровню заработной платы:

$$\frac{\partial L}{\partial w_j}=\text{-}1+\frac{\lambda}{V^{'}(w_j)}=0, m.e. V^{'}\left(w_j\right)=\lambda>0,$$

а также условия дополняющей нежесткости:

$$\lambda\frac{\partial L}{\partial\lambda}=\lambda\left(V\left(w_j\right)\text{-}E_j\text{-}V(0)\right)=0, \lambda\geq 0, V(w_j)\text{-}E_j\geq V(0).$$

Поскольку $\lambda>0$, постольку $V\left(w_j\right)=E_j+V(0)$.

Таким образом, в условиях полной информации исполнителю будет назначена заработная плата, обеспечивающая ему резервный уровень полезности:

$$w_j=V^{\text{-}1}\left(E_j+V(0)\right), j=\{H,L\}.$$

Подводя итог анализа ситуации полной информации, сравним величину прибыли фирмы при различной степени участия в ее деятельности управляющего:

$$EPR_H^*=p_HNR_1+\left(1\text{-}p_H\right)NR_2\text{-}w_H=p_HNR_1+\left(1\text{-}p_H\right)NR_2\text{-}V^{\text{-}1}\left(E_H+V(0)\right),$$
$$EPR_L^*=p_LNR_1+\left(1\text{-}p_L\right)NR_2\text{-}w_L=p_LNR_1+\left(1\text{-}p_L\right)NR_2\text{-}V^{\text{-}1}\left(E_L+V(0)\right),$$

следовательно,

$$EPR_H^*\text{-}EPR_L^*=\left(p_H\text{-}p_L\right)\left(NR_1\text{-}NR_2\right)\text{-}\left(w_H\text{-}w_L\right)=\left(p_H\text{-}p_L\right)\left(NR_1\text{-}NR_2\right)\text{-}\left(V^{\text{-}1}\left(E_H+V(0)\right)\text{-}V^{\text{-}1}\left(E_L+V(0)\right)\right).$$

Таким образом, для того чтобы с точки зрения собственника более предпочтительным был высокий уровень усилий менеджера, разность между величинами чистой выручки при хорошей и плохой конъюнктуре должна превышать разность между соответствующими уровнями заработной платы менеджера в расчете на единицу прироста вероятности наступления благоприятного исхода при увеличении трудозатрат управляющего:

$$NR_1\text{-}NR_2=\frac{V^{\text{-}1}(E_H+V(0))\text{-}V^{\text{-}1}(E_L+V(0))}{p_H\text{-}p_L}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению ситуации асимметрии информации, когда собственник фирмы не имеет возможности проконтролировать действия наемного менеджера. Очевидно, что сам управляющий, рационализируя уровень своего участия в деятельности руководимого им предприятия, выбирает тот уровень усилий, который ему выгоден с точки зрения индивидуальной полезности. Поскольку действия менеджера для собственника не наблюдаемы, рациональной стратегией для заказчика будет привязка системы денежного стимулирования наемного работника к результативности функционирования предприятия в целом, характеризуемой чистой выручкой, которую принципал в состоянии достоверно определить.

При неполноте информации оптимизационная задача состоит в максимизации ожидаемой прибыли фирмы

$$EPR=p_H\left(NR_1\text{-}w_1\right)+\left(1\text{-}p_H\right)\left(NR_2\text{-}w_2\right),$$

при условии выполнения ограничений по минимальной, гарантированной полезности

$$p_HV\left(w_1\right)+\left(1\text{-}p_H\right)V\left(w_2\right)\text{-}E_H\text{-}V(0)\geq 0,$$

и по совместимости стимулов

$$EU_H=p_HV\left(w_1\right)+\left(1\text{-}p_H\right)V\left(w_2\right)\text{-}E_H\geq EU_L=\left(1\text{-}p_H\right)V\left(w_1\right)+p_HV\left(w_2\right)\text{-}E_L,$$
$$\text{или} V\left(w_1\right)\text{-}V\left(w_2\right)+\frac{E_L\text{-}E_H}{2p_H\text{-}1}\geq 0.$$

Очевидно, что собственник заинтересован в том, чтобы простимулировать менеджера к высокому уровню усилий. Итак, принципал (заказчик) решает следующую задачу:

$$\begin{cases} \max_{w_1,w_2} EPR_H=\max_{w_1,w_2}\left(p_H\left(NR_1\text{-}w_1\right)+\left(1\text{-}p_H\right)\left(NR_2\text{-}w_2\right)\right): \\ EU_H=p_HV\left(w_1\right)+\left(1\text{-}p_H\right)V\left(w_2\right)\text{-}E_H\geq V(0), \\ V\left(w_1\right)\text{-}V\left(w_2\right)+\frac{E_L\text{-}E_H}{2p_H\text{-}1}\geq 0. \end{cases}$$

Функция Лагранжа для этой задачи будет иметь следующий вид:

$$L=p_H\left(NR_1\text{-}w_1\right)+\left(1\text{-}p_H\right)\left(NR_2\text{-}w_2\right)+\lambda\left(p_HV\left(w_1\right)+\left(1\text{-}p_H\right)V\left(w_2\right)\text{-}E_H\text{-}V(0)\right)+\mu\left(V\left(w_1\right)\text{-}V\left(w_2\right)+\frac{E_L\text{-}E_H}{2p_H\text{-}1}\right).$$

Необходимые условия экстремума подразумевают, прежде всего, оптимальность по искомым переменным – уровням заработной платы, соответствующим разным состояниям экономической среды:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial w_1}=\text{-}p_H+\lambda p_HV^{'}\left(w_1\right)+\mu V^{'}\left(w_1\right)=0, \\ \frac{\partial L}{\partial w_2}=\lambda\left(1\text{-}p_H\right)V^{'}\left(w_2\right)\text{-}\mu V^{'}\left(w_2\right)+p_H\text{-}1=0, \end{cases}$$

$$т.е. \begin{cases} V'(w_1)=\frac{p_H}{\lambda p_H+\mu}, \\ V'(w_2)=\frac{1\text{-}p_H}{\lambda(1\text{-}p_H)\text{-}\mu}, \end{cases} или \begin{cases} \frac{1}{V'(w_1)}=\lambda+\frac{\mu}{p_H}, \\ \frac{1}{V'(w_2)}=\lambda\text{-}\frac{\mu}{1\text{-}p_H}, \end{cases}$$

а значит,

$$\frac{1}{V'(w_1)}+\frac{1}{V'(w_2)}=\frac{\mu(1\text{-}2p_H)}{p_H(1\text{-}p_H)}.$$

Кроме того, должны выполняться условия дополняющей нежесткости:

$$\lambda\frac{\partial L}{\partial\lambda}=\lambda\left(p_HV(w_1)+(1\text{-}p_H)V(w_2)\text{-}E_H\text{-}V(0)\right)=0,$$
$$\lambda\geq 0, p_HV(w_1)+(1\text{-}p_H)V(w_2)\text{-}E_H\geq V(0);$$
$$\mu\frac{\partial L}{\partial\mu}=\mu\left(V(w_1)\text{-}V(w_2)+\frac{E_L\text{-}E_H}{2p_H\text{-}1}\right)=0, \mu\geq 0, V(w_1)\text{-}V(w_2)+\frac{E_L\text{-}E_H}{2p_H\text{-}1}\geq 0.$$

Если $\mu=0$, то $V'(w_1)=V'(w_2)$, а значит, $V(w_1)\text{-}V(w_2)=0$. Но это противоречит соотношению дополняющей нежесткости, в соответствии с которым $V(w_1)\text{-}V(w_2)+\frac{E_L\text{-}E_H}{2p_H\text{-}1}\geq 0$, ведь $\frac{E_L\text{-}E_H}{2p_H\text{-}1}<0$, т.к. $E_L<E_H$ и $p_H>\frac{1}{2}$. Значит, $\mu>0$ и условие совместимости по стимулам является жестким:

$$V(w_1)\text{-}V(w_2)=\frac{E_H\text{-}E_L}{2p_H\text{-}1}.$$

Следовательно, из условия оптимальности по w_2 и монотонности полезности по заработной плате $\left(V'(w_2)>0\right)$ вытекает, что $\lambda>0$. В силу первого из условий дополняющей нежесткости это означает, что ограничение по рациональности также является активным:

$$p_HV(w_1)+(1\text{-}p_H)V(w_2)=E_H+V(0).$$

Решая систему из двух последних уравнений, получаем, что

$$V(w_1)=\frac{(1\text{-}p_H)(E_H\text{-}E_L)}{2p_H\text{-}1}+E_H+V(0),$$

то есть

$$w_1=V^{\text{-}1}\left(\frac{(1\text{-}p_H)(E_H\text{-}E_L)}{2p_H\text{-}1}+E_H+V(0)\right);$$

и

$$V(w_2)=\frac{p_H(E_L\text{-}E_H)}{2p_H\text{-}1}+E_H+V(0),$$

то есть

$$w_2=V^{\text{-}1}\left(\frac{p_H(E_L\text{-}E_H)}{2p_H\text{-}1}+E_H+V(0)\right).$$

Поскольку $\frac{(1\text{-}p_H)(E_H\text{-}E_L)}{2p_H\text{-}1}>0$, а $\frac{p_H(E_L\text{-}E_H)}{2p_H\text{-}1}<0$, постольку решения задач в условиях полной информации при высоком трудовом вкладе менеджера и в условиях асимметрии информации будут связаны неравенством: $w_1>w_H>w_2$. Таким образом, для стимулирования менеджера к высоким трудозатратам в условиях асимметрии информации собственник должен обеспечить ему повышенную заработную плату, по сравнению с ситуацией полной информации, и предусмотреть снижение заработной платы в качестве санкций за оппортунистическое поведение наемного работника.

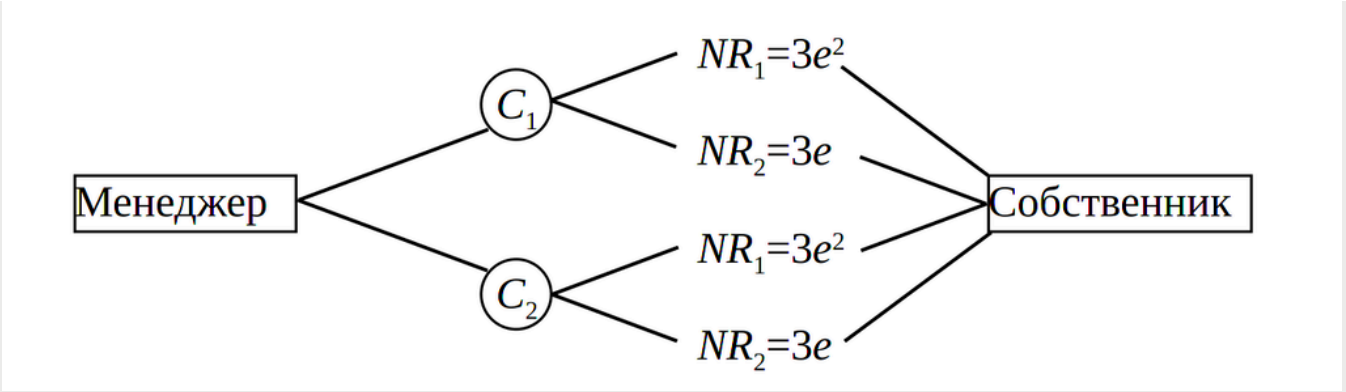
Обратим внимание на то, что оптимальной стратегией для заказчика будет переложить частично риск на исполнителя, предлагая ему такое меню контрактов, которое обеспечивало бы агенту ожидаемую полезность на резервном уровне:

$$EU_H=p_HV(w_1)+(1\text{-}p_H)V(w_2)\text{-}E_H=p_H\left(\frac{(1\text{-}p_H)(E_H\text{-}E_L)}{2p_H\text{-}1}+E_H+V(0)\right)+(1\text{-}p_H)\left(\frac{p_H(E_L\text{-}E_H)}{2p_H\text{-}1}+E_H+V(0)\right)\text{-}E_H=V(0)=U(0).$$

Таким образом, в ситуации асимметрии информации собственник не несет весь риск – он делит его с менеджером.

Числовой пример

Рассмотрим пример, иллюстрирующий проблематику морального ущерба, рассмотренную на модельном уровне выше. Допустим, что чистая выручка фирмы может быть высокой $NR_1=3e^2$ либо низкой $NR_2=3e$; а менеджер фирмы может прикладывать либо большие усилия $E_H=\frac{4}{3}$, либо маленькие $E_L=1$. Действия управляющего сказываются на вероятности того, будет деятельность фирмы более или менее результативной: исход NR_1 имеет место с вероятностью $p_H=\frac{2}{3}$, если предпринято действие E_H, и лишь с вероятностью $p_L=\frac{1}{3}$ в противном случае.



Взаимодействие заказчика и исполнителя: пример

Пусть функция полезности менеджера имеет квазилинейную форму:

$$U(w,E)=\ln w\text{-}E,$$

а его резервный уровень полезности равен нулю.

Нейтральный к риску собственник предприятия разрабатывает стимулирующие контракты, которые предусматривают компенсацию менеджеру в размере w_i, привязанную к получению выручки на уровне TR_i, $i=\{1,2\}$.

Рассчитаем вначале оптимальные контракты в условиях полной информации.

Ожидаемая прибыль собственника предприятия составит:

$$EPR=p_j\left(3e^2\text{-}w_1\right)+(1\text{-}p_j)\left(3e\text{-}w_2\right),$$

где $j=\{H,L\}$ – уровень усилий менеджера.

В случае высоких усилий менеджера оптимизационная задача для владельца предприятия будет выглядеть так:

$$\begin{cases}\max_{w_1^H,w_2^H} EPR_H=\max_{w_1^H,w_2^H}\left(\frac{2}{3}\left(3e^2\text{-}w_1^H\right)+\frac{1}{3}\left(3e\text{-}w_2^H\right)\right):\\ EU_H=\frac{2}{3}\left(\ln w_1^H\text{-}\frac{4}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(\ln w_2^H\text{-}\frac{4}{3}\right)=\frac{2}{3}\ln w_1^H+\frac{1}{3}\ln w_2^H\text{-}\frac{4}{3}\geq 0.\end{cases}$$

Функция Лагранжа для этой задачи будет иметь следующий вид:

$$L=\frac{2}{3}\left(3e^2\text{-}w_1^H\right)+\frac{1}{3}\left(3e\text{-}w_2^H\right)+\lambda\left(\frac{2}{3}\ln w_1^H+\frac{1}{3}\ln w_2^H\text{-}\frac{4}{3}\right).$$

Необходимые условия экстремума подразумевают, прежде всего, оптимальность по искомым переменным – уровням заработной платы, соответствующим разным состояниям экономической среды:

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial w_1^H}=\text{-}\frac{2}{3}+\frac{2\lambda}{3w_1^H}=0;\\ \frac{\partial L}{\partial w_2^H}=\text{-}\frac{1}{3}+\frac{\lambda}{3w_2^H}=0,\end{cases} m.e.\ w_1^H=w_2^H=\lambda>0.$$

Кроме того, должны выполняться условия дополняющей нежесткости:

$$\lambda\frac{\partial L}{\partial\lambda}=\lambda\left(\frac{2}{3}\ln w_1^H+\frac{1}{3}\ln w_2^H\text{-}\frac{4}{3}\right)=0,\ \lambda\geq 0,\ \frac{2}{3}\ln w_1^H+\frac{1}{3}\ln w_2^H\text{-}\frac{4}{3}\geq 0.$$

В силу положительности λ, показанной выше, из условия дополняющей нежесткости можно сделать вывод, что $\frac{2}{3}\ln w_1^H+\frac{1}{3}\ln w_2^H\text{-}\frac{4}{3}=0$, т.е. $\ln w_1^H=\ln w_2^H=\frac{4}{3}$, и $w_1^H=w_2^H=e^{\frac{4}{3}}$.

В случае низких усилий менеджера оптимизационная задача принимает вид:

$$\begin{cases}\max_{w_1^L,w_2^L} EPR_L=\max_{w_1^L,w_2^L}\left(\frac{1}{3}\left(3e^2\text{-}w_1^L\right)+\frac{2}{3}\left(3e\text{-}w_2^L\right)\right):\\ EU_L=\frac{1}{3}\left(\ln w_1^L\text{-}1\right)+\frac{2}{3}\left(\ln w_2^L\text{-}1\right)=\frac{1}{3}\ln w_1^L+\frac{2}{3}\ln w_2^L\text{-}1\geq 0.\end{cases}$$

Выпишем функцию Лагранжа:

$$L=\frac{1}{3}\left(3e^2\text{-}w_1^L\right)+\frac{2}{3}\left(3e\text{-}w_2^L\right)+\lambda\left(\frac{1}{3}\ln w_1^L+\frac{2}{3}\ln w_2^L\text{-}1\right).$$

Необходимые условия экстремума подразумевают оптимальность по заработной плате в разных условиях экономической конъюнктуры:

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial w_1^L}=\text{-}\frac{1}{3}+\frac{\lambda}{3w_1^L}=0,\\ \frac{\partial L}{\partial w_2^L}=\text{-}\frac{2}{3}+\frac{2\lambda}{3w_2^L}=0,\end{cases} m.e.\ w_1^L=w_2^L=\lambda>0;$$

а также условия дополняющей нежесткости:

$$\lambda\frac{\partial L}{\partial\lambda}=\lambda\left(\frac{1}{3}\ln w_1^L+\frac{2}{3}\ln w_2^L\text{-}1\right)=0,\ \lambda\geq 0,\ \frac{1}{3}\ln w_1^L+\frac{2}{3}\ln w_2^L\text{-}1\geq 0.$$

Из последней системы вытекает, что λ – положительная величина, следовательно, $\frac{\partial L}{\partial\lambda}=0$, т.е. $\frac{1}{3}\ln w_1^L+\frac{2}{3}\ln w_2^L=\ln w_1^L=\ln w_2^L=1$, и $w_1^L=w_2^L=e$.

В ситуации, когда действия менеджера можно наблюдать, оптимальные, с точки зрения общественного благосостояния, контракты в условиях полной информации эквивалентны контрактам, оговаривающим денежную компенсацию исполнителю в зависимости от его усилий. Действительно, поскольку по доказанному выше при решении каждой из двух оптимизационных задач, характеризующих ситуацию, когда агенты демонстрируют, соответственно, высокий либо низкий уровень трудозатрат, уровень заработной платы оказывается инвариантным по отношению к состоянию экономической среды: $w_1=w_2$. Следовательно, постановку оптимизационной задачи в ситуации с работником, прилагающим большие усилия для выполнения производственных задач, можно упростить:

$$\begin{cases} \max_{w_H} EPR_H = \max_{w_H} \left(\frac{2}{3}\left(3e^2 - w_H\right) + \frac{1}{3}\left(3e - w_H\right)\right) = \max_{w_H} \left(2e^2 + e - w_H\right) : \\ U_H = \ln w_H - \frac{4}{3} \geq 0. \end{cases}$$

Оптимальность контракта предполагает равенство нулю производной лагранжиана $L = 2e^2 + e - w_H + \lambda\left(\ln w_H - \frac{4}{3}\right)$ по уровню заработной платы $\frac{\partial L}{\partial w_H} = -1 + \frac{\lambda}{w_H} = 0$, т.е. $w_H = \lambda > 0$, а также условия дополняющей нежесткости:
$\lambda\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda\left(\ln w_H - \frac{4}{3}\right) = 0, \lambda \geq 0, \ln w_H - \frac{4}{3} \geq 0$. *Поскольку $\lambda > 0$, постольку $\ln w_H = \frac{4}{3}$, т.е. $w_H = e^{\frac{4}{3}}$.*

Аналогично, задачу оптимизации при низких усилиях агента можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \max_{w_L} EPR_L = \max_{w_L} \left(\frac{1}{3}\left(3e^2 - w_L\right) + \frac{2}{3}\left(3e - w_L\right)\right) = \max_{w_L} \left(e^2 + 2e - w_L\right) : \\ U_L = \ln w_L - 1 \geq 0. \end{cases}$$

Для функции Лагранжа $L = e^2 + 2e - w_L + \lambda\left(\ln w_L - 1\right)$ должны выполняться условия оптимальности по заработной плате $\frac{\partial L}{\partial w_L} = -1 + \frac{\lambda}{w_L} = 0$, т.е. $w_L = \lambda > 0$, и дополняющей нежесткости: $\lambda\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda\left(\ln w_L - 1\right) = 0, \lambda \geq 0, \ln w_L - 1 \geq 0$.

Учитывая, что $\lambda > 0$, получаем $\ln w_L = 1$, а значит $w_L = e$, как мы и рассчитывали выше при привязке платежа менеджеру к состоянию экономической среды.

Подводя итог анализа ситуации полной информации, можно отметить, что

$$EPR_H^* = \frac{2}{3}\left(3e^2 - e^{\frac{4}{3}}\right) + \frac{1}{3}\left(3e - e^{\frac{4}{3}}\right) = 2e^2 + e - e^{\frac{4}{3}} > e^2 + e = EPR_L^*,$$

следовательно, с точки зрения собственника будет предпочтительным высокий уровень усилий менеджера E_H.

Рассчитаем теперь субоптимальные контракты в условиях асимметричной информации. Ограничение по рациональности имеет вид:

$$\frac{2}{3}\ln w_1 + \frac{1}{3}\ln w_2 - \frac{4}{3} \geq 0, \text{ или } 2\ln w_1 + \ln w_2 - 4 \geq 0.$$

Ограничение по совместимости стимулов выглядит так:

$$EU_H = \frac{2}{3}\ln w_1 + \frac{1}{3}\ln w_2 - \frac{4}{3} \geq EU_L = \frac{1}{3}\ln w_1 + \frac{2}{3}\ln w_2 - 1, \text{ или } \ln w_1 - \ln w_2 - 1 \geq 0.$$

С точки зрения собственника фирмы, оптимизационная задача будет такова:

$$\begin{cases} \max_{w_1, w_2} EPR_H = \max_{w_1, w_2} \left(\frac{2}{3}\left(3e^2 - w_1\right) + \frac{1}{3}\left(3e - w_2\right)\right) : \\ 2\ln w_1 + \ln w_2 - 4 \geq 0, \\ \ln w_1 - \ln w_2 - 1 \geq 0. \end{cases}$$

Функция Лагранжа для этой задачи будет иметь следующий вид:

$$L = \frac{2}{3}\left(3e^2 - w_1\right) + \frac{1}{3}\left(3e - w_2\right) + \lambda\left(2\ln w_1 + \ln w_2 - 4\right) + \mu\left(\ln w_1 - \ln w_2 - 1\right).$$

Условия оптимальности по искомым переменным – ставкам заработной платы в ситуации высокой либо низкой результативности фирмы – будут выглядеть так:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial w_1} = -\frac{2}{3} + \frac{2\lambda}{w_1} + \frac{\mu}{w_1} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial w_2} = -\frac{1}{3} + \frac{\lambda}{w_2} - \frac{\mu}{w_2} = 0; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} w_1 = 3\lambda + \frac{3}{2}\mu, \\ w_2 = 3\lambda - 3\mu; \end{cases}$$

а значит, $w_1 - w_2 = 4,5\mu$.

Кроме того, необходимо учитывать условия дополняющей нежесткости:

$$\lambda\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda\left(2\ln w_1 + \ln w_2 - 4\right) = 0, \lambda \geq 0, 2\ln w_1 + \ln w_2 - 4 \geq 0.$$

$$\mu\frac{\partial L}{\partial \mu} = \mu\left(\ln w_1 - \ln w_2 - 1\right) = 0, \mu \geq 0, \ln w_1 - \ln w_2 - 1 \geq 0.$$

Если $\mu = 0$, то $w_1 = w_2$, а значит, $\ln w_1 - \ln w_2 = 0$. Но это противоречит соотношению дополняющей нежесткости, в соответствии с которым $\ln w_1 - \ln w_2 - 1 \geq 0$. Значит, $\mu > 0$ и $\ln w_1 - \ln w_2 = 1$.

Следовательно, из условия оптимальности по w_2 вытекает, что $\lambda > 0$. Это означает, в силу первого из условий дополняющей нежесткости, что

$$2\ln w_1 + \ln w_2 = 4.$$

Решая систему из двух последних уравнений, получаем, что $3\ln w_1=5$, *то есть* $w_1=e^{\frac{5}{3}}$; *и* $\ln w_2=\frac{2}{3}$, *то есть* $w_2=e^{\frac{2}{3}}$.

В условиях квазиоптимума величина ожидаемой прибыли собственника фирмы составит
$EPR_H=\frac{2}{3}\left(3e^2-e^{\frac{5}{3}}\right)+\frac{1}{3}\left(3e-e^{\frac{2}{3}}\right)=2e^2-\frac{2}{3}e^{\frac{5}{3}}+e-\frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}}$.

Рассчитаем агентские издержки асимметрии информации:
$EPR_H^*-EPR_H=\left(2e^2-e^{\frac{4}{3}}+e\right)-\left(2e^2-\frac{2}{3}e^{\frac{5}{3}}+e-\frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{2}{3}e^{\frac{5}{3}}-e^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}}$.

Литература

Основная литература

1. Антипина О.Н., Вереникин А.О. Микроэкономика продвинутого уровня: Учебное пособие. 2-е изд., исправл. и доп. — М.: Экономический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, 2021. §2.8, §3.8.
2. Джейли Дж. А., Рени Ф. Дж. Микроэкономика. Продвинутый уровень. – М.: Изд. дом ГУ-ВШЭ, 2011. Глава 8.
3. Мас-Колелл А., Уинстон М., Грин Д. Микроэкономическая теория. М.: Дело, 2016. Гл. 13. Неблагоприятный отбор, сигналинг и скрининг. Гл. 14. Модель принципал-агент.

Дополнительная литература

1. Akerlof G.A. The Market for 'Lemons': Quality Uncertainty and the Market Mechanism. *Quarterly Journal of Economics,* 1970, Vol. 84, pp. 488–500. [На русском языке: Акерлоф Дж. Рынок "лимонов": неопределенность качества и рыночный механизм. - THESIS, 1994, Вып.5 Риск, неопределенность, случайность. С. 91-104].
2. Bederson B.B., Zhe Jin G., Leslie Ph., Quinn A.J., Zou B. Incomplete Disclosure: Evidence of Signaling and Countersignaling. *American Economic Journal: Microeconomics,* 2018, Vol. 10, №1, pp. 41-66.
3. Cho I.-K., Kreps D.M. Signaling Games and Stable Equilibria. *The Quarterly Journal of Economics*, 1987, Vol. 102, No. 2, pp. 179-222.
4. Handbook of Mathematical Economics. Vol. 3. Ed. by K.J. Arrow, M.D. Intriligator. North Holland, 1986. Ch. 23. Agency and the market. Pp. 1183-1195.
5. Kamenica E. Information Economics. *Journal of Political Economy*, 2017, Vol. 125, №6, pp. 1885-1890.
6. Riley J. Informational Equilibrium. *Econometrica*, 1979, Vol. 47, pp. 331-359.
7. Rothschild M., Stiglitz J.E. Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay on the Economics of Imperfect Information. *Quarterly Journal of Economics,* 1976, Vol. 90, pp. 630–649.
8. Salanié B. The Economics of Contracts: A Primer. 2nd Ed. Cambridge: The MIT Press, 2005. [На русском языке: Саланье Б. Экономика контрактов. Вводный курс. – М.: Изд. дом «Дело» РАНХиГС, 2019].
9. Shapiro C., Stiglitz J.E. Equilibrium Unemployment as a Worker Discipline Device. *The American Economic Review*. Vol. 74, June 1984, pp. 433-444.
10. Spence M. Competitive and Optimal Responses to Signals: An Analysis of Efficiency and Distribution. *Journal of Economic Theory,* 1974, Vol. 7, pp. 296–332.
11. Spence M. Job Market Signalling. *Quarterly Journal of Economics,* 1973, Vol. 87, pp. 355–374.
12. Varian H.R. Microeconomic Analysis. - 3rd ed. – N.Y., L.: W.W. Norton & Company, 1992. Ch. 25.
13. Zhao M., Wang S., Xia T. The social welfare effect of e-commerce product reputation information asymmetry from the perspective of network externality. *PLoS ONE*, 2025, Vol. 20, №1, e0313852. *https://doi.org/10.1371/journal.pone.0313852*
14. Антипина О.Н. Асимметрия информации. – *Вестник Московского университета*. Серия 6. Экономика, 2003, №2. С. 110-125.
15. Бусыгин В.П., Желободько Е.В., Цыплаков А.А. Микроэкономика – третий уровень. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2003. Гл. 12 (с. 445-453), Гл. 15 (с. 552-622).
16. Никифоров А.А., Антипина О.Н., Миклашевская Н.А. Макроэкономика: научные школы, концепции, экономическая политика. Учебник. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во «Дело и сервис», 2010. С. 544-549.
17. Спенс А.М. Передача сигналов в ретроспективе и информационная структура рынков // Мировая экономическая мысль. Сквозь призму веков. В 5 т. Т. 5. Кн. 2. М.: Мысль, 2005. С. 484-534.
18. Фридман А.А. Лекции по курсу микроэкономики продвинутого уровня. – М.: Изд. дом ГУ-ВШЭ, 2007. Лекции 28-32.
19. Юдкевич М.М., Подколзина Е.А., Рябинина А.Ю. Основы теории контрактов. – М.: ГУ ВШЭ, 2002. С. 9-23, 71-78, 139-163.

Глава 9. Общее экономическое равновесие и теория благосостояния

9.1. Закон Вальраса и существование общего экономического равновесия
9.2. Характеристики общего экономического равновесия вальрасова типа
9.3. Общее экономическое равновесие в теории международной торговли
9.4. Общее равновесие на рынках активов
9.5. Принцип классической дихотомии и общее экономическое равновесие в неоклассике
9.6. Эффект реальных денежных остатков, спрос на деньги и общее экономическое равновесие в концепции неоклассического синтеза
9.7. Межотраслевой баланс как вычислимая модель общего экономического равновесия
9.8. Конкурентное равновесие, оптимальность экономической системы и общественное благосостояние
9.9. Теория общественного выбора
9.10. Общее экономическое равновесие и общественное благосостояние при монополистической конкуренции

9.1. Закон Вальраса и существование общего экономического равновесия

Современное понимание предмета экономической теории как науки об оптимальном, рациональном использовании ограниченных ресурсов наиболее отчетливо отражается моделью общего равновесия. Модель общего экономического равновесия включает в себя количественное описание технологических, производственных процессов и вытекающих из них распределительных аспектов взаимодействия между факторами общественного воспроизводства. Эта модель характеризует экономику как систему, интегрированно включающую в себя процессы производства, распределения, обмена и потребления.

В модели общего экономического равновесия вальрасова типа рассматривается закрытая рыночная экономика без учета роли государства в условиях совершенной конкуренции [1]. Предполагается способность ее к саморегулированию, что подразумевает гибкость ценовых параметров: товарных цен, ставок процента и заработной платы.

Изучение общего экономического равновесия при несовершенной конкуренции, т.е. в условиях наличия власти потребителей и производителей над ценовыми параметрами рынков, когда каждый из экономических агентов оказывается в состоянии варьировать цену на продукцию и ресурсы, на современном этапе развития экономической теории не представляется возможным. В связи с этим допущение об экзогенно заданной системе цен существенно облегчает анализ.

Экономическая система анализируется в долгосрочной перспективе, когда все факторы производства для каждого хозяйствующего субъекта являются переменными величинами. Блага специфицированы в пространстве и во времени (датированы), поэтому цены – это дисконтированные оценки $\left(\frac{p_{jt}}{(1+r_1)\cdots(1+r_t)}\right)$.

В модели анализируется двухсекторная экономика, что подразумевает дихотомию процессов производства и потребления (рис. 9.1).

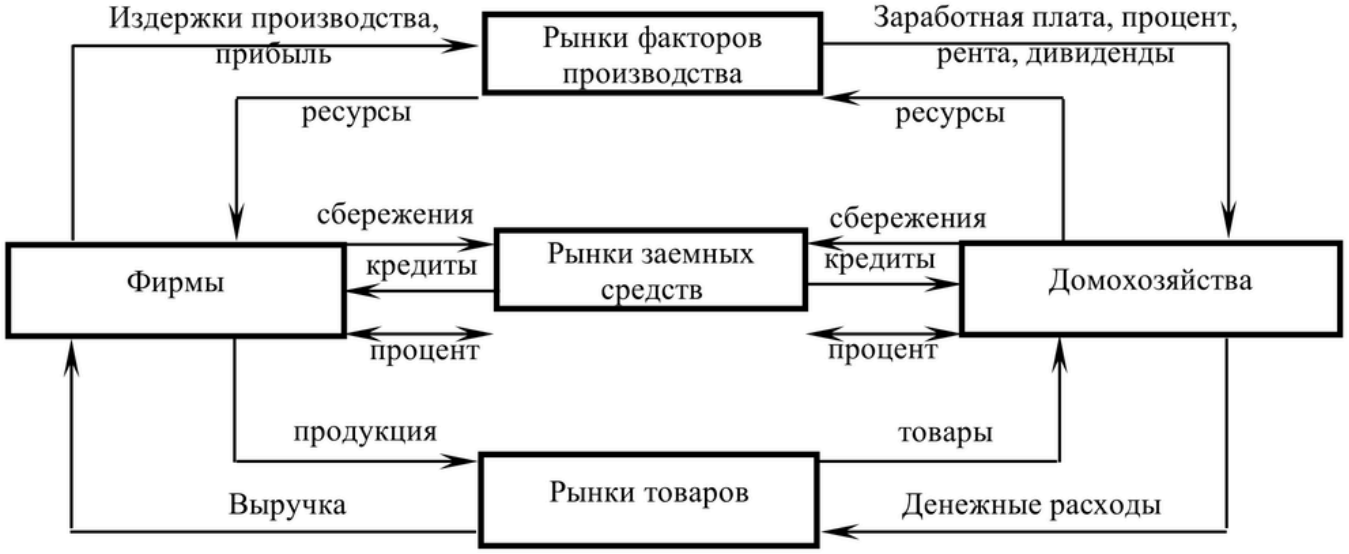


Рисунок 9.1. Кругооборот доходов и расходов в экономической системе

Данная модель описывает частнособственническую экономику, в которой всеми предприятиями и ресурсами владеют индивидуумы – потребители. Бюджетное ограничение каждого из них, обозначаемого индексом *i*, имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{l} p_j x_{ij}^c \le M_i = \sum_{j=1}^{l} p_j \omega_{ij} + \sum_{k=1}^{m} \theta_{ik} \sum_{j=1}^{l} p_j \left(q_{kj} - x_{kj}^p\right) = \sum_{j=1}^{l} p_j \omega_{ij} + \sum_{k=1}^{m} \theta_{ik} \sum_{j=1}^{l} p_j y_{kj}, \quad (9.1)$$

где x_{ij}^c – объем потребления *j*-го товара *i*-м потребителем, x_{kj}^p – объем *j*-го ресурса, используемого *k*-м предприятием, q_{kj} – объем производства *j*-го товара *k*-м предприятием, $y_{kj} = q_{kj} - x_{kj}^p$ – чистый выпуск *j*-го товара *k*-м предприятием, θ_{ik} – доля *i*-го потребителя в прибыли $\sum_{j=1}^{l} p_j y_{kj}$ *k*-го предприятия, $i = 1, \ldots, n$. Очевидно, что сумма долей всех индивидуумов-собственников в прибыли *k*-го предприятия равна единице: $\sum_{i=1}^{n} \theta_{ik} = 1$.

Потребители стремятся к достижению наибольшей полезности $U\left(x_1, \ldots, x_l\right)$ с учетом бюджетного ограничения (9.1). Производители максимизируют прибыль (4.31), причем их производственные возможности характеризуются технологическими множествами:

$$F_k\left(x_{k1}^p, \ldots, x_{kl}^p, q_{k1}, \ldots, q_{kl}\right) = 0.$$

Для экономики в целом выполняется балансовое неравенство, отражающее тот факт, что для каждого, *j*-го товарного рынка объемы потребления не могут превышать величины производства вместе с запасами:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^c + \sum_{k=1}^{m} x_{kj}^p \le \sum_{i=1}^{n} \omega_{ij} + \sum_{k=1}^{m} q_{kj}, m.e. \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^c \le \sum_{i=1}^{n} \omega_{ij} + \sum_{k=1}^{m} y_{kj},$$

$$или x_j^c \le \omega_j + y_j, \quad (9.2)$$

где

$$x_j^c=\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^c (9.3)$$

– суммарный объем индивидуального потребления *j*-го товара,

$$\omega_j=\sum_{i=1}^{n} \omega_{ij} (9.4)$$

– суммарные запасы *j*-го товара у всех потребителей,

$$y_j=\sum_{k=1}^{m} y_{kj}=q_j\text{-}x_j^p=\sum_{k=1}^{m} q_{kj}\text{-}\sum_{k=1}^{m} x_{kj}^p (9.5)$$

– совокупный объем чистого производства *j*-го товара всеми фирмами; $j=\{1,\ldots,l\}$.

Совокупный рыночный, или агрегированный, чистый конечный спрос на *j*-й товар z_j – это превышение суммарного спроса всех *n* потребителей над суммой объемов его чистого производства всеми *m* фирмами и запасов данного товара, находящихся в собственности потребителей:

$$z_j=x_j^c\text{-}\omega_j\text{-}y_j=\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^c\text{-}\sum_{i=1}^{n} \omega_{ij}\text{-}\sum_{k=1}^{m} y_{kj}. (9.6)$$

Выше было показано, что маршаллианские функции потребительского спроса и функции предложения продукции фирмами непрерывны по вектору цен (3.3), (4.29). Следовательно, непрерывными по ценам будут и функции избыточного спроса (9.6) как разность непрерывных функций и константы запасов.

В дальнейшем для простоты будем анализировать экономическую систему, в которой присутствуют только два потребителя, осуществляющие выбор в пространстве двух товаров, производимых двумя фирмами [2]:

$$\begin{cases} \begin{cases} \max\limits_{x_{11}^c,x_{12}^c} U_1\left(x_{11}^c,x_{12}^c\right): \\ p_1x_{11}^c+p_2x_{12}^c \le p_1\omega_{11}+p_2\omega_{12}+\theta_{11}\left(p_1y_{11}+p_2y_{12}\right)+\theta_{12}\left(p_1y_{21}+p_2y_{22}\right); \end{cases} \\ \begin{cases} \max\limits_{x_{21}^c,x_{22}^c} U_2\left(x_{21}^c,x_{22}^c\right): \\ p_1x_{21}^c+p_2x_{22}^c \le p_1\omega_{21}+p_2\omega_{22}+\theta_{21}\left(p_1y_{11}+p_2y_{12}\right)+\theta_{22}\left(p_1y_{21}+p_2y_{22}\right); \end{cases} \\ \max\limits_{x_{11}^p,x_{12}^p} PR_1\left(x_{11}^p,x_{12}^p\right)=\max\limits_{x_{11}^p,x_{12}^p}\left(p_1y_{11}+p_2y_{12}\right); \\ \max\limits_{x_{21}^p,x_{22}^p} PR_2\left(x_{21}^p,x_{22}^p\right)=\max\limits_{x_{21}^p,x_{22}^p}\left(p_1y_{21}+p_2y_{22}\right); \\ \theta_{11}+\theta_{21}=1;\theta_{12}+\theta_{22}=1; \\ x_{11}^c \ge 0;x_{12}^c \ge 0;x_{21}^c \ge 0;x_{22}^c \ge 0;x_{11}^p \ge 0;x_{12}^p \ge 0;x_{21}^p \ge 0;x_{22}^p \ge 0; \\ x_{11}^c+x_{21}^c \le \omega_{11}+\omega_{21}+y_{11}+y_{21}; \\ x_{12}^c+x_{22}^c \le \omega_{12}+\omega_{22}+y_{12}+y_{22}. \end{cases}$$

Здесь $y_{11}=q_{11}\text{-}x_{11}^p$, $y_{12}=q_{12}\text{-}x_{12}^p$, $y_{21}=q_{21}\text{-}x_{21}^p$, $y_{22}=q_{22}\text{-}x_{22}^p$, где q_{11} и q_{12} – объемы производства соответственно первого и второго товаров первым предприятием, q_{21} и q_{22} – объемы производства соответственно первого и второго товара вторым предприятием, x_{11}^p и x_{12}^p – объемы соответственно первого и второго ресурсов, используемых первым предприятием; x_{21}^p и x_{22}^p – объемы соответственно первого и второго ресурсов, используемых вторым предприятием.

Общее экономическое равновесие – это такое состояние экономической системы, когда спрос равен предложению, или, другими словами, избыточный спрос как превышение спроса над предложением равен нулю на каждом из рынков. Современная теория общего равновесия доказывает возможность его существования при разумных допущениях о характеристиках функционирования экономической системы.

Традиционно общее экономическое равновесие определяется как равенство нулю или отрицательность, т.е. неположительность, избыточного спроса на всех *l* рынках в экономике:

$$z_j \le 0, (9.7)$$

при неотрицательных ценах

$$p_j \ge 0, (9.8)$$

с учетом условия:

$$p_jz_j=0, j=\{1,\ldots,l\}. (9.9)$$

Последнее условие означает, что либо цена, либо избыточный спрос (9.6) на каждом из *l* рынков равняется нулю, т.е. натуральное балансовое соотношение по объемам потребляемой и производимой продукции с учетом запасов (9.2) выполняется в виде равенства:

$$x_j^c=\omega_j+y_j. (9.10)$$

В равновесной экономике действует закон Вальраса [3], утверждающий, что стоимость совокупного, или агрегированного, чистого спроса тождественно равна нулю:

$$p_1z_1+\ldots+p_{l\text{-}1}z_{l\text{-}1}+p_lz_l=\sum_{h=1}^{l}p_hz_h\equiv 0.(9.11)$$

Установить его справедливость нетрудно. В условиях оптимума для каждого, *i*-го, индивидуума бюджетное ограничение выполняется в виде равенства: $p_1x_{i1}+\ldots+p_lx_{il}=p_1\omega_{i1}+\ldots+p_l\omega_{il}, i=1,\ldots,m$; т.е. стоимость чистого спроса *i*-го индивидуума равна 0: $p_1\left(x_{i1}\text{-}\omega_{i1}\right)+\ldots+p_l\left(x_{il}\text{-}\omega_{il}\right)=p_1z_{i1}+\ldots+p_lz_{il}=0$. Сумма таких тождеств для всех индивидуумов, по *i* от 1 до *m*, дает нулевую величину агрегированного чистого спроса в стоимостном выражении:

$$p_1\sum_{i=1}^{m}z_{i1}+\cdots+p_h\sum_{i=1}^{m}z_{ih}=\sum_{i=1}^{m}p_1z_{i1}+\cdots+\sum_{i=1}^{m}p_hz_{ih}=\sum_{h=1}^{l}p_hz_h=0,$$

что и утверждает закон Вальраса (9.11).

Из закона Вальраса вытекают два важных следствия. Во-первых, из закона Вальраса следует, что если в экономике, состоящей из *l* рынков, при некотором векторе цен $p=\{p_h\}_{h=1}^{l}$, $p_h>0$, избыточный спрос равен нулю на $l\text{-}1$ рынках, то он оказывается нулевым и на оставшемся *l*-том рынке. Доказательство первого следствия проведем по индукции. Допустим, для начала, что экономика состоит из двух рынков. Пусть $z_1\left(p_1,p_2\right)=0$. Тогда из закона Вальраса (9.11), поскольку $p_2>0$, следует, что $z_2\left(p_1,p_2\right)=0$. Значит, если избыточный спрос нулевой на одном рынке, то он также равен нулю и на другом.

Данное утверждение по индукции распространяется на экономику, состоящую из l рынков. Пусть имеет место нулевой избыточный спрос на $l\text{-}1$ рынках: $z_1=0$, ..., $z_{l\text{-}1}=0$. Поскольку $p_l>0$, из закона Вальраса (9.11) вместе с условием (9.7) следует, что $z_l=0$. Итак, в соответствии с законом Вальраса, если все рынки, за исключением данного, находятся в состоянии равновесия, то избыточный спрос и на данном, последнем рынке равен нулю.

Во-вторых, следствием из закона Вальраса является то, что когда цена хотя бы одного блага в экономике отлична от нуля, величины избыточного спроса z_l не могут быть одновременно одного знака.

Докажем второе следствие для экономики, состоящей из двух рынков. В силу (9.11):

$$p_1z_1=\text{-}p_2z_2.\ (9.12)$$

В случае экономических благ, когда обе цены положительны $(p_i>0, i=1,2)$, получается, что если $z_1\geqslant 0$, то $z_2\leqslant 0$, и наоборот, из $z_2\geqslant 0$ следует $z_1\leqslant 0$. Если первое благо является свободным $(p_1=0)$, то избыточный спрос на него не может быть положительным $(z_1\leqslant 0)$. При этом, поскольку $p_2>0$, постольку из (9.12) следует, что $z_2=0$. Аналогично, если второе благо является свободным $(p_2=0)$, то избыточный спрос на него не может быть положительным $(z_2\leqslant 0)$. При этом, поскольку $p_1>0$, постольку из (9.12) следует, что $z_1=0$. Тем самым, второе следствие из закона Вальраса доказано.

В силу натуральных балансовых ограничений для каждого из рынков, $z_1\leqslant 0$, $z_2\leqslant 0$. Поэтому сумма величин избыточного спроса в стоимостном выражении по всем рынкам в экономике должна быть неположительной:
$p_1z_1+\ldots+p_{l\text{-}1}z_{l\text{-}1}+p_lz_l=\sum_{h=1}^{l}p_hz_h\leqslant 0$. Но, поскольку в состоянии равновесия либо цена товара, либо величина избыточного спроса на него должны равняться нулю (9.9), нулевой будет и сумма соответствующих произведений, что было установлено выше законом Вальраса (9.11).

Таким образом, совокупность бюджетных ограничений потребителей и натуральных балансовых соотношений, касающихся объемов потребляемой и имеющейся в наличии продукции для всех товарных рынков, содержит одну и ту же информацию. Следовательно, одно из данных условий в состоянии равновесия является линейно зависимым от остальных.

Искомыми величинами в модели являются объемы потребления всех (*l*) товаров каждым из *m* потребителей, а также равновесный вектор цен, состоящий из *l* компонент. Значит, всего в модели $(l+1)m$ неизвестных. По доказанному, в модели $(l+1)m\text{-}1$ независимое условие. Следовательно, можно ставить задачу определения не абсолютного уровня цен, а их относительных значений, когда цена одного из благ либо, что эквивалентно, сумма всех товарных цен будет служить единицей счета.

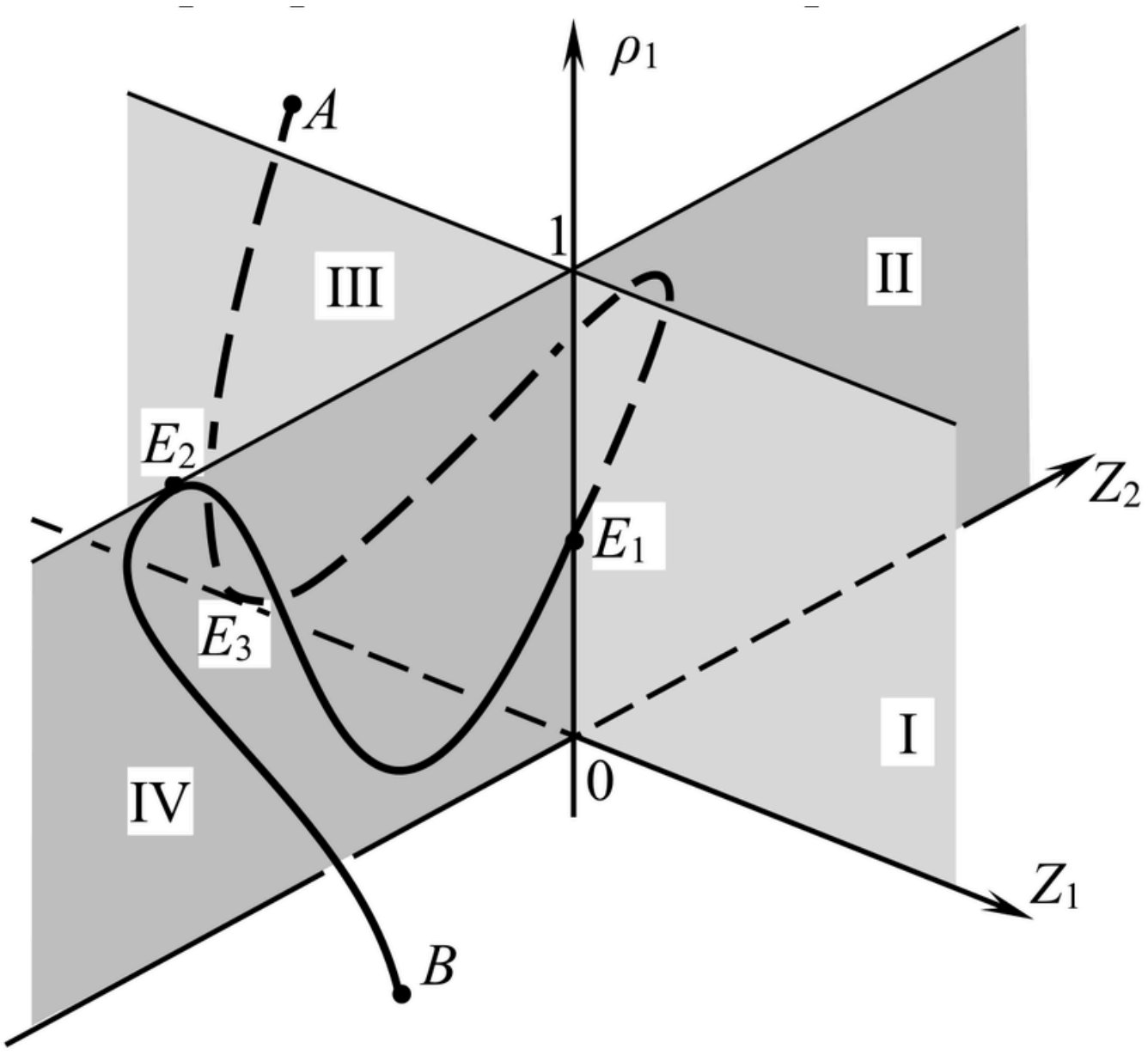
Осуществим переход от фактической системы цен – к нормированной, рассчитав относительные цены следующим образом: $\rho_j=\frac{p_j}{\sum_{j=1}^{l}p_j}$. Поэтому $0\leqslant\rho_j\leqslant 0, j=1,\ldots,l$. Действительно, относительная – так же, как и абсолютная – цена свободного блага будет равна нулю. Если же все блага – свободные и лишь одно – экономическое, то для данного, последнего товара сумма в знаменателе относительной цены совпадет с числителем – его абсолютной ценой, поэтому относительная – окажется равной единице. В остальных случаях относительные цены товаров будут находиться в промежутке между данными крайними значениями.

В силу однородности нулевой степени функций спроса по Маршаллу с учетом первоначальных запасов благ, а также функций предложения продукции предприятиями по вектору цен можно перейти в функциях избыточного спроса от абсолютных цен к относительным. Видоизмененные функции останутся полностью эквивалентными исходным: сохранятся без изменения их значения и свойства, в частности, непрерывности по вектору цен.

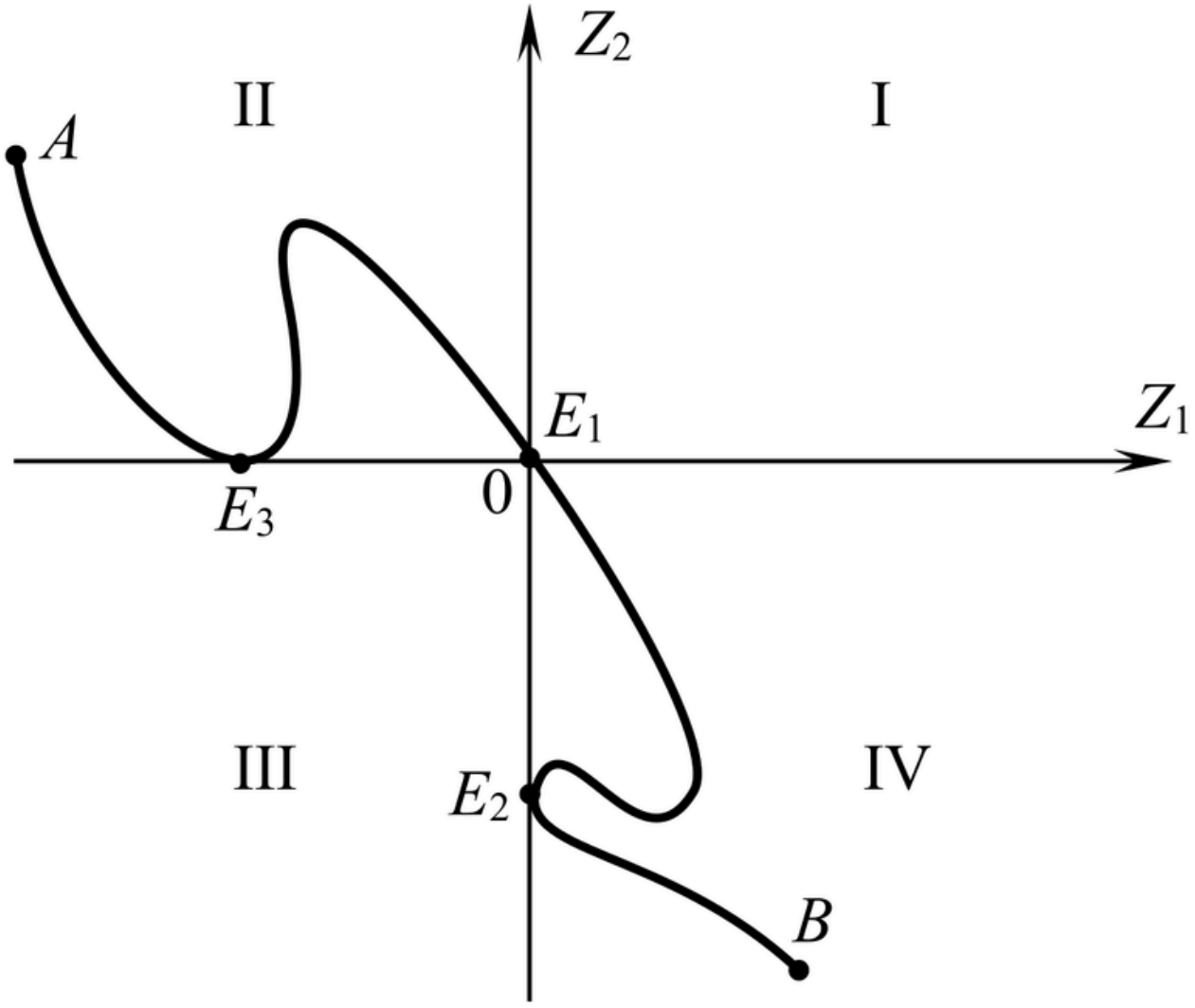
Основной в концепции общего экономического равновесия является следующая теорема Эрроу–Дебре, устанавливающая достаточные условия его существования [4]. Пусть выполняются предположения о непрерывности и строгой квазивогнутости функций полезности, а также о непрерывности и строгой вогнутости производственных функций. Тогда для любого первоначального распределения запасов благ между потребителями существует вектор цен, при котором достигается общее конкурентное равновесие (9.7) – (9.9).

Будем рассматривать только совокупность бюджетных ограничений, пока не привлекая к анализу натуральные балансовые соотношения по объемам потребления, производства и запасам товаров на каждом рынке. Вначале для иллюстрации проведем доказательство теоремы существования общего равновесия в экономике, состоящей из двух рынков экономических благ $(p_i>0, i=1,2)$. На рис. 9.2 изображена пространственная кривая избыточного спроса $Z\left(\rho_1\right)=\left(z_1\left(\rho_1\right), z_2\left(\rho_1\right)\right)$ и ее проекция на плоскость $Z_1 0 Z_2$. Здесь $\rho_1=\frac{p_1}{p_1+p_2}$ – относительная цена первого товара. Очевидно, что $\rho_2=1\text{-}\rho_1$ можно не включать в число

аргументов функций избыточного спроса. По второму следствию из закона Вальраса, в случае отсутствия равновесия экономика будет находиться в некотором состоянии *A* во втором квадранте или в каком-то состоянии *B* в четвертом квадранте. Все состояния в первом и третьем квадрантах недоступны, поскольку там величины избыточного спроса z_1 и z_2 имеют одинаковый знак: они либо оба положительны, либо – отрицательны.



Пространственная иллюстрация



Проекция на плоскость избыточного спроса

Рисунок 9.2. Возможные равновесные ситуации

Для действительнозначных функций $z : \rho \longmapsto z(\rho)$ известна теорема Коши–Больцано, которая гласит, что если $z(\rho) \in C^0[a, b]$, то $z(\rho)$ принимает на каждом интервале $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ все промежуточные значения между $z(\alpha)$ и $z(\beta)$. Из теоремы Коши–Больцано следует, что функция из класса $C^0[a, b]$, имеющая разные по знаку значения в точках α и β, где $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$, обязательно принимает в некоторой промежуточной между α и β точке нулевое значение. Воспользуемся этим следствием для доказательства существования общего равновесия.

В состоянии *A*: $z_1 < 0$, $z_2 > 0$. В состоянии *B*: $z_1 > 0$, $z_2 < 0$. По теореме Коши–Больцано, в силу того, что каждая координата отображения избыточного спроса $Z(\rho_1) = (z_1(\rho_1), z_2(\rho_1))$ непрерывна, для перехода экономики из состояния *A* в состояние *B* каждая из координат должна принять нулевое значение. Пусть, для определенности, в состоянии E_1 $z_1 = 0$. По первому следствию из закона Вальраса, избыточный спрос z_2 также должен быть нулевым. Итак, в состоянии E_1 величины избыточного спроса z_1 и z_2 одновременно равны нулю при положительных ценах, т.е. достигается общее экономическое равновесие. Таким образом, доказано существование общего равновесия в экономике с двумя рынками при положительных ценах $(p_i > 0, i = 1, 2)$. Точка E_2 отражает ситуацию, когда второе благо является свободным $(\rho_2 = 0, z_2 < 0)$, а первое – экономическим $(\rho_1 = 1, z_1 = 0)$; а E_3 – когда, наоборот, первое – свободное $(\rho_1 = 0, z_1 < 0)$, а второе – экономическое $(\rho_2 = 1, z_2 = 0)$.

При наличии в экономике больше двух товарных рынков использование теоремы Больцано-Коши для доказательства существования общего равновесия становится невозможным, и необходимо привлекать к анализу ее теорему Брауэра о неподвижной точке, которую можно рассматривать как обобщение теоремы Коши–Больцано на случай векторнозначных функций (соответствий) векторного аргумента.

Теорема Брауэра утверждает [5], что если *X* – непустое компактное выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, а *f*: *X*→*X* – непрерывное отображение, переводящее каждую точку *x* множества *X* в некоторую точку *f*(*x*) этого же множества *X*, то *f* имеет неподвижную точку: $x^* = f(x^*)$. В одномерном случае (в пространстве $\mathbb{R}_+$) теорема Брауэра сводится к констатации наличия неподвижной точки у

любой непрерывной функции, отображающей отрезок [0,1] в себя ($f(x)$:[0,1]≣[0,1]): график данной непрерывной функции обязательно пересекает диагональ квадрата $f(x)=x$ со стороной [0,1] (рис.9.3).

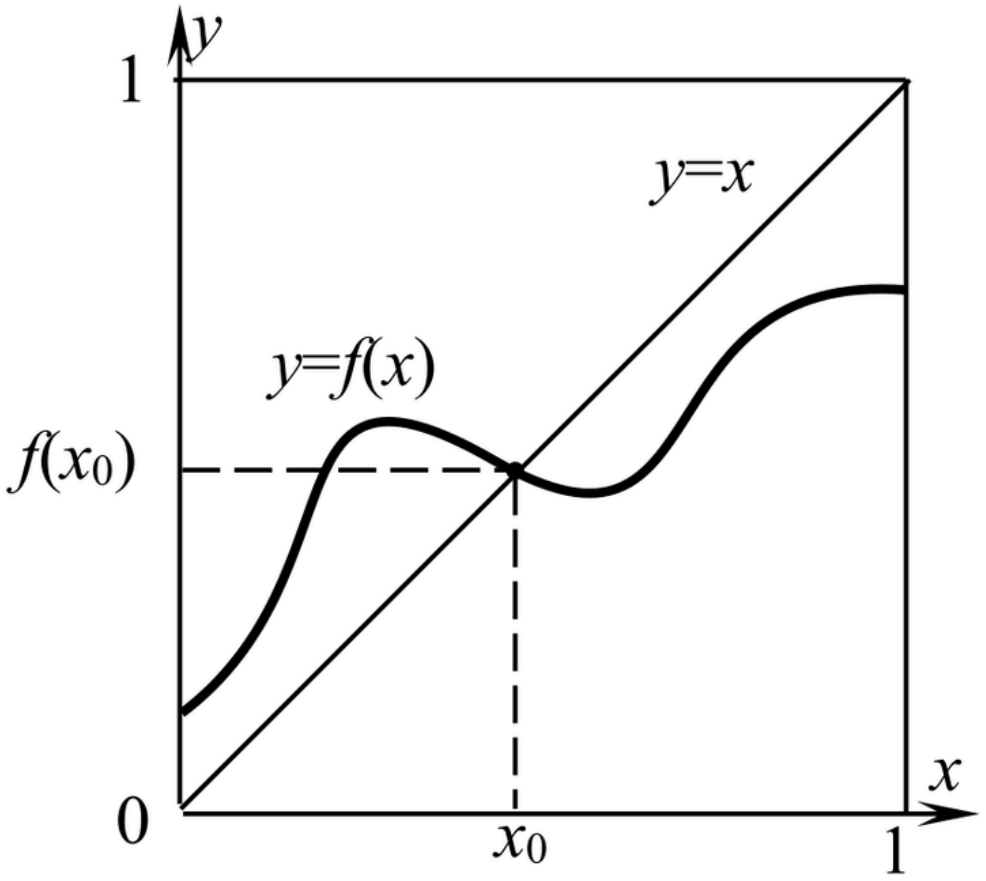


Рисунок 9.3. Теорема Брауэра о неподвижной точке

Для доказательства достижения экономикой состояния общего равновесия достаточно рассмотреть функцию агрегированного чистого спроса, зависящую только от вектора цен, положив константой первоначальное распределение запасов благ между владельцами человеческого потенциала в потребительной и производственной сферах. Отметим, что если допустить возможность анализа в рамках модели общего экономического равновесия свободных благ с нулевыми ценами $(\exists j \in \{1,\ldots,n\} : p_j{=}0)$, то интервал, в котором лежат нормированные цены (95), становится отрезком:

$$0 \leqslant \rho_j \leqslant 1, j{=}1,\ldots,n.$$

Итак, ценовое множество $P{=}\left\{\rho{=}\{\rho_j\}_{j=1}^n \,|0 \leqslant \rho_j \leqslant 1\right\}$ представляет собой n-мерный вещественный брус. Он является непустым выпуклым множеством. Для того чтобы это показать, рассмотрим два вектора цен $\widehat{\rho}{=}\{\widehat{\rho}_j\}_{j=1}^n$ и $\check{\rho}{=}\{\check{\rho}_j\}_{j=1}^n$, а также произвольный ценовой вектор $\rho{=}\lambda\widehat{\rho}{+}(1\text{-}\lambda)\check{\rho}$, принадлежащий соединяющему их отрезку. Поскольку каждая из координат концов отрезка $\widehat{\rho}$ и $\check{\rho}$ лежит в диапазоне от нуля до единицы, такому же двойному неравенству удовлетворяют и компоненты любой его внутренней точки: $0 \leqslant \rho_j{=}\lambda\widehat{\rho}_j{+}\,(1\text{-}\lambda)\check{\rho}_j \leqslant \lambda{+}(1\text{-}\lambda){=}1$, что доказывает выпуклость ценового бруса $P{=}\left\{\rho{=}\{\rho_j\}_{j=1}^n \,|0 \leqslant \rho_j \leqslant 1\right\}$.

Кроме того, $P{=}\left\{\rho{=}\{\rho_j\}_{j=1}^n \,\middle|\, \sum_{j=1}^n \rho_j{=}1, \rho_j \geqslant 0\right\}$ как стандартный симплекс представляет собой не только выпуклое, но и компактное множество [6].

Рассмотрим отображение $\xi(\rho)$:

$$\xi_j(\rho){=}\rho_j{+}z_j(\rho), j{=}1,\ldots,n.$$

Оно непрерывно, представляя собой сдвиг на линейную функцию ρ_j непрерывного избыточного спроса. Построим на основе отображения $\xi(\rho)$ композитное отображение, которое призвана обеспечить совпадение области определения и значений анализируемой функции $\zeta(\rho)$:[0,1]≣[0,1]:

$$\zeta_j(\rho){=}\begin{cases} 0, \text{ если } \xi_j(\rho) \leqslant 0, \\ \xi_j(\rho), \text{ если } 0 < \xi_j(\rho) < 1, \\ 1, \text{ если } \xi_j(\rho) \geqslant 1; \end{cases}$$

где $j{=}1,\ldots,n.$

Очевидно, что, если $\xi(\rho) \leqslant 0$ при $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, то $\zeta(\rho)=0$, и $\zeta(\rho)$ является непрерывной при любом ρ. Аналогично, если $\xi(\rho) \geqslant 1$ при $0 \leq \rho \leq 1$, то $\zeta(\rho)=1$, следовательно, представляет собой непрерывную функцию. Так же и в том случае, когда $0 < \xi(\rho) < 1$ на всем диапазоне $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ При этом $\zeta(\rho)=\xi(\rho)$ является непрерывной функцией.

Покажем непрерывность функции $\zeta(\rho)$ на стыке ее сегментов: $\zeta(\rho)=\xi(\rho)$ и $\zeta(\rho)=0$ либо $\zeta(\rho)=\xi(\rho)$ и $\zeta(\rho)=1$. Допустим, что существует такая точка $\rho=\widehat{\rho}$, в которой $\xi\left(\widehat{\rho}\right)=0=\zeta\left(\widehat{\rho}\right)$. Пусть, существует проколотая окрестность точки $\widehat{\rho}\ \mathring{U}\left(\widehat{\rho}\right)$, такая, что при любых $\rho \in \mathring{U}\left(\widehat{\rho}\right)\ \xi(\rho) > 0$. Значит, при $\rho \in \mathring{U}\left(\widehat{\rho}\right)$, $\zeta(\rho)=\xi(\rho)$. Следовательно, в силу непрерывности $\xi(\rho)$, $\lim\limits_{\rho \to \widehat{\rho}-} \xi(\rho)=\lim\limits_{\rho \to \widehat{\rho}-} \zeta(\rho)=\lim\limits_{\rho \to \widehat{\rho}+} \xi(\rho)=\lim\limits_{\rho \to \widehat{\rho}+} \zeta(\rho)=\zeta\left(\widehat{\rho}\right)=\xi\left(\widehat{\rho}\right)=0$, то есть функция $\zeta(\rho)$ является непрерывной в точке $\rho=\widehat{\rho}$.

Рассмотрим теперь случай, когда в $\mathring{U}\left(\widehat{\rho}\right)$ слева и справа от $\rho=\widehat{\rho}\ \xi(\rho)$ имеет значения разных знаков или же, когда с одной стороны от $\widehat{\rho}\ \xi(\rho)=0$, а с другой – она либо положительна, либо отрицательна. Пусть, для определенности при $\rho < \widehat{\rho}$ $0 < \xi(\rho) < 1$, а при $\rho > \widehat{\rho}\ \xi(\rho) \leqslant 1$. Тогда, в силу непрерывности функций $\xi(\rho)$ и $\zeta(\rho)=1$, $\lim\limits_{\rho \to \widehat{\rho}-} \zeta(\rho)=\lim\limits_{\rho \to \widehat{\rho}-} \xi(\rho)=1=\lim\limits_{\rho \to \widehat{\rho}+} \zeta(\rho)$, то есть в точке $\rho=\widehat{\rho}$ наблюдается непрерывность $\zeta(\rho)$. Аналогичные рассуждения справедливы при противоположном изменении знаков $\xi(\rho)$ при переходе через точку $\rho=\widehat{\rho}$, а также при переходе $\xi(\rho)$ через точку $\rho=1$.

Таким образом, как комбинация непрерывной функции $(\zeta_j(\rho)=\xi_j(\rho))$ с линейными ($\zeta_j(\rho)=0$ и $\zeta_j(\rho)=1$), отображение $\zeta_j(\rho)$, j=1,...,n, является непрерывным.

Если не требовать строгой квазивогнутости, то возникает потенциальная неединственность решения задачи потребительского выбора (рис. 2.4). В таком случае функция выбора превращается в отношение, поэтому при анализе вопросов, связанных с существованием общего экономического равновесия, теорема Брауэра оказывается уже недостаточной, и необходимо использовать вместо нее утверждение о неподвижной точке в формулировке Какутани. Если принять предположение о строгой квазивогнутости анализируемых функций, то решение задач оптимизации процессов производства и потребления оказывается единственным, что позволяет исключить множественные отношения выбора из круга рассматриваемых проблем. Это, в свою очередь, упрощает анализ модели, потому что оказывается возможным доказывать требуемые положения, не прибегая к использованию теоремы Какутани, оперирующей терминами отношений, и ограничиваясь ее более узким вариантом в виде теоремы Брауэра, формулируемой в более привычных понятиях отображений.

Итак, для доказательства существования общего экономического равновесия рассмотрим преобразование $\zeta(\rho)$, состоящее из n компонент $\zeta_j(\rho)$, j=1,...,n. Отображение $\zeta(\rho) : \rho \mapsto \zeta_j(\rho)$ ставит в соответствие элементам ценового множества P значения в этом же множестве $\zeta_j(\rho) \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant \zeta_j(\rho) \leqslant 1$, j=1,...,l+m. Ценовое множество P непусто, выпукло и компактно. Как было показано выше, отображение $\zeta(\rho)$ непрерывно. Следовательно, по теореме Брауэра, отображение $\zeta(\rho) : \rho \mapsto \zeta_j(\rho)$ имеет неподвижную точку $\rho=\zeta(\rho)$. Покажем, что в этой точке ρ, отображаемой в себя, достигается общее экономическое равновесие. Рассмотрим три возможных случая, соответствующих трем составляющим отображения $\zeta(\rho)$:

$$\rho_j=\zeta_j(\rho)=\begin{cases} 0, \text{ если } \xi_j(\rho) \leqslant 0, \\ \xi_j(\rho), \text{ если } 0 < \xi_j(\rho) < 1, \\ 1, \text{ если } \xi_j(\rho) \geqslant 1; \end{cases}$$

где $j=1, \ldots, n$.

В случае если цена находится внутри допустимого интервала значений $(0 < \rho_j < 1)$, получаем следующее равенство: $\rho_j=\zeta_j(\rho)=\xi_j(\rho)=\rho_j+z_j(\rho)$. Поэтому избыточный спрос обращается в нуль $z_j(\rho)=0$, и предложение полностью покрывает спрос.

Если цена находится на минимальной границе $(\rho_j=0)$, то получается неравенство $\xi_j(\rho)=\rho_j+z_j(\rho) \leqslant 0$, то есть $z_j(\rho) \leqslant 0$.

Если же цена находится на максимальной границе $(\rho_j=1)$, то $\xi_j(\rho)=\rho_j+z_j(\rho) \geqslant 1$. Поскольку $\rho_j=1$, имеем $z_j(\rho)=\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}-\sum\limits_{i=1}^{n} y_{ij}-\omega_j \geqslant 0$. Но, в силу натурального ограничения в модели функционирования экономической системы, должно выполняться противоположное неравенство: $\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}-\sum\limits_{i=1}^{n} y_{ij}-\omega_j \leqslant 0$. Единственным вариантом, удовлетворяющим этим двум неравенствам, является случай нулевого избыточного спроса $(z_j=0)$, когда балансовое ограничение на объемы потребления, производства и запасов выполняется в виде равенства.

---

1. Вальрас Л. Элементы чистой политической экономии, или теория общественного богатства. – М.: Экономика, 2000. ↩
2. Эту так называемую модель 2×2×2 возможно без труда обобщить на случай произвольного конечного числа экономических агентов и товаров. ↩
3. См.: Lange O. Say's law: a restatement and criticism // Studies in mathematical economics and econometrics / Ed. by O. Lange. – Chicago, 1942. ↩
4. Debreu G. Theory of value. – N.Y.: Willey; L.: Chapman & Hall, 1959; Arrow K., Hahn F. General competitive analysis. – San Francisco: Holden Day; Edinburgh: Oliver & Boyd, 1971. ↩
5. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. – М.: Мир, 1972. ↩
6. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. – М.: Мир, 1972; Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. – М.: Мир, 1988. ↩

9.2. Характеристики общего экономического равновесия вальрасова типа

Рассмотрим простейшую модель (2×2) распределительной экономической системы, в которой присутствуют только два потребителя, осуществляющие выбор в пространстве двух товаров. Каждый экономический агент решает задачу выбора с учетом первоначальных запасов благ. При этом для экономической системы в целом должны выполняться натуральные балансовые ограничения по объемам потребляемой и имеющейся в наличии продукции. Итак, экономическая система в целом описывается следующей оптимизационно-балансовой моделью:

$$\begin{cases} \begin{cases} \max\limits_{x_{11}^c, x_{12}^c} U_1\left(x_{11}^c, x_{12}^c\right): \\ p_1 x_{11}^c + p_2 x_{12}^c \le p_1\omega_{11} + p_2\omega_{12}; \end{cases} \\ \begin{cases} \max\limits_{x_{21}^c, x_{22}^c} U_2\left(x_{21}^c, x_{22}^c\right): \\ p_1 x_{21}^c + p_2 x_{22}^c \le p_1\omega_{21} + p_2\omega_{22}; \end{cases} \\ x_{11}^c \ge 0; x_{12}^c \ge 0; x_{21}^c \ge 0; x_{22}^c \ge 0; \\ x_{11}^c + x_{21}^c \le \omega_{11} + \omega_{21}; \\ x_{12}^c + x_{22}^c \le \omega_{12} + \omega_{22}. \end{cases}$$

Оптимальный выбор каждого из потребителей будет подчиняться эквимаржинальному принципу (2.10):

$$MRS_{12}^1 \equiv -\frac{dx_{12}^c}{dx_{11}^c}\Big|_{U_1=const} = \frac{MU_{11}}{MU_{12}} = \frac{p_1}{p_2},$$

$$MRS_{12}^1 \equiv -\frac{dx_{22}^c}{dx_{21}^c}\Big|_{U_2=const} = \frac{MU_{21}}{MU_{22}} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Поскольку в экономике вектор цен един для всех хозяйствующих субъектов, постольку предельные нормы замещения для двух потребителей равны. Таким образом, получаем условия общего равновесия в потреблении:

$$MRS_{12}^1 \equiv -\frac{dx_{12}^c}{dx_{11}^c}\Big|_{U_1=const} = \frac{MU_{11}}{MU_{12}} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{MU_{21}}{MU_{22}} = -\frac{dx_{22}^c}{dx_{21}^c}\Big|_{U_2=const} \equiv MRS_{12}^1. \quad (9.13)$$

Пример 9.1. Общее экономическое равновесие в потреблении

Пусть экономика состоит из двух потребителей (*A* и *B*), каждый из которых потребляет три вида продуктов и обладает соответствующей функцией полезности[1]: $U_A = (x_1\text{-}5)^{1/2}(x_2\text{-}4)^{1/4}(x_3\text{-}10)^{1/4}$, $U_B = (x_1\text{-}2)^{1/4}(x_2\text{-}20)^{1/4}(x_3\text{-}1)^{1/2}$. Первоначальные запасы благ в данной экономике у этих индивидуумов составляют соответственно $\omega_1^A = 20$, $\omega_1^B = 30$, $\omega_2^A = 50$, $\omega_2^B = 100$, $\omega_3^A = 10$, $\omega_3^B = 40$. Поскольку функции полезности в данной задаче имеют вид зависимостей Стоуна–Джери (vi), постольку функции спроса на первые два товара для каждого из потребителей задаются соотношениями (viii):

$$x_1^A = a_1^A + \frac{\alpha_1^A}{p_1}\frac{\left(M_A\text{-}p_1a_1^A\text{-}p_2a_2^A\text{-}p_3a_3^A\right)}{\left(\alpha_1^A+\alpha_2^A+\alpha_3^A\right)}, \quad (П\,9.1.1)$$

$$x_2^A = a_2^A + \frac{\alpha_2^A}{p_2}\frac{\left(M_A\text{-}p_1a_1^A\text{-}p_2a_2^A\text{-}p_3a_3^A\right)}{\left(\alpha_1^A+\alpha_2^A+\alpha_3^A\right)}, \quad (П\,9.1.2)$$

$$x_1^B = a_1^B + \frac{\alpha_1^B}{p_1}\frac{\left(M_B\text{-}p_1a_1^B\text{-}p_2a_2^B\text{-}p_3a_3^B\right)}{\left(\alpha_1^B+\alpha_2^B+\alpha_3^B\right)}, \quad (П\,9.1.3)$$

$$x_2^B = a_2^B + \frac{\alpha_2^B}{p_2}\frac{\left(M_B\text{-}p_1a_1^B\text{-}p_2a_2^B\text{-}p_3a_3^B\right)}{\left(\alpha_1^B+\alpha_2^B+\alpha_3^B\right)}. \quad (П\,9.1.4)$$

В силу того, что в рамках модели общего экономического равновесия анализируется потребительский выбор с учетом первоначальных запасов благ (I.1b), следует расписать доходы потребителей по источникам их формирования: $M_A = p_1\omega_1^A\text{-}p_2\omega_2^A + p_3\omega_3^A$, $M_B = p_1\omega_1^B\text{-}p_2\omega_2^B + p_3\omega_3^B$. Тогда функции спроса приобретают вид:

$$x_1^A = a_1^A + \frac{\alpha_1^A}{p_1}\frac{\left(p_1\omega_1^A\text{-}p_2\omega_2^A + p_3\omega_3^A\text{-}p_1a_1^A\text{-}p_2a_2^A\text{-}p_3a_3^A\right)}{\left(\alpha_1^A+\alpha_2^A+\alpha_3^A\right)},$$

$$x_2^A = a_2^A + \frac{\alpha_2^A}{p_2}\frac{\left(p_1\omega_1^A\text{-}p_2\omega_2^A + p_3\omega_3^A\text{-}p_1a_1^A\text{-}p_2a_2^A\text{-}p_3a_3^A\right)}{\left(\alpha_1^A+\alpha_2^A+\alpha_3^A\right)},$$

$$x_1^B = a_1^B + \frac{\alpha_1^B}{p_1}\frac{\left(p_1\omega_1^B\text{-}p_2\omega_2^B + p_3\omega_3^B\text{-}p_1a_1^B\text{-}p_2a_2^B\text{-}p_3a_3^B\right)}{\left(\alpha_1^B+\alpha_2^B+\alpha_3^B\right)},$$

$$x_2^B = a_2^B + \frac{\alpha_2^B}{p_2}\frac{\left(p_1\omega_1^B\text{-}p_2\omega_2^B + p_3\omega_3^B\text{-}p_1a_1^B\text{-}p_2a_2^B\text{-}p_3a_3^B\right)}{\left(\alpha_1^B+\alpha_2^B+\alpha_3^B\right)}.$$

Суммарный спрос двух потребителей на каждое благо должен равняться его запасам, находящимся в распоряжении индивидуумов, причем, в силу закона Вальраса, достаточно выписать балансы лишь для двух из трех рынков:

$$x_1^A + x_1^B = a_1^A + a_1^B + \frac{1}{p_1}\left(\frac{\alpha_1^A\left(p_1\omega_1^A\text{-}p_2\omega_2^A + p_3\omega_3^A\text{-}p_1a_1^A\text{-}p_2a_2^A\text{-}p_3a_3^A\right)}{\alpha_1^A+\alpha_2^A+\alpha_3^A} + \frac{\alpha_1^B\left(p_1\omega_1^B\text{-}p_2\omega_2^B + p_3\omega_3^B\text{-}p_1a_1^B\text{-}p_2a_2^B\text{-}p_3a_3^B\right)}{\alpha_1^B+\alpha_2^B+\alpha_3^B}\right) = \omega_1^A + \omega_1^B;$$

$$x_2^A + x_2^B = a_2^A + a_2^B + \frac{1}{p_2}\left(\frac{\alpha_2^A\left(p_1\omega_1^A\text{-}p_2\omega_2^A + p_3\omega_3^A\text{-}p_1a_1^A\text{-}p_2a_2^A\text{-}p_3a_3^A\right)}{\alpha_1^A+\alpha_2^A+\alpha_3^A} + \frac{\alpha_2^B\left(p_1\omega_1^B\text{-}p_2\omega_2^B + p_3\omega_3^B\text{-}p_1a_1^B\text{-}p_2a_2^B\text{-}p_3a_3^B\right)}{\alpha_1^B+\alpha_2^B+\alpha_3^B}\right) = \omega_2^A + \omega_2^B.$$

Распишем данные балансовые равенства объемов потребления и запасов применительно к условиям задачи:

$$\frac{p_1 15 + p_2 46}{2p_1} + \frac{p_1 28 + p_2 80 + p_3 39}{4p_1} = 43;$$

$$\frac{p_1 15+p_2 46}{4p_2}+\frac{p_1 28+p_2 80+p_3 39}{4p_2}=126.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 43p_1=378p_2\text{-}39p_3, \\ 114p_1=172p_2+39p_3. \end{cases}$$

Их сумма дает отношения товарных цен:

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{157}{550}.$$

Таким образом, получаем равновесный вектор относительных цен:

$$(\rho_1,\rho_2,\rho_3)=(0,339;0,0968;0,5642). \ (П 9.1.5)$$

Рассмотрим теперь условия общего равновесия в производстве. Предположим, что в экономике присутствуют два предприятия, каждое из которых производит один, отличный от другого вид продукции. Выпишем функции прибыли каждой из фирм. Для первого предприятия она будет иметь вид:

$$PR_1\left(x_{11}^p,x_{12}^p\right)=p_1y_{11}+p_2y_{12}=p_1\left(q_{11}\text{-}x_{11}^p\right)+p_2\left(q_{12}\text{-}x_{12}^p\right)=p_1q_{11}\text{-}p_1x_{11}^p\text{-}p_2x_{12}^p,$$

поскольку, по предположению, $q_{12}=0$.

Аналогично, в силу предположения, что $q_{21}=0$, прибыль второй фирмы такова:

$$PR_2\left(x_{21}^p,x_{22}^p\right)=p_1y_{21}+p_2y_{22}=p_1\left(q_{21}\text{-}x_{21}^p\right)+p_2\left(q_{22}\text{-}x_{22}^p\right)=p_2q_{22}\text{-}p_1x_{21}^p\text{-}p_2x_{22}^p.$$

Условия максимизации прибыли каждого из предприятий будут иметь вид (4.35):

$$\begin{cases} MP_{11}=\frac{\partial q_{11}}{\partial x_{11}^p}=1, \\ MP_{12}=\frac{\partial q_{11}}{\partial x_{12}^p}=\frac{p_2}{p_1}; \end{cases} u \begin{cases} MP_{21}=\frac{\partial q_{22}}{\partial x_{21}^p}=\frac{p_1}{p_2}, \\ MP_{22}=\frac{\partial q_{22}}{\partial x_{22}^p}=1. \end{cases}$$

Поделив в каждой из систем первое из равенств на второе и объединив полученные соотношения, получаем аналогичное распределительной системе (9.13) соотношение, характеризующее общее равновесие в производстве:

$$MRTS_{12}^1\equiv\text{-}\frac{dx_{12}^p}{dx_{11}^p}\Big|_{q_{11}=const}=\frac{MP_{11}}{MP_{12}}=\frac{p_1}{p_2}=\frac{MP_{21}}{MP_{22}}=\text{-}\frac{dx_{22}^p}{dx_{21}^p}\Big|_{q_{22}=const}\equiv MRTS_{12}^2. \ (9.14)$$

Распишем полный дифференциал технологии первого производителя, в котором учтем условия максимизации прибыли:

$$dq_{11}=\frac{\partial q_{11}}{\partial x_{11}^p}dx_{11}^p+\frac{\partial q_{11}}{\partial x_{12}^p}dx_{12}^p=dx_{11}^p+\frac{p_2}{p_1}dx_{12}^p,$$

т.е.

$$dq_{11}\text{-}dx_{11}^p=\frac{p_2}{p_1}dx_{12}^p.$$

Аналогично, для второй фирмы имеем:

$$dq_{22}=\frac{\partial q_{22}}{\partial x_{21}^p}dx_{21}^p+\frac{\partial q_{22}}{\partial x_{22}^p}dx_{22}^p=\frac{p_1}{p_2}dx_{21}^p+dx_{22}^p,$$

т.е.

$$\text{-}dx_{21}^p=\text{-}\frac{p_2}{p_1}dq_{22}+\frac{p_2}{p_1}dx_{22}^p.$$

Складывая полученные соотношения и используя определения совокупного чистого выпуска для каждого из товаров по экономике в целом, приходим к соотношению:

$$dq_{11}\text{-}dx_{11}^p\text{-}dx_{21}^p=dy_1=\text{-}\frac{p_2}{p_1}\left(dq_{22}\text{-}dx_{12}^p\text{-}dx_{22}^p\right)=\text{-}\frac{p_2}{p_1}dy_2. \ (9.15)$$

Поскольку первоначальные запасы благ в экономике фиксированы, постольку изменение объема производства будет соответствовать изменению объема потребления каждого из товаров: $dx_1^c=dy_1+d\omega_1=dy_1$, $dx_2^c=dy_2+d\omega_2=dy_2$. Следовательно, равенство (9.15) можно переписать таким образом:

$$MRT_{12}\equiv\text{-}\frac{dy_2}{dy_1}=\text{-}\frac{dx_2^c}{dx_1^c}=\frac{p_1}{p_2}, \ (9.16)$$

где $MRT_{12}\equiv\text{-}\frac{dy_2}{dy_1}$ – предельная норма трансформации одного продукта в другой для данной экономической системы.

Объединяя соотношения (9.13), (9.14) и (9.16), получаем условия совместного равновесия в производстве и потреблении:

$$MRT_{12}=MRTS_{12}^1=MRTS_{12}^2=MRS_{12}^1=MRS_{12}^2=\frac{p_1}{p_2}. \ (9.17)$$

Итак, в условиях общего экономического равновесия предельная норма трансформации равна обратной величине относительного предельного продукта каждого из факторов производства, которая совпадает с относительными ценами продуктов и ресурсов.

Пример 9.2. Совместное равновесие в производстве и потреблении

Допустим, что в экономике присутствуют два потребителя с функциями полезности $U_1=(x_{11}^c)^{½}(x_{12}^c)^{½}$ и $U_2=(x_{21}^c)^{¼}(x_{22}^c)^{¾}$, которые располагают запасами благ $\omega_{11}=2$, $\omega_{12}=4$, $\omega_{21}=5$, $\omega_{22}=4$ и долями в прибылях двух предприятий $\theta_{11}=¼$, $\theta_{12}=¾$, $\theta_{21}=¾$, $\theta_{22}=¼$. Каждое из предприятий производит один, отличный от другого продукт. Технологии производства описываются следующими функциями: $q_1=(x_{11}^p)^{½}(x_{12}^p)^{¼}$, $q_2=(x_{21}^p)^{¼}(x_{22}^p)^{½}$.

Распишем функции прибыли каждой из фирм. Для первого предприятия она будет иметь вид:

$$PR_1\,(x_{11}^p,x_{12}^p)=p_1y_{11}+p_2y_{12}=p_1q_1-p_1x_{11}^p-p_2x_{12}^p=p_1(x_{11}^p)^{½}(x_{12}^p)^{¼}-p_1x_{11}^p-p_2x_{12}^p,$$

поскольку, по предположению, выпуск второго продукта на первом предприятии отсутствует.

Аналогично, в силу предположения о нулевом выпуске первого продукта на втором предприятии, прибыль второй фирмы такова:

$$PR_2\,(x_{21}^p,x_{22}^p)=p_1y_{21}+p_2y_{22}=p_2q_2-p_1x_{21}^p-p_2x_{22}^p=p_2(x_{21}^p)^{¼}(x_{22}^p)^{½}-p_1x_{21}^p-p_2x_{22}^p.$$

Условия максимизации прибыли первого и второго предприятий соответственно будут иметь вид:

$$\begin{cases} MP_{11}=\frac{\partial q_1}{\partial x_{11}^p}=\frac{(x_{12}^p)^{¼}}{2(x_{11}^p)^{½}}=1,\\ MP_{12}=\frac{\partial q_1}{\partial x_{12}^p}=\frac{(x_{11}^p)^{½}}{4(x_{12}^p)^{¾}}=\frac{p_2}{p_1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} MP_{21}=\frac{\partial q_2}{\partial x_{21}^p}=\frac{(x_{22}^p)^{½}}{4(x_{21}^p)^{¾}}=\frac{p_1}{p_2},\\ MP_{22}=\frac{\partial q_2}{\partial x_{22}^p}=\frac{(x_{21}^p)^{¼}}{2(x_{22}^p)^{½}}=1. \end{cases}$$

Из первого равенства следует, что $(x_{12}^p)^{¼}=2(x_{11}^p)^{½}$, а значит, в силу второго равенства получается, что $\frac{(x_{11}^p)^{½}}{4(x_{12}^p)^{¾}}=\frac{1}{8(x_{12}^p)^{½}}=\frac{p_2}{p_1}$, т.е. $y_{12}=-x_{12}^p=-\left(\frac{p_1}{8p_2}\right)^2$, $x_{11}^p=\frac{p_1}{32p_2}$, $q_1=(x_{11}^p)^{½}(x_{12}^p)^{¼}=\frac{p_1}{16p_2}$, $y_{11}=q_1-x_{11}^p=\frac{p_1}{32p_2}$.

Из последнего равенства второй системы вытекает, что $(x_{21}^p)^{¼}=2(x_{22}^p)^{½}$, следовательно, предыдущее соотношение системы дает: $\frac{(x_{22}^p)^{½}}{4(x_{21}^p)^{¾}}=\frac{1}{8(x_{21}^p)^{½}}=\frac{p_1}{p_2}$, т.е. $y_{21}=-x_{21}^p=-\left(\frac{p_2}{8p_1}\right)^2$, $x_{22}^p=\frac{p_2}{32p_1}$, $q_2=(x_{21}^p)^{¼}(x_{22}^p)^{½}=\frac{p_2}{16p_1}$, $y_{22}=q_2-x_{22}^p=\frac{p_2}{32p_1}$.

Отметим, что данные результаты полностью согласуются с выведенными ранее функциями производного спроса на ресурсы (2.121).

Потребительские предпочтения в данной задаче описываются функциями полезности Кобба – Дугласа, следовательно, спрос по Маршаллу для каждого из потребителей на оба блага имеет вид (3.20):

$$x_{11}^c=\frac{M_1}{2p_1}=\frac{2p_1+4p_2+¼p_1y_{11}+¼p_2y_{12}+¾p_1y_{21}+¾p_2y_{22}}{2p_1},$$

$$x_{12}^c=\frac{M_1}{2p_2}=\frac{2p_1+4p_2+¼p_1y_{11}+¼p_2y_{12}+¾p_1y_{21}+¾p_2y_{22}}{2p_2},$$

$$x_{21}^c=\frac{M_2}{4p_1}=\frac{5p_1+4p_2+¾p_1y_{11}+¾p_2y_{12}+¼p_1y_{21}+¼p_2y_{22}}{4p_1},$$

$$x_{22}^c=\frac{3M_2}{4p_2}=\frac{3(5p_1+4p_2+¾p_1y_{11}+¾p_2y_{12}+¼p_1y_{21}+¼p_2y_{22})}{4p_2};$$

где $M_1=p_1\omega_{11}+p_2\omega_{12}+\theta_{11}\,(p_1y_{11}+p_2y_{12})+\theta_{12}\,(p_1y_{21}+p_2y_{22})=2p_1+4p_2+¼p_1y_{11}+¼p_2y_{12}+¾p_1y_{21}+¾p_2y_{22}$ и $M_2=p_1\omega_{21}+p_2\omega_{22}+\theta_{21}\,(p_1y_{11}+p_2y_{12})+\theta_{22}\,(p_1y_{21}+p_2y_{22})=5p_1+4p_2+¾p_1y_{11}+¾p_2y_{12}+¼p_1y_{21}+¼p_2y_{22}$ – доходы первого и второго потребителей соответственно.

Натуральное балансовое равенство для первого товарного рынка в условиях равновесия будет выглядеть так:

$$x_{11}^c+x_{21}^c=\frac{½(2p_1+4p_2+¼p_1y_{11}+¼p_2y_{12}+¾p_1y_{21}+¾p_2y_{22})}{p_1}+\frac{¼(5p_1+4p_2+¾p_1y_{11}+¾p_2y_{12}+¼p_1y_{21}+¼p_2y_{22})}{p_1}=\frac{9}{4}+3\frac{p_2}{p_1}+\frac{5}{16}y_{11}+\frac{5}{16}y_{12}\frac{p_2}{p_1}+\frac{7}{16}y_{21}+\frac{7}{16}y_{22}\frac{p_2}{p_1}$$

или

$$-\frac{19}{4}+3\frac{p_2}{p_1}-\frac{9}{16}y_{11}+\frac{5}{16}y_{12}\frac{p_2}{p_1}-\frac{9}{16}y_{21}+\frac{7}{16}y_{22}\frac{p_2}{p_1}=0.$$

С учетом полученных выше величин объемов чистого выпуска последнее равенство можно преобразовать к виду:

$$-\frac{19}{4}+3\frac{p_2}{p_1}-\frac{9}{16}\frac{p_1}{32p_2}-\frac{5}{16}\left(\frac{p_1}{8p_2}\right)^2\frac{p_2}{p_1}+\frac{9}{16}\left(\frac{p_2}{8p_1}\right)^2+\frac{7}{16}\frac{p_2}{32p_1}\frac{p_2}{p_1}=-\frac{19}{4}+3\frac{p_2}{p_1}-\frac{23}{1024}\frac{p_1}{p_2}+\frac{23}{1024}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2=0,$$

или

$$23\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^3+3072\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2-4864\frac{p_2}{p_1}-23=0.$$

Решая данное кубическое уравнение, можно рассчитать относительную цену второго товара: $\frac{p_2}{p_1} \approx 1,57$. Таким образом, искомый равновесный вектор относительных цен будет таков:

$$(\rho_1, \rho_2) = \left(1, \frac{p_2}{p_1}\right) = (1; 1,57).$$

Рассчитаем теперь по каждому из товаров чистый выпуск первой и второй фирм, а также спрос со стороны каждого из потребителей:

$$y_{11} = \frac{p_1}{32p_2} = 0,0199; y_{12} = -\left(\frac{p_1}{8p_2}\right)^2 = -0,006339;$$

$$y_{22} = \frac{p_2}{32p_1} = 0,0490625; y_{21} = -\left(\frac{p_2}{8p_1}\right)^2 = -0,0385;$$

$$x_{11}^c = \frac{2p_1 + 4p_2 + ¼p_1y_{11} + ¼p_2y_{12} + ¾p_1y_{21} + ¾p_2y_{22}}{2p_1} = 1 + \frac{y_{11}}{8} + \frac{3}{8}y_{21} + \frac{p_2}{p_1}\left(2 + \frac{y_{12}}{8} + \frac{3}{8}y_{22}\right) = 4,0979;$$

$$x_{21}^c = \frac{5p_1 + 4p_2 + ¾p_1y_{11} + ¾p_2y_{12} + ¼p_1y_{21} + ¼p_2y_{22}}{4p_1} = \frac{5}{4} + \frac{3}{16}y_{11} + \frac{y_{21}}{16} + \frac{p_2}{p_1}\left(1 + \frac{3}{16}y_{12} + \frac{y_{22}}{16}\right) = 2,8243;$$

$$x_{12}^c = \frac{2p_1 + 4p_2 + ¼p_1y_{11} + ¼p_2y_{12} + ¾p_1y_{21} + ¾p_2y_{22}}{2p_2} = 2 + \frac{y_{12}}{8} + \frac{3}{8}y_{22} + \frac{p_1}{p_2}\left(1 + \frac{y_{11}}{8} + \frac{3}{8}y_{21}\right) = 2,6469;$$

$$x_{22}^c = \frac{3(5p_1 + 4p_2 + ¾p_1y_{11} + ¾p_2y_{12} + ¼p_1y_{21} + ¼p_2y_{22})}{4p_2} = 3 + \frac{9}{16}y_{12} + \frac{3}{16}y_{22} + \frac{p_1}{p_2}\left(\frac{15}{4} + \frac{9}{16}y_{11} + \frac{3}{16}y_{21}\right) = 5,3967.$$

---

1. Ср. Тарасевич Л.С., Гребенников Л.И., Леусский А.И. Макроэкономика. – 6-е изд. – М.: Высшее образование, 2006. ↩

9.3. Общее экономическое равновесие в теории международной торговли

Модель общего экономического равновесия в производстве может быть применена к анализу мирохозяйственной системы [1]. Предполагается, что экономика состоит из двух фирм, каждая из которых специализируется на производстве одного определённого потребительского товара и использует при этом два фактора производства – труд и капитал. Объёмы производства обоих благ положительны (отсутствует полная специализация на производстве какого-либо товара). В экономике отсутствуют промежуточные товары, т.е. такие товары, которые производятся одной фирмой, а другой используются в качестве ресурса. Производственные функции обоих фирм являются вогнутыми, возрастающими и дважды непрерывно дифференцируемыми по каждому из аргументов. Технологии производства обладают постоянной отдачей от масштаба. В экономике имеется совокупный первоначальный запас факторов производства $\Omega=(\omega_K, \omega_L)$, которым владеют потребители и который используется исключительно в качестве ресурсов для фирм.

Каждая фирма максимизирует прибыль при заданных ценах на готовую продукцию – соответственно P_1 и P_2 – и ценах на факторы производства p_L и p_K, при этом выполняются балансовые соотношения по объёмам используемых труда и капитала:

$$\begin{cases} PR_1(K_1, L_1)=P_1Q_1(K_1, L_1)\text{-}TC_1(K_1, L_1) \to \max\limits_{K_1, L_1} \\ PR_2(K_2, L_2)=P_2Q_2(K_2, L_2)\text{-}TC_2(K_2, L_2) \to \max\limits_{K_2, L_2} \\ K_1+K_2=\omega_K \\ L_1+L_2=\omega_L \\ K_1 \geq 0, L_1 \geq 0, K_2 \geq 0, L_2 \geq 0 \end{cases} \quad (9.18)$$

Решением данной задачи будут искомые равновесные цены на факторы производства (p_L^*, p_K^*) и равновесное распределение факторов (K_1^*, L_1^*) и (K_2^*, L_2^*).

Задача максимизации прибыли каждой фирмой может решаться как в одноэтапной, так и в двухэтапной постановках, которые приводят к одинаковым равновесным значениям параметров модели. При этом функции условного спроса на факторы производства могут быть найдены с помощью леммы Шепарда: $K_j=\frac{\partial TC_j(p_L, p_K, Q_j)}{\partial p_K}$ и $L_j=\frac{\partial TC_j(p_L, p_K, Q_j)}{\partial p_L}$, где $TC_j(p_L, p_K, Q_j)$ – функция общих издержек производства. Поэтому модель общего экономического равновесия может быть эквивалентным образом представлена в виде следующей системе условий:

$$\begin{cases} P_j=\frac{\partial TC_j(p_L, p_K, Q_j)}{\partial Q_j}, \\ \sum\limits_{j=1}^{2} \frac{\partial TC_j(p_L, p_K, Q_j)}{\partial p_K}=\omega_K, \\ \sum\limits_{j=1}^{2} \frac{\partial TC_j(p_L, p_K, Q_j)}{\partial p_L}=\omega_L. \end{cases} \quad (9.19)$$

Первое равенство системы вытекает из необходимого условия максимизации прибыли на втором этапе двухэтапной постановки (9.69). Нижние два равенства представляют собой балансовые ограничения на запасы факторов производства, переписанные с помощью леммы Шепарда. Решение системы (9.19) позволяет получить равновесные цены факторов производства (p_L^*, p_K^*) и равновесный выпуск Q_j^* для каждой из фирм. Далее равновесное распределение факторов производства может быть получено как $K_j^*=\frac{\partial TC_j(p_L^*, p_K^*, Q_j^*)}{\partial p_K}$ и $L_j^*=\frac{\partial TC_j(p_L^*, p_K^*, Q_j^*)}{\partial p_L}$. Полученные значения параметров равновесия модели при этом будут полностью совпадать с найденным оптимумом в постановке (9.18).

Следует заметить, что в описанной производственной модели 2×2 равновесное распределение факторов производства (K_1^*, L_1^*) и (K_2^*, L_2^*) совпадает с тем, которое является оптимальным с точки зрения центрального планирующего органа, стремящегося к максимизации суммарной выручки от экономической деятельности. Следовательно, есть основание утверждать, что соответствующее равновесное распределение ресурсов позволяет достичь максимума общественного благосостояния (исходя из первой теоремы общественного благосостояния).

Чтобы это доказать, рассмотрим задачу максимизации валового дохода от производственной деятельности, с которой сталкивается центральный планировщик. С учётом балансовых ограничений по запасам труда и капитала она будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} TR_\Sigma=P_1Q_1(K_1, L_1)+P_2Q_2(K_2, L_2) \to \max\limits_{K_1, L_1, K_2, L_2}: \\ K_1+K_2=\omega_K, \\ L_1+L_2=\omega_L, \\ K_1, L_1, K_2, L_2 \geq 0. \end{cases} \quad (9.20)$$

Известно, что если в экономике имеется определённое количество фирм-ценополучателей, то их оптимальный набор факторов производства, максимизирующий прибыль каждой фирмы в отдельности, будет таким же, как если бы фирмы максимизировали совокупную прибыль, принимая цены готовой продукции и факторов производства экзогенно заданными. Таким образом, оптимальный спрос фирм на факторы производства в нашей модели $(K_1^*, L_1^*)u(K_2^*, L_2^*)$фактически может быть получен решением следующей задачи:

$$PR_\Sigma=\sum_{j=1}^{2}(P_jQ_j(K_j, L_j)\text{-}p_L^*L_j\text{-}p_K^*K_j) \to \max_{K_1, L_1, K_2, L_2}. \quad (9.21)$$

Поскольку для равновесного распределения ресурсов выполняется $\sum_{j=1}^{2} K_j^* = \omega_K$ и $\sum_{j=1}^{2} L_j^* = \omega_L$ (из балансовых ограничений в постановке модели), то спрос на факторы производства $(K_1^*, L_1^*) u (K_2^*, L_2^*)$ должен быть решением задачи (9.21) при дальнейшем ограничении по запасам факторов $\sum_{j=1}^{2} K_j = \omega_K$ и $\sum_{j=1}^{2} L_j = \omega_L$. Но это означает, что совокупные общие издержки производства фирм заданы: $p_K^* \sum_{j=1}^{2} K_j = p_K^* \omega_K = const$ и $p_L^* \sum_{j=1}^{2} L_j = p_L^* \omega_L = const$, значит $\sum_{j=1}^{2} \left(p_L^* L_j + p_K^* K_j \right) = p_L^* \omega_L + p_K^* \omega_K = const$. Тем самым, задача максимизации общей прибыли фирм (9.21) сводится к задаче максимизации их общей выручки центральным планировщиком (9.20).

Безусловным достоинством доказанного явления служит то, что оно позволяет найти равновесное распределение ресурсов без предварительного вычисления равновесных цен на факторы производства. Для этого нужно просто решить задачу центрального планировщика (9.20).

Рассмотрим теперь непосредственно сам процесс установления равновесного состояния на рынке факторов производства. Будем предполагать, что производство разных благ характеризуется разной степенью относительной интенсивности использования факторов производства. В частности, в производстве первого товара фактор труд используется относительно более интенсивно, чем в производстве второго товара:

$$\frac{L_1(p)}{K_1(p)} > \frac{L_2(p)}{K_2(p)}. \quad (9.22)$$

Для нахождения равновесных объёмов используемых факторов необходимо определение равновесных цен на факторы производства $p^* = (p_L^*, p_K^*)$. Мы будем рассматривать весь процесс установления равновесия для случая внутреннего равновесия, т.е. когда оптимальный выпуск каждого из товаров положителен (т.е. случай полной специализации исключается). При этом используем необходимое условие максимизации прибыли фирмой на втором этапе в двухэтапной постановке, согласно которому устанавливается равенство цены и предельных издержек производства каждого из товаров (4.30). В то же время при постоянной отдаче от масштаба предельные издержки равны общим издержкам производства выпуска одной единицы продукции (4.24). Следовательно, равновесные цены на факторы производства p_L^* и p_K^*могут быть найдены из решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} MC_1\left(Q, p_L^*, p_K^*\right) = TC_1\left(1, p_L^*, p_K^*\right) = P_1, \\ MC_2\left(Q, p_L^*, p_K^*\right) = TC_2\left(1, p_L^*, p_K^*\right) = P_2. \end{cases} \quad (9.23)$$

На рис. 9.3 изображены две изокосты $TC_1\left(1, p_L, p_K\right) = P_1$ и $TC_2\left(1, p_L, p_K\right) = P_2$, соответствующие минимальным общим издержкам производства одной единицы продукции каждой фирмы при ценах на ресурсы $p = (p_L, p_K)$. В силу вогнутости, а значит, и квазивогнутости функций издержек по ценам факторов, все изокосты являются выпуклыми к началу координат в системе цен на ресурсы. Кроме того, они имеют разный наклон ввиду предпосылки о различной относительной интенсивности использования факторов производства для двух фирм. Следовательно, они имеют единственную точку пересечения, следовательно, равновесные цены на факторы производства обязательно существуют при внутреннем равновесии. При этом изокоста для второй фирмы является более пологой, чем для первой фирмы, поскольку, по предположению, в производстве первого товара относительно интенсивно используется фактор труд. Согласно (9.23) пересечение этих изокост даёт равновесные цены на факторы производства $p^* = (p_L^*, p_K^*)$.

Определив равновесные цены факторов производства (p_L^*, p_K^*), можно найти равновесное распределение их объемов. В силу леммы Шепарда (4.11) оптимальные комбинации ресурсов (L_1^*, K_1^*) и(L_2^*, K_2^*) могут быть рассчитаны как градиенты функции издержек в точке (p_L^*, p_K^*) (рис. 9.4).

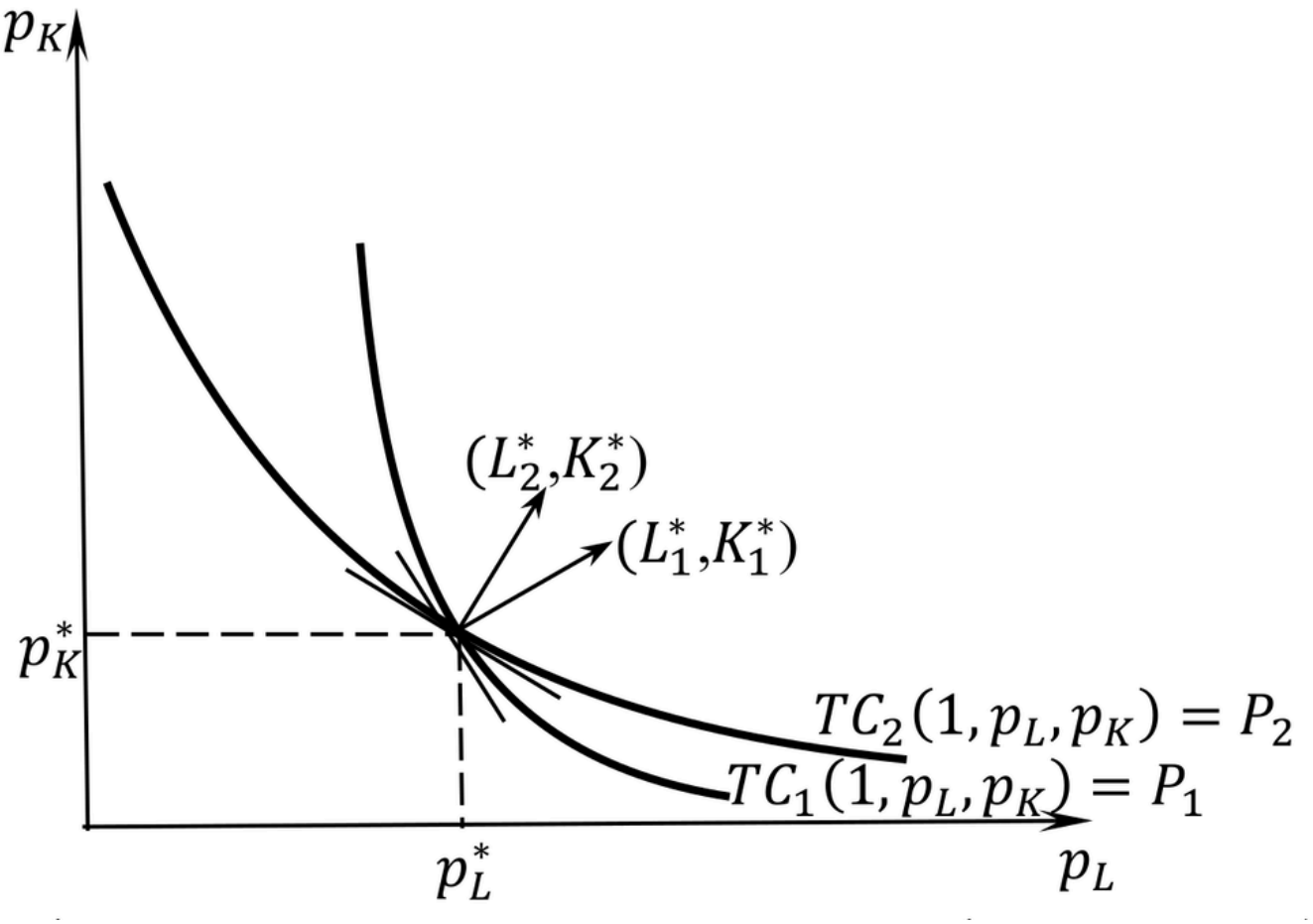


Рисунок 9.4. Относительная интенсивность использования факторов производства и их равновесные цены

Равновесные затраты факторов производства каждой из фирм могут быть также найдены при помощи ящика Эджуорта (рис. 9.5). Точка E, характеризующая равновесное распределение факторов производства, определяется путём приравнивания отношения объёмов используемых факторов при производстве одной единицы товара отношению затрат факторов при найденных равновесных ценах факторов:

$$\frac{L_1^*(Q_1,p^*)}{K_1^*(Q_1,p^*)} = \frac{L_1(1,p^*)Q_1}{K_1(1,p^*)Q_1} = \frac{L_1(1,p^*)}{K_1(1,p^*)},$$

$$\frac{L_2^*(Q_2,p^*)}{K_2^*(Q_2,p^*)} = \frac{L_2(1,p^*)Q_2}{K_2(1,p^*)Q_2} = \frac{L_2(1,p^*)}{K_2(1,p^*)}.$$

В ящике Эджуорта эта точка лежит на пересечении лучей, исходящих из начал координат для двух фирм, углы наклона которых к горизонтальной оси характеризуют относительную интенсивность использования факторов производства (9.22). При этом также отметим, что эти углы равны углам наклона векторов нормалей к изокостам в оптимальной точке на рис. 9.4. Также в точке E ящика Эджуорта изокванты обеих фирм, соответствующие оптимальному уровню выпуска, касаются. При этом тангенс угла наклона α общей касательной равен равновесной относительной цене факторов производства.

Таким образом, в производстве достигается эффективное распределение факторов. Постоянная отдача от масштаба служит основанием для масштабирования затрат факторов с одной и той же относительной интенсивностью использования факторов производства.

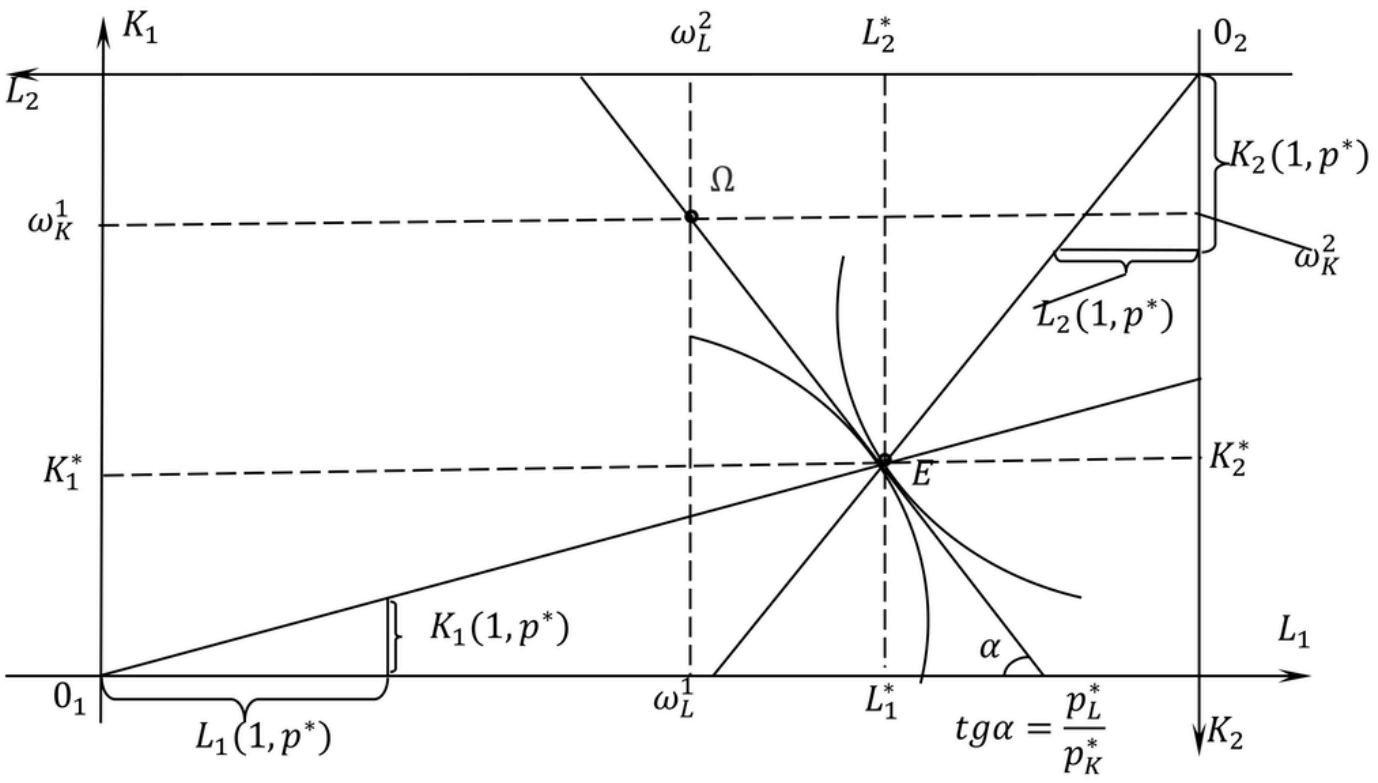


Рисунок 9.5. Равновесное распределение факторов производства

Важным следствием из данной производственной модели 2×2 является тот факт, что если фирмы не прибегают к полной специализации на производстве одного из товаров, равновесные цены факторов производства зависят только от производственной технологии фирм и от уровня цен на выпускаемую продукцию. Таким образом, уровень первоначальных запасов факторов производства имеет значение лишь в той мере, в какой он определяет степень специализации экономики. В мировой научной литературе по вопросам международной торговли данный вывод известен как теорема о выравнивании цен на факторы производства. Теорема гласит, что при определённых условиях (включающих наличие торгуемых потребительских товаров, одинаковых производственных технологий в каждой стране и совершенной конкуренции на рынках факторов производства и готовой продукции) цены одинаковых факторов производства выравниваются между странами в процессе установления торговых отношений.

Далее рассмотрим два важных следствия, вытекающих из данной теоремы. Во-первых, проанализируем, как увеличение цены на один из товаров повлияет на равновесные цены факторов производства и на равновесное распределение ресурсов.

Ответ на этот вопрос дает теорема Столпера-Самуэльсона [2], которая утверждает, что в производственной модели 2×2 с учетом допущения об интенсивности использования факторов производства при увеличении цены товара растёт равновесная цена фактора, более интенсивно используемого в производстве этого товара, и снижается равновесная цена другого фактора (при условии наличия внутреннего равновесия до и после изменения цены).

Для доказательства данной теоремы будем рассматривать случай роста цены на первый товар P_1 при неизменной цене второго товара P_2. Аналогично можно провести рассуждения, если растёт цена второго товара, а цена первого остаётся без изменений.

Достаточно будет доказать утверждение теоремы для изменения цены товара на единицу: $dP=(1,0)$. Как уже было отмечено, чтобы цены на ресурсы $p^*=(p_L^*, p_K^*)$ были равновесными при предпосылке о постоянной отдаче от масштаба для обеих фирм, необходимо, чтобы они удовлетворяли системе уравнений (9.23).

Выпишем дифференциал каждого из уравнений данной системы:

$$dP_1=grad\left(TC_1\left(p^*\right)\right)dp=L_1\left(p^*\right)dp_L+K_1\left(p^*\right)dp_K,$$
$$dP_2=grad(TC_2\left(p^*\right))dp=L_2\left(p^*\right)dp_L+K_2\left(p^*\right)dp_K.$$

Перепишем эти равенства в матричном виде:

$$dP=\begin{bmatrix} L_1\left(p^*\right) & K_1\left(p^*\right) \\ L_2\left(p^*\right) & K_2\left(p^*\right) \end{bmatrix} dp.$$

Обозначим матрицу 2×2 в качестве A. Исходное предположение об интенсивности использования факторов производства подразумевает, что её определитель положителен: $|A|=L_1\left(p^*\right)K_2\left(p^*\right)\text{-}L_2\left(p^*\right)K_1\left(p^*\right) > 0$. Следовательно, обратная матрица A^{-1} существует:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} K_2\left(p^*\right) & \text{-}K_1\left(p^*\right) \\ \text{-}L_2\left(p^*\right) & L_1\left(p^*\right) \end{bmatrix}.$$

Отметим, что элементы матрицы A^{-1} положительны на главной диагонали и отрицательны на побочной диагонали.

Отсюда следует, что:

$$dp = \begin{bmatrix} dp_L \\ dp_K \end{bmatrix} = A^{-1} dP = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} K_2(p^*) & -K_1(p^*) \\ -L_2(p^*) & L_1(p^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dP_1 \\ dP_2 \end{bmatrix}.$$

Поскольку, по предположению, $(dP_1, dP_2) = (1, 0)$, постольку:

$$\begin{bmatrix} dp_L \\ dp_K \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} K_2(p^*) & -K_1(p^*) \\ -L_2(p^*) & L_1(p^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} K_2(p^*) \\ -L_2(p^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{|A|} K_2(p^*) \\ -\frac{1}{|A|} L_2(p^*) \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что $|A| > 0$, как было показано выше, получаем, что $dp_L > 0$ и $dp_K < 0$. Таким образом, теорема Столпера-Самуэльсона доказана.

Рисунки 9.6 и 9.7 иллюстрируют приведённое доказательство теоремы Столпера-Самуэльсона.

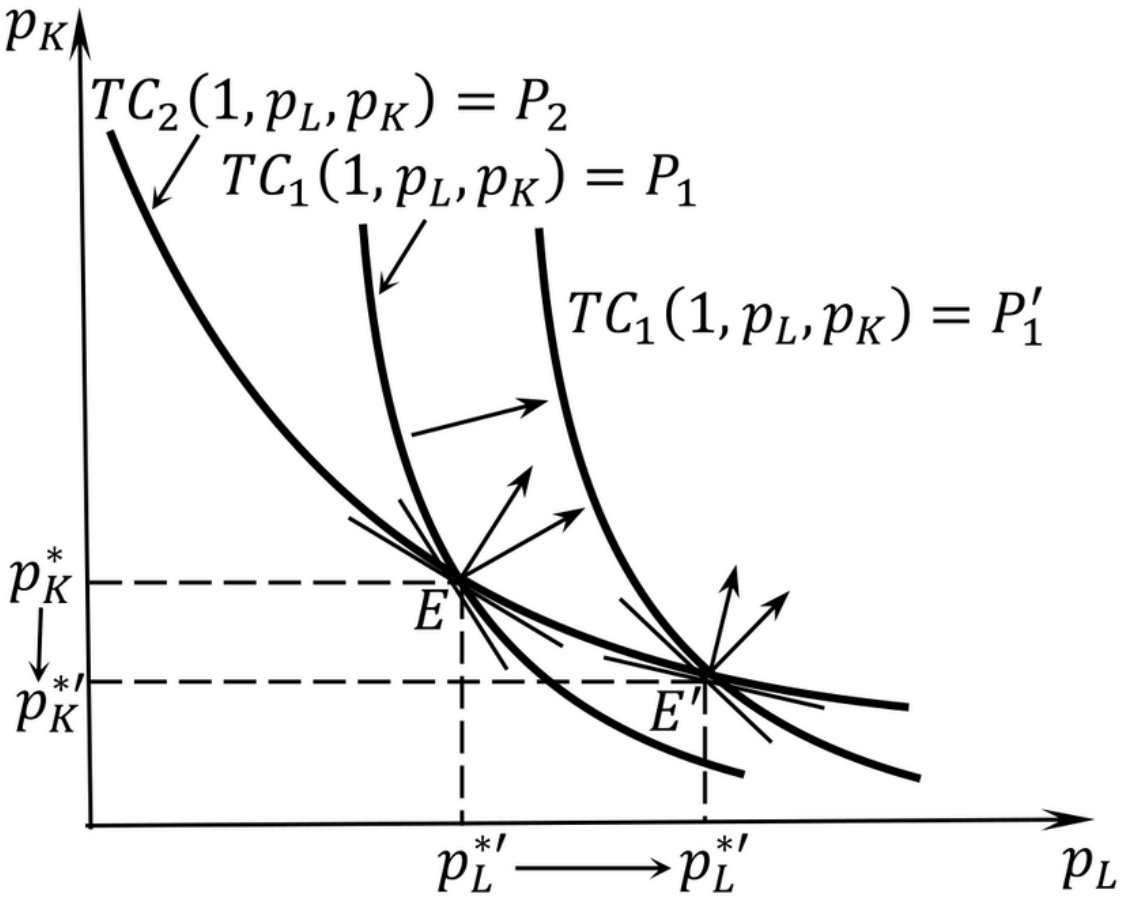


Рисунок 9.6. Изменение равновесных цен факторов производства при повышении цены первого товара

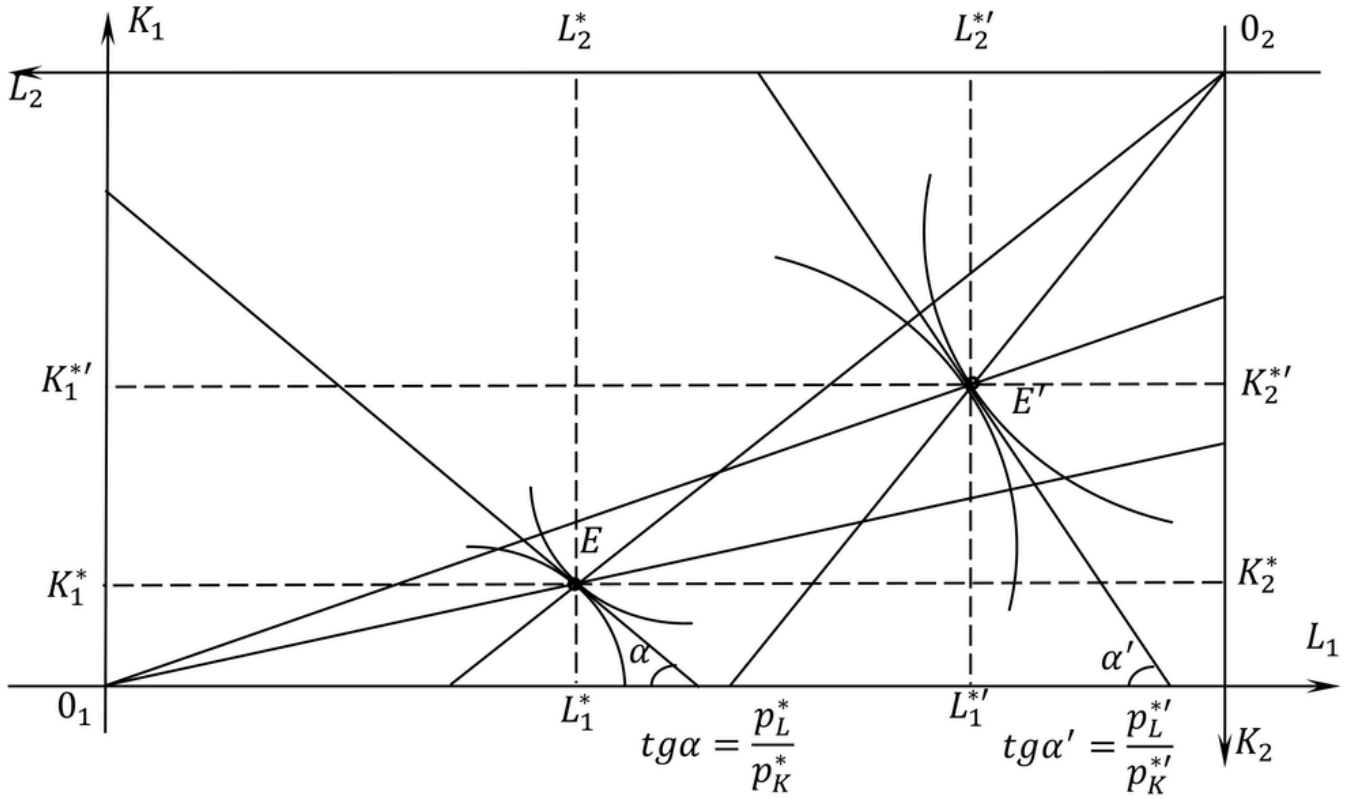


Рисунок 9.7. Изменение равновесного распределения факторов производства при повышении цены первого товара

Рост цены первого товара с P_1 до $P_1^{'}$ приведёт к сдвигу изокосты первой фирмы $\{(p_L, p_K) | TC_1(1, p_L, p_K) = P_1\}$ вправо-вверх (рис. 9.6). Точка, соответствующая равновесным ценам на ресурсы, переместится вниз вдоль изокосты второй фирмы из E в $E^{'}$. В итоге равновесная ставка заработной платы вырастет, а равновесная цена капитала снизится. Другими словами, равновесное отношение $\frac{p_L}{p_K}$ вырастет, и обе фирмы перейдут к менее интенсивному использованию труда. На рис. 9.7 показано результирующее изменение равновесного распределения факторов производства. Оно отражается ростом угла наклона к горизонтальной оси лучей, исходящих из начала координат для обеих фирм и определяющих равновесную относительную интенсивность использования факторов производства. Угол наклона вырос, поскольку вектор нормали к изокосте каждой фирмы в оптимальной точке на рис. 9.6 стал более крутым. Как можно видеть, в новом равновесном распределении ресурсов выпуск первого товара увеличился, а второго – упал.

Теперь предположим, что суммарные запасы одного из факторов производства в экономике увеличились. Представляется интересным рассмотреть, каким образом это повлияет на равновесные цены ресурсов и равновесный выпуск фирм. Очевидно, что равновесные цены факторов при этом не изменятся, поскольку они определяются исключительно технологией производства и уровнем цен на готовую продукцию, как было указано выше. Однако выпуск обеих фирм в равновесии изменится, что приводит нас ко второму важному следствию из теоремы о выравнивании цен на факторы производства – теореме Рыбчинского [3], которая учтверждает, что если в производственной модели 2×2 при допущении интенсивности использования факторов производства первоначальные запасы одного из факторов увеличиваются, то растёт выпуск товара, в производстве которого относительно интенсивно используется этот фактор и сокращается выпуск другого товара, в производстве которого этот фактор используется менее интенсивно (предполагается внутреннее равновесие как до, так и после изменения совокупного первоначального запаса фактора).

Пусть суммарные запасы труда в экономике увеличиваются с $\overline{\omega}_L$ до $\overline{\omega}_L^{'}$. Поскольку ни равновесные цены факторов, ни производственная технология фирм не изменились, то равновесная относительная интенсивность использования факторов производства также не изменилась. Новое оптимальное распределение факторов производства соответствует точке $E^{'}$ расширенного ящика Эджуорта (рис. 9.8).

Рисунок 9.8 иллюстрирует ситуацию, когда увеличение суммарных запасов труда приводит к росту равновесного выпуска первого товара, что отражается перемещением равновесного распределения факторов производства из точки E в точку $E^{'}$ вдоль луча, характеризующего относительную интенсивность использования факторов производства в производстве первого товара. Вместе с тем, происходит сокращение объёма производства второго товара в равновесии, что характеризуется расположением равновесного распределения факторов производства на луче, соответствующем относительной интенсивности использования факторов производства в производстве второго товара, ближе к началу координат для второй фирмы (отрезок $0_2^{'}E^{'}$ короче отрезка 0_2E).

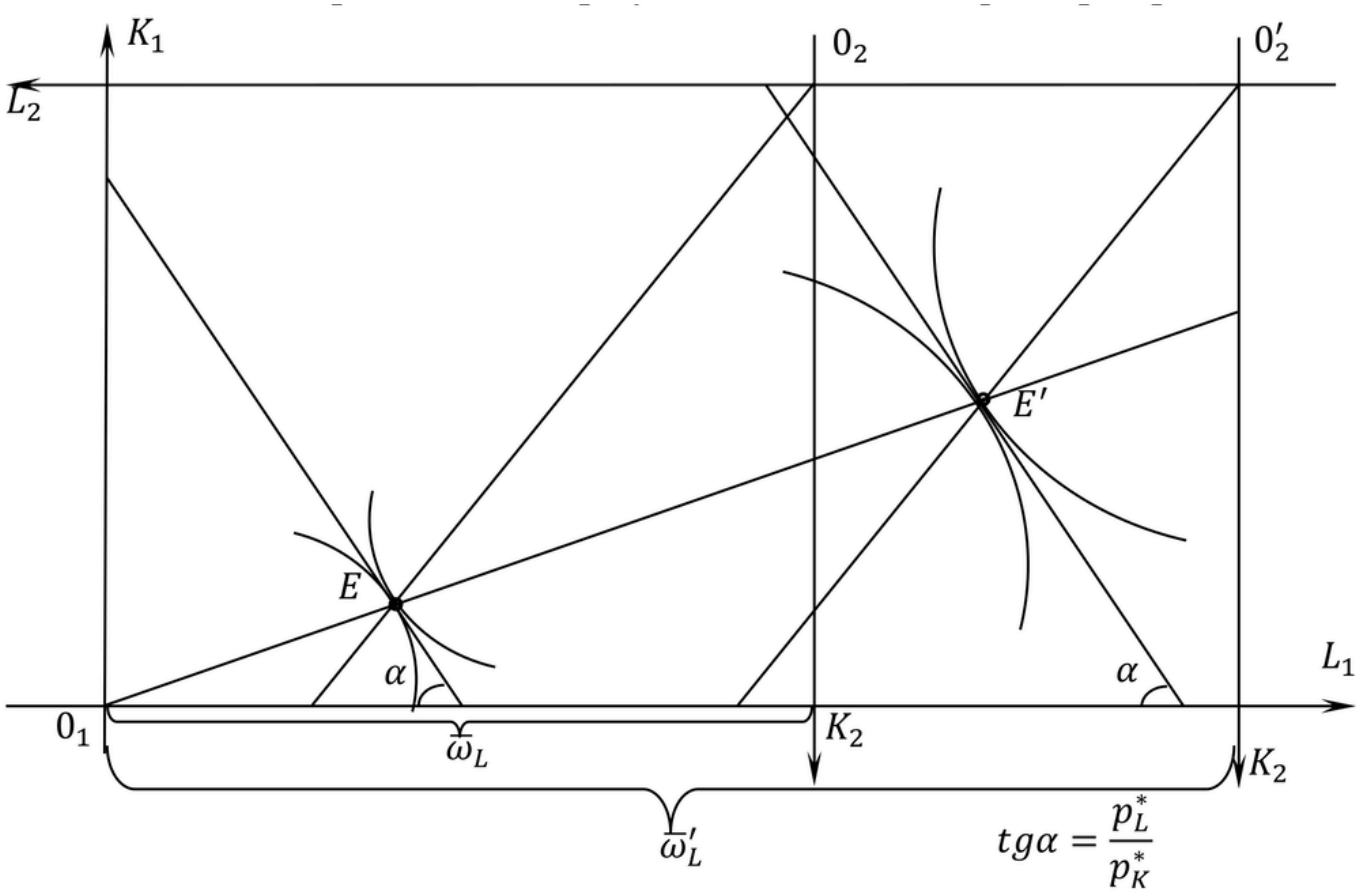


Рисунок 9.8. Изменение объемов производства при увеличении запаса фактора производства

Таким образом, находится новое пересечение лучей с неизменными уровнями относительной интенсивности использования факторов производства. В точке их пересечения достигается новое равновесное распределение факторов производства, соответствующее более высокому равновесному выпуску первого товара и более низкому выпуску второго товара, что и утверждает теорема Рыбчинского.

1. Ср.: Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. – New York, Oxford: Oxford university press, 1995. – Ch. 15D. ↩
2. Stolper W.F., Samuelson P.A. Protection and real wages // Review of economic studies. 1941. Vol. 9. №1. ↩
3. Rybczynski T. M. Factor endowment and relative commodity prices // Economica. 1955. Vol. 22. №88. ↩

9.4. Общее равновесие на рынках активов

Основные выводы модели CAPM, сформулированные в параграфе 6.6, могут быть получены в рамках теории общего экономического равновесия [1].

Предположим, что на некотором финансовом рынке m (i) инвесторов, имеющих однородную функцию полезности, осуществляют вложения в рисковые $(j=1,\ldots,n\text{-}1)$ и безрисковый $(j=n)$ активы, стоимостью p_1, p_2, p_3, ..., p_n, где $p_n=q$ есть стоимость безрискового актива. Пусть r_j – ожидаемый доход j-го актива в конце периода. Для оценки дохода в относительной величине допустим, что ожидаемый доход безрискового актива будет равен $r_n=1$. Доли активов в портфеле учитываются в натуральном выражении и равны (w_1, w_2, ..., w_n).

Задача i-ого инвестора состоит в максимизации функции полезности $U^i=U^i(r_p,\sigma_p^2)$, где $r_p=\sum_{j=1}^{n\text{-}1} r_j w_j^i+w_n^i$ и $\sigma_p^2=\sum_{j=1}^{n\text{-}1}\sum_{\alpha=1}^{n\text{-}1}\sigma_{j\alpha}w_j^i w_\alpha^i$ – соответственно доходность и риск портфеля i-го индивида.

Бюджетное ограничение показывает, что i-й инвестор в данный момент времени не может купить активов больше, чем он может продать (и наоборот), т.е. вводится ограничение на «короткие» продажи. Предполагается, что количество инвестиций в рынок капитала фиксировано. Формально данное условие выражено следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n\text{-}1} p_j(w_j^i\text{-}\overline{w}_j^i)+q\left(w_n^i\text{-}\overline{w}_n^i\right)=0, \quad (9.24)$$

где $\overline{w}_j^i$ – активы, продаваемые инвестором (в единицах).

Данное соотношение будет задавать общее бюджетное ограничение системы (с учетом неизменности средств инвесторов и количества активов):

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n\text{-}1} p_j(w_j^i\text{-}\overline{w}_j^i)+q\sum_{i=1}^{m}\left(w_n^i\text{-}\overline{w}_n^i\right)=0. \quad (9.25)$$

Решая задачу максимизации полезности инвестора при заданном бюджетном ограничении, составляем функцию Лагранжа:

$$L^i=U^i\left(r_p,\sigma_p^2\right)+\theta^i\left(\sum_{j=1}^{n\text{-}1} p_j(w_j^i\text{-}\overline{w}_j^i)+q\left(w_n^i\text{-}\overline{w}_n^i\right)\right).$$

Условия стационарности лагранжиана по переменным имеют вид:

$$\frac{\partial L^i}{\partial w_j^i}=(U^i)'_{r_i}r_j+2(U^i)'_{\sigma_{\beta i}}\sum_{\beta=1}^{n\text{-}1}\sigma_{\beta j}w_j^i+\theta^i p_j=0, j=1,\ldots,n\text{-}1;$$

$$\frac{\partial L^i}{\partial w_n^i}=(U^i)'_{r_i}+\theta^i q=0.$$

Исключая переменную θ^i, приходим к эквимаржинальному условию:

$$-\frac{(U^i)'_{r_i}}{(U^i)'_{\sigma_{\beta i}}}=\frac{2\sum_{\beta=1}^{n\text{-}1}\sigma_{\beta j}w_j^i}{r_j\text{-}\frac{p_j}{q}}. \quad (9.26)$$

Отношение $-\frac{(U^i)'_{r_i}}{(U^i)'_{\sigma_{\beta i}}}$ представляет собой предельную норму замещения риска доходностью.

Для получения общего рыночного равновесия необходимо ввести ограничения на замкнутость рынка:

$$\sum_{i=1}^{m}\left(w_j^i\text{-}\overline{w}_j^i\right)=0, j=1,\ldots,n; m.e.$$

$$\sum_{i=1}^{m} w_j^i=\overline{w}_j^i. \quad (9.27)$$

Подставляя это равенство в бюджетное ограничение (9.25), получаем:

$$q\sum_{i=1}^{m}\left(w_n^i\text{-}\overline{w}_n^i\right)=0, m.e.\sum_{i=1}^{m} w_n^i=\overline{w}_n^i.$$

В результате получается полная система уравнений, которой может быть описано равновесие в модели. Данная система состоит из m уравнений (9.24), *mn* уравнений (9.24) и (9.26) и *n* уравнений (9.27). Итого $m(n+1)+n$ уравнений. Также в модели насчитывается $m(n+1)+n$ переменных, из которых $m(n+1)$ значений w_j^i и n значений цен активов p_j.

Рассчитаем ожидаемую норму доходности: $r_j=\left(\frac{\mu_j}{p_j}\right)\text{-}1$. Чистая процентная ставка (сумма цены за ожидание и собственно цены за риск), или ставка доходности безрискового актива, будет равна: $r_n=\frac{1}{q}\text{-}1$. Цена за риск (risk margin) составит: $m_j=r_j\text{-}r_n=\frac{\mu_j\text{-}\frac{p_j}{q}}{p_j}$.

Сравним цены за риск двух активов с номерами *j* и *k*:

$$\frac{m_j}{m_k} = \left(\frac{\mu_j - \frac{p_j}{q}}{\mu_k - \frac{p_k}{q}} \right) \frac{p_k}{p_j}.$$

Используя уравнение для предельной нормы замещения и (6.67) получаем:

$$\frac{m_j}{m_k} = \frac{\overline{w}_j \sum_\alpha \sigma_{j\alpha} \overline{w}_\alpha}{\overline{w}_k \sum_\alpha \sigma_{k\alpha} \overline{w}_\alpha} \cdot \frac{p_k \overline{w}_k}{p_j \overline{w}_j}, \text{ или } \frac{m_j R_j}{V_j} = \frac{m_k R_k}{V_k}$$

Итак, рисковая маржа (или надбавка за риск) представляет собой отношение совокупной (общей) компенсации риска за актив к общей дисперсии актива, и эта надбавка постоянна для всех активов.

1. Mossin J. Equilibrium in a capital asset market // Econometrica. 1966. Vol. 34. №4. ↩

9.5. Принцип классической дихотомии и общее экономическое равновесие в неоклассике

В отличие от микроэкономики в макроэкономическом анализе: используются агрегированные (укрупненные) показатели; анализируются синергетические эффекты на уровне хозяйственной системы в целом, характеристики которой оказываются несводимы к тривиальной сумме характеристик отдельных ее составных частей – хозяйствующих субъектов, рынков, отраслей; учитывается влияние денежных рынков на состояние реального сектора экономики.

Все макроэкономические модели рассматривают экономику как совокупность двух секторов: реального и финансового (рис. 9.1). Отражением взаимосвязи и взаимозависимости реального и финансового секторов служит соотношение между стоимостью товарной и денежной массы в экономической системе. Если относительные цены всех товаров постоянны, то весь реальный сектор экономики можно рассматривать как единое композитное благо. Пусть *X* – количество данного блага в натуральном, или реальном, выражении; *M* – количество денег в номинальном выражении. Будем пока для простоты полагать скорость обращения денег *V* равной единице. Пусть цена товара равна *P*. Это количество денег, которое можно получить в обмен на одну единицу товара. Тогда цена денег равна $1/P$ – это количество товара, которое можно получить в обмен на одну единицу денег.

M/P – это количество денег в реальном выражении. Денежные запасы в реальном выражении равны номинальной сумме денег M, умноженной на их ценность $1/P$, отражающую количество товаров, которое может быть приобретено за единицу денег. Произведение $M \bullet \frac{1}{P}$ показывает совокупную товарную массу, эквивалентную данной денежной сумме. Реальная стоимость запаса денег (реальные денежные остатки) – это покупательная способность денежной величины по отношению к товарам, которую она представляет. Цена реальных денежных запасов – это количество денег в номинальном выражении, которое нужно израсходовать для формирования единицы реальных запасов, т.е. тот объем номинальных денежных средств, который можно получить в обмен на единицу реальных. Она равна P и совпадает с ценой товарной массы, соответствующей данным реальным денежным запасам [1].

Основополагающим в неоклассике является принцип классической дихотомии, или нейтральности денег, который состоит в том, что экономика распадается на два сектора – реальный и финансовый, которые подчиняются своим собственным закономерностям и не оказывают прямого влияния друг на друга. Они взаимосвязаны лишь через установление абсолютного уровня цен, который при этом не влияет на равновесие в реальном секторе экономики. Денежный рынок не воздействует на формирование относительных цен и реальной ставки процента, которые устанавливаются в реальном секторе экономики. Нейтральность денег – это ситуация, когда денежные агрегаты не оказывают влияния на реальные макроэкономические показатели – ВВП, занятость, инвестиции [2].

Неоклассическая макроэкономическая модель исторически соответствует эпохе золотого стандарта, когда цены всех благ измерялись относительно цены денежного товара – золота, а цена золота измерялась в бумажных деньгах.

Денежный сектор в неоклассической концепции описывается уравнением количественной теории денег:

$$MV = PY,$$

или кембриджским уравнением обмена:

$$M = kPY,$$

где V – скорость обращения денег, $k = \frac{1}{V}$ – коэффициент предпочтения ликвидности. В уравнении количественной теории денег дефлятор ВВП представим в следующем виде:

$$P = \frac{\sum_i p_{it} y_{it}}{\sum_i p_{i0} y_{it}},$$

где $\sum_i p_{i0} y_{it}$ – это номинальный, а $\sum_i p_{it} y_{it}$ – это реальный ВВП (*Y*). Отсюда произведение в правой части (8.1) дает ВВП в номинальном выражении:

$$PY = \frac{\sum_i p_{it} y_{it}}{\sum_i p_{i0} y_{it}} \sum_i p_{i0} y_{it} = \sum_i p_{it} y_{it}.$$

Спрос на деньги здесь зависит от объема национального производства в стоимостном выражении, или совокупных доходов общества, показателем которых служит ВВП *Y*. Данные соотношения могут рассматриваться в качестве элементарного денежного балансового равенства, характеризующего экономику в целом. Уравнение количественной теории денег позволяет представить баланс народного хозяйства как эквивалентность двух составляющих – национального производства в реальном выражении и емкости финансовой системы, ее мощи.

В уравнении количественной теории денег делается акцент на трансакционном мотиве спроса на деньги, тогда как в кембриджском уравнении обмена подчеркивается спрос на деньги по мотиву предосторожности. Последний возникает по причине рассогласования во времени потоков поступления денег и платежей, которые имеют стохастическую природу, и необходимости держать из-за этого определенный страховой запас денежной наличности для предотвращения возможных потерь. Соответственно, чем больше этот запас, удельная величина которого отражается коэффициентом предпочтения ликвидности *k*, тем меньше скорость обращения денег [3] *V*.

Продифференцируем тождество количественной теории денег по времени:

$$\frac{dM}{dt} V + \frac{dV}{dt} M = \frac{dP}{dt} Y + \frac{dY}{dt} P.$$

Поделив левую и правую части последнего равенства соответственно на левую и правую часть уравнения количественной теории денег, после очевидных преобразований приходим к соотношению между темпами прироста денежной массы, скорости обращения денег, уровня цен и ВВП:

$$\frac{dM(t)/dt}{M(t)} + \frac{dV(t)/dt}{V(t)} = \frac{dP(t)/dt}{P(t)} + \frac{dY(t)/dt}{Y(t)},$$

или

$$\frac{\dot{M}}{M}+\frac{\dot{V}}{V}=\frac{\dot{P}}{P}+\frac{\dot{Y}}{Y},$$

где точка над переменной обозначает ее производную по времени.

Таким образом, для обеспечения нулевого темпа инфляции «монетарное правило» в количественной теории денег рекомендует ориентировать темп прироста денежной массы на темп прироста ВВП с поправкой на изменение скорости обращения денег.

Если изменения уровня цен сопровождаются пропорциональными изменениями первоначальных денежных остатков, о чем свидетельствует кембриджское уравнение обмена, то график номинального спроса на деньги представляет собой прямую, проходящую через начало координат (рис. 9.9), а в координатах «$1/P$-M» – это «равнобочная» гипербола с единичной эластичностью [4] (рис. 9.10).

При предположении о постоянстве скорости обращения денег и ВВП (на уровне потенциала), из уравнения количественной теории будет вытекать постоянство реальной денежной массы: $\frac{M}{P}=const$. Из монетарного правила при этом будет следовать, что уровень инфляции будет совпадать с темпом прироста денежной массы: $\frac{dM/dt}{M}=\frac{dP/dt}{P}$, что также свидетельствует о постоянстве денежной массы в реальном выражении $\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{M}{P}\right)=0\right)$, поскольку:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{M}{P}\right)=\frac{M}{P}\left(\frac{dM/dt}{M}-\frac{dP/dt}{P}\right).$$

Итак, в соответствии с кембриджским уравнением обмена реальная величина спроса на деньги представляет собой вертикальную прямую линию в координатах «M/P-P» (рис. 9.11). Она не зависит от фактического уровня цен, что служит проявлением нейтральности денег. При этом эластичность номинального спроса на деньги по их цене равна -1.

Эластичность функции по абсолютному значению равна отношению отрезков касательной к ее графику, отложенных от точки касания до координатных осей [5] $\left|\epsilon^{M}_{1/P}\right|=\left|\frac{EA}{EB}\right|$. Действительно, $CB=\frac{CE}{tg\alpha}=\frac{M(1/P)}{-dM/d(1/P)}$, а значит, в силу подобия ΔCBE и ΔDEA можно записать $\frac{EA}{EB}=\frac{DE}{CB}=\frac{OC}{CB}=-\frac{dM/d(1/P)}{M/P}\frac{1}{P}=-\epsilon^{M}_{1/P}$. Таким образом, соответствующие отрезки касательной, проведенной в любой точке графика номинального спроса на деньги, должны быть равны между собой, и гипербола оказывается «равнобочной» (рис. 9.10).

Определяемая в реальном секторе экономики величина реальных денежных запасов $(M/P)^{*}$ (рис. 9.11) задает угол наклона прямолинейной зависимости, изображенной на рис. 9.9, посредством которой формируется номинальный спрос на деньги в зависимости от их цены (рис. 9.10), а значит, и соотношение между уровнем цен и денежной массой.

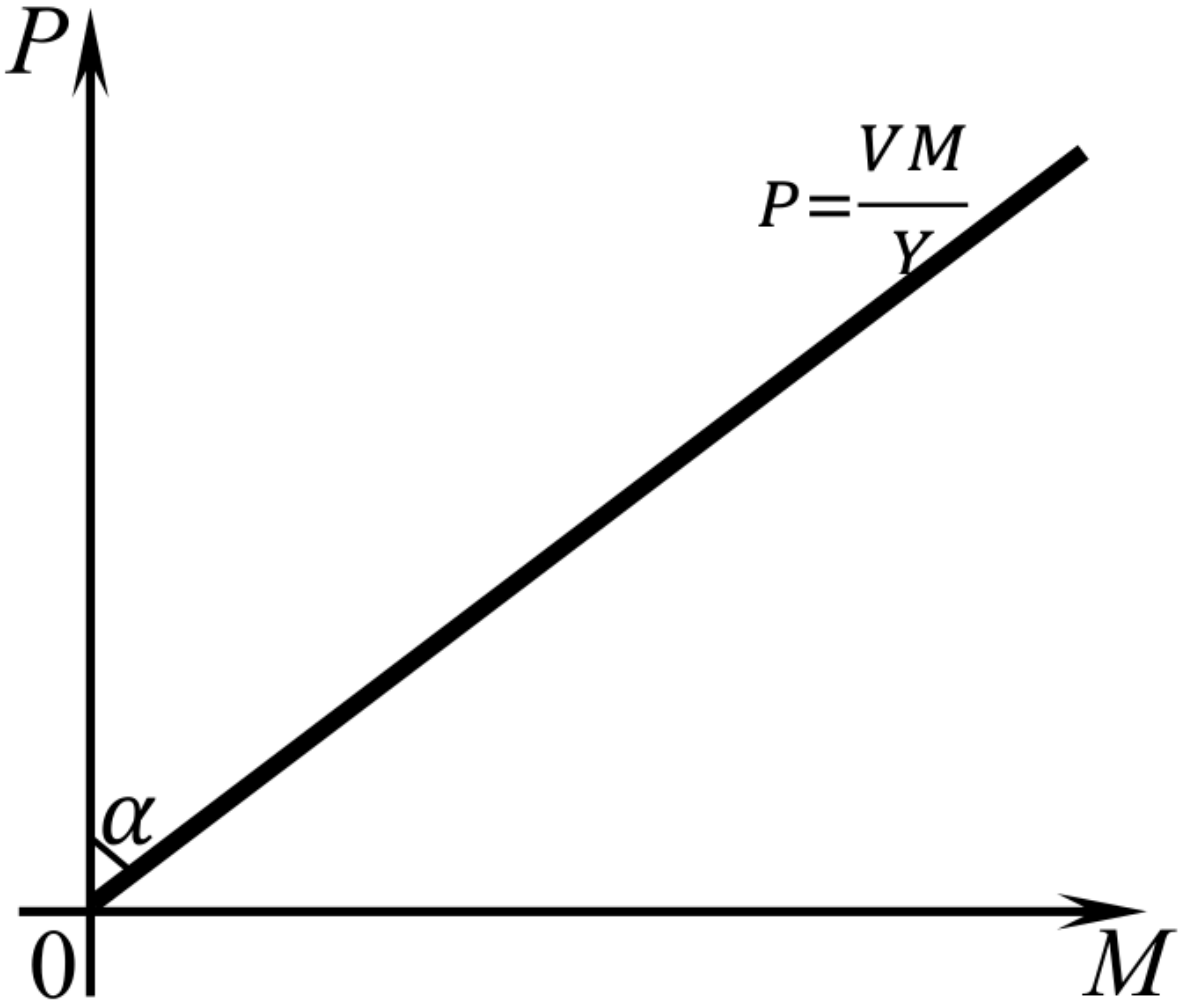


Рисунок 9.9. Вспомогательная зависимость между ценами и денежной массой

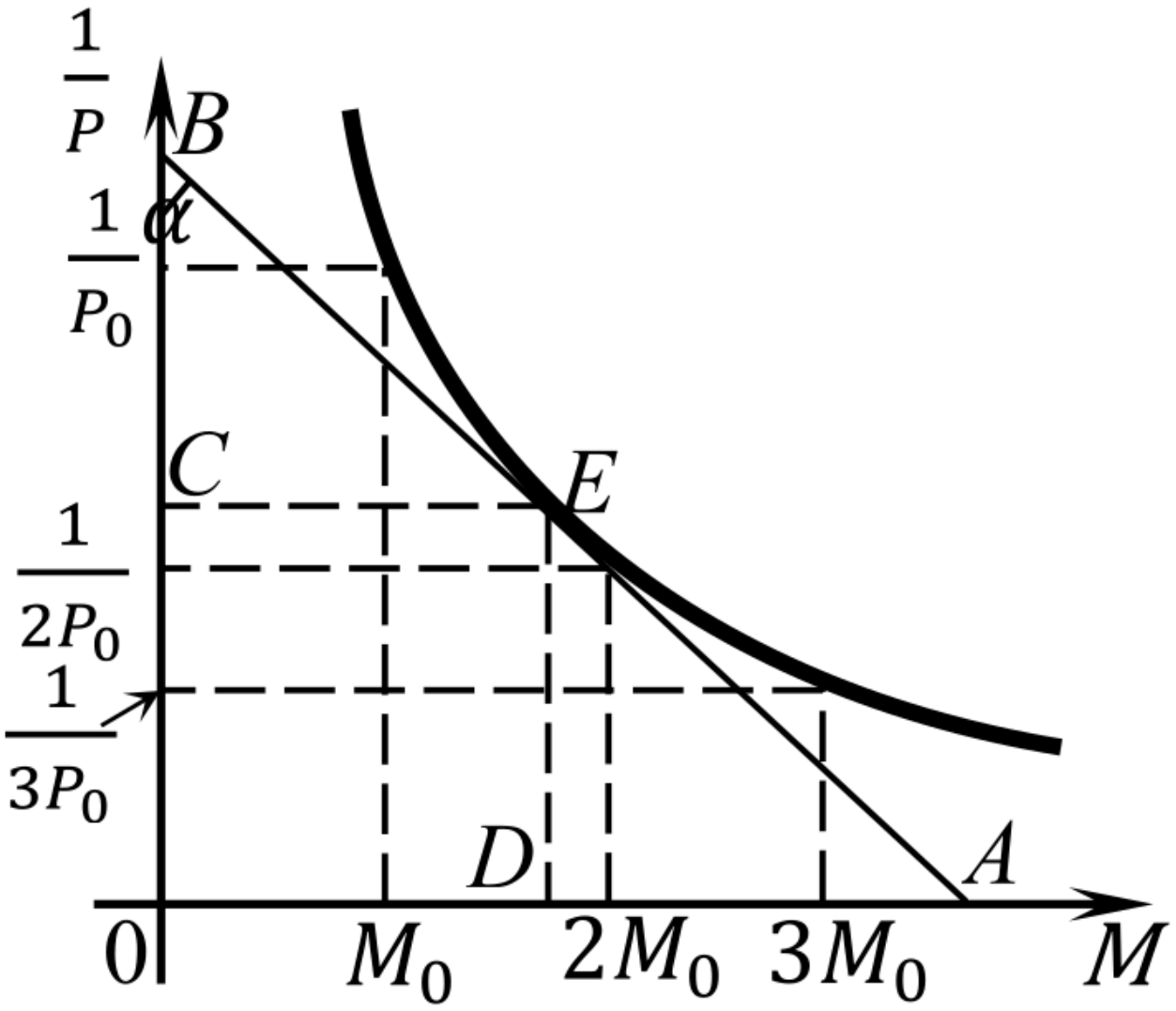


Рисунок 9.10. Номинальный спрос на деньги

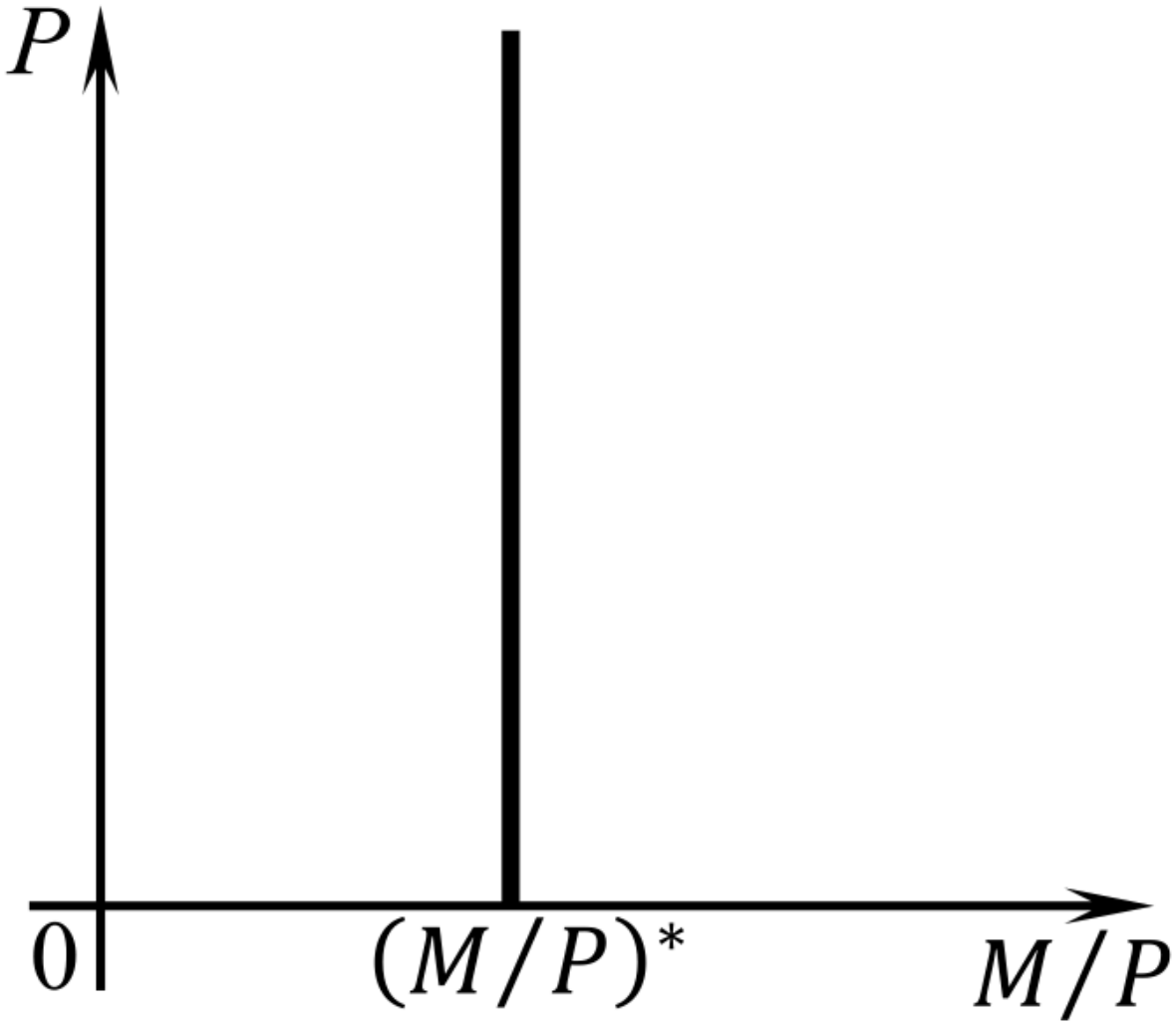


Рисунок 9.11. Спрос на деньги в реальном выражении

Общее равновесие в неоклассической макромодели подразумевает общее равновесие в микроэкономической модели, объединенное с уравнением количественной теории денег. В рамках микроэкономической модели общего равновесия один из товаров выступает в качестве всеобщего эквивалента, т.е. денег. Ценность данного товара принимается в качестве единицы измерения всех остальных цен. Денежная теория снимает данное ограничение: она допускает, что деньгами не обязательно является один из товаров. Деньги могут выступать в виде бухгалтерских проводок и изменения состояния расчетного счета экономического агента в банке. Кроме того, в последнее время с развитием неоэкономики деньги во многом приобретают виртуальный характер, когда расчеты ведутся по компьютерным сетям. Денежная система представляет собой совокупность отношений между банковской системой, которая создает всеобщие платежные средства – деньги, и всеми остальными экономическими агентами, которые предъявляют спрос на них. Деньги выполняют три стоимостные функции – меры, средства обращения и средства сохранения, или сбережения, стоимости. В неоклассике различные блага выполняют разные функции денег: роль меры стоимости выполняет один из товаров (золото), роль средства обращения – бумажные деньги.

В рамках модели общего равновесия вальрасова типа в реальном секторе экономики формируются стоимостные пропорции, или система относительных цен. В финансовой сфере через уравнение количественной теории денег определяется абсолютный уровень (денежных) цен.

Пример 9.3. Общее равновесие в потреблении (распределении) в неоклассической макроэкономической модели

Допустим, что экономическая система описывается условиями примера 9.1. Тогда равновесный вектор относительных, товарных цен имеет вид (П9.1.5). Предположим теперь, что предложение денег составляет $M=500$ при скорости их обращения $V=0,5$. Тогда, с учетом уравнения количественной теории денег вектор абсолютных, денежных цен будет определяться системой:

$$\begin{cases} p_2 = \frac{157}{302} p_1, \\ p_3 = \frac{30559}{5889} p_1, \\ MV = 250 = p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + p_3\omega_3 = 50p_1 + 150p_2 + 50p_3. \end{cases}$$

Здесь совокупные запасы каждого из товаров $(\omega_j, j = \{1, 2, 3\})$ представляют собой сумму соответствующих активов, первоначально находившихся в распоряжении индивидуумов (9.4).

Решая данную систему, получаем равновесный уровень фактических, денежных цен: $(p_1, p_2, p_3) = (0,7; 0,36; 3,6)$. При увеличении общего уровня денежных цен, скажем, в два раза, равновесие на товарных рынках не нарушится, а на денежном рынке будет наблюдаться дефицит. Налицо нейтральность денег [6].

1. Патинкин Д. Деньги, процент и цены. – М.: Экономика, 2004. ↩

2. По справедливому замечанию Д. Патинкина, нейтральность денег существует, «если простой переход от бартерной экономики к денежной экономике не воздействует на равновесные цены и процент» [Патинкин Д. Деньги, процент и цены. – М.: Экономика, 2004, с. 87]. ↩

3. Патинкин Д. Деньги, процент и цены. – М.: Экономика, 2004. ↩

4. Патинкин Д. Деньги, процент и цены. – М.: Экономика, 2004. ↩

5. Маршалл А. Принципы политической экономии. Т.1. – М.: Прогресс, 1983. ↩

6. Ср.: Тарасевич Л.С., Гребенников Л.И., Леусский А.И. Макроэкономика. – 6-е изд. – М.: Высшее образование, 2006. ↩

9.6. Эффект реальных денежных остатков, спрос на деньги и общее экономическое равновесие в концепции неоклассического синтеза

Деньги в модели Д. Патинкина являются разновидностью богатства. Используя уравнение Слуцкого с учетом первоначальных запасов благ (3.5), можно показать, что спрос на товары зависит от реальной величины денежных запасов. Теория неоклассического синтеза Д. Патинкина использует зависимость потребительского спроса от богатства домохозяйства, в том числе, от запаса денежных средств.

Объединяя задачу потребительского выбора с учетом первоначальных запасов благ (I.1*b*) с моделью предложения труда (I.1*c*), при наличии у домохозяйств запасов денежных средств ω_m финансовое ограничение каждого из них можно расписать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{h} p_j x_j \leqslant \sum_{j=1}^{h} p_j \omega_j + \sum_{j=h+1}^{l} p_j y_j + \omega_m,$$

где y_j – объем трудозатрат *j*-го вида, y_j – соответствующая ставка заработной платы; $j=\{h+1, \ldots, l\}$. При этом ограничение по времени принимает вид:

$$x_{h+1} + \sum_{j=h+1}^{l} y_j = \omega_T, \text{ или } \sum_{j=h+1}^{l} y_j = \omega_T - x_{h+1},$$

где x_{h+1} – продолжительность досуга.

Введем обозначение для средней ставки заработной платы:

$$p_{h+1} = \frac{\sum_{j=h+1}^{l} p_j y_j}{\sum_{j=h+1}^{l} y_j}.$$

Из данного определения с учетом балансового равенства по времени приходим к следующему выражению:

$$p_{h+1} \sum_{j=h+1}^{l} y_j = p_{h+1} (\omega_T - x_{h+1}) = \sum_{j=h+1}^{l} p_j y_j.$$

Объединяя его с финансовым ограничением, получаем обобщенное бюджетное ограничение потребителя:

$$\sum_{j=1}^{h} p_j x_j + p_{h+1} x_{h+1} \leqslant \sum_{j=1}^{h} p_j \omega_j + p_{h+1} \omega_T + \omega_m.$$

Здесь $p_{h+1} x_{h+1}$ – альтернативная ценность свободного времени.

В итоге с учетом того, что в условиях оптимума, который предполагается внутренним $(x_j \geqslant 0, j=\{1, \ldots, h+1\})$, бюджетные ограничения должны выполняться в виде равенств, синтетическая задача выбора для каждого, *i*-го потребителя будет выглядеть так:

$$\begin{cases} \max\limits_{x_1, \ldots, x_h, x_{h+1}} U(x_1, \ldots, x_h, x_{h+1}) : \\ \sum\limits_{j=1}^{h} p_j x_j + p_{h+1} x_{h+1} = \sum\limits_{j=1}^{h} p_j \omega_j + p_{h+1} \omega_T + \omega_m. \end{cases}$$

Здесь подразумевается межвременной контекст потребительского выбора, когда цены благ представляют собой дисконтированные оценки. Такую же процедуру дисконтирования нужно провести и для запаса денежных средств:

$$\omega_m = \sum_{t=0}^{T} \frac{\omega_{mt}}{(1+i)^t}.$$

Совокупная денежная масса в экономике в целом – это сумма денежных средств у отдельных хозяйствующих субъектов:

$$M = \sum_{i=1}^{n} \omega_{mi}.$$

В отличии от неоклассики, в модели неоклассического синтеза две важнейшие функции денег – такие, как мера стоимости и средство обращения, – выполняет один и тот же актив (М1). Концепция неоклассического синтеза анализирует транзакционный и спекулятивный спрос на деньги, а также спрос по мотиву предосторожности в их единстве и взаимозависимости.

В теории неоклассического синтеза подчеркивается вероятностная природа спроса на деньги для транзакций и по мотиву предосторожности. В связи с наличием неопределенности хозяйственной среды существует асинхронность платежей во времени. Для того чтобы уменьшить издержки, или неудобства, связанные с этим разрывом между поступлением и расходованием средств, индивидуум должен держать определенный запас денег, который будет зависеть от размера платежей [1].

Прокомментируем эффект реальных денежных остатков. При росте цен стоимость блага «реальные денежные остатки» растет: экономическому агенту приходится все бóльшую номинальную денежную сумму отводить на формирование запасов ликвидных средств, способных быть обмененными на одну и ту же товарную массу при обеспечении товарно-денежного обращения. Эту

мысль можно сформулировать и по-другому. При росте общего уровня цен *P* цена денег, равная $1/P$, снижается: на ту же их сумму можно теперь приобрести уже меньше товаров. Реальные денежные запасы дорожают по отношению к другим видам богатства и за счет эффекта замещения вытесняются в хозяйственной деятельности последними [2]. Одновременно при росте цен снижается покупательная способность доходов экономических агентов. Поскольку реальные денежные запасы являются нормальным благом, этот отрицательный эффект дохода снижает спрос на них.

Возможна и альтернативная иллюстрация эффекта реальных денежных остатков: по мере нарастания реальных денежных запасов потребность в их дальнейшем увеличении становится все менее интенсивной. Индивидуум, богатея, наращивает не только реальные денежные запасы, но и другие активы.

В силу того, что изменение цен порождает эффект реальных денежных остатков, графики спроса на деньги в динамическом аспекте будут иными, нежели в состоянии долгосрочного равновесия. Постольку, поскольку денежные остатки являются нормальным благом, рост цен будет вызывать отрицательный эффект реальных денежных остатков, следовательно, спрос на деньги в номинальном выражении будет возрастать менее чем пропорционально по отношению к росту цен, а спрос на реальную денежную массу будет убывать с ростом цен (рис. 9.12 – 9.13) [3].

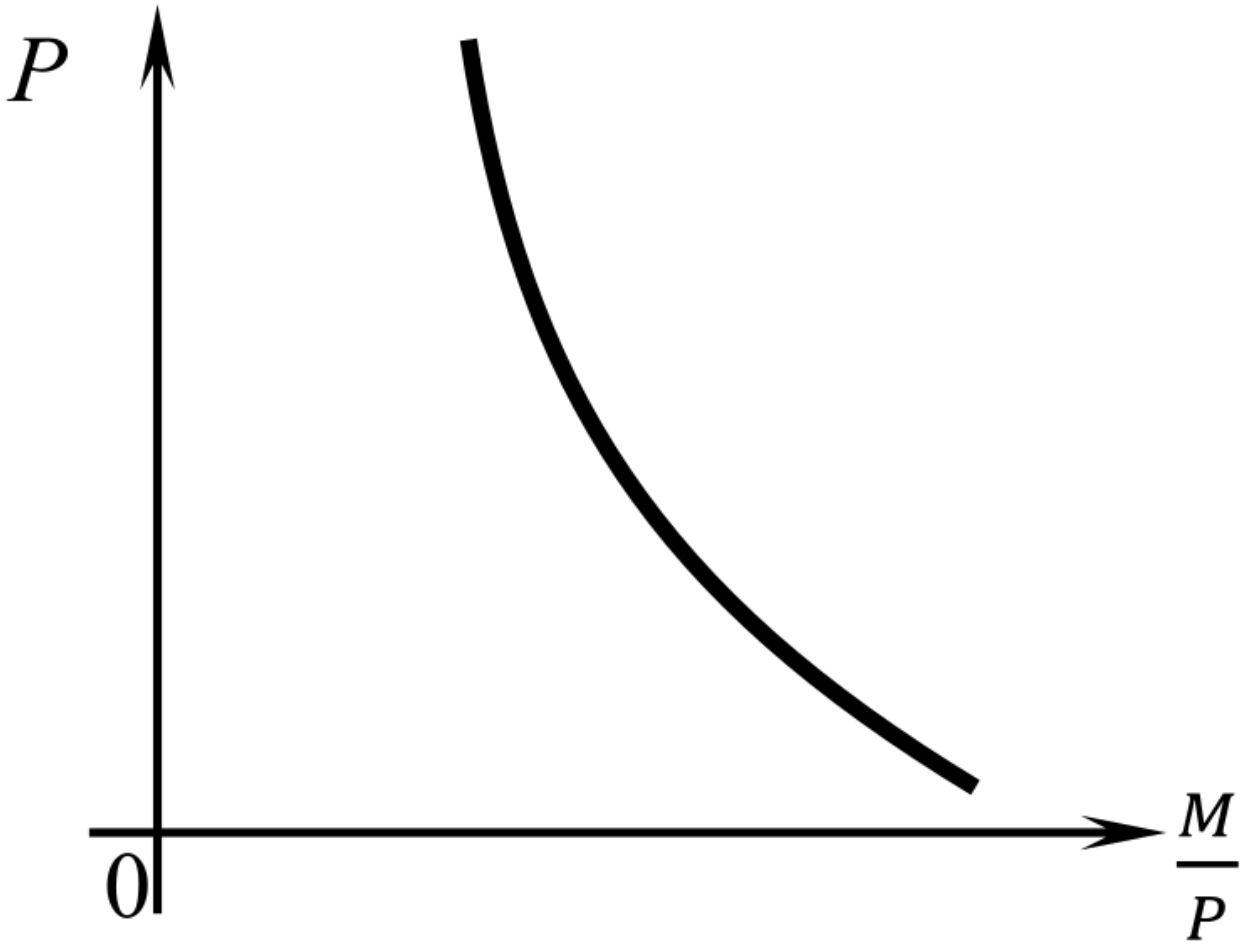


Рисунок 9.12. Спрос на деньги в реальном выражении с учетом эффекта реальных кассовых остатков

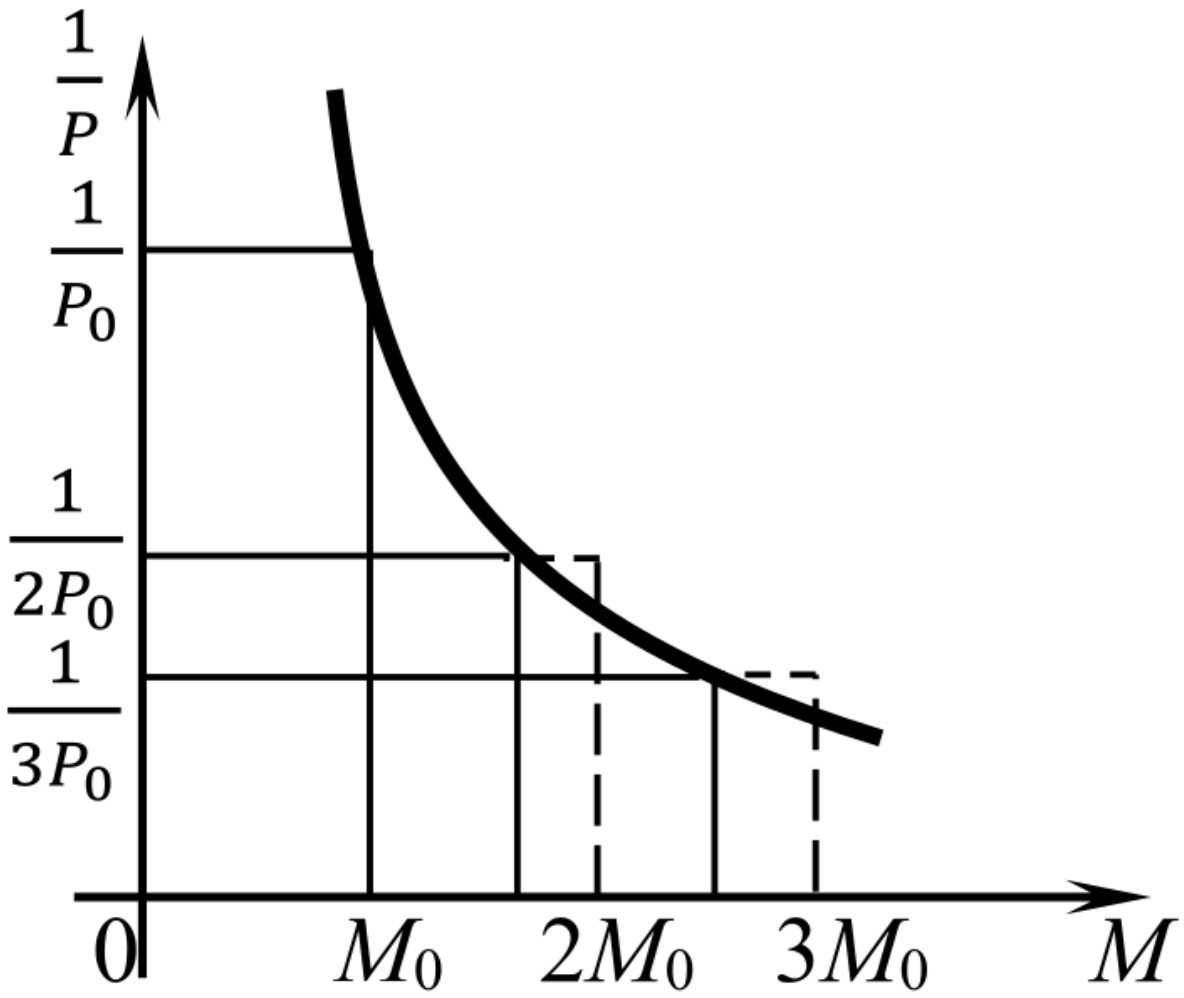


Рисунок 9.13. Номинальный спрос на деньги с учетом эффекта реальных кассовых остатков

Рассмотрим величину спроса на реальные денежные остатки в виде произведения $\frac{M}{P} \equiv M \cdot \frac{1}{P}$. Эластичность произведения двух функций *u*(*x*) и *v*(*x*), зависящих от одного и того же аргумента *x*, равна сумме эластичностей:

$$\epsilon_x^{uv} = \frac{d}{dx}(u(x)v(x))\frac{x}{u(x)v(x)} = \left(v\left(\frac{du}{dx}\right) + u\left(\frac{dv}{dx}\right)\right)\frac{x}{uv} = \frac{du}{dx}\frac{x}{u} + \frac{dv}{dx}\frac{x}{v} = \epsilon_x^u + \epsilon_x^v.$$

Используя данное свойство, можно провести следующую цепочку рассуждений [4]:

$$\epsilon_{1/P}^M + \epsilon_{1/P}^{1/P} = \epsilon_{1/P}^M + 1 = \epsilon_{1/P}^{M/P} = \frac{d\left(\frac{M}{P}\right)}{d\left(\frac{1}{P}\right)}\frac{\frac{1}{P}}{\frac{M}{P}} = \frac{d\left(\frac{M}{P}\right)}{dP}\frac{dP}{d\left(\frac{1}{P}\right)}\frac{\frac{1}{P}}{\frac{M}{P}} = -\frac{d\left(\frac{M}{P}\right)}{dP}\frac{P}{\frac{M}{P}} = -\epsilon_P^{M/P}.$$

Следовательно, в сумме эластичности номинального спроса на деньги по $1/P$ и реального спроса на них по *P* должны равняться минус единице:

$$\epsilon_{1/P}^M + \epsilon_P^{M/P} = -1.$$

Поскольку эластичность спроса на реальные денежные остатки ненулевая – отрицательная, в силу того, что $\epsilon_{1/P}^M = -1 - \epsilon_P^{M/P}$, можно сделать следующий вывод: $\epsilon_{1/P}^M > -1$ (рис. 9.3).

Рост цен вызывает эффект реальных денежных остатков, когда спрос на деньги возрастает непропорционально увеличению общего уровня цен. Увеличение предложения денег в той же пропорции, в которой возрастают цены, приводит к обратному эффекту реальных денежных остатков. В итоге новое состояние равновесия достигается при равнопропорциональном изменении цен и денежной массы.

Эффект реальных денежных остатков является динамическим фактором, действующим в процессе перехода от прежнего состояния равновесия к новому. Само же состояние равновесия подчиняется уравнению количественной теории денег, или кембриджскому уравнению обмена.

Параметры общего экономического равновесия в концепции неоклассического синтеза определяются аналогично неоклассической модели на основе модели вальрасова типа с учетом уравнения количественной теории денег, которые, однако,

теперь являются одним из активов (товаров), и спрос на них со стороны домохозяйств, формируемый при решении поставленной выше синтетической задачи потребительского выбора, должен быть уравновешен совокупной денежной массой.

Пример 9.4. Общее равновесие в распределительной экономике в концепции неоклассического синтеза

Пусть экономика состоит из двух индивидуумов (A и B), каждый из которых потребляет два вида продуктов (с номерами 1 и 2) и обладает соответствующей функцией полезности:

$$U_A=(x_1\text{-}5)^{\frac{1}{2}}(x_2\text{-}4)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{M}{P}\text{-}10\right)^{\frac{1}{4}},$$

$$U_B=(x_1\text{-}2)^{\frac{1}{4}}(x_2\text{-}20)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{M}{P}\text{-}1\right)^{\frac{1}{2}},$$

третьим аргументом которой являются реальные денежные запасы.

Первоначальные запасы благ в данной экономике у этих индивидуумов составляют соответственно $\omega_1^A=20$, $\omega_1^B=30$, $\omega_2^A=50$, $\omega_2^B=100$, $\omega_m^A=100$, $\omega_m^B=400$.

Поскольку функции полезности в данном примере имеют вид зависимостей Стоуна–Джери (vi), в которых одной из трех переменных являются денежные средства в реальном выражении, постольку функции спроса на соответствующие товары по Маршаллу для каждого из потребителей задаются соотношениями (viii). В силу того, что вид функций полезности аналогичен условиям примера 9.1, функции спроса по Маршаллу на первый и второй товар будут иметь вид (П9.1.1) – (П9.1.4), где цена третьего товара представляет собой общий уровень цен p.

В силу того, что в рамках модели общего экономического равновесия анализируется потребительский выбор с учетом первоначальных запасов благ (I.1b), следует расписать доходы потребителей по источникам их формирования:

$$M_A=p_1\omega_1^A\text{-}p_2\omega_2^A+\omega_m^A,\ M_B=p_1\omega_1^B\text{-}p_2\omega_2^B+\omega_m^B.$$

Тогда функции спроса приобретают вид:

$$x_1^A=a_1^A+\frac{\alpha_1^A}{p_1}\frac{\left(p_1\omega_1^A\text{-}p_2\omega_2^A+\omega_m^A\text{-}p_1a_1^A\text{-}p_2a_2^A\text{-}pa_3^A\right)}{\left(\alpha_1^A+\alpha_2^A+\alpha_3^A\right)},$$

$$x_2^A=a_2^A+\frac{\alpha_2^A}{p_2}\frac{\left(p_1\omega_1^A\text{-}p_2\omega_2^A+\omega_m^A\text{-}p_1a_1^A\text{-}p_2a_2^A\text{-}pa_3^A\right)}{\left(\alpha_1^A+\alpha_2^A+\alpha_3^A\right)},$$

$$x_1^B=a_1^B+\frac{\alpha_1^B}{p_1}\frac{\left(p_1\omega_1^B\text{-}p_2\omega_2^B+\omega_m^B\text{-}p_1a_1^B\text{-}p_2a_2^B\text{-}pa_3^B\right)}{\left(\alpha_1^B+\alpha_2^B+\alpha_3^B\right)},$$

$$x_2^B=a_2^B+\frac{\alpha_2^B}{p_2}\frac{\left(p_1\omega_1^B\text{-}p_2\omega_2^B+\omega_m^B\text{-}p_1a_1^B\text{-}p_2a_2^B\text{-}pa_3^B\right)}{\left(\alpha_1^B+\alpha_2^B+\alpha_3^B\right)}.$$

Суммарный спрос двух потребителей на каждое благо должен равняться его запасам, находящимся в распоряжении индивидуумов:

$$x_1^A+x_1^B=a_1^A+a_1^B+\frac{\alpha_1^A\left(p_1\omega_1^A\text{-}p_2\omega_2^A+\omega_m^A\text{-}p_1a_1^A\text{-}p_2a_2^A\text{-}pa_3^A\right)}{p_1\left(\alpha_1^A+\alpha_2^A+\alpha_3^A\right)}+\frac{\alpha_1^B\left(p_1\omega_1^B\text{-}p_2\omega_2^B+\omega_m^B\text{-}p_1a_1^B\text{-}p_2a_2^B\text{-}pa_3^B\right)}{p_1\left(\alpha_1^B+\alpha_2^B+\alpha_3^B\right)}=\omega_1^A+\omega_1^B;$$

$$x_2^A+x_2^B=a_2^A+a_2^B+\frac{\alpha_2^A\left(p_1\omega_1^A\text{-}p_2\omega_2^A+\omega_m^A\text{-}p_1a_1^A\text{-}p_2a_2^A\text{-}pa_3^A\right)}{p_2\left(\alpha_1^A+\alpha_2^A+\alpha_3^A\right)}+\frac{\alpha_2^B\left(p_1\omega_1^B\text{-}p_2\omega_2^B+\omega_m^B\text{-}p_1a_1^B\text{-}p_2a_2^B\text{-}pa_3^B\right)}{p_2\left(\alpha_1^B+\alpha_2^B+\alpha_3^B\right)}=\omega_2^A+\omega_2^B.$$

Распишем данные балансовые равенства объемов потребления и запасов применительно к условиям задачи:

$$\frac{p_1 15+p_2 46\text{-}p 10+100}{2p_1}+\frac{p_1 28+p_2 80\text{-}p+400}{4p_1}=43,$$

$$\frac{p_1 15+p_2 46\text{-}p 10+100}{4p_2}+\frac{p_1 28+p_2 80\text{-}p+400}{4p_2}=126.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}43p_1=474p_2+11p\text{-}500,\\114p_1=600\text{-}172p_2\text{-}21p.\end{cases}$$

Исключаем из данной системы общий уровень цен p и полученное соотношение объединяем с уравнением количественной теории денег, предполагая, что скорость обращения денег V равна 0,5 и принимая во внимание выражение для агрегированного предложения денег (9.1):

$$\begin{cases}3297p_1=8062p_2\text{-}3900,\\MV=250=\sum\limits_{j=1}^{2}p_jy_j=\sum\limits_{j=1}^{2}p_j\omega_j=50p_1+150p_2.\end{cases}$$

Решая полученную систему, получаем $p_1=1,594$; $p_2=1,1355$. *Из любого из равенств предшествующей системы находим* $p=2,74$. *Если уровень цен изменится, например, возрастет в два раза, то за счет эффекта реальных кассовых остатков на рынке товаров будет избыток предложения по отношению к спросу, а на рынках денег – дефицит. Для восстановления равновесия потребуется удвоение денежной массы* [5].

Пусть в экономике существует n видов благ, причем n-е благо – это деньги. Пусть $P_1,\ldots,P_{n-1},P_n$ *– абсолютные, или счетные цены благ, т.е. цены, выраженные в абстрактных единицах счета. Тогда* $\frac{P_1}{P_n}$, $\frac{P_2}{P_n}$, ..., $\frac{P_{n-1}}{P_n}$, 1 *– денежные цены этих*

благ. При этом 1, $\frac{P_2}{P_1}$, ..., $\frac{P_{n-1}}{P_1}$ – относительные цены товаров, выраженные в цене первого из них [6].

Если M_0 – это фактическая денежная масса, а M_1 – масса счетных денег, то $P_n M_0 = M_1$, где P_n – счетная цена фактических денег. При этом цена счетных денег равна $\frac{1}{P_n}$. $\frac{M_1}{P_n}$ – это счетная денежная масса в относительном, «реальном» выражении, а P_n – цена «реальной» счетной денежной массы.

Рост денежных цен всех товаров $\frac{P_1}{P_n}$, $\frac{P_2}{P_n}$, ..., $\frac{P_{n-1}}{P_n}$ эквивалентен снижению счетной цены фактических денег и увеличению счетной денежной массы в относительном, «реальном» выражении. В свою очередь, это эквивалентно росту уровня цен P и снижению реальной стоимости фактических денег $\frac{M_0}{P}$.

Изменение спроса на деньги в трактовке Д. Патинкина эквивалентно изменению предпочтения ликвидности, а значит, и скорости обращения денег, что сближает неоклассический синтез с монетаристской концепцией. Расчет параметров общего экономического равновесия в монетарном стиле предполагает экзогенное задание не скорости обращения денег, а общего уровня цен. Если предположить в примере 9.1, что скорость обращения денег является переменной величиной, а уровень цен – наоборот, фиксирован $(p = 2,74)$, то решением, соответственно, окажется $V = 0,5$.

---

1. Патинкин Д. Деньги, процент и цены. – М.: Экономика, 2004. ↩
2. При этом эффект богатства, возникающий за счет удорожания товарно-материальных активов, для их обладателя является положительным. ↩
3. Патинкин Д. Деньги, процент и цены. – М.: Экономика, 2004. ↩
4. Здесь используется то, что
$$\frac{dP}{d(1/P)} = \frac{d(1/z)}{dz} = -\frac{1}{z^2} = -P^2$$
при $z = \frac{1}{P}$, $P = \frac{1}{z}$. ↩
5. Тарасевич Л.С., Гребенников Л.И., Леусский А.И. Макроэкономика. – 6-е изд. – М.: Высшее образование, 2006. ↩
6. Патинкин Д. Деньги, процент и цены. – М.: Экономика, 2004. ↩
7. См., например: Воркуев Б.Л., Грачева М.В., Лукаш Е.Н. Математические методы анализа экономики: модель межотраслевого баланса. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – С. 12-15. ↩
8. См., например: Коссов В.В. Межотраслевые модели (теория и практика использования). – М.: Экономика, 1973. ↩
9. Almon C. A modified Leontieff system // Econometrica. 1963. V.31, №4. ↩
10. Ямада И. Теория и применение межотраслевого метода. – М.: Иностр. лит-ра, 1963. ↩
11. Данная модельная трактовка технологии представляет собой один из частных случаев нейтрального по Хиксу технологического прогресса (1.55). ↩
12. Серьезные достижения в этом направлении принадлежат, в том числе, и ученым экономического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Признанным авторитетом в области магистральной теории и родоначальником университетской школы динамического МОБ являлся проф. Ю.Н. Черемных (см., например: Черемных Ю.Н. Математические модели развития народного хозяйства. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986). ↩

9.7. Межотраслевой баланс как вычислимая модель общего экономического равновесия

Цели хозяйственного развития являются реалистичными тогда, когда они согласованы с доступными для их реализации средствами. В современных условиях необходимо оценивать не только финансовое, но и материально-вещественное обеспечение разрабатываемых планов социально-экономического развития. Согласование целей и ресурсов может быть обеспечено применением методологии динамического межотраслевого баланса (МОБ).

Основное балансовое уравнение МОБ имеет вид:

$$x_i=\sum_{j=1}^{n} x_{ij}+y_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+y_i, i=1,\ldots,n;$$

где x_i – валовой продукт *i*-й отрасли, x_{ij} – поставки продукта в *j*-ю отрасль, y_i – конечное потребление продукта данной отрасли, $a_{ij}=\frac{x_{ij}}{x_j}=const$ – коэффициенты прямых затрат *i*-го продукта в *j*-й отрасли [1].

Преобразуя данные балансовые равенства, записанные в матричном виде:

$$x=Ax+y,$$

получаем основное уравнение МОБ как отражение технологии производства:

$$y=(E\text{-}A)x,$$

или

$$x=(E\text{-}A)^{\text{-}1}y=By.$$

Здесь $B=(E\text{-}A)^{\text{-}1}=E+A+A^2+\ldots+A^k+\ldots$ – матрица коэффициентов полных затрат.

Действительно,
$(E\text{-}A)B=(E\text{-}A)(E\text{-}A)^{\text{-}1}=(E\text{-}A)\left(E+A+A^2+\ldots+A^k+\ldots\right)=E+A+A^2+\ldots+A^k+\ldots\text{-}A\text{-}A^2\text{-}\ldots\text{-}A^k\text{-}\ldots=E.$

Коэффициенты полных затрат (B) можно представить как сумму матрицы коэффициентов прямых затрат (A) и ряда матриц коэффициентов косвенных затрат $(E+A^2+\ldots+A^k+\ldots)$. Ряд косвенных затрат $(E+A^2+\ldots+A^k+\ldots)y$ показывает увеличение промежуточного спроса на продукт отрасли, индуцированное ростом спроса на ее конечный выпуск. Норма матрицы прямых затрат (A) меньше единицы, что обеспечивает сходимость ряда косвенных затрат.

Межотраслевой баланс устанавливает связь между валовым выпуском данной, *i*-й отрасли и объемами конечной продукции всех *n* отраслей:

$$X_i=X_i(y_1,y_2,\ldots,y_n)$$

Частные производные $\frac{\partial X_i}{\partial y_j}$ характеризуют прирост валового выпуска *i*-й отрасли, который требуется, чтобы обеспечить бесконечно малый прирост конечного выпуска *j*-й отрасли.

Используя основное уравнение МОБ, получаем:

$$E=(E\text{-}A)\frac{\partial X_i}{\partial y_j},$$

а значит,

$$\frac{\partial X_i}{\partial y_j}=(E\text{-}A)^{\text{-}1}.$$

Таким образом, частные производные задают матрицу коэффициентов полных затрат в межотраслевом балансе. Коэффициенты этой матрицы являются постоянными величинами, они не зависят от величины объемов производства отраслей.

Балансовые соотношения, аналогичные сектору материально-вещественных факторов, существуют и для отраслевых трудозатрат. Выпишем баланс затрат труда в экономике в целом:

$$L=\sum_{i=1}^{n+1} L_i=\sum_{i=1}^{n} l_i x_i+L_{n+1},$$

где L – общая величина необходимых затрат труда (общая потребность в рабочей силе или необходимый фонд рабочего времени); L_i – отраслевые трудозатраты, $l_i=\frac{L_i}{x_i}$ - коэффициенты прямых трудозатрат в *i*-й отрасли; L_{n+1} – трудозатраты в отраслях социальной сферы.

В векторной форме имеем:

$$L=lx+L_{n+1}.$$

Используя здесь выражение валового отраслевого выпуска через коэффициенты полных трудозатрат, величину необходимых трудозатрат можно выразить через коэффициенты полных трудозатрат (p_j) для каждой, *j*-й отрасли:

$$L=\sum_{i=1}^{n} l_i\sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_j+L_{n+1}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} l_i b_{ij}\right)y_j+L_{n+1}=\sum_{j=1}^{n} p_j y_j+L_{n+1}.$$

Соответствующее векторное выражение необходимых затрат труда через коэффициенты полных трудозатрат в каждой отрасли имеет вид:

$$L=l\,(By)+L_{n+1}=(lB)y+L_{n+1}=py+L_{n+1}.$$

Здесь $p=\{p_j\}_{j=1}^n$ – вектор полных трудозатрат, который показывает прямые и косвенные трудозатраты в отрасли. Косвенные трудозатраты характеризуют индуцированное ростом выпуска данной отрасли увеличение использование труда по всей цепочке смежных отраслей в народнохозяйственном комплексе.

Сектор трудовых ресурсов может быть дезагрегирован по основным профессиям, специальностям работников. Тогда в МОБ будет присутствовать целый набор балансовых уравнений трудовых ресурсов.

Моделирование затрат труда в МОБ позволяет оценить увеличением совокупной потребности в трудовых ресурсах, вызванное увеличением спроса на продукт каждой отрасли.

Если $\overline{L}$ – это величина трудовых ресурсов, то их согласование со спросом на труд по народнохозяйственной системе в целом задает следующие эквивалентные ограничения:

$$\sum_{i=1}^{n} l_i x_i + L_{n+1} \leqslant \overline{L},$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} p_j y_j + L_{n+1} \leqslant \overline{L}.$$

Для того, чтобы представить МОБ как модель общего экономического равновесия нужно задать функции спроса на продукцию всех отраслей в хозяйственной системе. Это можно сделать, спрогнозировав доли расходов на каждый (*i*-й) продукт (ρ_i) в совокупных расходах в экономике, или ВВП (Y): $p_i x_i = \rho_i Y$, где p_i – цены благ, $i=1,\ldots,n$. Тогда спрос на производимые и потребляемые в экономике продукты будет иметь вид:

$$x_i = \frac{\rho_i Y}{p_i},$$

Он будет обладать свойством непрерывности, требуемой для существования общего экономического равновесия.

Отметим, что при оценке долей расходов на те или иные продукты значимыми оказываются целевые установки государственной экономической политики. Существенную роль в прогнозировании потребности экономики в определенной номенклатуре продукции могут играть программно-целевые подходы к оценке регулирующего воздействия государства.

Дезагрегирование модели МОБ может осуществляться по нескольким направлениям. С одной стороны, в рамках народнохозяйственной системы можно выделять отраслевые комплексы, а значит, можно осуществлять декомпозицию коэффициентов полных затрат в совокупность коэффициентов комплексных затрат.

С другой стороны, баланс народного хозяйства можно представить в виде системы балансов экономических районов [2]. При составлении балансовых межрайонных моделей наблюдается гораздо бóльшая степень детализации отраслей, поскольку самих производителей на территории экономического района существует достаточно ограниченное число. В предельном случае с определенной погрешностью можно перейти от баланса экономического района к совокупности балансов крупных и средних предприятий.

В динамике основное уравнение МОБ принимает вид:

$$x_i\,(t+1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + y_i(t), i=1,\ldots,n,$$

или в матричном виде:

$$X\,(t+1) = AX(t) + Y(t).$$

Решение этой системы представляет собой вектор:

$$X(t) = A^t X(0) + \sum_{s=0}^{t\text{-}1} A^{t\text{-}s\text{-}1} Y(s).$$

В непрерывном времени данное решение принимает вид:

$$X(t) = e^{At} X(0) + \int_0^t e^{A(t\text{-}s)} Y(s)\,ds, \text{где } e^{At} = E + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \ldots$$

Характерной особенностью МОБ является то, что траектория динамики системы приближается к некоторой «магистрали». Другими словами, возникает т.н. «магистральный эффект», когда на протяжении определенного времени экономическая система движется вдоль луча максимального сбалансированного роста. На конечном отрезке траектория динамики системы отклоняется от магистрали и приближается к запланированным значениям целевых социально-экономических показателей.

В классической модели МОБ зависимость $X_i = X_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – линейная. В случае же нелинейной зависимости $X_i = X_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ коэффициенты полных затрат являются переменными величинами. Их можно определить лишь для каждого заданного объема производства отрасли. При изменении объемов производства отраслей коэффициенты полных затрат будут меняться. Поэтому матрица коэффициентов полных затрат имеет смысл лишь в линейном случае, при технологии, характеризующейся постоянной отдачей от масштаба производства.

Одной из попыток преодоления ограниченности линейных свойств классического МОБ стала модель Алмон [3] динамического межотраслевого баланса с производственными функциями Кобба-Дугласа:

$$x_i = A_i N_i^{\alpha_i} K_i^{\beta_i} e^{\varepsilon_i t},$$

где N_i – занятость, K_i - основные фонды в *i*-й отрасли, $\alpha_i + \beta_i = 1$.

Данная модель позволяет учесть процессы замещения между факторами производства. При расчетах некоторые зависимости линеаризуются.

И. Ямада [4] обобщает данную модель, рассматривая валовой выпуск отрасли как функцию труда и произвольного количества видов материальных затрат [5]:

$$x_j = A_i \prod_{i=1}^{n} x_{ij}^{\beta_{ij}} x_{tj}^{\beta_{tj}}, \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} + \beta_{tj} = 1.$$

Методология динамического межотраслевого баланса активно разрабатывалась и развивалась в отечественной и мировой экономической науке во второй половине XX столетия [6]. Однако кризис системы централизованного планирования в социалистических странах и парадигмы активного государственного вмешательства в экономические процессы в капиталистических государствах в последней декаде XX века отодвинули данное теоретическое направление на второстепенный план экономических исследований. Препятствием на пути дальнейшего развития и распространения данной методологии стали и трудности информационного характера. Сбор и обработка необходимой для составления МОБ информации, проведение расчетов в соответствии с построенной моделью требовало значительных материальных и временных затрат. Вычислительные и информационно-коммуникационные технологии последней четверти XX века еще не позволяли превратить данную методологию в базовый инструментарий плановых расчетов. В частности, этому препятствовали проблемы, связанные с большой размерностью данных, подлежащих обработке в рамках модельных расчетов.

Бурное развитие информационно-коммуникационных технологий и анализа данных в наше время позволяют дать новое рождение методологии динамического МОБ. Актуальность данного инструментария признается на высшем государственном уровне. В частности, утвержденное распоряжением Правительства РФ №2998-р от 22 октября 2021 г. Стратегическое направление в области цифровой трансформации государственного управления предполагает «создание автоматизированной системы сбора отчетности по всем социально-экономическим показателям» и «запуск процесса непрерывной обработки таких сведений с помощью сквозных технологий и дальнейшее обучение системы на основе динамической оптимизационной модели межотраслевого (межсекторного) баланса о необходимости сигнализировать в случае наступления ранее запрограммированных событий в отраслях экономики и социальной сферы». Интеграция научных разработок и современных аппаратных средств и методов работы с большими массивами информации может мощный импульс развитию теории и методологии динамического МОБ в современных условиях.

---

1. См., например: Воркуев Б.Л., Грачева М.В., Лукаш Е.Н. Математические методы анализа экономики: модель межотраслевого баланса. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – С. 12-15. ↩
2. См., например: Коссов В.В. Межотраслевые модели (теория и практика использования). – М.: Экономика, 1973. ↩
3. Almon C. A modified Leontieff system // Econometrica. 1963. V.31, №4. ↩
4. Ямада И. Теория и применение межотраслевого метода. – М.: Иностр. лит-ра, 1963. ↩
5. Данная модельная трактовка технологии представляет собой один из частных случаев нейтрального по Хиксу технологического прогресса (1.55). ↩
6. Серьезные достижения в этом направлении принадлежат, в том числе, и ученым экономического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Признанным авторитетом в области магистральной теории и родоначальником университетской школы динамического МОБ являлся проф. Ю.Н. Черемных (см., например: Черемных Ю.Н. Математические модели развития народного хозяйства. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986). ↩

9.8. Конкурентное равновесие, оптимальность экономической системы и общественное благосостояние

При определенных, достаточно слабых условиях К. Эрроу и Дж. Дебре установлено соответствие между состоянием общего экономического равновесия и народнохозяйственным оптимумом по В. Парето. Две важнейшие теоремы общественного благосостояния (при достаточно слабых дополнительных условиях) – это необходимое и достаточное условие эквивалентности состояний общего экономического равновесия и народнохозяйственного оптимума по Парето [1].

Парето-оптимальность означает невозможность Парето-улучшения. Парето-улучшение означает увеличение благосостояния хотя бы одного экономического агента без ухудшения благополучия остальных [2].

Для свободных благ понятие Парето-оптимальности становится неактуальным, поскольку для потребления становятся доступны неограниченно большие объемы данного блага и потребность насыщается полностью. Таким образом, Парето-улучшение становится возможным лишь посредством увеличения потребления экономических благ. Следовательно, имеет смысл рассматривать соотношение понятий общего равновесияи и Парето-оптимальности только для экономических благ.

Первая теорема общественного благосостояния утверждает, что состояние общего конкурентного равновесия оптимально по Парето [3]. Поскольку, как было доказано выше, в состоянии оптимума отдельного хозяйствующего субъекта его бюджетное ограничение выполняется как равенство, постольку повышение его благосостояния возможно лишь при условии увеличения индивидуального располагаемого дохода. Но в состоянии общего конкурентного равновесия в производстве экономических благ ресурсы используются полностью. Следовательно, увеличить благосостояние какого-либо экономического агента возможно лишь за счет ресурсов, принадлежащих другим, ухудшая, тем самым, их благосостояние. Следовательно, Парето-улучшение невозможно, и в состоянии общего экономического равновесия достигается оптимум по Парето.

Если экономика состоит из двух субъектов (*A* и *B*), потребляющих по два продукта, суммарные запасы которых фиксированы, то карты кривых безразличия индивидуумов можно объединить в прямоугольник Эджуорта с горизонтальной стороной, равной запасу первого продукта, и вертикальной – второго. На рис. 9.14 карта кривых безразличия потребителя *A* откладывается от левого нижнего угла, в то время как кривые безразличия потребителя *B* изображены относительно точки отсчета, находящейся в правом верхнем углу. Точка первоначального распределения благ (Ω), как правило, соответствует пересечению кривых безразличия ($\overline{U}_0^A$ и $\overline{U}_0^B$).

В точке E^* общего конкурентного равновесия, когда бюджетное ограничение каждого из потребителей, представленное одной и той же линией в прямоугольнике Эджуорта, проходящей через точку первоначального распределения (Ω), является общей касательной их кривых безразличия, и избыточный спрос по каждому из благ равен нулю, имеет место Парето-улучшение для обоих индивидуумов, по сравнению с исходной ситуацией (Ω). Поскольку существует касание кривых безразличия, постольку полезность ни одного из потребителей нельзя увеличить, не уменьшая полезности другого; и распределение продуктов $\left(x_1^A, x_2^A\right)$, $\left(x_1^B, x_2^B\right)$ эффективно по Парето.

На рис. 9.14 кривая контрактов *CC* – это множество эффективных по Парето наборов товаров, для которых предельные нормы замещения одного продукта на другой равны для обоих потребителей (9.14). Переговорное множество – это часть линии контрактов *CC*, т.е. множества точек касания кривых безразличия потребителей, лежащая внутри области, ограниченной линиями $\overline{U}_0^A$ и $\overline{U}_0^B$, проходящими через точку Ω начального распределения благ. Внутри этого множества потребителям выгодно торговаться, например, на рис. 9.14 индивидуум *A* будет продавать первый и покупать второй продукт, а индивидуум *B* – наоборот.

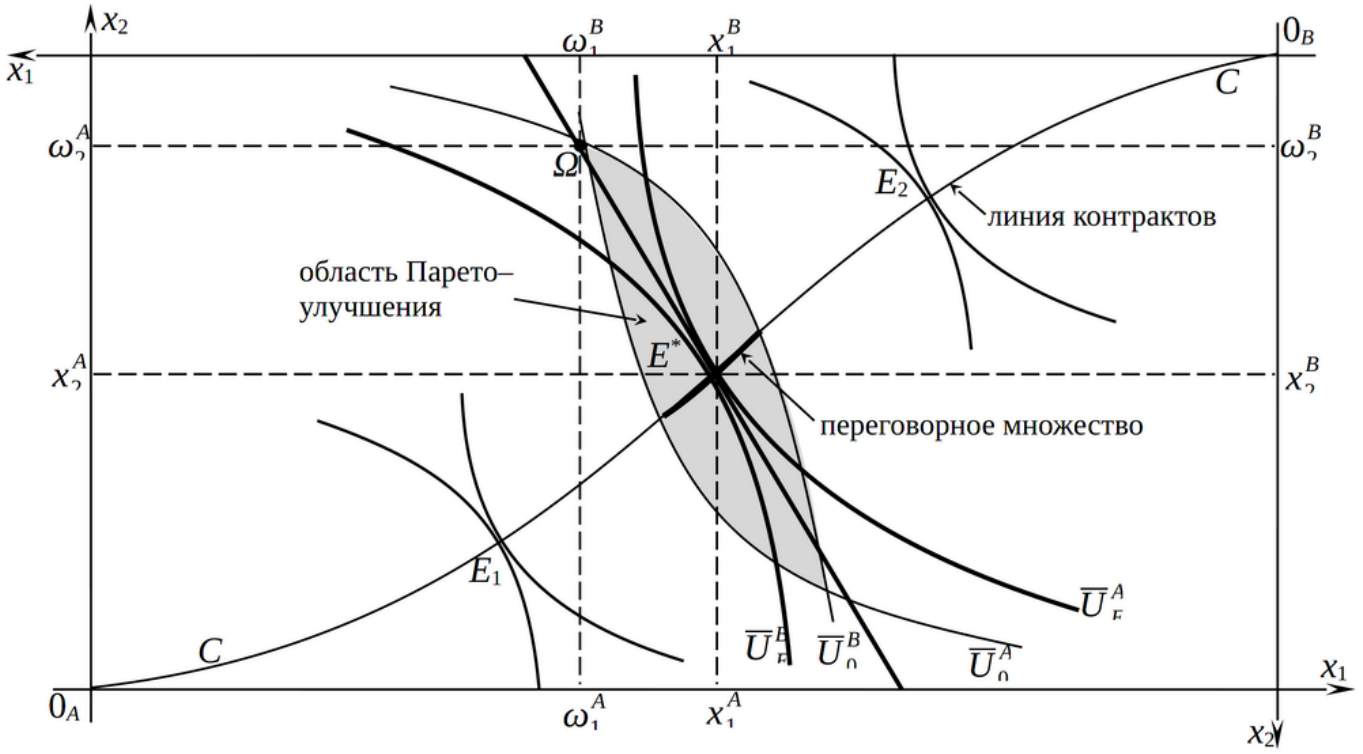


Рисунок 9.14. Диаграмма Эджуорта

Вторая теорема общественного благосостояния утверждает, что для всякого эффективного по Парето состояния экономической системы найдется такой вариант перераспределения богатства, что данное Парето-оптимальное состояние окажется общим конкурентным равновесием, соответствующим новому распределению благ.

В контексте общего равновесия на основе линии производственных контрактов, аналогичной линии *CC* на рис. 9.14, можно построить границу производственных возможностей общества – геометрическое место точек, отражающих различные сочетания объемов выпуска благ при полном использовании редких ресурсов (рис. 9.15).

В современной теории меновой стоимости важную роль играет концепция альтернативных издержек как упущенного дохода или недополученного физического объема продукции при наиболее выгодном из нереализованных, отвергнутых альтернативных вариантов использования данного продукта или ресурса. Структура альтернативных издержек в полной мере может быть определена лишь в системе общественного воспроизводства в целом.

Смысл экономической категории альтернативных издержек производства единицы какого-либо блага (*X*), как относительного количество другого (*Y*) – от выпуска которого необходимо отказаться для того, чтобы произвести дополнительно предельно малую единицу первого $\left(-\frac{dY}{dX}\right)$, наиболее полно проявляется при анализе производственных возможностей общества. Вдоль границы производственных возможностей общество осуществляет выбор между альтернативными вариантами структуры производства, когда увеличение выпуска одного блага возможно лишь за счет сокращения другого. Величина альтернативных издержек совпадает с предельной нормой трансформации экономики MRT, которое равно отношению изменения количества выпускаемого товара Y при предельно малом изменении объема производства X, или тангенсу угла наклона касательной к линии производственных возможностей ($tg\alpha$ на рис. 9.15) со знаком минус, указывающим на необходимость жертвовать одним товаром для производства другого: $MRT_{XY}=-\frac{dY}{dX}$.

Изменение структуры выпуска продукции вдоль границы производственных возможностей общества подразумевает перераспределение факторов хозяйственной деятельности из одних отраслей в другие. При этом ресурсы в рамках экономической системы в целом используются полностью, и их величина не изменяется, а значит, в условиях совершенной конкуренции, при сложившихся ценах на факторы производства неизменными остаются и совокупные его издержки: их увеличение в одних отраслях означает снижение на ту же величину в других: $dTC_X=-dTC_Y$.

Таким образом, альтернативные издержки производства блага *X* в единицах блага *Y* могут быть рассчитаны как отношение соответствующих предельных издержек: $-\frac{dY}{dX}=-\frac{dTC_X}{dX} \bullet \frac{dY}{dTC_Y}=\frac{MC_X}{MC_Y}$. Но, поскольку в условиях совершенной конкуренции предельные издержки равны цене выпускаемой продукции, альтернативные издержки могут быть измерены через отношение цен: $-\frac{dY}{dX}=\frac{MC_X}{MC_Y}=\frac{P_X}{P_Y}$.

Таким образом, в масштабах хозяйственной системы общества в целом на основе соотношения предельных альтернативных издержек производства благ определяется структура стоимостных пропорций между отраслями и секторами экономики.

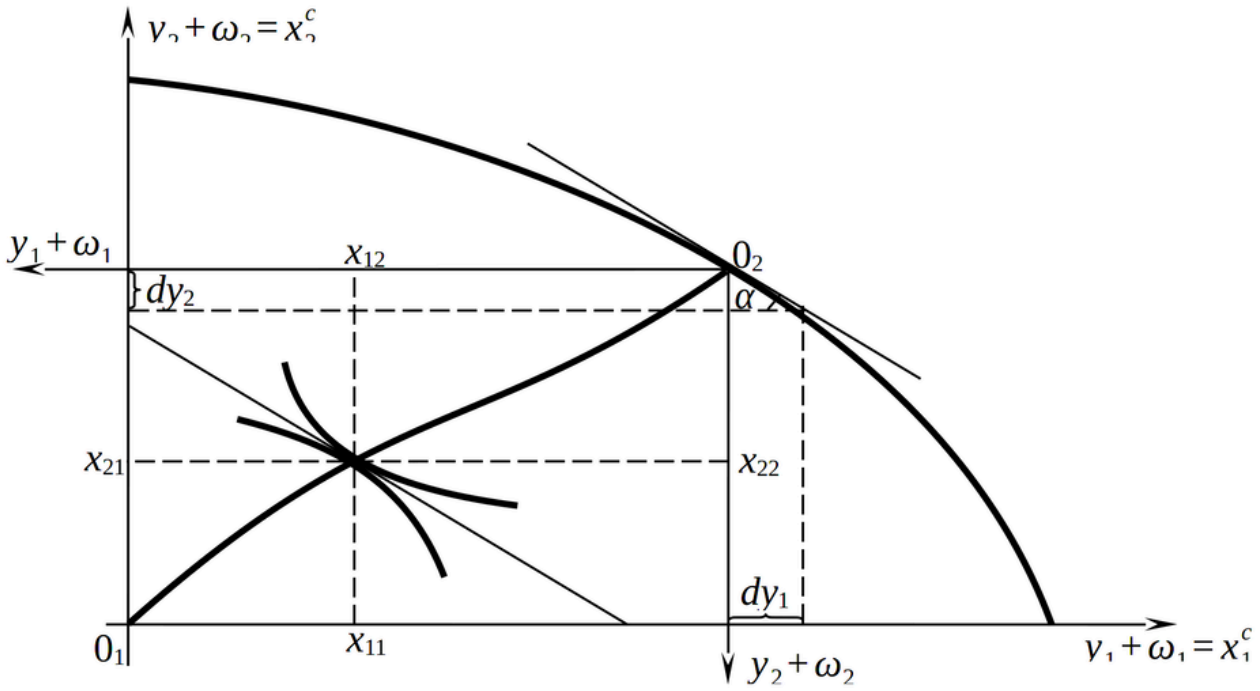


Рисунок 9.15. Совместное равновесие в производстве и потреблении

Граница производственных возможностей в общем виде может быть записана как неявная функция объемов производства товаров: $T\left(x_1^c, x_2^c\right)=0$, где совокупный объем потребления каждого из товаров $\left(x_j^c\right)$ совпадает с суммой его агрегированного объема производства $\left(y_j\right)$и запасов $\left(\omega_j\right), j=1,2$ (9.10). Выпишем полный дифференциал производственных возможностей общества:

$$dT\left(x_1^c, x_2^c\right)=\frac{\partial T}{\partial x_1^c} dx_1^c+\frac{\partial T}{\partial x_2^c} dx_2^c=0.$$

Из данного соотношения получаем предельную норму трансформации:

$$MRT_{12} \equiv -\frac{dx_2^c}{dx_1^c}\Big|_{dT=0}=\frac{\partial T / \partial x_1^c}{\partial T / \partial x_2^c}. \quad (9.28)$$

Задачу оптимизации общественного благосостояния можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \max_{x_1^A, x_2^A} U_A\left(x_1^A, x_2^A\right): \\ U_B\left(x_1^B, x_2^B\right)=\overline{U}, \\ T\left(x_1^c, x_2^c\right)=0, \\ x_1^c=x_1^A+x_1^B, \\ x_2^c=x_2^A+x_2^B. \end{cases}$$

Решая данную задачу на условный экстремум, составляем функцию Лагранжа:

$$L=U_A\left(x_1^A, x_2^A\right)-\lambda\left(U_B\left(x_1^B, x_2^B\right)-\overline{U}\right)-\mu_1 T\left(x_1^c, x_2^c\right)-\mu_2\left(x_1^A+x_1^B-x_1^c\right)-\mu_3\left(x_2^A+x_2^B-x_2^c\right).$$

Необходимые условия максимума благосостояния представляют собой следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1^A}=\frac{\partial U_A}{\partial x_1^A}-\mu_2=0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2^A}=\frac{\partial U_A}{\partial x_2^A}-\mu_3=0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_1^B}=-\lambda\frac{\partial U_B}{\partial x_1^B}-\mu_2=0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2^B}=-\lambda\frac{\partial U_B}{\partial x_2^B}-\mu_3=0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_1^c}=-\mu_1\frac{\partial T}{\partial x_1^c}+\mu_2=0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2^c}=-\mu_1\frac{\partial T}{\partial x_2^c}+\mu_3=0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=-U_B\left(x_1^B,x_2^B\right)+\overline{U}=0, \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_1}=-T\left(x_1^c,x_2^c\right)=0, \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_2}=-x_1^A-x_1^B+x_1^c=0, \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_3}=-x_2^A-x_2^B+x_2^c=0. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} MU_1^A=\mu_2, \\ MU_2^A=\mu_3, \\ MU_1^B=-\frac{\mu_2}{\lambda}, \\ MU_2^B=-\frac{\mu_3}{\lambda}, \\ \frac{\partial T}{\partial x_1^c}=\frac{\mu_2}{\mu_1}, \\ \frac{\partial T}{\partial x_2^c}=\frac{\mu_2}{\mu_3}, \\ U_B\left(x_1^B,x_2^B\right)=\overline{U}, \\ T\left(x_1^c,x_2^c\right)=0, \\ x_1^c=x_1^A+x_1^B, \\ x_2^c=x_2^A+x_2^B. \end{cases}$$

Из первых двух равенств системы получаем предельную норму замещения товаров в потреблении индивидуума *A*:

$$MRS_{12}^A=\frac{MU_1^A}{MU_2^A}=\frac{\mu_2}{\mu_3}.$$

Аналогично из следующих двух равенств возникает предельная норма замещения для индивидуума *B*:

$$MRS_{12}^B=\frac{MU_1^B}{MU_2^B}=\frac{\mu_2}{\mu_3}.$$

Из пятого и шестого соотношений получается выражение предельной нормы трансформации благ в производстве (9.28):

$$MRT_{12}=\frac{\partial T/\partial x_1^c}{\partial T/\partial x_2^c}=\frac{\mu_2}{\mu_3}.$$

Поскольку полученные отношения равны между собой, достигается Парето-оптимальное распределение товаров в производстве и потреблении (9.17).

Задачу экономического оптимума, эквивалентную задаче общего экономического равновесия, можно обобщить в задачу максимизации общественного благосостояния, в которой вместо принципа оптимальности Парето, используемого в постановке задачи экономического оптимума, максимизируется более общая функция общественного благосостояния.

Одним из обобщений принципа оптимальности Парето является ординалистская функция общественного благосостояния Бергсона–Самуэльсона [4], которая рассматривает благополучие общества как функционал на множестве функций потребительских предпочтений его членов: $W=W\left(u_1,\ldots,u_n\right)$.

Примером такой зависимости является обобщенная аддитивная функция Дж. Бентама: $W=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i U_i$. Альтернативная трактовка может быть представлена обобщенной мультипликативной функцией общественного благосостояния Дж. Нэша: $W=\prod_{i=1}^{n}\alpha_i U_i$.

Общественное благосостояние по Нэшу является частным случаем функции полезности Кобба–Дугласа (П1.2.2) с гладкими, строго выпуклыми к началу координат кривыми безразличия. В отличие от общественных предпочтений в стиле Бентама с постоянной предельной нормой замещения между индивидуальными полезностями, в рамках функции Нэша с ростом благосостояния одного члена общества будет требоваться все большее изменение благосостояния другого – для компенсации одного и того же изменения благосостояния первого. Данное убывание предельной нормы замещения может иметь причиной убывающую предельную общественную полезность как зависимость от благосостояния каждого из индивидуумов; а это значит, что, с точки зрения общества, имеет смысл перераспределять богатство в пользу менее благополучных его членов.

В качестве еще одного примера индивидуалистической функции благосостояния общества можно привести «принцип максимина» Дж. Роулза. По Роулзу и индивид, и общество, делая выбор из альтернативных вариантов в условиях неполноты информации, придерживаются принципа максимина, когда выбирается не оптимальный вариант, максимизирующий полезность, а лучший вариант из худших. Каждый индивидуум в условиях неполноты информации оказывается заинтересованным в том, чтобы все другие имели равный доступ к первичным благам, к которым в концепции Роулса относятся основные права и свободы, доходы и богатство. Таким образом человек может защитить себя от риска оказаться самым бедным членом общества.

Итак, к числу принципов справедливого общества в роулсианской модели относятся, во-первых, равенство свобод как возможностей для самореализации каждой личности; и, во-вторых, разумная степень дифференциации, предполагающая определенное неравенство в обществе как результат конкуренции, которая может способствовать улучшению положения наименее обеспеченных его членов [5]. В рамках данной концепции общественная полезность представлена леонтьевскими предпочтениями (1.28): $W=\min\left(u_1,\ldots,u_n\right)$.

Высокие транзакционные издержки, связанные с действием перераспределительного механизма, является аргументом в пользу противоположного роулсианскому функционала предпочтений – так называемой функции общественного благосостояния Ницше. Ориентиром при принятии социально-экономических решений служит благополучие преуспевающих членов общества, рассматриваемых в качестве основных двигателей его развития: $W=\max\left(u_1,\ldots,u_n\right)$.

Если оценивать изменения полезности каждого индивидуума в денежном выражении, например, через оценку компенсирующих вариаций доходов, тогда как следствие функции общественного благосостояния, в частности, в трактовке Дж. Бентама, когда благосостояние общества рассматривается как сумма полезностей его членов, может быть построен критерий компенсации Калдора–Хикса [6], согласно которому общественное благосостояние повышается, если те, кто улучшает свое положение, смогут

компенсировать потери пострадавшим. Данный критерий более реалистичен с точки зрения практического применения при выработке мероприятий государственной экономической политики, например, в области бюджетно-налогового регулирования, по сравнению с принципом оптимальности Парето. В частности, он может служить теоретической основой организации перераспределительных потоков в экономической системе.

Итак, задача эффективного распределения ресурсов при индивидуалистической функции общественного благосостояния будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \max_{x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B} W\left(U_A\left(x_1^A, x_2^A\right), U_B\left(x_1^B, x_2^B\right)\right): \\ T\left(x_1^c, x_2^c\right)=0, \\ x_1^c=x_1^A+x_1^B, \\ x_2^c=x_2^A+x_2^B. \end{cases}$$

Для решения данной задачи связанной оптимизации составляем функцию Лагранжа:

$$L=W\left(U_A\left(x_1^A, x_2^A\right), U_B\left(x_1^B, x_2^B\right)\right)-\mu_1 T\left(x_1^c, x_2^c\right)-\mu_2\left(x_1^A+x_1^B-x_1^c\right)-\mu_3\left(x_2^A+x_2^B-x_2^c\right).$$

Система необходимых условий максимума общественного благосостояния такова:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1^A}=\frac{\partial W}{\partial U_A}\frac{\partial U_A}{\partial x_1^A}-\mu_2=0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2^A}=\frac{\partial W}{\partial U_A}\frac{\partial U_A}{\partial x_2^A}-\mu_3=0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_1^B}=\frac{\partial W}{\partial U_B}\frac{\partial U_B}{\partial x_1^B}-\mu_2=0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2^B}=\frac{\partial W}{\partial U_B}\frac{\partial U_B}{\partial x_2^B}-\mu_3=0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_1^c}=-\mu_1\frac{\partial T}{\partial x_1^c}+\mu_2=0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2^c}=-\mu_1\frac{\partial T}{\partial x_2^c}+\mu_3=0, \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_1}=-T\left(x_1^c, x_2^c\right)=0, \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_2}=-x_1^A-x_1^B+x_1^c=0, \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_3}=-x_2^A-x_2^B+x_2^c=0. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial U_A}MU_1^A=\mu_2, \\ \frac{\partial W}{\partial U_A}MU_2^A=\mu_3, \\ \frac{\partial W}{\partial U_B}MU_1^B=\mu_2, \\ \frac{\partial W}{\partial U_B}MU_2^B=\mu_3, \\ \frac{\partial T}{\partial x_1^c}=\frac{\mu_2}{\mu_1}, \\ \frac{\partial T}{\partial x_2^c}=\frac{\mu_3}{\mu_1}, \\ T\left(x_1^c, x_2^c\right)=0, \\ x_1^c=x_1^A+x_1^B, \\ x_2^c=x_2^A+x_2^B. \end{cases}$$

Аналогично проведенному выше анализу из первых двух равенств системы возникает предельная норма замещения товаров в потреблении индивидуума *A*:

$$MRS_{12}^A=\frac{MU_1^A}{MU_2^A}=\frac{\mu_2}{\mu_3};$$

из следующих двух равенств системы – предельная норма замещения для индивидуума *B*:

$$MRS_{12}^B=\frac{MU_1^B}{MU_2^B}=\frac{\mu_2}{\mu_3};$$

а из пятого и шестого соотношений – предельная норма трансформации благ в производстве:

$$MRT_{12}=\frac{\partial T/\partial x_1^c}{\partial T/\partial x_2^c}=\frac{\mu_2}{\mu_3}.$$

Равенство данных отношений доказывает Парето-оптимальность распределения продуктов и ресурсов (9.17).

Проблему поиска альтернативы подходу к анализу благосостояния, основанному на предпочтениях, в 2009 г. поставил А. Сен, призвав экономистов «в какой-то мере учесть роль счастья, признать его важность для человеческой жизни, а потому и для правильной экономической политики» [7]. Согласно экономической теории счастья, необходимо разделять понятия «социальное благосостояние» или благосостояние в целом и «экономическое благосостояние», понимаемое узко и измеряемое индикаторами на основе валового внутреннего продукта. «Счастье соответствует более широкой из этих двух концепций, концепции социального благосостояния или благосостояния в целом» [8]. При этом, на долгосрочных временных интервалах изменения в экономическом благосостоянии не приводят к изменениям в социальном благосостоянии в том же направлении и в той же степени. Такова суть парадокса, сформулированного основоположником экономической теории счастья Р. Истерлином. Парадокс наблюдается, во-первых, в силу «эффекта сравнения»: чтобы быть счастливее индивиду необходимо быть не просто богаче, а быть богаче своего близкого окружения, т.е. иметь более высокий относительный доход (так проявляется нерациональный материалистический уклон поведения человека под влиянием его природы и воспитания). Во-вторых, индивиды ощущают на себе «эффект адаптации», когда привыкание нивелирует удовольствие от достигнутого и направляет в погоню за более высоким уровнем потребления.

Как показано на рис. 9.15, в силу «эффекта адаптации», рост дохода (в долларах, $) от величины *A* (довольно высокой и ставшей привычной) до величины *B* приводит к повышению благосостояния (*W*), однако не вдоль кривой благосостояния *X* от точки *A*’до точки *B*”, а вдоль более пологой кривой – до точки *B*’. Аналогично: продолжающийся рост дохода от *B* до *C* приводит к росту благосостояния, но не до *C*'' вдоль кривой благосостояния *Y*, а вдоль более пологой кривой – до точки *C*’. Следовательно, долгосрочная кривая благосостояния — это кривая, проходящая через точки *A*’, *B*’, *C*’ и демонстрирующая гораздо более низкий предельный эффект дохода на благосостояние по сравнению с семейством краткосрочных кривых *X*, *Y*, *Z*. Рассмотрев влияние, оказываемое «эффектом адаптации» на благосостояние, Ю.К. Онг сделал вывод о том, что главная проблема экономики благосостояния, основанной на предпочтениях, состоит в том, что она «анализирует предпочтения, не вдаваясь в анализ самого благосостояния» [9], тогда как предпочтения и представления о благосостоянии могут не совпадать из-за несовершенной рациональности индивидов. Предмет экономической теории благосостояния (*welfare*) должен быть расширен, чтобы полнее

охватить такие характеристики благополучия (*well-being*) индивидов как удовлетворенность жизнью, качество проведения досуга, экологическая ситуация, обеспеченность общественными благами и другие аспекты, в отношении которых невозможно сформировать рациональные предпочтения.

Таким образом, для более полного изучения благосостояния к предпосылке Дж. Роулза о несовершенстве информации («вуали незнания») должна быть добавлена предпосылка о несовершенной рациональности. Ведь при допущении, что индивид полностью информирован и рационален, он должен полностью учитывать эффект, оказываемый ростом расходуемого на потребление дохода на благосостояние. Однако большинство людей не являются рациональными и/или не обладают полной информацией и, следовательно, в большей степени руководствуются своими краткосрочными кривыми благосостояния.

Онг предложил использовать следующую функцию индивидуального благосостояния:

$$W=H\left(c,x,R,E,G\right)+\left(1\text{-}r^{'}\right)H^{f}\left(c,c^{f},x^{f},R^{f},E^{f},G^{f}\right),$$

где:

H – счастье в текущем периоде;
c – потребление в текущем периоде;
x – досуг в текущем периоде;
R – относительный доход в текущем периоде (*R*=*y*/*Y*, где *y* – индивидуальный доход, а *Y* – среднедушевой доход ближайшего окружения индивида);
E – качество окружающей среды в текущем периоде;
G – предоставление общественных благ в текущем периоде;
r′ – ставка дисконтирования, отражающая неопределенность реализации счастья в будущем периоде;
H^f – счастье в будущем периоде;
c^f - потребление в будущем периоде;
x^f - досуг в будущем периоде;
R^f – относительный доход в будущем периоде;
E^f – качество окружающей среды в будущем периоде;
G^f – предоставление общественных благ в будущем периоде.

Так, индивидуальное счастье в будущем периоде будет расти по мере увеличения *c*, но только при низких значениях *c*, т.е. относительно бедные люди будут счастливее с ростом потребления (до достижения доходом значения *A* на рис. 9.15). Однако при высоком уровне потребления его дальнейший рост не будет приводить к заметному увеличению индивидуального счастья.

Рисунок 9.15. Кратко- и долгосрочные кривые благосостояния в экономической теории счастья
Источник: Ng Y.-K. From preference to happiness: Towards a more complete welfare economics // *Social Choice and Welfare,* 2003, No. 20, p. 316.

В эмпирических исследованиях функции счастья устанавливают эконометрическую связь между мерой счастья и его детерминантами. Данные о счастье собираются в рамках социологических опросов. Например, в исследовании Euro-Barometer [10] задается вопрос: «В целом, вы удовлетворены, довольно удовлетворены, не очень удовлетворены или совсем не удовлетворены жизнью, которую ведете?», а Всероссийский центр изучения общественного мнения (ВЦИОМ) [11] задает респондентам вопрос: «В жизни бывает всякое — и хорошее, и плохое. Но если говорить в целом, Вы счастливы или нет?» с вариантами ответов - *«определенно да», «скорее да», «скорее нет», «определенно нет» и «затрудняюсь ответить»*. Эконометрические оценки (с помощью панельных моделей и анализа временных рядов) позволяют анализировать счастье с учетом наборов микро- и макроэкономических факторов, таких как доход, статус занятости, образование, уровень безработицы, уровень инфляции, ВВП на душу населения и др.



Междисциплинарный взгляд
Панельные данные (материал интерактивного цифрового учебника «Дружелюбная эконометрика»)

1. Debreu G. Theory of value. – N.Y.: Willey; L.: Chapman & Hall, 1959. ↩
2. В классическом «Учебнике политической экономии» В. Парето сформулировал знаменитый принцип оптимальности функционирования социально-экономической системы: «Мы говорим, что члены какого-либо коллектива испытывают в определенном состоянии максимум удовлетворения, если любое смещение из этого положения должно неизбежно приводить вместе с увеличением удовлетворения, испытываемого данным индивидуумом, к уменьшению удовлетворения остальных: то, что будет приемлемым для одного, будет неприемлемым для других [Pareto V. Manuel d'économie politique. – 2me éd. – Paris: Marcel Giard, 1927, c. 354].» ↩
3. Эрроу К.Дж. Возможности и пределы рынка как механизма распределения ресурсов // THESIS. 1993. Т. 1. Вып. 2. ↩
4. Samuelson P.A. The collected scientific papers: in 2 vol. – 6th pr. – Cambridge (Mass.); L.: MIT press, 1985. ↩
5. Тарасова С.В. Экономическая теория благосостояния. – М.: Юнити, 2001. ↩
6. Kaldor N. Welfare propositions of economics and interpersonal comparisons of utility // Economic journal. 1939. Vol. 49. № 195; Hicks J.R. The foundations of welfare economics // Economic journal. 1939. Vol. 49. № 196. ↩
7. Сен А. Идея справедливости. - М.: Изд-во Института Гайдара, Фонд «Либеральная миссия», 2016, с. 349. ↩
8. Easterlin R.A. Does economic growth improve the human lot? Some empirical evidence. In David, P.A., Reder, M.W. (Eds.) Essays in Honor of Moses Abramovitz. Academic Press, 1974, p. 90. ↩
9. Ng Y.-K. From preference to happiness: Towards a more complete welfare economics // *Social Choice and Welfare,* 2003, No. 20, p. 307. ↩
10. Eurobarometer – Public opinion in the European Union // https://europa.eu/eurobarometer/screen/home ↩
11. ВЦИОМ // https://wciom.ru ↩

9.9. Теория общественного выбора

Предметом общественного выбора является: принятие решений внутри коллективных хозяйствующих субъектов – фирм и домохозяйств; выработка механизма установления равновесных цен и определение структуры общественных приоритетов в рамках функции общественного благосостояния [1]; урегулирование внешних, побочных эффектов хозяйственной деятельности человека.

Рассмотрим вначале характеристики функции общественного благосостояния по К.Дж. Эрроу. Будем обозначать через $\succsim$ коллективное упорядочение социальных состояний. Отношение $\succsim$ так же, как и индивидуальное упорядочение $\succsim_i$, должно удовлетворять двум свойствам рациональности – сравнимости (1.1) и транзитивности (1.2) предпочтений.

Функция общественного благосостояния – это процесс или правило, ставящее в соответствие каждому набору индивидуальных упорядочений $\succsim_1, \ldots, \succsim_n$ альтернативных социальных состояний их коллективное упорядочение $\succsim$. *C*(*S*) – это функция общественного благосостояния Эрроу. Данная функция общественного благосостояния должна удовлетворять пяти условиям [2].

Первое условие «универсальности» предполагает следующее. Во множестве всех альтернатив имеется такое предъявление *S*, состоящее из трех альтернатив, что для любого набора индивидуальных упорядочений $\succsim_1^s, \ldots, \succsim_n^s$ альтернатив, входящих в *S*, существует такой допустимый набор индивидуальных упорядочений всех альтернатив $\succsim_1, \ldots, \succsim_n$, что для каждого индивидуума с номером *i* и x_1 и x_2 из предъявления *S* $(x_1 \succsim_i x_2) \leftrightarrow (x_1 \succsim_i^s x_2)$. Другими словами, каждый логически допустимый набор индивидуальных упорядочений некоторого предъявления *S*, состоящего из трех альтернатив, можно получить из некоторых индивидуальных упорядочений всех альтернатив. Допустимым является набор отношений индивидуального упорядочения, для которого функция общественного благосостояния определяет соответствующее коллективное упорядочение, т.е. отношение, удовлетворяющее аксиомам сравнимости (1.01) и транзитивности (1.02).

Универсальность функции общественного благосостояния подразумевает, что она существует независимо от вида индивидуальных предпочтений: существуют по крайней мере три альтернативы, любое упорядочение которых со стороны индивидуумов позволяет сформировать коллективное упорядочение, т.е. любой набор индивидуальных предпочтений является допустимым.

Условие универсальности предназначено для исключения парадокса голосования по методу большинства голосов при попарном сравнении альтернатив (Кондорсе), который можно проиллюстрировать следующим примером.

Допустим, что структура предпочтений первого индивидуума выглядит так:

$$x_1 \succsim_1 x_2, x_2 \succsim_1 x_3, \text{т.е. } \succsim_1 = (x_1 x_2 x_3).$$

Для второго индивидуума:

$$x_2 \succsim_2 x_3, x_3 \succsim_2 x_1, \text{т.е. } \succsim_2 = (x_2 x_3 x_1);$$

а для третьего –

$$x_3 \succsim_3 x_1, x_1 \succsim_3 x_2, \text{т.е. } \succsim_3 = (x_3 x_1 x_2).$$

В соответствии с механизмом голосования для большинства

$$(x_1 \succsim x_2) \& (x_2 \succsim x_3) \rightarrow (x_1 \succsim x_3).$$

На самом деле $x_2 \succsim x_1$.

Сформулируем теперь второе условие – приемлемости по критерию Парето. Пусть, $\succsim_1, \ldots, \succsim_n$ и $\succsim_1', \ldots, \succsim_n'$ – два набора индивидуальных упорядочений; $\succsim$ и $\succsim'$ – соответствующие коллективные упорядочения; $\succ$ и $\succ'$ – соответствующие коллективные предпочтения. Предположим, что для каждого индивидуума с номером *i* два набора упорядочений связаны следующим образом: во-первых, для $x_1' \neq x_1$ и $x_2' \neq x_1$ $(x_1' \succsim_i' x_2') \leftrightarrow (x_1' \succsim_i x_2')$, т.е. x_1' не хуже, чем x_2', в новой шкале тогда и только тогда, когда такое же соотношение между данными альтернативами наблюдалось и ранее; во-вторых, для любой альтернативы x_2' $(x_1 \succsim_i x_2') \rightarrow (x_1 \succsim_i' x_2')$, т.е. *x* предпочтительнее или безразлична в новой шкале по отношению к любой альтернативе, в сравнении с которой *x* была предпочтительнее или безразлична ранее; в-третьих, для любой альтернативы x_2' $(x_1 \succ_i x_2') \rightarrow (x_1 \succ_i' x_2')$, т.е. в новой шкале x_1 предпочтительнее любой альтернативы, предпочтительнее которой была и ранее. Тогда $(x_1 \succ x_2) \rightarrow (x_1 \succ' x_2)$.

Другими словами, существует положительная связь индивидуальных и коллективных оценок: если одно из альтернативных социальных состояний (x_1) повышает ранг или остается неизменным в оценках каждого индивидуума при отсутствии других изменений в упорядочении, то это социальное состояние по крайней мере не убывает в коллективном упорядочении.

Третье условие «независимости от посторонних альтернатив» утверждает следующее. Пусть, существуют два альтернативных профиля индивидуальных предпочтений $\succsim_1, \ldots, \succsim_n$ и $\succsim_1', \ldots, \succsim_n'$, а *C*(*S*) и *C*'(*S*) – соответствующие функции коллективного выбора. Пусть для каждого индивидуума с номером *i* и любых альтернатив x_1 и x_2 из множества *S* индивидуальные предпочтения одинаковы: $(x_1 \succsim_i x_2) \leftrightarrow (x_1 \succsim_i' x_1)$. В таком случае можно утверждать, что и общественные предпочтения должны быть одними и теми же относительно обоих вариантов: *C*(*S*) и *C*'(*S*) – независимы от посторонних альтернатив. В частности, изменение мнений индивидуумов по поводу третьей, «несущественной» возможности не должно отразиться на социальном сопоставлении x_1 и x_2.

Четвертое условие «суверенитета граждан» гласит, что функция общественного благосостояния не должна быть навязанной, когда при любом наборе индивидуальных упорядочений $\succsim_1, \ldots, \succsim_n$ для пары альтернатив $x_1 \neq x_2$ в рамках общества в целом $x_1 \succsim x_2$, где $\succsim$ – соответствующее коллективное упорядочение. Примерами навязанных функций общественного благосостояния являются господство обычая, колониальные или захватнические режимы.

Пятое условие требует, чтобы функция общественного благосостояния не была диктаторской, когда существует такой индивидуум с номером *i*, для которого общественные предпочтения всегда будут такими же, как и его персональные, т.е. при

произвольной паре альтернатив x_1 и x_2 $(x_1 \succ_i x_2) \to (x_1 \succ x_2)$ независимо от упорядочений $\succsim_1, \ldots, \succsim_n$ всех индивидуумов за исключением *i*-го, где $\succ$ – отношение коллективного предпочтения, соответствующее $\succsim_1, \ldots, \succsim_n$.

Правило большинства голосов – это функция общественного благосостояния, в которой $x_1 \succsim x_2$ тогда и только тогда, когда число таких индивидуумов, для которых $x_1 \succsim_i x_2$ (обозначим его $N(x_1, x_2)$ по крайней мере не меньше числа таких, для которых $x_2 \succsim_i x_1$ (обозначим его $N(x_2, x_1)$. Итак, $(x_1 \succsim x_2) \leftrightarrow N(x_1, x_2) \geqslant N(x_2, x_1)$.

Очевидно, что для рассматриваемой функции общественного благосостояния требуется видоизменить условие универсальности: каждое множество индивидуальных упорядочений двух рассматриваемых альтернатив должно порождать коллективное упорядочение, удовлетворяющее свойствам сравнимости (1.01) и транзитивности (1.02).

Теорема о возможности для двух альтернатив утверждает, что если число альтернатив равно двум, правило большинства голосов [3] является функцией общественного благосостояния, удовлетворяющей всем пяти условиям, и приводит к коллективному упорядочению двух альтернатив для каждого множества индивидуальных упорядочений.

Проверим выполнение условия универсальности, т.е. связность и транзитивность данного коллективного упорядочения $\succsim$. Очевидно, всегда либо $N(x_1, x_2) \geqslant N(x_2, x_1)$, либо, наоборот, $N(x_2, x_1) \geqslant N(x_1, x_2)$, так что $(x_1 \succsim x_2) \vee (x_2 \succsim x_1)$ верно для произвольных альтернатив *x* и *y*, значит, $\succsim$ связно. Докажем теперь, что, если для некоторых трех возможностей $x_1 \succsim x_2$ и $x_2 \succsim x_3$, то $x_1 \succsim x_3$. Поскольку существуют только две альтернативы, две из трех альтернатив x_1, x_2 и x_3 должны совпадать. Если $x_1 = x_2$, то $(x_2 \succsim x_3) \to (x_1 \succsim x_3)$. Если $x_2 = x_3$, то $(x_1 \succsim x_2) \to (x_1 \succsim x_3)$. Показать, что $x_1 \succsim x_3$ в случае $x_1 = x_3$, эквивалентно доказательству того, что $x_1 \succsim x_1$. Это, в свою очередь, эквивалентно утверждению $N(x_1, x_1) \geqslant N(x_1, x_1)$, которое безусловно истинно. Таким образом, $\succsim$ транзитивно, а значит, условие универсальности справедливо для правила большинства голосов.

Проверим выполнение условия сравнимости по критерию Парето. Допустим, индивидуальные упорядочения $\succsim_1, \ldots, \succsim_n$ таковы, что $(x_1 \succ x_2) = \left((x_1 \succsim x_2) \& \left(\overline{x_2 \succsim x_1}\right)\right)$, т.е. $N(x_1, x_2) \geqslant N(x_2, x_1)$, и неверно, что $N(x_2, x_1) \geqslant N(x_1, x_2)$. Значит:

$$N(x_1, x_2) > N(x_2, x_1). \quad (9.29)$$

Рассмотрим новое множество индивидуальных упорядочений $\succsim_1', \ldots, \succsim_n'$, удовлетворяющее гипотезе условия сравнимости по Парето, т.е.: а) для $x_1' \neq x_1$ и $x_2' \neq x_1$ $\left(x_1' \succsim_i' x_2'\right) \leftrightarrow \left(x_1' \succsim_i x_2'\right)$; б) $\left(x_1 \succsim_i x_2'\right) \to \left(x_1 \succsim_i' x_2'\right)$; в) $\left(x_1 \succ_i x_2'\right) \to \left(x_1 \succ_i' x_2'\right)$.

Рассмотрим два последних условия при $x_2' = x_2$:

$$(x_1 \succsim_i x_2) \to \left(x_1 \succsim_i' x_2\right); \quad (9.30)$$

$$(x_1 \succ_i x_2) \to \left(x_1 \succ_i' x_2\right). \quad (9.31)$$

Если для некоторого *i* $x_2 \succsim_i' x_1$, то $\overline{x_1 \succ_i' x_2}$, а значит, в соответствии с (9.31), $\overline{x_1 \succ_i x_2}$, т.е., в силу (1.3), $\left(x_2 \succsim_i' x_1\right) \to (x_2 \succsim_i x_1)$.

Пусть, $N'(x_1, x_2)$ – число индивидуумов, для которых $x_1 \succsim_i' x_2$, $N'(x_2, x_1)$ – число индивидуумов, для которых $x_2 \succsim_i' x_1$. В соответствии с (9.30), для каждого индивидуума, для которого $x_1 \succsim_i x_2$, выполняется и отношение $x_1 \succsim_i' x_2$, значит, $N'(x_1, x_2) \geqslant N(x_1, x_2)$. Используя (9.29), получаем: $N'(x_1, x_2) > N(x_2, x_1)$.

Аналогично из последней импликации вытекает, что $N(x_2, x_1) \geqslant N'(x_2, x_1)$, а значит, в соответствии с предпоследним неравенством $N'(x_1, x_2) > N'(x_2, x_1)$, т.е. $x_1 \succ' x_2$. Таким образом, $(x_1 \succ x_2) \to \left(x_1 \succ' x_2\right)$, и условие приемлемости по Парето выполнено.

Условие независимости от сторонних альтернатив выполняется в данном случае тривиально, потому что единственное множество *S*, содержащее более одного элемента, содержит целиком множество всех альтернатив, состоящее из двух элементов. Если *S* содержит один элемент, *C*(*S*) – тот же самый элемент независимо от вкусов относительно альтернатив, не входящих в *S*. Если *S* содержит два элемента, выбор *C*(*S*) безусловно определен индивидуальными упорядочениями для элементов из *S*, поскольку других просто нет.

Подтвердим выполнение условия суверенитета граждан. Предположим, что при любых x_1 и x_2, для любого, *i*-го индивидуума $x_2 \succ_i x_1 = (x_2 \succsim_i x_1) \& \left(\overline{x_1 \succsim_i x_2}\right)$, т.е. $N(x_2, x_1) \geqslant N(x_1, x_2)$, и не выполняется $N(x_1, x_2) \geqslant N(x_2, x_1)$. Следовательно, по определению правила большинства, $x_2 \succ x_1$, а значит, $\overline{x_1 \succsim x_2}$. Следовательно, не существует $x_1 \succsim x_2$ независимо от индивидуальных упорядочений $\succsim_1, \ldots, \succsim_n$.

Будем проверять условие отсутствия диктатуры от противного. Предположим, что диктатор, которому присвоим первый номер $(i=1)$, существует: $(x_1 \succ_1 x_2) \to (x_1 \succ x_2)$. Пусть $x_2 \succ_i x_1$ для всех индивидуумов, за исключением первого. Тогда $x_1 \succsim_1 x_2$ и $x_1 \succsim_i x_2$ для всех, кроме первого индивидуума, так что $N(x_1, x_2) = 1$. Поскольку $x_2 \succsim_i x_1$ для всех индивидуумов, кроме первого, $N(x_2, x_1) \geqslant 1 = N(x_1, x_2)$, значит, по правилу большинства, $x_2 \succsim x_1$, а значит, $\overline{x_1 \succ x_2}$. Получаем противоречие с предположением о диктатуре, которая тем самым исключается.

Таким образом, теорема о возможности для правила большинства при двух альтернативах доказана [4]. Проведенные рассуждения показывают, что данная функция общественного благосостояния удовлетворяет условиям приемлемости по Парето, нечувствительности к сторонним альтернативам, суверенитета граждан и отсутствия диктатуры независимо от допущения о двух альтернативах – все условия, кроме универсальности, будут выполнены и при числе альтернатив, большем двух. Но парадокс голосования (Кондорсе) показывает, что правило большинства не удовлетворяет условию универсальности, когда число альтернатив уже равно трем. Данная теорема является логическим основанием англо-американской двухпартийной системы.

Теорема о возможности в случае двух индивидуумов и трех альтернатив утверждает, что не существует функции благосостояния, совместимой со всеми пятью сформулированным выше условиями, для общества, состоящего из двух индивидуумов, при наличии трех альтернатив [5].

Для доказательства данной теоремы возьмем x_1, x_2, x_3 – три альтернативы, из которых делается выбор. Пусть $x_1^{'}$ и $x_2^{'}$ – переменные, представляющие данные три альтернативы, т.е. принимающие значения x_1, x_2, x_3.

Утверждение 1. $\left(x_1^{'} \succ_1 x_2^{'}\right) \& \left(x_2^{'} \succ_2 x_1^{'}\right) \to \left(x_1^{'} \succ x_2^{'}\right)$: если оба индивида предпочитают переменную $x_1^{'}$ переменной $x_2^{'}$, то общество должно предпочесть $x_1^{'}$ по отношению к $x_2^{'}$.

Докажем утверждение 1. Согласно условию 4, существуют такие индивидуальные предпочтения $\succsim_1^{'}$ и $\succsim_2^{'}$, что в соответствующем коллективном предпочтении $x_1^{'} \succ^{'} x_2^{'}$. Построим $\succsim_1^{''}$ из $\succsim_1^{'}$, поднимая $x_1^{'}$, если потребуется, на самый верх и оставляя относительные положения двух других альтернатив неизменными. Сформируем таким же образом $\succsim_2^{''}$ из $\succsim_2^{'}$. Поскольку была лишь поднята альтернатива $x_1^{'}$ в оценке каждого, а остальные альтернативы остались неизменными, в силу положительной связи индивидуальных и коллективных оценок, для общества по–прежнему $x_1^{'} \succ^{''} x_2^{'}$.

Итак, по построению, оба индивидуума предпочитают $x_1^{'}$ переменной $x_2^{'}$ в упорядочениях $\succsim_1^{''}$ и $\succsim_2^{''}$, и общество предпочитает $x_1^{'}$ по отношению к $x_2^{'}$. Поскольку, по условию 3, коллективный выбор между $x_1^{'}$ и $x_2^{'}$ зависит только от индивидуальных упорядочений этих двух альтернатив, отсюда следует, что, поскольку всякий раз оба индивидуума предпочитают $x_1^{'}$ переменной $x_2^{'}$ независимо от положения третьей альтернативы, общество предпочтет $x_1^{'}$ переменной $x_2^{'}$.

Утверждение 2. Предположим, что существуют такие альтернативы $x_1^{'}$ и $x_2^{'}$, для которых $\left(x_1^{'} \succ_1 x_2^{'}\right) \& \left(x_2^{'} \succ_2 x_1^{'}\right) \to \left(x_1^{'} \succ^{'} x_2^{'}\right)$. Тогда $\left(x_1^{'} \succ_1 x_2^{'}\right) \to \left(x_1^{'} \succ x_2^{'}\right)$. Другими словами, если в данной ситуации воля первого индивидуума возобладала над сопротивлением второго, то взгляды первого возобладают, когда второй – безразличен или согласен с первым.

Докажем утверждение 2. Пусть для упорядочения $\succsim_1$ выполняется соотношение $x_1^{'} \succ_1 x_2^{'}$, а $\succsim_2$ – любое упорядочение. Пусть, далее $\succsim_1^{'}$ – такое же упорядочение, как и $\succsim_1$, а $\succsim_2^{'}$ выводится из $\succsim_2$ опусканием $x_1^{'}$ в самый низ при сохранении относительного порядка двух других альтернатив. По построению, $\left(x_1^{'} \succ_1^{'} x_2^{'}\right) \& \left(x_2^{'} \succ_2^{'} x_1^{'}\right)$, следовательно, по предположению, $x_1^{'} \succ^{'} x_2^{'}$. Единственным различием между $\succsim_1^{'}$, $\succsim_2^{'}$ и $\succsim_1$, $\succsim_2$ является то, что $x_1^{'}$ располагается в $\succsim_1$ выше, чем в $\succsim_2^{'}$. Следовательно, по условию приемлемости по Парето, $\left(x_1^{'} \succ^{'} x_2^{'}\right) \to \left(x_1^{'} \succ x_2^{'}\right)$. Таким образом, если $\succsim_1$ и $\succsim_2$ таковы, что $x_1 \succ_1 x_2^{'}$, то обязательно будет выполнено отношение $x_1^{'} \succ x_2^{'}$.

Утверждение 3. $\left(x_1^{'} \succsim_1 x_2^{'}\right) \& \left(x_2^{'} \succsim_2 x_1^{'}\right) \to \left(x_1^{'} \sim x_2^{'}\right)$: если у двух индивидуумов строго противоположные интересы при выборе между данными альтернативами, то общество будет безразлично к этим альтернативам.

Будем проводить доказательство утверждения 3 от противного. Пусть утверждение неверно, т.е. либо:

а) $\left(x_1^{'} \succ_1 x_2^{'}\right) \& \left(x_2^{'} \succ_2 x_1^{'}\right) \to \left(x_1^{'} \succ x_2^{'}\right)$, либо:

б) $\left(x_1^{'} \succ_1 x_2^{'}\right) \& \left(x_2^{'} \succ_2 x_1^{'}\right) \to \left(x_2^{'} \succ x_1^{'}\right)$.

Рассмотрим случай а). Пусть $x_1^{'}=x_1$, $x_2^{'}=x_2$. Если верно а), то $(x_1 \succ_1 x_2) \& (x_2 \succ_2 x_1) \to (x_1 \succ x_2)$. Отсюда с учетом утверждения 2 следует, что $(x_1 \succ_1 x_2) \to (x_1 \succ x_2)$.

Пусть $x_1^{'}=x_1$, $x_2^{'}=x_3$, тогда, по предположению а), $(x_1 \succ_1 x_3) \& (x_3 \succ_2 x_1) \to (x_1 \succ x_3)$, откуда, по утверждению 2, получаем $(x_1 \succ_1 x_3) \to (x_1 \succ x_3)$.

Пусть $x_1^{'}=x_2$, $x_2^{'}=x_3$, значит, предполагая а), можно записать: $(x_2 \succ_1 x_3) \& (x_3 \succ_2 x_2) \to (x_2 \succ x_3)$. Отсюда, по утверждению 2, получаем: $(x_2 \succ_1 x_3) \to (x_2 \succ x_3)$.

Пусть $x_1^{'}=x_2$, $x_2^{'}=x_1$. Из гипотезы а) вытекает, что $(x_2 \succ_1 x_1) \& (x_1 \succ_2 x_2) \to (x_2 \succ x_1)$; откуда, в силу утверждения (9.30), $(x_2 \succ_1 x_1) \to (x_2 \succ x_1)$.

Пусть $x_1^{'}=x_3$, $x_2^{'}=x_1$, тогда, по предположению а), можно записать: $(x_3 \succ_1 x_1) \& (x_1 \succ_2 x_3) \to (x_3 \succ x_1)$. Значит, в силу утверждения 2, $(x_3 \succ_1 x_1) \to (x_3 \succ x_1)$.

Пусть, наконец, $x_1^{'}=x_3$, $x_2^{'}=x_2$. Предполагая а), получаем: $(x_3 \succ_1 x_2) \& (x_2 \succ_2 x_3) \to (x_3 \succ x_2)$. По утверждению 2, $(x_3 \succ_1 x_2) \to (x_3 \succ x_2)$.

Итак, из проведенных рассуждений на основе гипотезы а) с учетом утверждения 2 вытекает, что для любой пары альтернатив $x_1^{'}$, $x_2^{'}$ $\left(x_1^{'} \succ_1 x_2^{'}\right) \to \left(x_1^{'} \succ x_2^{'}\right)$. Следовательно, по определению, индивидуум 1 является диктатором, что запрещено условием 5. Значит, предположение а) ложно.

Рассуждения для случая б) полностью аналогичны. Таким образом, утверждение 3 доказано.

Опираясь на утверждения 1 и 3, можно завершить доказательство отсутствия функции благосостояния для общества, состоящего из двух индивидуумов, при наличии трех альтернатив. Пусть, $\succsim_1$ – упорядочение (x_1, x_2, x_3); $\succsim_2$ – это (x_3, x_1, x_2). Согласно утверждению 1 $x_1 \succ x_2$. Поскольку $(x_2 \succ_1 x_3) \& (x_3 \succ_2 x_2)$, из утверждения 3 вытекает, что $x_2 \sim x_3$; а значит, с учетом предпоследнего отношения предпочтения получаем: $x_1 \succ x_3$. Но также имеет место $(x_1 \succ_1 x_3) \& (x_3 \succ_2 x_1)$, откуда, по утверждению 3, следует $x_1 \sim x_3$. Не может быть, чтобы альтернатива x_1 одновременно предпочиталась и была безразлична по отношению к x_3. Следовательно, предположение, что существует функция общественного благосостояния, совместная со всеми перечисленными выше пятью условиями, привело к противоречию.

Общая теорема о возможности утверждает, что если существуют хотя бы три альтернативы, которые индивидуумы вольны ранжировать любым способом, то каждая функция общественного благосостояния, соответствующая условиям приемлемости по Парето и независимости от сторонних альтернатив и приводящая к коллективному упорядочению, удовлетворяющему свойствам сравнимости и транзитивности, должна быть либо навязанной, либо диктаторской.

В ходе доказательства теоремы будем обозначать через *V* множество индивидуумов. В частности, *V'* – это множество, состоящее из одного индивидуума, *V''* – множество всех индивидуумов. Множество *V* назовем решающим для x_1 против x_2, если $x_1 \neq x_2$ и $x_1 \succ x_2$ для всех допустимых наборов индивидуальных упорядочений, в которых $x_1 \succ_i x_2$ для любого индивидуума с номером *i* из *V*.

Утверждение 1. Пусть, $\succsim_1, \ldots, \succsim_n$ и $\succsim_1^{'}, \ldots, \succsim_n^{'}$ – два таких набора индивидуальных упорядочений, что при заданных x_1 и x_2 для любого индивидуума, для которого $x_1 \succsim_i x_2$, будет верно, что $x_1 \succ_i^{'} x_2$. Тогда $(x_1 \succ x_2) \rightarrow \left(x_1 \succ^{'} x_2\right)$, где $\succ$ и $\succ^{'}$ – отношения коллективного предпочтения, соответствующие $\succsim_1, \ldots, \succsim_n$ и $\succsim_1^{'}, \ldots, \succsim_n^{'}$.

Это утверждение расширяет условие приемлемости по Парето. Если x_1 поднимается или не опускается относительно x_2 в упорядочениях для каждого индивидуума и строго поднимается, когда x_1 и x_2 безразличны, и если сначала x_1 предпочтительнее для коллектива, чем x_2, то x_1 предпочтительнее x_2 вне зависимости от изменений в предпочтениях относительно альтернатив, отличных от x_2.

Для доказательства утверждения 1 предположим, что существуют три альтернативы x_1, x_2, x_3. Пусть $x_3 \neq x_1$, $x_3 \neq x_2$. Введем такие вспомогательные упорядочения $\succsim_i^{''}$ и $\succsim_i^{*}$, которые позволили бы сравнить два набора, приемлемые по Парето.

Для каждого, *i*-го индивидуума определим упорядочение $\succsim_i^{''}$ так:

$$\left(x_1^{'} \succsim_i^{''} x_2^{'}\right) \leftrightarrow \left(\left(x_1^{'} \succsim_i x_2^{'}\right) \& \left(x_1^{'} \neq x_3\right)\right) \vee \left(x_2^{'} = x_3\right), (9.32)$$

т.е. x_3 передвигается в самый конец упорядочения $\succsim_i$, а в остальном $\succsim_i$ остается без изменений.

Легко убедиться, что $\succsim_i^{''}$ представляет собой упорядочение, т.е. для него справедливы свойства сравнимости и транзитивности. Кроме того, для каждого индивидуума $\succsim_i^{''}$ упорядочивает элементы x_1, x_2 так же, как и $\succsim_i$, т.е. $\left(x_1^{'} \succsim_i^{''} x_2^{'}\right) \leftrightarrow \left(x_1^{'} \succsim_i x_2^{'}\right)$ для $x_1^{'}$, $x_2^{'}$ в $\{x_1, x_2\}$. Отсюда, с учетом условия нечувствительности к сторонним альтернативам, следует, что для соответствующих функций коллективного выбора выполняется равенство $C\left(\{x_1, x_2\}\right) = C''(\{x_1, x_2\})$.

По нашей гипотезе, $x_1 \succ x_2$, а из (1.5) следует, что $C(\{x_1, x_2\})$ содержит единственный элемент x_1. Значит, $C''(\{x_1, x_2\})$ содержит единственный элемент x_1, или в соответствии с (1.5):

$$x_1 \succ^{''} x_2. (9.33)$$

Определим индивидуальные упорядочения $\succsim_1^{*}, \ldots, \succsim_n^{*}$ так:

$$\left(x_1^{'} \succsim_i^{*} x_2^{'}\right) \leftrightarrow \left(\left(x_1^{'} \succsim_i x_2^{'}\right) \& \left(x_1^{'} \neq x_3\right)\right) \vee \left(x_2^{'} = x_3\right). (9.34)$$

Условие (9.34) аналогично (9.32). Из (9.32) и (9.34) в силу определения предпочтения следует, что для всех индивидуумов $x_2 \succ_i^{''} x_3$ и $x_2 \succ_i^{*} x_3$. Следовательно, при $x_1^{'} \neq x_1$ и $x_2^{'} \neq x_1$:

$$\left(x_1^{'} \succsim_i^{''} x_2^{'}\right) \leftrightarrow \left(x_1^{'} \succsim_i^{*} x_2^{'}\right). (9.35)$$

Для любого, *i*-го индивидуума так же имеет место $x_1 \succ_i^{''} x_3, x_1 \succ_i^{*} x_3$.

Согласно (9.32) для всех индивидуумов, для которых $x_1 \succsim_i^{''} x_2$, верно, что $x_1 \succsim_i x_2$. Согласно предположению, для таких индивидуумов $x_1 \succ_i^{'} x_2$, и потому, согласно (9.34), $x_1 \succ_i^{*} x_2$. Следовательно,

$$\text{для любой альтернативы } x_2^{'} \left(x_1 \succsim_i^{''} x_2^{'}\right) \leftrightarrow \left(x_1 \succsim_i^{*} x_2^{'}\right), (9.36)$$

$$\text{для любой альтернативы } x_2^{'} \left(x_1 \succ_i^{''} x_2^{'}\right) \leftrightarrow \left(x_1 \succ_i^{*} x_2^{'}\right). (9.37)$$

Согласно (9.35)–(9.37) и (9.33), предпосылки условия приемлемости по критерию Парето выполнены, следовательно, $x_1 \succ^{*} x_2$.

Из (9.34) путем рассуждений, аналогичных проведенным выше, следует, что $C^{*}\left(\{x_1, x_2\}\right) = C'(\{x_1, x_2\})$, значит, $x_1 \succ^{'} x_2$, что и требовалось доказать.

Утверждение 2. Если существует некоторый набор таких индивидуальных упорядочений $\succsim_1, \ldots, \succsim_n$, что для некоторых x_1 $x_1 \succ_i x_2$ для всех индивидуумов в *V* и $x_2 \succ_i x_1$ для индивидуумов вне *V*, причем $x_1 \succ x_2$, то *V* является решающим для x_1 против x_2.

Для доказательства утверждения 2 предположим, что $\succsim_1^{'}, \ldots, \succsim_n^{'}$ – набор индивидуальных упорядочений, отвечающих условию:

$$x_1 \succ_i^{'} x_2 \text{ для любого индивидуума в } V. (9.38)$$

Чтобы показать, что *V* является решающим, необходимо согласно определению, показать, что для любого такого набора $\succsim_1^{'}, \ldots, \succsim_n^{'}$ соответствующее коллективное упорядочение $\succsim^{'}$ будет давать $x_1 \succ^{'} x_2$. Согласно (9.38) и предположению, что $x_1 \succ_i^{'} x_2$ для каждого, *i*-го индивидуума в *V* и $x_2 \succ_i^{'} x_1$ для всех индивидуумов вне *V*, следует, что $x_1 \succ_i^{'} x_2$ всякий раз, когда $x_1 \succsim_i x_2$. Согласно утверждению 1, $x_1 \succ^{'} x_2$, что и требовалось доказать.

Утверждение 3. Для любых не совпадающих друг с другом альтернатив x_1 и x_2 $x_1 \neq x_2$, *V''* – решающее множество для x_1 против x_2: если каждый индивидуум предпочитает x_1 альтернативе x_2, то группа имеет аналогичные предпочтения.

Для доказательства утверждения 3 обратим определение навязанной функции общественного благосостояния. Тогда условие суверенитета граждан гласит, что существует набор $\succsim_1, \ldots, \succsim_n$, для которого $\overline{x_2 \succsim x_1}$. В силу (1.3):

$$x_1 \succ x_2. (9.39)$$

Пусть $\succsim_1^{'}, \ldots, \succsim_n^{'}$ – такое множество индивидуальных упорядочений, что:

$$x_1 \succ_i^{'} x_2 \text{ для любого индивидуума с номером } i. (9.40)$$

Согласно (9.40), очевидно, выполняется $x_1 \succ_i^{'} x_2$ для любого, *i*-го индивидуума, такого, что $x_1 \succsim_i x_2$. Тогда из (9.39) и утверждения 1 вытекает, что $x_1 \succ^{'} x_2$. Поскольку это справедливо для любого набора упорядочений, удовлетворяющих (9.40), из определения *V''* следует, что $x_1 \succ^{'} x_2$ для любого набора упорядочений, такого, что $x_1 \succ_i^{'} x_2$ для всех, *i*–х индивидуумов в *V''* и $x_2 \succ_i^{'} x_1$ для всех индивидуумов с номерами *i* вне *V''*, т.е. ни для какого *i*. Согласно утверждению 2, *V''* – решающее множество для x_1 против x_2.

Утверждение 4. Если одноэлементное множество *V'* является решающим: либо для x_1 против x_2, либо для x_2 против x_3, то *V'* – решающее множество для x_1 против x_3, где x_1, x_2, x_3 – отличные друг от друга альтернативы. Другими словами, если индивидуум является решающим для некоторой альтернативы x_1 против другой альтернативы x_2, то он является решающим для x_1 против любой другой альтернативы; если индивидуум является решающим для любой альтернативы против данной – x_3, то он является решающим для данной, конкретной альтернативы против x_3.

Рассмотрим вначале первую возможность. Пусть *V'* – решающее множество для x_1 против x_2. Без потери общности можно присвоить решающему индивидууму первый номер. Пусть, далее, $\succsim_1, \ldots, \succsim_n$ – набор индивидуальных упорядочений, удовлетворяющий следующим условиям:

$$x_1 \succ_1 x_2, \quad (9.41)$$

$$x_2 \succ_i x_3 \text{ для любого индивидуума,} \quad (9.42)$$

$$x_3 \succ_i x_1 \text{ для всех индивидуумов, кроме первого.} \quad (9.43)$$

Согласно (9.41), $x_1 \succ_i x_2$ для всех индивидуумов в $V^{'}$, поэтому, по определению решающего множества:

$$x_1 \succ x_2. \quad (9.44)$$

Из (9.42) следует, что $x_2 \succ_i x_3$ для всех индивидуумов в *V''*. По утверждению 3 и определению решающего множества:

$$x_2 \succ x_3. \quad (9.45)$$

Согласно условию универсальности, отношение коллективного упорядочения связно и транзитивно, в частности для него справедливо утверждение (1.4). Значит, из (9.44) – (9.45) следует, что:

$$x_1 \succ x_3. \quad (9.46)$$

Исходя из (9.41) – (9.42) и свойства транзитивности, можно записать: $(x_1 \succ_1 x_2) \& (x_2 \succ_1 x_3) \rightarrow (x_1 \succ_1 x_3)$, или:

$$x_1 \succ_i x_3 \text{ для всех индивидуумов в } V^{'}. \quad (9.47)$$

Условие (9.43) можно переписать следующим образом:

$$x_3 \succ_i x_1 \text{ для каждого индивидуума вне } V^{'}. \quad (9.48)$$

Согласно (9.46) – (9.48), посылки утверждения 2 удовлетворены, так что *V'* является решающим для x_1 против x_3.

Рассмотрим теперь вторую возможность. Пусть *V'* – решающее множество для x_2 против x_3. Пусть индивидуум в *V'* имеет первый номер. Пусть, $\succsim_1, \ldots, \succsim_n$ – набор индивидуальных упорядочений, таких, что:

$$x_1 \succ_i x_2 \text{ для всех индивидуумов,} \quad (9.49)$$

$$x_2 \succ_1 x_3, \quad (9.50)$$

$$x_3 \succ_i x_1 \text{ для всех индивидуумов, за исключением первого.} \quad (9.51)$$

Как и в предыдущем случае, из (9.49) вытекает, что $x_1 \succ x_2$; из (9.50) – что $x_2 \succ x_3$, следовательно, $x_1 \succ x_3$. Но (9.49) – (9.50) свидетельствуют о том, что $x_1 \succ_1 x_3$, что вместе с (9.51) обеспечивает выполнение предположений утверждения 2, значит, *V'* – решающее множество для x_1 против x_3.

Утверждение 5. Для каждой пары альтернатив x_1, x_2 и каждого одноэлементного множества индивидуумов *V'* утверждение, что *V'* – решающее множество для x_1 против x_2 ложно.

Проведем доказательство утверждения 5 от противного. Присвоим некоторому решающему индивидууму из множества *V'* первый номер. Пусть, *V'* – решающее множество для некоторой альтернативы x_1 против некоторой альтернативы x_2.

Из утверждения 4 вытекает, что *V'* – решающее множество для x_1 так же против некоторой альтернативы $x_2^{'}$, отличной от x_1 и x_2. Поскольку это утверждение остается верным для $x_2^{'}=x_2$, можно сказать, что:

$$V^{'} \text{ - решающее множество для } x_1 \text{ против любого } x_2^{'} \neq x_1. \quad (9.52)$$

Пусть для фиксированной $x_2^{'} \neq x_1$ альтернатива $x_1^{'}$ отлична от x_1 и $x_2^{'}$. Этот выбор возможен, согласно условию универсальности, так как существуют только три альтернативы. Из (9.52) и утверждения 4 вытекает, что *V'* – решающее для $x_1^{'}$ против $x_2^{'}$. Согласно (9.52), это утверждение справедливо и при $x_1^{'}=x_1$:

V' – решающее множество для $x_1^{'}$ против $x_2^{'}$

$$\text{при } x_1^{'} \neq x_2^{'} \text{ и } x_2^{'} \neq x_1. \quad (9.53)$$

Выберем любую $x_1^{'} \neq x_1$ и некоторую $x_2^{''}$, отличную как от x_1, так и от $x_1^{'}$. Этот выбор возможен, согласно условию универсальности. Тогда (9.53) выполняется в следующем виде: *V'* – решающее для $x_1^{'}$ против *y''* при $x_1^{'} \neq x_2^{''}$, $x_2^{''} \neq x_1$, $x_1^{'} \neq x_1$. Тогда в силу утверждения 4, если в качестве x_3 взять x_1, можно записать, что:

$$V^{'} \text{ - решающее множество для } x_1^{'} \text{ против } x_1 \text{ при } x_1^{'} \neq x_1. \quad (9.54)$$

Объединяя условия (9.53) – (9.54), получаем, что:

V' – решающее множество для любого $x_1^{'}$ против любого $x_2^{'}$

$$\text{при } x_1^{'} \neq x_2^{'}. (9.55)$$

По определению решающего множества, (9.55) утверждает, что для каждого $x_1^{'} \neq x_2^{'}$ $\left(x_1^{'} \succ_1 x_2^{'}\right) \rightarrow \left(x_1^{'} \succ x_2^{'}\right)$. Значит, по определению, функция общественного благосостояния является диктаторской, что исключается. Следовательно, предположение о ложности утверждения 5 ведет к противоречию с одним из условий. Таким образом, утверждение 5 истинно.

Теперь можно завершить доказательство общей теоремы о возможности. Пусть *S* – предъявление, составленное из трех отличных друг от друга альтернатив, которые встречаются в условии универсальности. Для каждой возможной упорядоченной пары $x_1^{'}$, $x_2^{'}$ из предъявления *S*, $x_1^{'} \neq x_2^{'}$, имеется, согласно утверждению 3, по крайней мере, одно решающее множество индивидуумов для $x_1^{'}$ против $x_2^{'}$. Рассмотрим все решающие множества индивидуумов для некоторой $x_1^{'}$ против некоторой $x_2^{'} \neq x_1^{'}$ в *S*. Среди этих множеств выберем такое, в котором присутствует наименьшее число лиц – если его нельзя выбрать однозначно, то возьмем любое из таких множеств. Обозначим выбранное множество V_1. С помощью соответствующего обозначения можно сказать, что V_1 является решающим для x_1 против x_2.

Пусть, *k* – число индивидуумов в V_1. Обозначим их номерами $1, \ldots, k$. Пусть, *V'* содержит индивидуума под первым номером, V_2 – индивидуумов с номерами $2, \ldots, k$, V_3 – остальных с номерами $k+1, \ldots, n$. На основании построения можно заключить:

$$V_1 \text{ - решающее множество для } x_1 \text{ против } x_2; (9.56)$$

любое решающее множество для некоторой альтернативы в *S*

против некоторой другой альтернативы в *S*

$$\text{содержит не менее чем } k \text{ элементов.} (9.57)$$

По построению, V_2 содержит k-1 элементов. Значит, в соответствии с (9.57):

$$V_2 \text{ не является решающим для любой альтернативы в } S$$

$$\text{против любой другой альтернативы в } S. (9.58)$$

В силу утверждения 5

V' не является решающим множеством для любой альтернативы

$$\text{против произвольной другой альтернативы.} (9.59)$$

Пусть $\succsim_1, \ldots, \succsim_n$ – такой набор индивидуальных упорядочений, что:

$$\text{для любого индивидуума в } V' \left(x_1 \succ_i x_2\right) \& \left(x_2 \succ_i x_3\right), (9.60)$$

$$\text{для каждого индивидуума в } V_2 \left(x_3 \succ_i x_1\right) \& \left(x_1 \succ_i x_2\right), (9.61)$$

$$\text{для всех индивидуумов в } V_3 \left(x_2 \succ_i x_3\right) \& \left(x_3 \succ_i x_1\right). (9.62)$$

Из (9.60) – (9.62) и определений V_1, V_2, *V'* следует, что $x_1 \succ_i x_2$ для всех, *i*-х индивидуумов в V_1. Из (9.56) вытекает, что:

$$x_1 \succ x_2. (9.63)$$

Из (9.61) и транзитивности $\succsim_i$ приходим к выводу о том, что $x_3 \succ_i x_2$ для всех индивидуумов в V_2. Из (9.60) и (9.62) делаем вывод, что $x_2 \succ_i x_3$ для каждого индивидуума вне V_2. Если бы $x_3 \succ x_2$, то в силу данных выводов и утверждения 2 V_2 было бы решающим множеством для x_2 против x_3, что противоречит (9.58). Следовательно, $\overline{x_3 \succ x_2}$, т.е. $x_2 \succ x_3$.

Из (9.63) и последнего отношения предпочтения, в силу транзитивности $\succsim$, следует $x_1 \succ x_3$. Из (9.60) и транзитивности отношения $\succsim_i$ вытекает, что $x_1 \succ_i x_3$ для всех индивидуумов в *V'*. А из (9.61)–(9.62) следует, что $x_3 \succ_i x_1$ для каждого индивидуума вне *V'*. Согласно последним трем отношениям предпочтения и утверждению 2, *V'* – решающее множество для x_1 против x_3, что противоречит (9.59). Таким образом, общая теорема о возможности доказана [6].

---

1. Эрроу К.Дж. Возможности и пределы рынка как механизма распределения ресурсов // THESIS. 1993. Т. 1. Вып. 2. ↩
2. Эрроу К.Дж. Коллективный выбор и индивидуальные ценности. – М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 2004. ↩
3. О формальных характеристиках правила большинства голосов как функции общественного благосостояния см., например: Нуреев Р.М. Теория общественного выбора. – М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 2005. ↩
4. Эрроу К.Дж. Коллективный выбор и индивидуальные ценности. – М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 2004. ↩
5. Эрроу К.Дж. Коллективный выбор и индивидуальные ценности. – М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 2004. ↩
6. Эрроу К.Дж. Коллективный выбор и индивидуальные ценности. – М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 2004. ↩

9.10. Общее экономическое равновесие и общественное благосостояние при монополистической конкуренции

Современные аналитические, прогнозные макроэкономические модели зачастую опираются на теорию общего экономического равновесия при монополистической конкуренции. Рассмотрим, как базовая модель монополистической конкуренции Дикситa-Стиглица, проанализированная в параграфе 6.4, может быть преобразована в модель общего экономического равновесия.

Пусть экономическая система представлена K монопродуктовыми производителями, каждый из которых выпускает свой вид продукта, отличающийся от продукции иных фирм с использованием единственного фактора производства – труда, источником которого являются домашние хозяйства [1]. Продукты различных фирм являются несовершенными заменителями между собой с точки зрения своих потребительских качеств. Производственная функция i-й фирмы имеет вид:

$$y_i = F_i(n_i),$$

где n_i – объем используемого ею труда.

Выпишем прибыль i-й фирмы как функцию объема используемого труда:

$$PR_i(n_i) = p_i(y_i)F_i(n_i) - wn_i, \quad (9.64)$$

где $p_i(y_i)$ – цена ее продукта, зависящая от объема продукции, выпускаемой фирмой, посредством функции остаточного спроса; w – установившаяся в экономике средняя ставка заработной платы.

Предположим, что сектор потребления в экономике представлен N идентичными домашними хозяйствами, аргументами функций полезности которых являются совокупный объем потребления c и величина досуга l_j:

$$U\left(\frac{c}{N}, l_j\right) = u\left(\frac{c}{N}\right) + \eta l_j^{\varepsilon}, \varepsilon < 1. \quad (9.65)$$

Как обычно будем предполагать ненасыщаемость потребления $\frac{\partial u}{\partial c} > 0$ и невозрастание предельной полезности $\frac{\partial^2 u}{\partial c^2} \leq 0$.

При этом каждое домашнее хозяйство функционирует в условиях ограничения по совокупному временно́му фонду жизнедеятельности, который нормируется на уровне 1:

$$n_j + l_j = 1. \quad (9.66)$$

Агрегированное потребление представим функцией CES:

$$c = \left(\sum_{i=1}^{K} c_i^{\frac{\varphi-1}{\varphi}}\right)^{\frac{\varphi}{\varphi-1}}, \quad (9.67)$$

где $\varphi > 1$ – это эластичность замещения между различными продуктами.

Таким образом, зависимость полезности от потребления в выражении потребительских предпочтений (9.65) представляет собой монотонное возрастающее преобразование функции CES:

$$U\left(\frac{c}{N}, l_j\right) = u\left(\frac{\left(\sum_{i=1}^{K} c_i^{\frac{\varphi-1}{\varphi}}\right)^{\frac{\varphi}{\varphi-1}}}{N}\right) + \eta l_j^{\varepsilon} = u\left(\left(\sum_{i=1}^{K}\left(\frac{c_i}{N}\right)^{\frac{\varphi-1}{\varphi}}\right)^{\frac{\varphi}{\varphi-1}}\right) + \eta l_j^{\varepsilon}. \quad (9.68)$$

Будем предполагать, что домашние хозяйства имеют права на равные доли в прибылях фирм. Тогда репрезентативный потребитель ограничен в своем выборе поступающими в его распоряжение денежными средствами:

$$p\frac{c}{N} = \sum_{i=1}^{K} p_i \frac{c_i}{N} = wn_j + \sum_{i=1}^{K} \frac{PR_i}{N}, \quad (9.69)$$

с учетом доступного ему совокупного фонда времени (9.66). Здесь c – это агрегированное потребление, p – общий уровень цен на потребительские блага.

Объединенное, финансово-временно́е бюджетное ограничение потребителя имеет вид:

$$p\frac{c}{N} = \sum_{i=1}^{K} p_i \frac{c_i}{N} = w(1 - l_j) + \sum_{i=1}^{K} \frac{PR_i}{N} = w - wl_j + \sum_{i=1}^{K} \frac{PR_i}{N},$$

или

$$p\frac{c}{N} + wl_j = \sum_{i=1}^{K} p_i \frac{c_i}{N} + wl_j = w + \sum_{i=1}^{K} \frac{PR_i}{N}. \quad (9.70)$$

Немного забегая вперед, обратим внимание на то, что в условиях монополистической конкуренции, когда при наличии положительной экономической прибыли наблюдается свободный вход фирм на рынок, в итоге экономическая прибыль оказывается равной нулю (9.83), и бюджетное ограничение потребителя (9.70) упрощается:

$$p\frac{c}{N} + wl_j = \sum_{i=1}^{K} p_i \frac{c_i}{N} + wl_j = w, \quad (9.71)$$

или

$$\frac{c}{N}=\sum_{i=1}^{K}\frac{p_i}{p}\frac{c_i}{N}=\frac{w}{p}-\frac{w}{p}l_j=\frac{w}{p}n_j. \quad (9.72)$$

Итак, задача максимизации полезности потребителя (9.68) при условии ограничения по денежным расходам и по временно́му фонду жизнедеятельности (9.71) ставится в следующем виде:

$$\max_{c_1,\ldots,c_K,\,l_j} U\left(\frac{c}{N},l_j\right)=\max_{c_1,\ldots,c_K,\,l_j}\left(u\left(\left(\sum_{i=1}^{K}\left(\frac{c_i}{N}\right)^{\frac{\varphi-1}{\varphi}}\right)^{\frac{\varphi}{\varphi-1}}\right)+\eta l_j^{\varepsilon}\right):$$

$$\sum_{i=1}^{K}p_i\frac{c_i}{N}+wl_j=w.$$

Выпишем соответствующую функцию Лагранжа:

$$L=u\left(\left(\sum_{i=1}^{K}\left(\frac{c_i}{N}\right)^{\frac{\varphi-1}{\varphi}}\right)^{\frac{\varphi}{\varphi-1}}\right)+\eta l_j^{\varepsilon}+\lambda\left(w-\sum_{i=1}^{K}p_i\frac{c_i}{N}-wl_j\right).$$

Условие оптимальности по потреблению каждого блага имеет вид:

$$\frac{\partial L}{\partial c_i}=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial u}{\partial c}\left(\frac{c}{c_i}\right)^{\frac{1}{\varphi}}-\lambda p_i\right)=0.$$

Его можно переписать так:

$$\frac{c_i}{c}=\left(\frac{\lambda p_i}{\frac{\partial u}{\partial c}}\right)^{-\varphi}. \quad (9.73)$$

Условие оптимальности по величине досуга выглядит так:

$$\frac{\partial L}{\partial l_j}=\eta\varepsilon l_j^{\varepsilon-1}-\lambda w=0. \quad (9.74)$$

Выбор домашнего хозяйства можно также представить с точки зрения оптимизации агрегированного потребления (9.67):

$$\max_{c,\,l_j} U\left(\frac{c}{N},l_j\right)=\max_{c,\,l_j}\left(u\left(\frac{c}{N}\right)+\eta l_j^{\varepsilon}\right):$$

$$p\frac{c}{N}+wl_j=w.$$

Тогда функция Лагранжа принимает вид:

$$L=u\left(\frac{c}{N}\right)+\eta l_j^{\varepsilon}+\lambda\left(w-p\frac{c}{N}-wl_j\right)$$

Условие оптимальности по агрегированному потреблению будет таким:

$$\frac{\partial L}{\partial c}=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial u}{\partial c}-\lambda p\right)=0,$$

или

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial c}}{p}=\lambda. \quad (9.75)$$

Условие оптимальности по величине досуга (9.74) при этом остается без изменения.

Объединяя соотношения (9.73) и (9.75), можно записать эквимаржинальное условие оптимальности потребительского выбора, которое характеризует спрос на i-е благо как функцию его цены в реальном выражении $\frac{p_i}{p}$ при предположении о неизменном уровне совокупного потребления c:

$$\frac{c_i}{c}=\left(\frac{p_i}{p}\right)^{-\varphi}. \quad (9.76)$$

Если объем потребления каждого товара c_i составляет малую долю совокупного потребления c и влиянием изменения c_i на величину c можно пренебречь, то эластичность спроса на данное, i-е благо $c_i=c\left(\frac{p_i}{p}\right)^{-\varphi}$ по его относительной цене $\frac{p_i}{p}$ будет равна показателю степени в выражении (9.76):

$$E_{p_i/p}^{c_i}=\frac{d}{d\left(\frac{p_i}{p}\right)}\left(c\left(\frac{p_i}{p}\right)^{-\varphi}\right)\cdot\frac{\frac{p_i}{p}}{c\left(\frac{p_i}{p}\right)^{-\varphi}}=-\varphi c\left(\frac{p_i}{p}\right)^{-\varphi-1}\left(\frac{\frac{p_i}{p}}{c\left(\frac{p_i}{p}\right)^{-\varphi}}\right)=-\varphi.$$

Обратим внимание на то, что, поскольку показатель эластичности представляет собой безразмерную величину, которая не зависит от единиц измерения количества потребляемого блага и его цены

$$E_{ap}^{bq}=\frac{d(bq)}{d(ap)}\cdot\frac{ap}{bq}=\frac{bdq}{adp}\cdot\frac{ap}{bq}=\frac{dq}{dp}\cdot\frac{p}{q}=E_p^q,$$

постольку эластичность полученной выше функции спроса (9.76) по абсолютной цене p_i точно так же, как и по относительной цене $\frac{p_i}{p}$ на данное благо, будет равна параметру $-\varphi$:

$$E_{p_i}^{c_i}=\frac{d}{dp_i}\left(c\left(\frac{p_i}{p}\right)^{-\varphi}\right)\cdot\frac{p_i}{c\left(\frac{p_i}{p}\right)^{-\varphi}}=-\frac{\varphi c p_i^{-\varphi-1}}{p^{-\varphi}}\left(\frac{p_i}{c\left(\frac{p_i}{p}\right)^{-\varphi}}\right)=-\varphi. \quad (9.77)$$

Используя обозначение для совокупных расходов на потребительские блага

$$pc=\sum_{i=1}^{K} p_i c_i,$$

можно представить общий уровень цен как суммарные расходы на каждое из благ в расчете на агрегированное потребление:

$$p=\sum_{i=1}^{K} p_i \frac{c_i}{c}. \quad (9.78)$$

Подстановка эквимаржинального условия для i-го блага (9.76) в (9.78) дает выражение для индекса цен как их $K^{\frac{1}{1-\varphi}}$-кратное среднее степени 1-φ:

$$p=\sum_{i=1}^{K} p_i \left(\frac{p_i}{p}\right)^{-\varphi}=\left(\sum_{i=1}^{K} p_i^{1-\varphi}\right)^{\frac{1}{1-\varphi}}.$$

Заменяя в условии оптимальности по величине досуга (9.74) множитель Лагранжа с помощью соотношения (9.75), из ограничения по индивидуальному временно́му фонду жизнедеятельности (9.66) можно получить функцию индивидуального предложения труда:

$$n_j=1-\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial c}}{\eta\varepsilon}\cdot\frac{w}{p}\right)^{\frac{1}{\varepsilon-1}}. \quad (9.79)$$

Поскольку $\varepsilon<1$, постольку предложение труда является возрастающей функцией ставки реальной заработной платы $\frac{w}{p}$: $\frac{\partial n_j}{\partial\left(\frac{w}{p}\right)}>0.$

Максимизируя прибыль, каждое, i-е предприятие определяет для себя оптимальный объем используемого труда в соответствии с условием:

$$\frac{\partial PR_i}{\partial n_i}=\frac{\partial TR_i}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial n_i}-w=p_i\left(1+\frac{1}{E_{p_i}^{y_i}}\right)\frac{\partial F_i}{\partial n_i}-w=0. \quad (9.80)$$

В модели общего экономического равновесия предполагается сбалансированное состояние каждого продуктового рынка, когда весь произведенный объем продукции находит свой спрос и потребляется:

$$y_i=c_i. \quad (9.81)$$

При равновесии на товарных рынках (9.81) с учетом эластичности спроса на продукт i-й фирмы (9.77) необходимое условие максимизации прибыли i-м предприятием (9.80) принимает вид:

$$\frac{(\varphi\text{-}1)}{\varphi}\cdot\frac{\partial F_i}{\partial n_i}=\frac{w}{p_i}. \quad (9.82)$$

Модель монополистической конкуренции традиционно предполагает свободный вход фирм на рынок, в результате которого экономическая прибыль (9.64) падает до нуля:

$$\frac{F_i(n_i)}{n_i}=\frac{w}{p_i}. \quad (9.83)$$

Тем самым, условие нулевой экономической прибыли будет задавать величину остаточного спроса на продукт i-го производителя $p_i\left(y_i\right)$.

Система из условий (9.82) и (9.83)

$$\frac{(\varphi\text{-}1)}{\varphi}\cdot\frac{\partial F_i}{\partial n_i}=\frac{w}{p_i}=\frac{F_i(n_i)}{n_i}$$

будет определять объемы используемого труда n_i^*, выпускаемого и потребляемого продукта $y_i^*=F_i\left(n_i^*\right)=c_i^*$, а также реальную ставку заработной платы $\frac{w}{p_i}^*$. Поскольку все фирмы идентичные, постольку оптимальный объем занятости для них будет представлять собой одинаковую величину, не зависящую от номера фирмы $n_i^*=n^*$. Следовательно, совокупный спрос на труд будет равен объему занятости на отдельном предприятии, умноженному на число производителей всех брендов:

$$n_\Sigma^d=\sum_{i=1}^{K} n_i^*=K\cdot n^*. \quad (9.84)$$

Информация об объеме потребления каждого товара $\left(c_i^*\right)$ позволяет определить объем совокупного потребления c^* (9.67), а значит, и его предельную полезность $\frac{\partial u}{\partial c}\left(c^*\right)$. Далее, рассчитав отношения $\frac{c_i^*}{c^*}$, можно в соответствии с условием оптимального потребительского выбора (9.76) получить значения относительных цен на все товары $\frac{p_i}{p}^*$.

Располагая значениями равновесной ставки заработной платы по отношению к цене каждого из товаров $\frac{w}{p_i}^*$, а также об их ценах в реальном выражении $\frac{p_i}{p}^*$, можно определить уровень равновесной реальной заработной платы по отношению к общему уровню цен $\frac{w}{p}^*$, что позволяет с учетом известной предельной полезности совокупного потребления $\frac{\partial u}{\partial c}\left(c^*\right)$ рассчитать величину предложения труда каждым из индивидуумов n_j^* (9.79). Совокупное предложение труда в экономической системе будет представлять собой сумму объемов индивидуального предложения труда:

$$n_{\Sigma}^{s}=\sum_{j=1}^{N} n_{j}^{*}=N \cdot \left(1-\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial c}\left(c^{*}\right)}{\eta \varepsilon} \cdot \frac{w}{p}^{*}\right)^{\frac{1}{\varepsilon-1}}\right). (9.85)$$

Поскольку в состоянии общего экономического равновесия должен иметь место баланс совокупного спроса (9.85) и предложения (9.84) на рынке труда:

$$n_{\Sigma}^{s}=n_{\Sigma}^{d},$$

постольку, разделив объем совокупного предложения труда на объем трудозатрат отдельной фирмы, можно рассчитать равновесное количество производителей отдельных брендов:

$$K^{*}=\frac{n_{\Sigma}^{s}}{n^{*}}.$$

Возможно построить видоизмененную модель общего экономического равновесия при монополистической конкуренции, которая не использует предпосылку о свободном входе фирм на рынок, предполагая, что общее их количество является фиксированной величиной. Пусть экономическая система представлена N монопродуктовыми производителями, каждый из которых выпускает свой вид продукта, отличающийся от продукции иных фирм с использованием единственного фактора производства – труда, источником которого являются домашние хозяйства [2]. Продукты различных фирм являются несовершенными заменителями между собой с точки зрения своих потребительских качеств. Производственная функция i-й фирмы имеет вид:

$$y_{i}=F_{i}\left(n_{i}\right),$$

где n_{i} – объем используемого ею труда.

Выпишем прибыль i-й фирмы как функцию объема используемого труда:

$$PR_{i}\left(n_{i}\right)=p_{i}F_{i}\left(n_{i}\right)-w_{i}n_{i},$$

где p_{i} – цена ее продукта, w_{i} – назначаемая ею ставка заработной платы.

Предположим, что сектор потребления в экономике представлен N идентичными домашними хозяйствами, аргументами функций полезности которых являются совокупный объем потребления c и величина досуга l_{i} (9.65). Каждое, данное домашнее хозяйство предоставляет в распоряжение i-й фирмы рабочую силу требуемой квалификации в соответствии со своим ограничением по совокупному временно́му фонду жизнедеятельности, который нормируется на уровне 1 (9.66).

Как и ранее, будем предполагать, что зависимость полезности от потребления в выражении потребительских предпочтений (9.65) представляет собой монотонное возрастающее преобразование функции CES (9.68).

Объединенное, финансово-временно́е бюджетное ограничение потребителя имеет вид:

$$\frac{pc}{N}=\sum_{i=1}^{N} \frac{p_{i}c_{i}}{N}=w_{i}\left(1-l_{i}\right)+\sum_{i=1}^{N} \frac{PR_{i}}{N}=w_{i}-w_{i}l_{i}+\sum_{i=1}^{N} \frac{PR_{i}}{N},$$

или

$$\frac{pc}{N}+w_{i}l_{i}=\sum_{i=1}^{N} \frac{p_{i}c_{i}}{N}+w_{i}l_{i}=w_{i}+\sum_{i=1}^{N} \frac{PR_{i}}{N}. (9.86)$$

Итак, задача максимизации полезности потребителя (9.68) при условии ограничения по денежным расходам и по временно́му фонду жизнедеятельности (9.86) ставится в следующем виде:

$$\max_{c_{1},\ldots,c_{n},\, l_{i}} U\left(\frac{c}{N}, l_{i}\right)=\max_{c_{1},\ldots,c_{n},\, l_{i}}\left(u\left(\frac{\left(\sum_{i=1}^{N} c_{i}^{\frac{\varphi-1}{\varphi}}\right)^{\frac{\varphi}{\varphi-1}}}{N}\right)+\eta l_{i}^{\varepsilon}\right):$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{p_{i}c_{i}}{N}+w_{i}l_{i}=w_{i}+\sum_{i=1}^{N} \frac{PR_{i}}{N}.$$

Выписывая соответствующую функцию Лагранжа:

$$L=u\left(\frac{\left(\sum_{i=1}^{N} c_{i}^{\frac{\varphi-1}{\varphi}}\right)^{\frac{\varphi}{\varphi-1}}}{N}\right)+\eta l_{i}^{\varepsilon}+\lambda\left(w_{i}+\sum_{i=1}^{N} \frac{PR_{i}}{N}-\sum_{i=1}^{N} \frac{p_{i}c_{i}}{N}-w_{i}l_{i}\right),$$

получаем условие оптимальности по потреблению каждого блага (9.73).

Условие оптимальности по величине досуга выглядит так:

$$\frac{\partial L}{\partial l_{i}}=\eta \varepsilon l_{i}^{\varepsilon-1}-\lambda w_{i}=0. (9.87)$$

Выбор домашнего хозяйства можно также представить с точки зрения оптимизации агрегированного потребления (9.67):

$$\max_{c,\, l_{i}} U\left(\frac{c}{N}, l_{i}\right)=\max_{c_{1},\ldots,c_{n},\, l_{i}}\left(u\left(\frac{c}{N}\right)+\eta l_{i}^{\varepsilon}\right):$$

$$\frac{pc}{N}+w_{i}l_{i}=w_{i}+\sum_{i=1}^{N} \frac{PR_{i}}{N}.$$

Условие оптимальности по агрегированному потреблению будет иметь вид (9.75).

Объединяя соотношения (9.73) и (9.75), записываем эквимаржинальное условие оптимальности потребительского выбора, которое характеризует спрос на i-е благо как функцию его цены в реальном выражении $\frac{p_i}{p}$ при предположении о неизменном уровне совокупного потребления c (9.76).

Заменяя в условии оптимальности по величине досуга (9.87) множитель Лагранжа с помощью соотношения (9.75), из ограничения по индивидуальному временно́му фонду жизнедеятельности (9.66) можно получить функцию индивидуального предложения труда:

$$n_i = 1 - \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial c}}{\eta \varepsilon} \frac{w_i}{p} \right)^{\frac{1}{\varepsilon - 1}}. \quad (9.88)$$

Из выражения (9.88) можно получить обратную функцию предложения труда:

$$\frac{w_i}{p} = \frac{\eta \varepsilon}{\frac{\partial u}{\partial c}} (1 - n_i)^{\varepsilon - 1}. \quad (9.89)$$

Максимизируя прибыль, каждое, i-е предприятие определяет для себя оптимальный объем используемого труда в соответствии с условием:

$$\frac{\partial PR_i}{\partial n_i} = \frac{\partial TR_i}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial n_i} - w_i = p_i \left(1 + \frac{1}{E_{p_i}^{y_i}} \right) \frac{\partial F_i}{\partial n_i} - w_i = 0.$$

Данное необходимое условие максимизации прибыли с учетом эластичности спроса на продукт фирмы (9.77) и равновесия рынке данного продукта $(c_i = y_i)$ задает обратную функцию спроса на труд, предъявляемого данным, i-м предприятием:

$$\frac{w_i}{p} = \frac{(\varphi - 1)}{\varphi} \frac{p_i}{p} \frac{\partial F_i}{\partial n_i}. \quad (9.90)$$

Равенство ставок реальной заработной платы, присутствующих в соответствующих функциях предложения (9.89) и спроса (9.90)

$$\frac{w_i}{p} = \frac{\eta \varepsilon}{\frac{\partial u}{\partial c}} (1 - n_i)^{\varepsilon - 1} = \frac{(\varphi - 1)}{\varphi} \frac{p_i}{p} \frac{\partial F_i}{\partial n_i},$$

будет характеризовать равновесие на рынке труда и определять соответствующий объем трудозатрат n_i^* как функцию относительной цены i-го продукта $\frac{p_i}{p}$.

Равновесный объем отработанных человеко-часов труда $n_i^* \left(\frac{p_i}{p} \right)$, используемый в качестве аргумента производственной функции, будет задавать предложение продукта i-го вида:

$$y_i = F_i \left(n_i^* \left(\frac{p_i}{p} \right) \right). \quad (9.91)$$

Равенство спроса (9.76) и предложения (9.91) будет характеризовать сбалансированное состояние данного продуктового рынка, определяя равновесный уровень относительной цены i-го блага $\frac{p_i}{p}$:

$$c \left(\frac{p_i}{p} \right)^{-\varphi} = c_i = y_i = F_i \left(n_i^* \left(\frac{p_i}{p} \right) \right),$$

где совокупное потребление должно удовлетворять бюджетному ограничению (9.70):

$$c = \frac{w_i}{p} N n_i + \sum_{i=1}^{N} \frac{PR_i}{p} = \frac{w_i}{p} N n_i^* \left(\frac{p_i}{p} \right) + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i}{p} F_i \left(n_i^* \left(\frac{p_i}{p} \right) \right) - \frac{w_i}{p} n_i^* \left(\frac{p_i}{p} \right) \right).$$

Итак, состояние общего экономического равновесия на рынках рабочей силы и потребительских благ будет определяться системой условий (9.70), (9.76), (9.89)-(9.91):

$$\begin{cases} \frac{w_i}{p} = \frac{\eta \varepsilon}{\frac{\partial u}{\partial c}} (1 - n_i)^{\varepsilon - 1}, \\ \frac{w_i}{p} = \frac{(\varphi - 1)}{\varphi} \frac{p_i}{p} \frac{\partial F_i}{\partial n_i}, \\ \frac{c_i}{c} = \left(\frac{p_i}{p} \right)^{-\varphi}, \\ y_i = F_i \left(n_i^* \left(\frac{p_i}{p} \right) \right), \\ c = \frac{w_i}{p} N n_i^* \left(\frac{p_i}{p} \right) + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i}{p} F_i \left(n_i^* \left(\frac{p_i}{p} \right) \right) - \frac{w_i}{p} n_i^* \left(\frac{p_i}{p} \right) \right). \end{cases}$$

1. Ср.: Wickens M. Macroeconomic theory: a dynamic general equilibrium approach. 2nd ed. – Princeton, Oxford: Princeton univ. press, 2011. – P.315-320. ↩

2. Ср.: Wickens M. Macroeconomic theory: a dynamic general equilibrium approach. 2nd ed. – Princeton, Oxford: Princeton univ. press, 2011. – P.315-320. ↩

Глава 10. Внешние эффекты и общественные блага

10.1. Экстерналии. Неэффективность равновесия в экономике с экстерналиями. Регулирование экстерналий
10.2. Анализ рынков с сетевыми внешними эффектами

- 10.2.1. Сетевые отрасли и сетевые эффекты
- 10.2.2. Возможные варианты равновесий на рынке с сетевыми экстерналиями
- 10.2.3. Модель Каца-Шапиро
- 10.2.4. Регулирование сетевых экстерналий
- 10.2.5. Экономика платформ

10.3. Общественные блага

- 10.3.1. Эффективное предоставление общественного блага
- 10.3.2. Долевое финансирование общественных благ
- 10.3.3. Голосование
- 10.3.4. Назначение цен по Линдалю
- 10.3.5. Механизм Викри-Кларка-Гровса

Литература

10.1. Экстерналии. Неэффективность равновесия в экономике с экстерналиями. Регулирование экстерналий

10.1.1. Экстерналии. Неэффективность равновесия в экономике с экстерналиями

Экстерналии (или внешние эффекты) имеют место тогда, когда выбор одних индивидов влияет на выбор других индивидов непосредственно, а не опосредованно (т.е. через рыночные цены).

Классификация экстерналий с точки зрения их источника и рецепиента предполагает, что экстерналии могут:

1. порождаться в процессе производства и влиять на потребителей (в этом случае полезность, получаемая потребителем, зависит не только от выбираемого им набора, но и от производства соответствующих благ);
2. порождаться в процессе производства одних фирм и влиять на производственный процесс другой фирмы (в этом случае производственное множество фирмы определяется не только ее технологией, но и выпуском других фирм);
3. порождаться в процессе потребления одних потребителей и влиять на потребление другого потребителя (в этом случае полезность, получаемая потребителем, зависит не только от выбираемого им набора, но и от наборов, выбираемых другими потребителями);
4. порождаться в процессе потребления и влиять на производство (в этом случае производственное множество фирмы будет зависеть от наборов, выбираемых потребителями).

Экстерналии бывают положительными и отрицательными.

К примеру, когда в процессе производства блага создаются отрицательные экстерналии, предельные социальные издержки (издержки, которые несет общество в связи с созданием одной дополнительной единицы блага) оказываются выше предельных частных издержек (издержки, которые несет непосредственный производитель в связи с созданием одной дополнительной единицы блага), и объем выпуска блага оказывается выше общественно оптимального. Следовательно, в производство данного блага вложено слишком много ресурсов относительно реальных потребностей общества в целом.

Когда в процессе производства блага создаются положительные экстерналии, предельные социальные выгоды (выгоды, которые получает общество от одной дополнительной единицы блага) превышают предельные частные выгоды (индивидуальные выгоды от одной дополнительной единицы блага), и объем выпуска этого блага оказывается ниже общественно оптимального. Это означает, что в производство данного блага вложено слишком мало ресурсов относительно реальных потребностей общества в целом.

В отсутствие внешних эффектов рыночный механизм приводит к распределениям, эффективным по Парето.

10.1.2. Регулирование экстерналий

10.1.2.1. Налоги и субсидии Пигу [1]

Правительство в состоянии привести в соответствие предельные общественные и частные издержки и выгоды, прибегнув к налогам и субсидиям - такое решение предложил в 1920 г. английский экономист А.С. Пигу в работе «Экономическая теория благосостояния» (1920). Впоследствии корректирующие налоги и субсидии, устанавливаемые государством для интернализации отрицательных и положительных экстерналий, вошли в научный оборот как налоги Пигу и субсидии Пигу.

Рассмотрим внешний эффект, возникающий в процессе производства одного блага и оказывающий негативное влияние на результаты производителей других благ. Примером может быть производство, вредные отходы которого загрязняют окружающую среду, что снижает результативность производителей, использующих природные угодья.

Равновесный объем выпуска (Q) и равновесная цена (P) определяются точкой пересечения (E) кривой предельных частных издержек производства (MPC) и кривой предельных социальных выгод (MSB) потребителей, готовых платить за продукцию (рис. 10.1). Однако учет предельных внешних издержек (MEC) в сумме с предельными частными издержками дает величину предельных социальных издержек (MSC), характеризующую предельные издержки, которые несет общество в целом от экономической деятельности производителя. Следовательно, параметры точки пересечения кривой предельных социальных выгод (MSB) и кривой предельных социальных издержек (MSC) – точки E^* – определяют общественно оптимальный объем выпуска (Q^*) и общественно оптимальную цену (P^*), при которых внешний эффект не исчезает, но его воздействие приводится к общественно оптимальному, а связанные с ним издержки покрываются. Поскольку производитель по собственной инициативе не будет заинтересован в учете внешних издержек (к примеру, через финансирование очистки вредных отходов), это обязательство на него может возложить государство с помощью налога Пигу, равного предельным внешним издержкам: $t=MEC$.

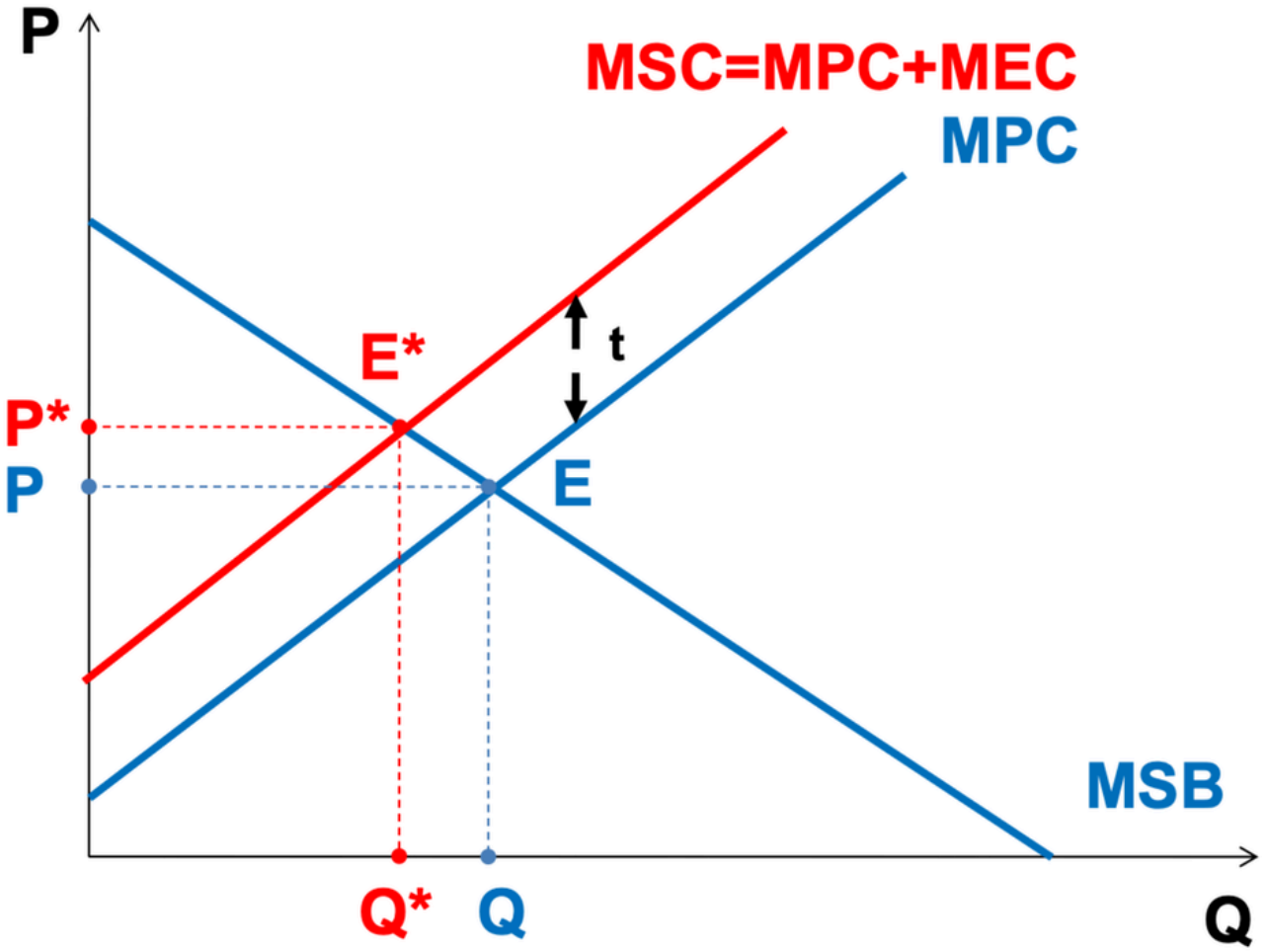


Рисунок 10.1. Интернализация отрицательного внешнего эффекта с помощью налога Пигу

«Так, о побочном некомпенсируемом ущербе для третьих лиц можно говорить в том случае, когда один человек занят тем, что выпускает кроликов, опустошающих растительность, в угодья, принадлежащие другому (если только эти люди не являются арендатором и землевладельцем, так что соответствующая компенсация выплачивается в форме арендных платежей). Ущерб обществу наносится также и в том случае, когда владелец участка, расположенного в жилом квартале, строит там фабрику, тем самым разрушая красоту пейзажа, когда он возводит на своем участке здание, затеняющее расположенные рядом дома или (если здание возводится в густонаселенном районе) не оставляющее людям места для отдыха, что вредит их здоровью и снижает производительность их труда. Третьим лицам (в данном случае всему обществу) наносится невосполнимый ущерб в результате инвестирования ресурсов в развитие производства легковых автомобилей, что приводит к быстрому изнашиванию дорожных покрытий. Подобный же ущерб наносится обществу в результате помещения средств в производство и продажу крепких напитков. Чтобы общественный чистый продукт, созданный в данной отрасли, мог соответствовать частному чистому продукту, эта отрасль должна, как заметил г-н Бернард Шоу, нести дополнительные расходы на обучение полицейских и содержание тюрем, которые она косвенно делает необходимыми» [2], - писал Пигу об экстерналиях, требующих корректировки с помощью налогов.

Интернализацию положительного внешнего эффекта можно рассмотреть на примере платных образовательных программ, которые приносят выпускникам предельные частные выгоды (*MPB*). При этом общество в целом получает предельные внешние выгоды (*MEB*) через более высокую отдачу от труда выпускников этих программ и распространение знаний. Поэтому предельные социальные выгоды (*MSB*) будут равны: *MSB=MPB+MEB*. Точка пересечения кривой предельных социальных выгод и кривой предельных социальных издержек (*MSC*) - точка *E** - отражает общественно оптимальную численность обучающихся (*Q**) и общественно оптимальную плату за обучение (*P**), которые превышают *P* и *Q*, соответствующие частному равновесию в точке *E*. Интернализация положительного внешнего эффекта должна обеспечить перемещение равновесия из точки *E* в точку *E**. Достичь такого результата можно благодаря субсидии Пигу, которая равна величине предельного внешнего эффекта: *s=MEB* (рис. 10.2).

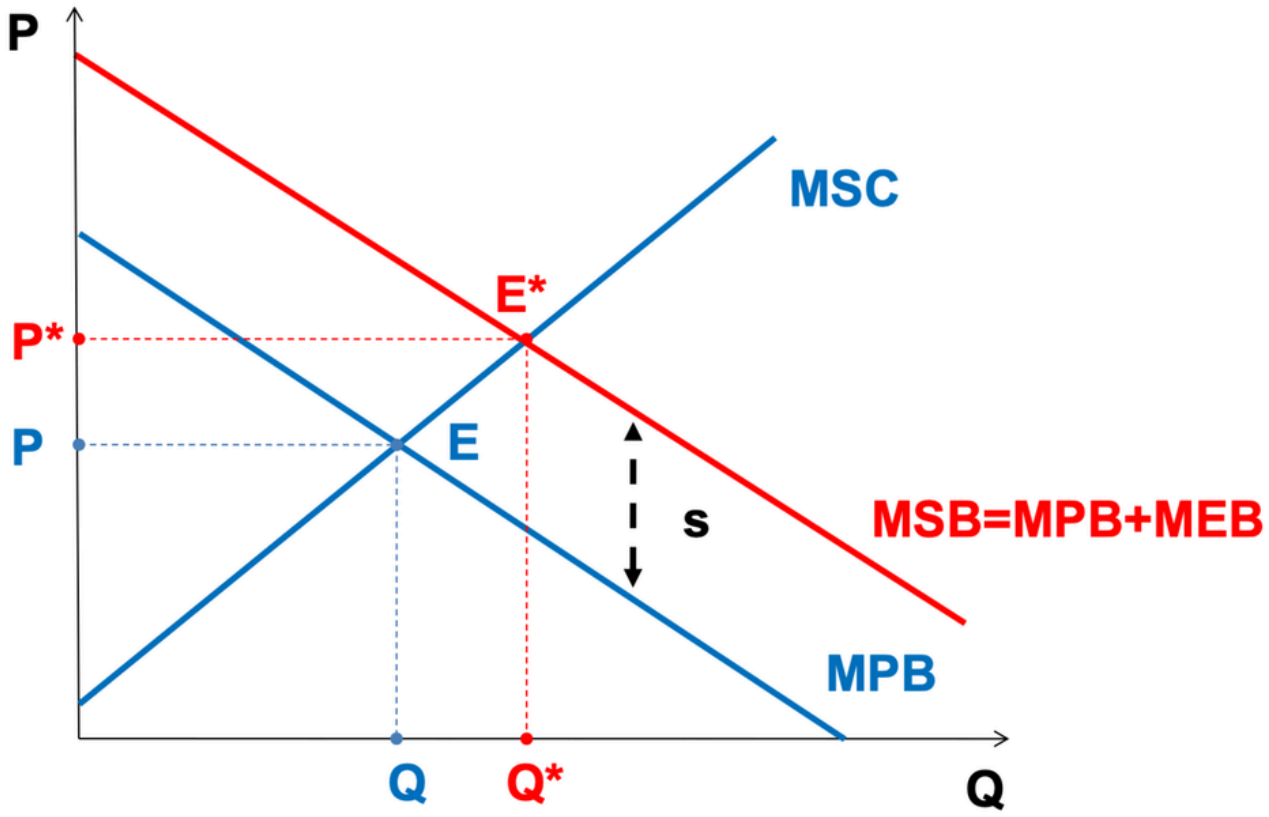


Рисунок 10.2. Интернализация положительного внешнего эффекта с помощью субсидии Пигу

Положительные экстерналии имеют место тогда, когда речь идет «о вложении средств в лесонасаждения (ведь благотворное влияние лесов на климат не ограничивается имениями тех людей, которые сажают деревья), и об установке фонарей возле дверей частных домов (поскольку эти фонари освещают и улицы), и об инвестировании ресурсов, направленном на очистку выбросов из заводских труб (известно, что в больших городах дым и копоть наносят огромный вред людям, зданиям и растениям, заставляют людей увеличивать расходы на стирку одежды и уборку помещений, на установку источников искусственного освещения и т.д.). Наконец, и это самое важное, предоставление услуги не сопровождается вознаграждением, когда речь идет о вложении ресурсов в решение фундаментальных научных проблем, без которого нередко невозможны открытия огромной практической важности» [3].

Таким образом, по А.С. Пигу, решение практических проблем, связанных с оптимизацией распределения ресурсов при наличии экстерналий, происходит через участие государства с помощью корректирующих налогов и субсидий.

Заглянем в Большую российскую энциклопедию:Налоги и субсидии Пигу

10.1.2.2. Теорема Коуза [4]

Возможность решения проблемы экстерналий силами конкурентного рынка обоснована американским экономистом Рональдом Коузом в 1960 г. в статье «Проблема социальных издержек».

Исследовательскую проблему Коуз сформулировал следующим образом: «Вопрос обычно понимался так, что вот А наносит ущерб В, и следует решить, как мы ограничим действия А? Но это неверно. Перед нами взаимосвязанные проблемы. Оберегая от ущерба В, мы навлекаем ущерб на А. Нужно принять решение: следует ли позволить А наносить ущерб В или нужно разрешить В наносить ущерб А? Проблема в том, чтобы избежать более серьезного ущерба» [5].

Коуз показал, что у конкурентного рынка достаточно возможностей для преодоления экстерналий без помощи государства, однако для этого необходим ряд условий:

- четкая спецификация прав собственности;
- небольшое число участников (в простейшем случае – два);
- единственность источника экстерналии;
- равенство нулю трансакционных издержек.

Экономический смысл, заложенный в теореме, передан Коузом на примере фермера, выращивающего пшеницу, и его соседа – хозяина скотоводческого ранчо, разводящего коров, которые регулярно отбиваются от стада, заходят на посевы фермера и стравливают их.

Примечательно, что Коуз так и не привел формулировки знаменитой теоремы, носящей его имя. Наиболее известная формулировка теоремы Коуза была дана в 1966 г. американским экономистом Джорджем Стиглером: «...в условиях совершенной конкуренции частные и социальные издержки равны» [6].

В научной и учебной литературе на русском языке теорема Коуза чаще всего цитируется в интерпретации Р.И. Капелюшникова: «Если права собственности четко определены и трансакционные издержки равны нулю, то аллокация ресурсов (структура производства) будет оставаться неизменной независимо от изменений в распределении прав собственности» [7].

Для доказательства теоремы Коуза приводятся две симметричные правовые позиции фермера и хозяина ранчо.

1. «Допустим, фермер получает на своих полях 10 ц зерна, а стадо хозяина ранчо насчитывает 10 коров. Выращивание еще одной коровы обойдется ему в 50 долл., а ее рыночная цена при продаже составит 100 долл. Предельные убытки фермера от увеличения стада на одну голову будут равны 1 ц зерна, или в стоимостном выражении - 80 долл. (20 долл. прямых затрат плюс 60 долл. недополученной прибыли). Случай явно экстернальный: социальные издержки равны 130 долл. (50 + 80), а социальная выгода от выращивания дополнительной коровы - 100 долл. Ясно, что такое распределение ресурсов неэффективно. Но если хозяин ранчо должен возместить фермеру причиненный ущерб, то тогда, взвесив свою частную выгоду и свои частные издержки (стоимость выращивания плюс компенсация), он откажется от решения об увеличении поголовья стада на одну единицу» [8].

2. «...ситуация будет совершенно симметричной и в том случае, если хозяин ранчо не несет никакой ответственности за потраву. Просто фермер предложит тогда хозяину ранчо "выкуп" за отказ от решения о выращивании еще одной коровы. Размер выкупа будет колебаться от 50 долл. (прибыль хозяина ранчо от выращивания одиннадцатой коровы) до 60 долл. (прибыль фермера от продажи десятого центнера зерна)» [9].

Итоги реализации обеих правовых позиций идентичны: оптимальная структура производства – 10 центнеров зерна и 10 коров. Следовательно, теорема доказана.

Теорема Коуза позволяет сделать следующие выводы:

- экстерналии возникают тогда, когда права собственности размыты;
- к экстерналиям приводит не рынок, а государство, если оно принимает нечеткие законы в области прав собственности.

Таким образом, главная причина экстерналий – не избыточное, а недостаточное развитие частной собственности. Это означает отсутствие необходимости в государственном вмешательстве в поиск источника внешнего эффекта и решение проблемы экстерналий путем корректирующих налогов и субсидий. Наличия института частной собственности и отсутствия препятствий для обмена правами собственности достаточно для того, чтобы экстерналии были самокорректирующимися.

Однако теорема Коуза идеально выполняется лишь при малом числе участников и равенстве нулю трансакционных издержек. Тем не менее, несмотря на нереалистичность этих условий, теорема Коуза, в частности, помогает выработать практические меры борьбы с загрязнением окружающей среды путем введения:

- стандартов загрязнения;
- платы за вредные выбросы;
- продажи прав (лицензий) на загрязнения.

Заглянем в Большую российскую энциклопедию:
Теорема Коуза

Междисциплинарный взгляд:
Теорема Коуза: трансакционные издержки и дискретные институциональные альтернативы (Материал интерактивного цифрового учебника «Институциональная экономика»)

Междисциплинарный взгляд:
Виды экстерналий и инструменты их интернализации (Материал интерактивного цифрового учебника «Основы экономики устойчивого развития»)

---

1. *В тексте параграфа использованы материалы статьи: Антипина О.Н. Налоги и субсидии Пигу // Большая российская энциклопедия: научно-образовательный портал – URL: https://bigenc.ru/c/nalogi-i-subsidii-pigu-8c5ff3/?v=10004786. – Дата публикации: 14.03.2024.* ↩
2. Пигу А. Экономическая теория благосостояния. В 2-х т. М.: «Прогресс», 1985. Т. 1. С. 253-254. ↩
3. Там же. С. 252. ↩
4. *В тексте параграфа использованы материалы работ: Антипина О. Н. Теорема Коуза // Большая российская энциклопедия: научно-образовательный портал – URL: https://bigenc.ru/c/teorema-kouza-5994c8/?v=9751292. – Дата публикации: 15.02.2024;* ***Антипина О.Н., Миклашевская Н.А.*** *Основы современной микро- и макроэкономики. Учебник. - М.: КНОРУС, 2024. Тема 7 (7.3).* ↩
5. Коуз Р. Проблема социальных издержек // Коуз Р. Фирма, рынок и право. – М.: Новое издательство, 2007. С. 92-93. ↩
6. Stigler G.J. The Theory of Price. 3rd ed. – N.Y.: Macmillan Co., 1966. P. 113. ↩
7. Капелюшников Р.И. Экономическая теория прав собственности (методология, основные понятия, круг проблем). – М.: ИМЭМО РАН, 1991. ↩
8. Там же. ↩
9. Там же. ↩

10.2. Анализ рынков с сетевыми внешними эффектами

10.2.1. Сетевые отрасли и сетевые эффекты
10.2.2. Возможные варианты равновесий на рынке с сетевыми экстерналиями
10.2.3. Модель Каца-Шапиро
10.2.4. Регулирование сетевых экстерналий
10.2.5. Экономика платформ

10.2.1. Сетевые отрасли и сетевые эффекты

Многие отраслевые рынки в современной экономике, которую характеризуют как информационную, цифровую и непосредственно сетевую, имеют сетевую природу, поскольку производители и потребители их продуктов связаны между собой в реальные или виртуальные сети. Так, например, узлы реальных сетей образуют производители и потребители услуг телефонных компаний, а производители и потребители компьютеров и программного обеспечения объединены невидимыми связями (не менее важными, чем реальные), создающимися благодаря характерным особенностям сетевых отраслей [1].

Сетевым отраслям в информационной экономике присущи следующие черты:

а) Комплементарность и сопоставимость продукции, а также ее соответствие четким стандартам.

Комплементарность продукции означает, что потребитель может извлечь полезный эффект от потребления благ только в комплекте, для чего блага должны быть сопоставимыми благодаря соответствию стандартам. Например, для подключения к Интернету каждому потенциальному пользователю необходим компьютер установленным программным обеспечением и роутер. При этом все три продукта должны быть сопоставимы, отвечая заданным стандартам.

б) Высокие издержки переключения и эффект «запирания клиента».

Существует несколько разновидностей причин возникновения издержек переключения, приводящих к «запиранию клиентов», в роли которых могут выступать отдельные потребители, фирмы и даже общество в целом [2]:

- контракты, расторжение которых с целью переключения на иной вид услуг требует выплаты компенсации;
- инвестиции в обучение и приобретение навыков использования благ, наличие которых определяет издержки переключения потребителя на продукт конкурента, несмотря на то что по каким-либо отдельным потребительским характеристикам он может даже превосходить его;
- необходимость преобразования данных, сохраненных в определенном цифровом формате, при переключении на другое программное обеспечение;
- издержки поиска, на которые потребители не хотят идти ради нового продукта или услуги;
- издержки лояльности, связанные с нежеланием терять привилегии постоянных покупателей тех или иных продавцов.

в) Существенная экономия на масштабе производства вследствие высоких постоянных и низких предельных издержек.

Производство сетевых благ, имеющих информационную природу, характеризуется рядом особенностей, связанных с издержками:

- в издержках производства доминируют издержки первого экземпляра («издержки первой копии»);
- большую часть постоянных издержек производства составляют невозвратные издержки;
- предельные издержки не возрастают по мере увеличения выпуска (числа копий);
- величина предельных издержек низка (часто близка к нулю) и, как правило, равна цене носителя.

В результате, в производстве сетевых информационных благ наблюдается существенная экономия на масштабе производства. Очень высокие невозвратные постоянные издержки и близкие к нулю неизменные предельные издержки объясняют стабильный отрицательный наклон кривой средних издержек производства. Самый яркий пример – производство программных продуктов, где затраты на создание оригинала могут достигать миллионов долларов, а на изготовление копий – быть нулевыми (при “скачивании” программы через Интернет) или почти нулевыми, равными цене носителя (при записи программы на диск).

г) Сетевые экстерналии как действующая на стороне спроса причина экономии на масштабе производства.

Сетевые экстерналии имеют место тогда, когда полезность блага для одного потребителя растет в зависимости от числа других людей (участников сети), потребляющих данный товар.

Существует несколько разновидностей сетевых экстерналий:

1. Явные сетевые эффекты возникают в реальных сетях, когда пользователи имеют непосредственную возможность взаимодействовать друг с другом. Например, полезность электронного почтового адреса или аккаунта в социальной сети тем выше, чем больше количество обладателей аналогичного блага, с которыми можно обмениваться письмами, фотографиями, постами.
2. Неявные сетевые эффекты имеют место в виртуальных сетях, когда пользователи неявно взаимодействуют друг с другом. К примеру, потребителям выгодно покупать компьютеры с единой операционной системой, поскольку количество программ и приложений, которое пишется именно для этой системы, будет возрастающей функцией от числа проданных компьютеров.
3. Продолжительные внешние эффекты возникают в потреблении товаров длительного пользования, когда доступность и качество послепродажного обслуживания зависит от наличия и развитости сервисной сети, которые в свою очередь зависят от числа проданных единиц блага. Эта разновидность внешних эффектов имеет место, в частности, на рынке автомобилей, где от популярности иностранных марок зависит наличие дилерских сервисных центров и набор их услуг.

Также сетевые эффекты потребления возникают как результат модной тенденции, большей узнаваемости бренда и по ряду других причин.

Структура рынка с сетевым внешним эффектом потребления может быть различной. Предложение блага может быть обеспечено как одной, так и множеством фирм. Причем, сетевой эффект может создаваться продукцией части действующих на рынке фирм,

как это имеет место, к примеру, на рынке компьютеров, потребители которых ориентированы либо на операционную систему Windows, либо на операционную систему Mac.

Необходимо подчеркнуть, что каждая из выделенных характерных черт сетевых отраслей в отдельности присуща не только этому типу отраслей и не представляет собой абсолютно новое явление. Комплементарность, сопоставимость, стандарты, издержки переключения встречаются в различных отраслях, а феномен положительной отдачи от масштаба неоклассическая микроэкономика исследует еще с конца XIX в. применительно к естественным монополиям и практически любому крупному производству (автомобильные, металлургические, химические и др. предприятия). Даже сетевые экстерналии с успехом испытала на себе компания АТТ еще столетие назад, на заре развития телекоммуникационной отрасли. АТТ стала монополистом на рынке звонков на дальние расстояния в США и получала возрастающую отдачу с ростом числа участников сети, принимающих ее технические стандарты. АТТ могла даже взимать большую плату за локальные звонки, чем ее независимые конкуренты (и тем самым проигрывать им в конкурентной борьбе за локальные звонки), но ее трафик рос благодаря возможности эффективного обеспечения звонков на дальние расстояния [3].

Более того, сетевая форма организации отраслей также не нова, ибо термин «сеть» употребляется в отношении и железных дорог, и телефонных линий, и нефтепроводов, и других отраслей, успешно развивавшихся и в индустриальную эпоху. Однако о возникновении информационной, цифровой или сетевой экономики стало возможным говорить лишь тогда, когда человечество испытало на себе последствие информационной революции второй половины XX в. – быстрое распространение информационно-коммуникационных технологий. Экспансия информационно-коммуникационных технологий стала причиной экспансии сетевых отраслей.

---

1. В тексте параграфа использованы материалы книги: Антипина О.Н. Информационная экономика: современные технологии и ценообразование. – М.: Экономический факультет МГУ, ТЕИС, 2009. Глава 5 (п. 5.2.1). ↩

2. См.: Shapiro C., Varian H. Information Rules: A Strategic Guide to the Network Economy. - Boston, Mass.: Harvard Business School Press, 1999. P. 11-12. ↩

3. См.: Shapiro C., Varian H. Information Rules: A Strategic Guide to the Network Economy. - Boston, Mass.: Harvard Business School Press, 1999. P. 212-214. ↩

10.2.2. Возможные варианты равновесий на рынке с сетевыми экстерналиями

На рынке с сетевыми экстерналиями важную роль играют ожидания участников относительно размера сети, которые влияют на возможные равновесные состояния. [1]

Кривая спроса на рынке с сетевыми экстерналиями называется *кривой сбывшихся ожиданий* относительно размера сети и имеет вид «бугорка» (рис. 10.3). При нулевом размере сети никто не готов платить за благо. Возрастающий участок кривой сбывшихся ожиданий отражает увеличивающуюся по мере роста размера сети готовность платить каждого дополнительного потребителя, испытывающего выгоду от сетевого эффекта. Однако сеть может охватывать и тех, кто готов платить меньше и подключается к ней позднее. Поэтому убывающий участок кривой сбывшихся ожиданий отражает снижающуюся вплоть до нуля предельную готовность платить, когда все, кто хотел, уже стали участниками сети.

Роль кривой предложения может играть кривая предельных издержек.

Критической массой пользователей называется размер сети, после достижения которого численность ее участников либо падает до нуля, либо стремительно возрастает. Она не является устойчивой величиной. Различные события могут сформировать у подключившихся индивидов пессимистичные ожидания относительно будущего сети, и они откажутся от дальнейшего участия в ней. В таком случае устойчивое равновесие установится при нулевом числе пользователей. Оптимистичные ожидания относительно перспектив распространения сетевого блага могут стимулировать сеть к расширению вплоть до достижения устойчивого равновесия при почти полном (но не 100%-м) охвате сетью всех потенциальных участников.

Интерактивный рисунок из 3 частей (Информация для технического специалиста: в качестве образца для оформления рисунка используйте Figure 7.4a, 7.4b по ссылке: *https://www.core-econ.org/the-economy/microeconomics/07-firm-and-customers-02-breakfast-cereal.html#figure-7-4ad****)***

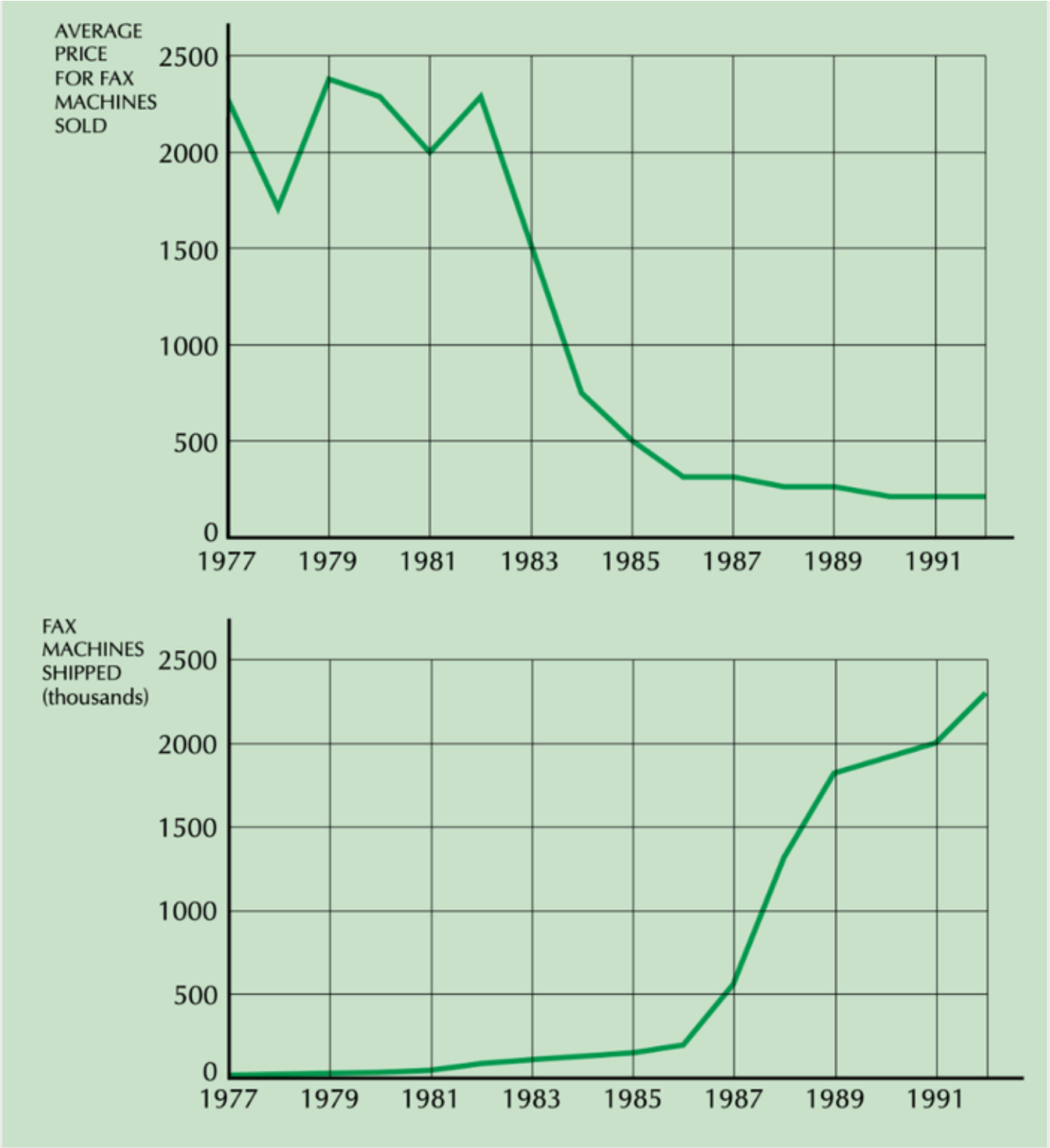
Рисунок 10.3. Варианты равновесий на рынке с сетевыми экстерналиями



Наблюдательный микроэкономист: Факс-машина и электронная почта

Шотландский изобретатель Александер Бэйн запатентовал базовую технологию факс-машины еще в 1843 г., однако появившиеся в 1950-х гг. факсимильные аппараты вплоть до середины 1980-х гг. использовались лишь для того, чтобы оперативно передавать сводки погоды в аэропортах. И если в 1982 г. практически ни одна фирма не имела такого аппарата, то в 1987 г. ими уже пользовались почти повсеместно. За пять лет рынок факс-машин пережил взрыв спроса и колоссальный ответ со стороны предложения [2].

О быстроте распространения сетевого эффекта можно составить представление по ситуации на рынке факсимильных аппаратов в США в 1977-1992 гг., которую описал Хэл Вэриан. В конце 1970-х цена факсимильного аппарата была очень высока, но с течением времени постепенно снижалась. В середине 1980-х из-за случайных колебаний или из-за преднамеренной стратегии продавцов продажи факс-машин превысили критическую массу: произошло резкое падение цен и одновременное резкое увеличение спроса.



Источник рисунка: Shapiro C., Varian H.R. Notes to accompany Information Rules: A Strategic Guide to the Network Economy, Harvard Business School Press, 1998. Adopted from Hal R. Varian, Intermediate Microeconomics, 5th edition, W. W. Norton & Co., 1999. P. 6. // https://inforules.com/models/m-net.pdf.pdf

Однако сетевые эффекты могут исчезнуть так же внезапно, как и возникнуть. Факс-машины были вытеснены электронными коммуникациями благодаря развитию технологий и связанным с ними новым сетевым эффектам.

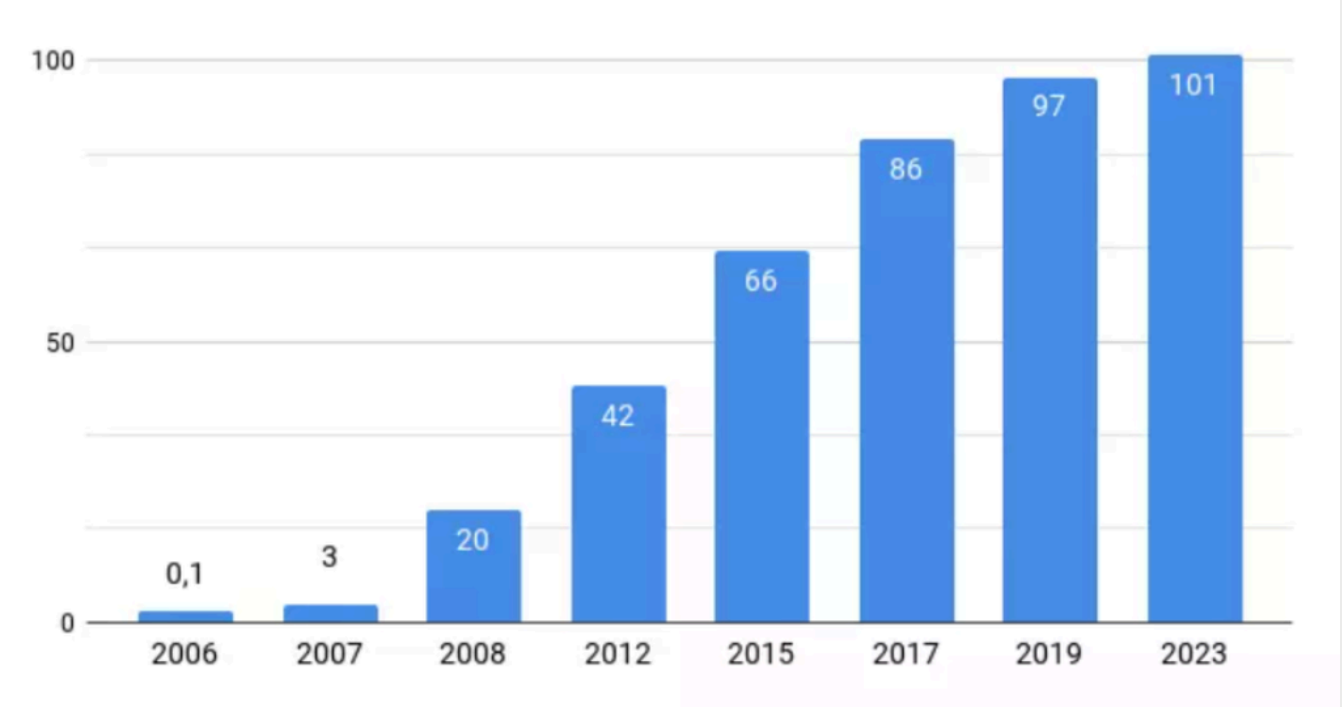
Для превышения критической массы пользователей электронной почтой потребовалось почти 30 лет. Первое электронное сообщение было отправлено в 1969 г., однако адаптация рынка к этой новинке продолжалась вплоть до середины 1980-х гг. В итоге, с 1989 по 1995 г. Интернет-трафик удваивался каждый год, а после 1995 г. стал расти еще быстрее [3].

Источники: Shapiro C., Varian H.R. Notes to accompany Information Rules: A Strategic Guide to the Network Economy, Harvard Business School Press, 1998; Shapiro C., Varian H. Information Rules: A Strategic Guide to the New Economy. - Boston, Mass.: Harvard Business School Press, 1999; Антипина О.Н. Информационная экономика: современные технологии и ценообразование. – М.: Экономический факультет МГУ, ТЕИС, 2009.

Наблюдательный микроэкономист: ВКонтакте

Ярким примером положительных сетевых экстерналий можно считать рост числа пользователей основанной 1 октября 2006 г. в г. Санкт-Петербурге (Россия) социальной сети ВКонтакте. Всего за первые пять лет существования, ВКонтакте стала самой популярной социальной сетью в России и странах СНГ. В 2023 г. международная аудитория ВКонтакте составила 101,7 млн активных пользователей в месяц, а в России достигла 79,5 млн. Таким образом, каждый месяц ВКонтакте используют почти 54% населения России.

В среднем аудитория ВКонтакте растет на 32% каждый год. Наибольший рост наблюдался в 2006-2007 гг., когда численность пользователей социальной сети выросла со 100 тысяч до 3 млн человек или на 2900%, что свидетельствовало о достижении критической массы участников сети.



Источник: Статистика ВКонтакте в 2023 году. Режим доступа: \lt https://inclient.ru/vk-stats/>.

1. См.: Shapiro C., Varian H.R. Notes to accompany *Information Rules: A Strategic Guide to the Network Economy*, Harvard Business School Press, 1998. Adopted from Hal R. Varian, *Intermediate Microeconomics*, 5th edition, W. W. Norton & Co., 1999. // https://inforules.com/models/m-net.pdf.pdf; Антипина О.Н. Информационная экономика: современные технологии и ценообразование. – М.: Экономический факультет МГУ, ТЕИС, 2009. С. 230-231. ↩

2. Антипина О.Н. Информационная экономика: современные технологии и ценообразование. – М.: Экономический факультет МГУ, ТЕИС, 2009. С. 231. ↩

3. См.: Shapiro C., Varian H. Information Rules: A Strategic Guide to the New Economy. - Boston, Mass.: Harvard Business School Press, 1999. P. 13. Антипина О.Н. Информационная экономика: современные технологии и ценообразование. – М.: Экономический факультет МГУ, ТЕИС, 2009. С. 231. ↩

10.2.3. Модель Каца-Шапиро

10.2.3.1. Предпосылки модели

Модель, описывающая воздействие внешних эффектов потребления на конкуренцию, характер рыночного равновесия и решения о совместимости продуктов, была предложена Майклом Кацем и Карлом Шапиро в 1985 г. [1]

С помощью этой модели исследуются две группы проблем:

Первая: воздействие внешних эффектов потребления на конкуренцию и характер рыночного равновесия, в установлении которого важную роль играют ожидания потребителей относительно размера сети.

Вторая: принципы принятия фирмой решения о производстве продукции, совместимой с продукцией других фирм.

Модель Каца-Шапиро основана на следующих предпосылках:

1. Рассматривается частичное равновесие в олигополистической отрасли.
2. Модель носит статический одноперiодный характер.
3. Эффект дохода отсутствует.
4. Потребитель либо не совершает покупок, либо покупает одну единицу товара одного бренда.
5. Цель потребителя – максимизировать потребительский излишек, величина которого зависит от числа других потребителей товара.

6. Потребители строят ожидания относительно размеров сетей и относят каждую фирму к одной из сетей до совершения покупки, т.е. до того, как фактические размеры сетей становятся известными.
7. Все потребители имеют одинаковые ожидания по поводу размеров сетей.
8. Потребители разнородны с точки зрения базовой готовности платить за товар, но однородны в оценках сетевых внешних эффектов.
9. Каждая фирма производит продукцию одного бренда и принимает решение о выпуске, считая ожидания потребителей заданными.
10. Сети и их продукты однородны, т.е. если две сети имеют одинаковый размер, то потребители считают их совершенными субститутами.
11. Потребители сравнивают свои резервные цены, основанные на ожидаемых размерах сетей, с множеством цен, предложенных фирмами, и принимают решения о покупке.
12. В состоянии равновесия ожидания потребителей исполняются, т.е. рассматривается так называемое «рациональное равновесие» или равновесие с исполняющимися ожиданиями.

10.2.3.2. Условия модели: потребители

Пусть:

i - множество фирм на рынке, $i = 1, \ldots, n$;

x_i^e – ожидаемое потребителем число заказчиков фирмы i;

y_i^e - прогнозируемый потребителем размер сети, в которую включена фирма i.

Тогда, если бренды несовместимы, то каждая фирма создает свою собственную сеть, так что $y_i^e = x_i^e$.

Если продукция m фирм (для брендов с 1 по m) совместима, то для их брендов существует общая сеть, так что

$$y_i^e = \sum_{j=1}^{m} x_j^e \text{ для } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Пусть:

r – базовая готовность потребителя типа r платить за товар, которая равномерно распределена между $-\infty$ и A с единичной плотностью, где $A > 0$, что равносильно предположению о линейности спроса на товар [2];

$v(y)$ – оценка внешнего эффекта потребления при условии, что число подключившихся к сети равно y, причем $v(0) = 0, v' > 0, v'' < 0$ и $\lim\limits_{y \to \infty} v'(y) = 0$;

p_i – цена, запрашиваемая за бренд i.

Тогда потребитель типа r выберет тот бренд, для которого максимально значение выражения:

$$r + v\left(y_i^e\right) - p_i. \quad (10.2.1)$$

Если же $r + v\left(y_i^e\right) - p_i < 0$, потребитель типа r не выходит на рынок и не совершает покупок.

10.2.3.3. Условия модели: фирмы

Поскольку товары однородны, фирмы i и j будут иметь положительные значения продаж, только если

$$p_i - v\left(y_i^e\right) = p_j - v\left(y_j^e\right), \quad (10.2.2)$$

где $p_i - v\left(y_i^e\right) u p_j - v\left(y_j^e\right)$ - ожидаемые гедонические [3] цены брендов i и j, т.е. цены с поправками на размеры сетей.
Экономический смысл равенства (10.2.2) состоит в том, что когда разные фирмы имеют положительные значения продаж, гедонические цены их однородных товаров должны быть равны.

Пусть:

$$p_i - v\left(y_i^e\right) = p_j - v\left(y_j^e\right) = \varphi.$$

Тогда при заданной величине φ на рынок выходят только те потребители, для которых $r \geq \varphi$. Поскольку распределение r равномерно, таких потребителей будет $A - \varphi$. Следовательно, если все фирмы продают $z \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ единиц товара, то цены должны устанавливаться так, что $A - \varphi = z$, или:

$$A + v\left(y_i^e\right) - p_i = z \text{ для любого } i \text{ при } x_i > 0. \quad (10.2.3)$$

Из уравнения (10.2.3) выразим цену, которую получает фирма i:

$$p_i = A + v\left(y_i^e\right) - z. \quad (10.2.4)$$

Очевидно, что цена, которую получает фирма i положительно зависит от ожидаемого размера сети и отрицательно – от общих продаж всех фирм.

Фирмы, действующие в отрасли, сталкиваются с издержками двух типов:

1. Издержки производства, равные $G + gx$, где G – постоянные издержки, а g – предельные издержки. Для упрощения предполагается, что $G = 0$ и $g = 0$. Равенство нулю предельных издержек равносильно переопределению r как превышения базовой готовности потребителя типа r платить за товар над неизменными предельными издержками его производства. Отсюда становится ясен экономический смысл отрицательных значений r.

2. Издержки достижения совместимости, которые для фирмы i равны постоянной величине F_i в том случае, если эта фирма разрабатывает совместимый товар или адаптер (дополнительное устройство, делающее товар совместимым), а также ведет необходимые переговоры, выводит на рынок совместимый товар и т.п. Эти издержки могут быть разными у разных фирм.

Если товары всех n фирм несовместимы, то $y_i^e = x_i^e$ и тогда фирма i получает прибыль, равную:

$$\pi_i = x_i \left(A + v\left(y_i^e\right) - z\right), \text{ (10.2.5)}$$

где x_i - продажи фирмы i.

Если товары всех n фирм совместимы, то ожидаемый размер сети равен величине ожидаемых продаж всех фирм: $y_i^e = \sum_{j=1}^{n} x_j^e \equiv z^e$. Тогда, выпуская x_i единиц продукции фирма i получает прибыль, равную:

$$\pi_i = x_i \left(A + v\left(z^e\right) - z\right) - F_i. \text{ (10.2.6)}$$

10.2.3.4. Равновесие с исполняющимися ожиданиями

Условия равновесия в модели Каца-Шапиро соответствуют условиям равновесия по Курно с исполняющимися ожиданиями (Fulfilled Expectations Cournot Equilibrium – *FECE*), когда каждая фирма выбирает свой уровень выпуска, исходя из следующих предположений:

a. ожидания потребителей по поводу размеров сетей $\left(y_1^e, y_2^e, \ldots, y_n^e\right)$ заданы;
b. текущий уровень выпуска других фирм $\sum_{j \neq i} x_j \equiv x_{-i}$ постоянен.

Из условия первого порядка для задачи максимизации прибыли фирмы i, заданной функцией (10.2.5), следует, что равновесные уровни продаж $\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$должны удовлетворять уравнению, правая часть которого равна p_i:

$$x_i^* = A + v\left(y_i^e\right) - \sum_{j=1}^{n} x_j^* \text{ для } i = 1, 2, \ldots, n. \text{ (10.2.7)}$$

Решение уравнения (10.2.7) для любого заданного набора ожиданий дает единственное равновесие по Курно, соответствующее этому набору:

$$x_i^* = \frac{A + nv\left(y_i^e\right) - \sum_{j \neq i} y_j^e}{n+1} \text{ для } i = 1, 2, \ldots, n. \text{ (10.2.8)}$$

Равенство (10.2.8) определяет функцию $\Gamma\left(y^e\right)$, ставящую в соответствие ожиданиям $\left(y_1^e, y_2^e, \ldots, y_n^e\right)$ равновесные по Курно размеры сетей $\left(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*\right)$.

В условиях равновесия по Курно с исполняющимися ожиданиями, если потребители ожидают, что размеры сетей будут $y^* = \left(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*\right)$, то они действительно будут такими, т.е.: $y^* = \Gamma\left(y^*\right)$.

10.2.3.5. Общественное благосостояние

Поскольку, согласно уравнению (10.2.7), выпуск фирмы i равен получаемой этой фирмой цене, ее равновесная прибыль равна $\pi_i = \left(x_i\right)^2$, а суммарная прибыль всех фирм составляет $\pi \equiv \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ и служит мерой суммарного излишка производителей.

Из уравнений (10.2.1) и (10.2.3) следует, что от присоединения к сети потребитель r ожидает получить излишек, равный $r + z - A$, а к сети присоединяются лишь те потребители, для которых $r > A - z$. Тогда ожидаемый суммарный излишек всех потребителей составит:

$$CS(z) = \int_{A-z}^{A} (\rho + z - A)\, d\rho = \tfrac{z^2}{2}. \text{ (10.2.9)}$$

Поскольку рассматривается равновесие с исполняющимися ожиданиями, ожидаемый потребительский излишек будет равен фактическому.

Таким образом, общественное благосостояние в равновесии по Курно с исполняющимися ожиданиями задается следующим образом:

$$W\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \pi\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) + CS\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \tfrac{z^2}{2}. \text{ (10.2.10)}$$

10.2.3.6. Описание равновесий для случаев совместимых и несовместимых товаров

а) Полная совместимость

Если любые два товара полностью совместимы друг с другом, то ожидаемый размер единственной сети составит $Z^e = \sum_{i=1}^{n} x_i^e$ и для любого i будет выполняться равенство: $y_i^e = z^e$.

В этом случае уравнение (10.2.8) примет вид:

$$x_i^* = \frac{A + v\left(z^e\right)}{n+1} \text{ для } i = 1, 2, \ldots, n. \text{ (10.2.11)}$$

С учетом условия исполнения ожиданий $z^e = x_1^* + x_2^* + \ldots + x_n^*$ величина отраслевого выпуска в условиях *FECE* для случая совместимых товаров (z^C) получается путем суммирования (10.2.11) по всем i:

$$z^C = \left(\frac{n}{n+1}\right)(A + v(z^C)). \text{ (10.2.12а)}$$

Или:

$$\frac{n+1}{n} z^C = \left(A + v\left(z^C\right)\right). \text{ (10.2.12б)}$$

Исходя из предположений о функции $v(\cdot)$, уравнение (10.2.12) имеет единственное решение, которое будет симметричным для любого i (рис. 10.4):

$$x_i^C = \frac{z^C}{n}.$$

Если число фирм неограниченно возрастает, *FECE* при полной совместимости превращается в равновесие в условиях совершенной конкуренции: z^C стремится к $A + v(z^C)$, а гедоническая цена $A + v(z^C) - z^C$ – к нулевому значению предельных издержек.

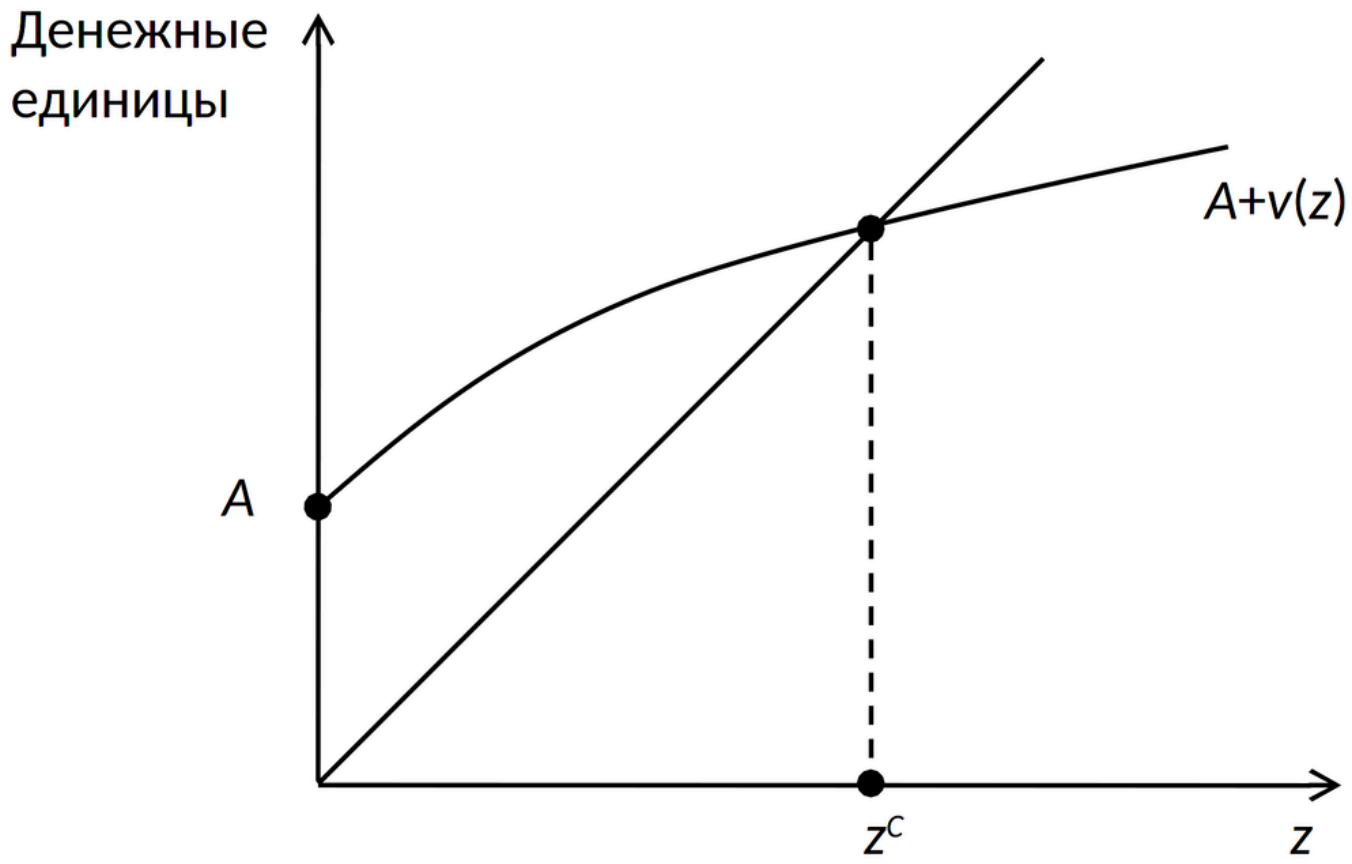


Рисунок 10.4. Равновесие при полной совместимости

б) Полная несовместимость

Если любые два товара несовместимы друг с другом, а значит $y_i^e = x_i^e$, каждая фирма определяет свое равновесие при заданных выпусках x_j других фирм ($j \neq i$) и ожиданиях потребителей x_i^e.

С учетом условия исполнения ожиданий $x_i = x_i^e$ из уравнения (10.2.7) получаем:

$$x_i = A + v(x_i) - z.$$

Или:

$$\sum_{j \neq i} x_j = A + v(x_i) - 2x_i \text{ для } i = 1, 2, \ldots, n. \text{ (10.2.13)}$$

Уравнение (10.2.13) для заданного x_{-i} имеет вид:

$$x_{-i} = A + v\left(x_i\right) - 2x_i$$

Оно может быть решено относительно x_i.

Кривая уравнения (10.2.13) называется кривой соответствия равновесных реакций фирмы i. Она отличается от стандартной функции реакции тем, что определяет не наилучший ответ фирмы i на действия других фирм при заданных ожиданиях, а каждому из наборов ожиданий она ставит в соответствие свою функцию реакций фирмы i. К примеру, как показано на рис. 10.5, если другие фирмы установили свой выпуск на уровне $\hat{x}_{-i}$, то наилучшим ответом фирмы i на этот выпуск других фирм будет исполнить ожидания потребителей как экзогенные, т.е. $\tilde{x}_i$ или $\overline{x}_i$.

Кривая соответствия равновесных реакций фирмы i включает участок оси ординат \(x_{-i\) для $x_{-i} > A$, поскольку для фирмы i наилучшим выбором при $x_i^e = 0$ и $x_{-i} > A$ будет $x_i = 0$. Кривая соответствия равновесных реакций может быть строго убывающей, если $v'(0) < 2$.

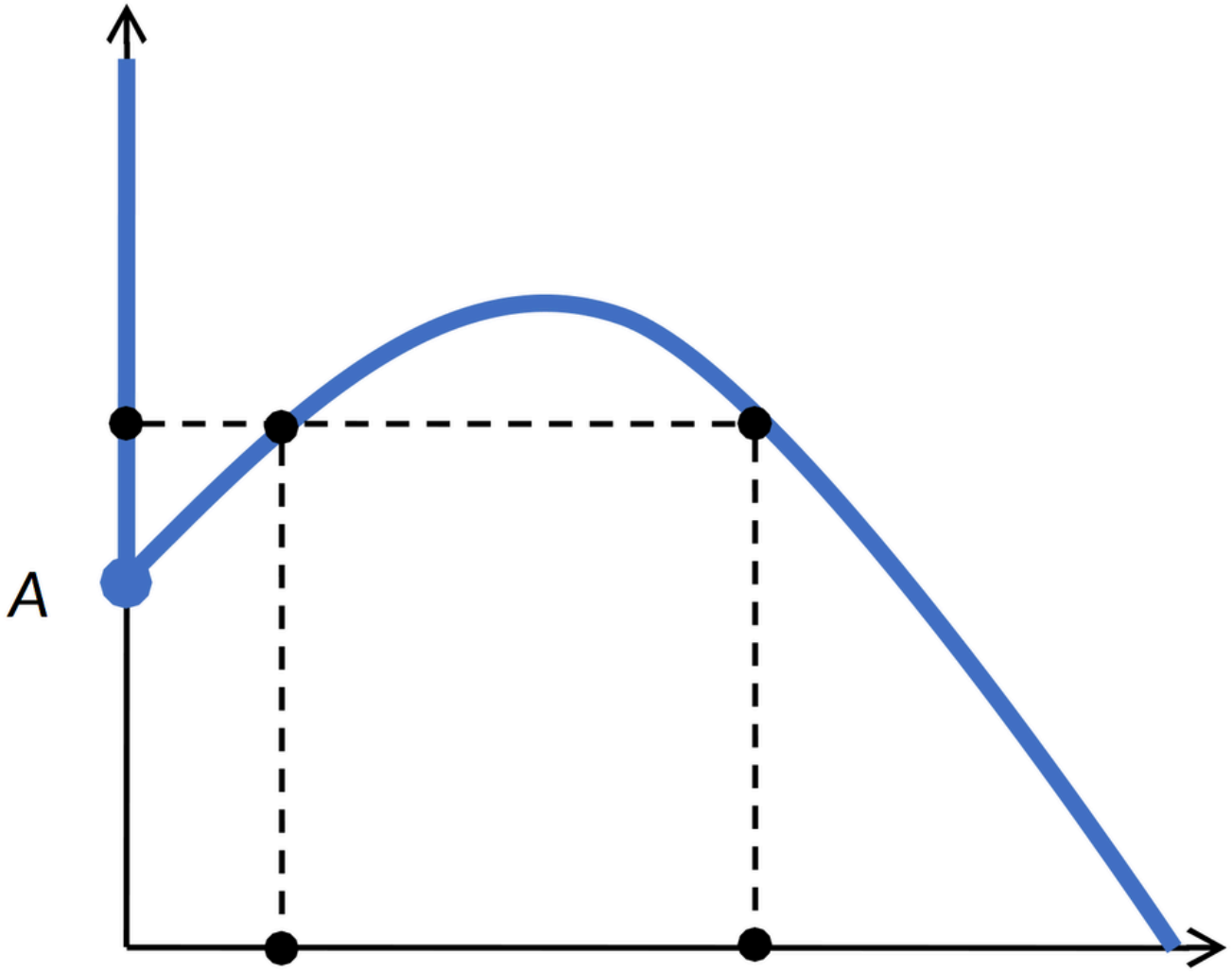


Рисунок 10.5. Кривая соответствия равновесных реакций фирмы i

В случае несовместимости сетей конкурирующих фирм возможны равновесия трех видов:

1. симметричная олигополия с n действующими фирмами;
2. симметричная олигополия с $k < n$ действующими фирмами или естественная олигополия;
3. асимметричная олигополия.

1. Симметричная олигополия.

   При $x_i = \frac{z}{n}$ просуммировав уравнение (10.2.13) по всем $i = 1, 2, \ldots, n$, получаем уравнение, имеющее единственное решение:

   $$(n-1)z = nA + nv\left(\frac{z}{n}\right) - 2z.$$

   Или:

   $$\left(\frac{n+1}{n}\right)z^I = A + v\left(\frac{z^I}{n}\right), \quad (10.2.14)$$

   где z^I - величина отраслевого выпуска для случая несовместимых товаров (рис. 10.6).

   Уравнение (10.2.14) неявно задает общие продажи фирм (z^I), если любой товар несовместим с каждым из $(n-1)$ товаров других брендов. В единственном симметричном равновесии $x_i = \frac{z^I}{n}$.

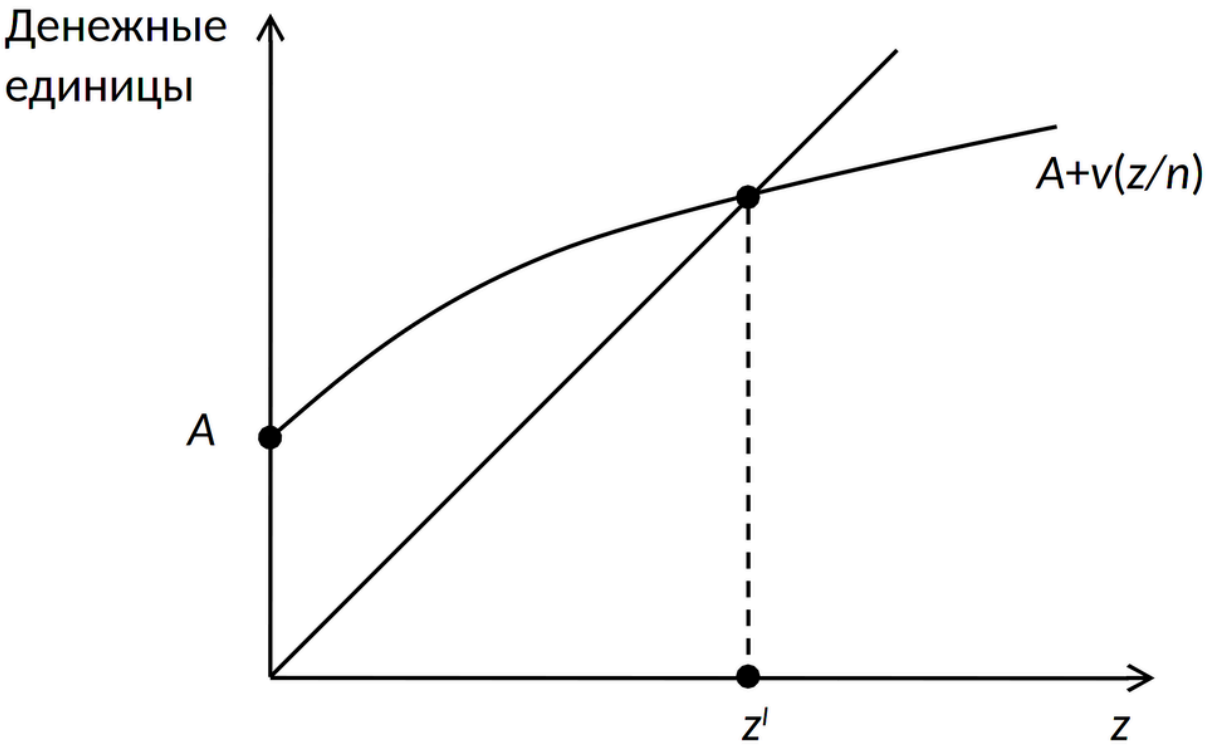


Рисунок 10.6. Единственное симметричное равновесие при полной несовместимости

2. Естественная олигополия.

   Если каждая из k фирм производит $x_i = \frac{z}{k}$ единиц выпуска, а остальные $n - k$ фирм ничего не производят, просуммировав (10.2.13) по всем k действующим фирмам, получаем:

$$(k-1)z = kA + kv\left(\frac{z}{k}\right) - 2z.$$

   Или:

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)z = A + v\left(\frac{z}{k}\right). \quad (10.2.15)$$

   Как показано на (рис. 10.7), уравнение (10.2.15) будет иметь единственное решение – z^K, определяющее симметричное равновесие для k фирм: $x_i = \frac{z^K}{k}$.

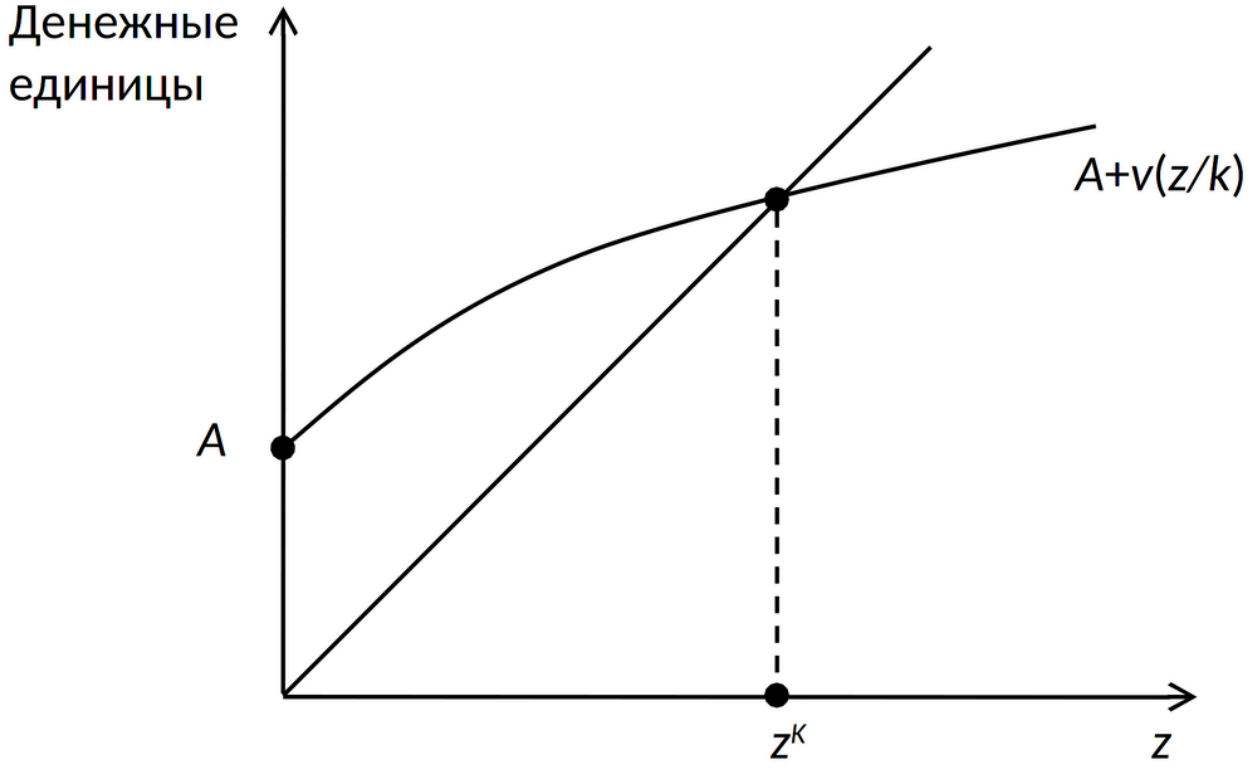


Рисунок 10.7. Естественная олигополия

У оставшихся $n-k$ фирм нет стимулов производить положительный выпуск, поскольку из вогнутости функции $v(\cdot)$ вытекает, что $z^K \geq A$, что соответствует $A+v(0)-z^K = A-z^K < 0$.

Следовательно, симметричное равновесие для k действующих фирм существует тогда и только тогда, когда:

$$A+v\left(\frac{A}{k}\right) \geq \frac{k+1}{k}A, \text{ или } v\left(\frac{A}{k}\right) \geq \frac{A}{k}.$$

Вогнутость функции $v(\cdot)$ позволяет сформулировать еще два следствия. Для любого $k \leq n-1$ из того, что существует симметричное равновесие для k действующих фирм, следует, что:

1. существует симметричное равновесие для $(k+1)$ действующих фирм;
2. $z^K < z^{K+1}$.

При этом равновесие при $k=1$ или равновесие при естественной монополии (рис. 10.8) наиболее вероятно тогда, когда мало A, т.е. низка базовая готовность платить, или когда велико $v(A)$, т.е. сильны сетевые эффекты.

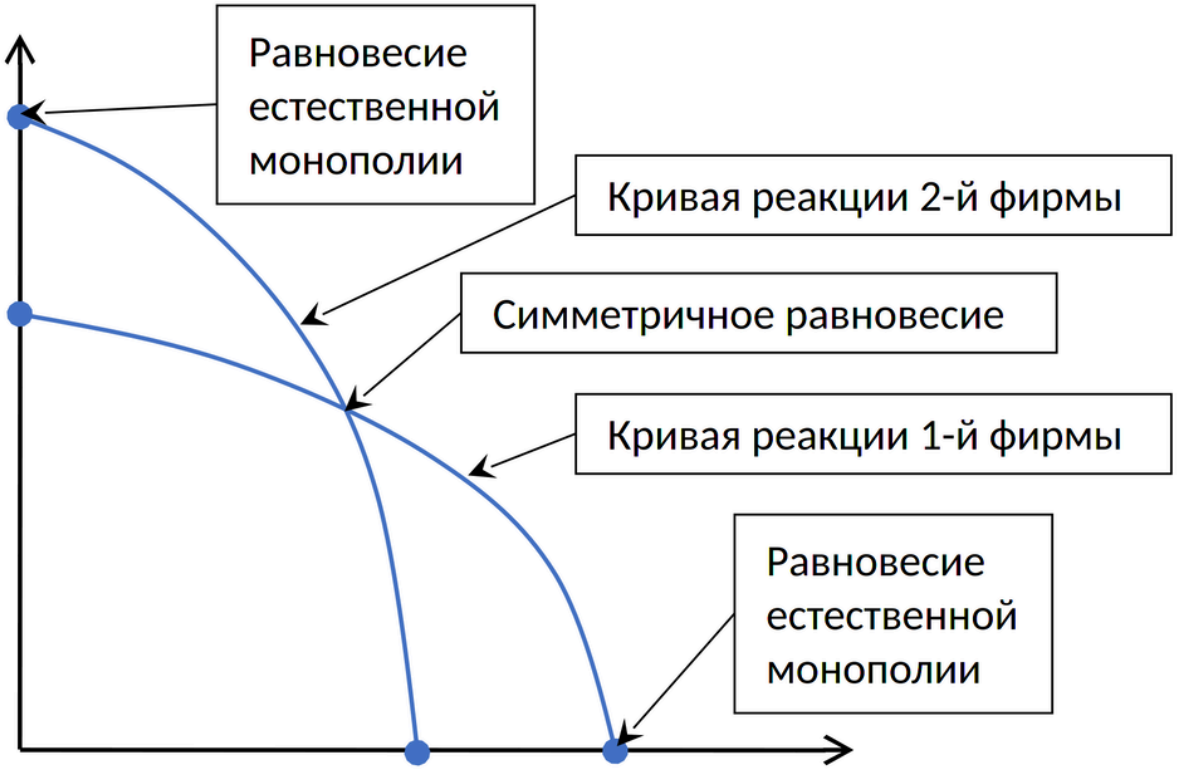


Рисунок 10.8. Симметричная дуополия и естественная монополия

Примечательно, что прибыль монополиста может быть ниже прибыли дуополиста в условиях симметричного равновесия. Происходит это потому, что потребители, ожидая меньший размер сети, обеспечиваемый монополистом, готовы меньше платить за его товар, а ожидаемый ими рост продаж будет способствовать росту прибыли продавцов. Это означает, что монополии может быть выгодно появление второй фирмы в отрасли.

3. Асимметричная олигополия.

Асимметричная олигополия имеет место тогда, когда $k \geq 2$ фирм имеют положительные, но неодинаковые выпуски. Как показано на рис. 10.9, даже при линейной функции спроса и вогнутой функции $v(y)$ асимметричное равновесие возможно наряду с симметричным равновесием олигополии (в частности, дуополии) и равновесием естественной монополии. Асимметричные равновесия могут быть устойчивыми и позволять фирме получать прибыль, занимая существенную долю рынка, просто потому что именно таковы ожидания потребителей ее товара. Однако обобщенного описания асимметричной олигополии не существует.

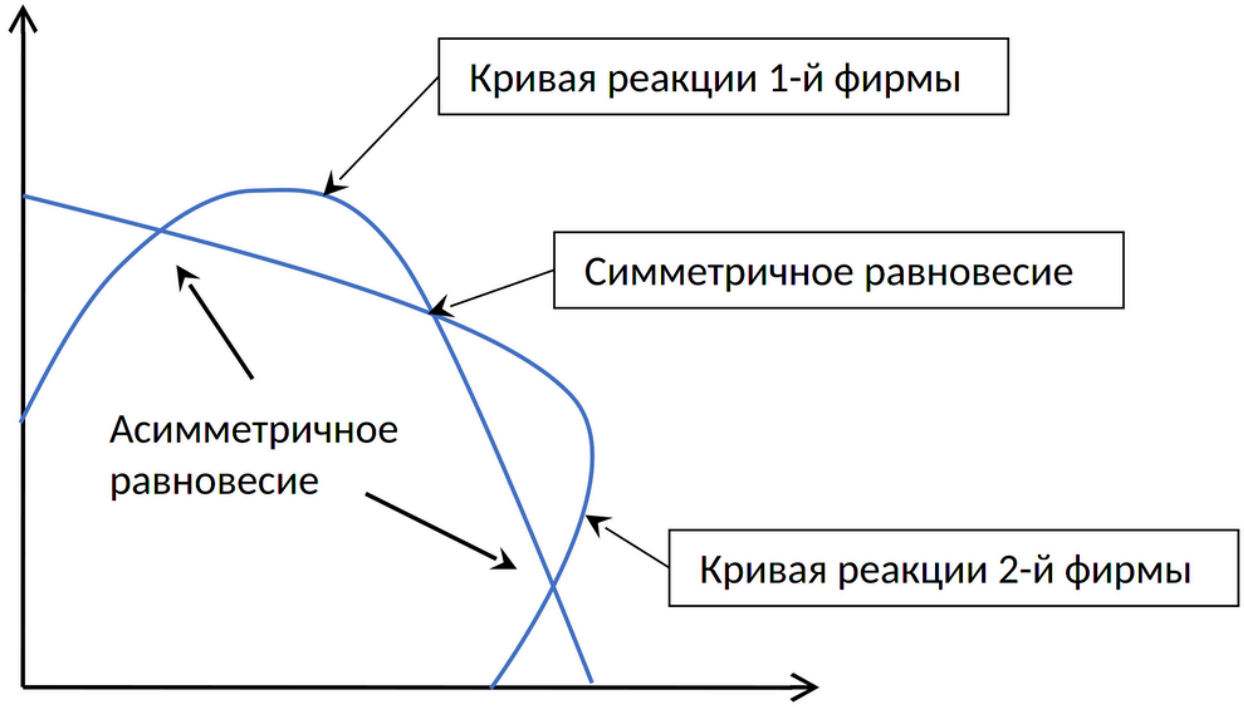


Рисунок 10.9. Асимметричная дуополия

в) Частичная совместимость

Структура совместимости может быть такой, что бренды разбиты на группы $G^j = (j = 1, 2, \ldots, J)$, внутри которых они совместимы друг с другом, а с брендами других групп – нет. Так, если фирма i принадлежит группе G^j, то

$$y_i = \sum_{k \in G^j} x_k \equiv y^j.$$

Все фирмы, количество которых в данной группе совместимости равно m^j, выберут одинаковый уровень выпуска x^j так, чтобы в равновесии для любого $x^j > 0$ выполнялось уравнение:

$$x^j = A - z + v\left(m^j x^j\right). \text{ (10.2.16)}$$

Уравнение (10.2.16) имеет те же качественные свойства, что и предыдущие условия равновесия.

г) Воздействия изменения совместимости на выпуск

Анализ воздействия изменения совместимости на равновесные значения выпуска фирм и отрасли позволяет сформулировать два утверждения.

1. Уровень выпуска при всеотраслевой совместимости выше, чем при любом равновесии для совместимости ниже всеотраслевой.

Поскольку для всех фирм с положительными уровнями выпуска $x_i = A + v(y_i) - z$, в результате суммирования выпуска всех фирм и небольших преобразований получаем:

$$(n+1)z = nA + \sum v\left(y_i\right).$$

При полной совместимости $y_i = z$ для каждой фирмы, а при отсутствии полной совместимости хотя бы для одной фирмы $y_i < z$. Следовательно, как показано на рис. 10.10, поскольку при полной совместимости кривая $nA + nv(z)$лежит выше кривой $nA + \sum v\left(y_i\right)$ при неполной совместимости, равновесный выпуск отрасли z^C при всеотраслевой совместимости выше, чем выпуск z^I, когда всеотраслевая совместимость не достигается.

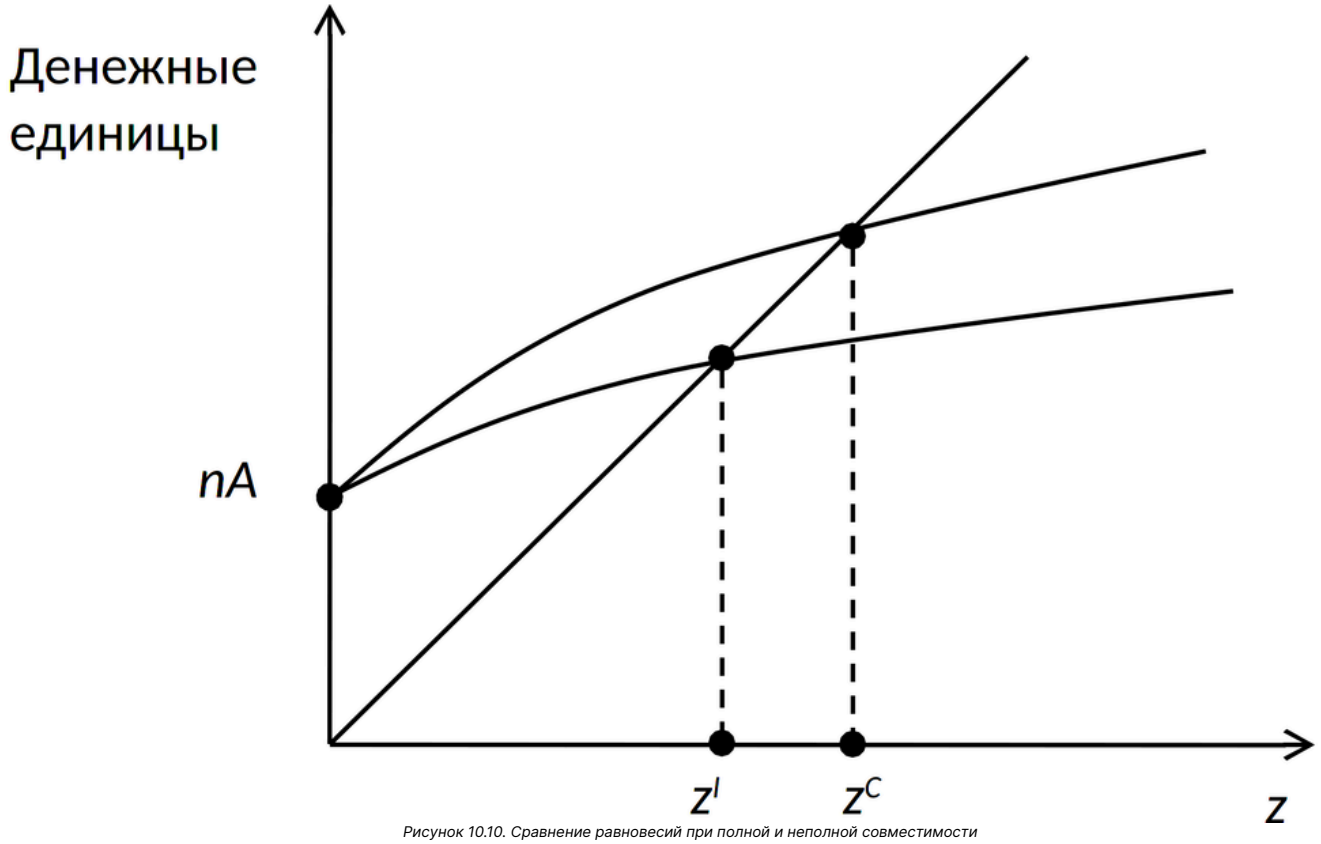


Рисунок 10.10. Сравнение равновесий при полной и неполной совместимости

2. Если две группы фирм делают свою продукцию взаимно совместимой и общеотраслевой выпуск до слияния меньше A, то в любом равновесии после слияния:
   а) средний выпуск фирмы в сливающихся группах возрастет;
   б) выпуск каждой из не входящих в сливающиеся группы фирм упадет;
   в) отраслевой выпуск возрастет.

Пусть $\hat{x}^j$ и $\hat{z}$- уровень выпуска фирмы из группы j и общеотраслевой уровень выпуска до слияния. Тогда, если в группе j насчитывается m^j фирм, из уравнения (10.2.16) имеем:

$$\hat{x}^j = A - \hat{z} + v\left(m^j \hat{x}^j\right).$$

Обозначим $\tilde{x}^j$ и $\tilde{z}$ - уровень выпуска фирмы из группы j и общеотраслевой уровень выпуска после слияния, а сливающиеся группы пронумеруем 1 и 2.

При $j \geq 3$ в результате слияния двух групп фирм, а значит роста совместимости, отраслевой выпуск будет расти, т.е. $\tilde{z}^j > \hat{z}^j$. Следовательно, $\tilde{x}^j < \hat{x}^j$, а значит не входящие в сливающиеся группы фирмы будут производить меньше (рис. 10.11).

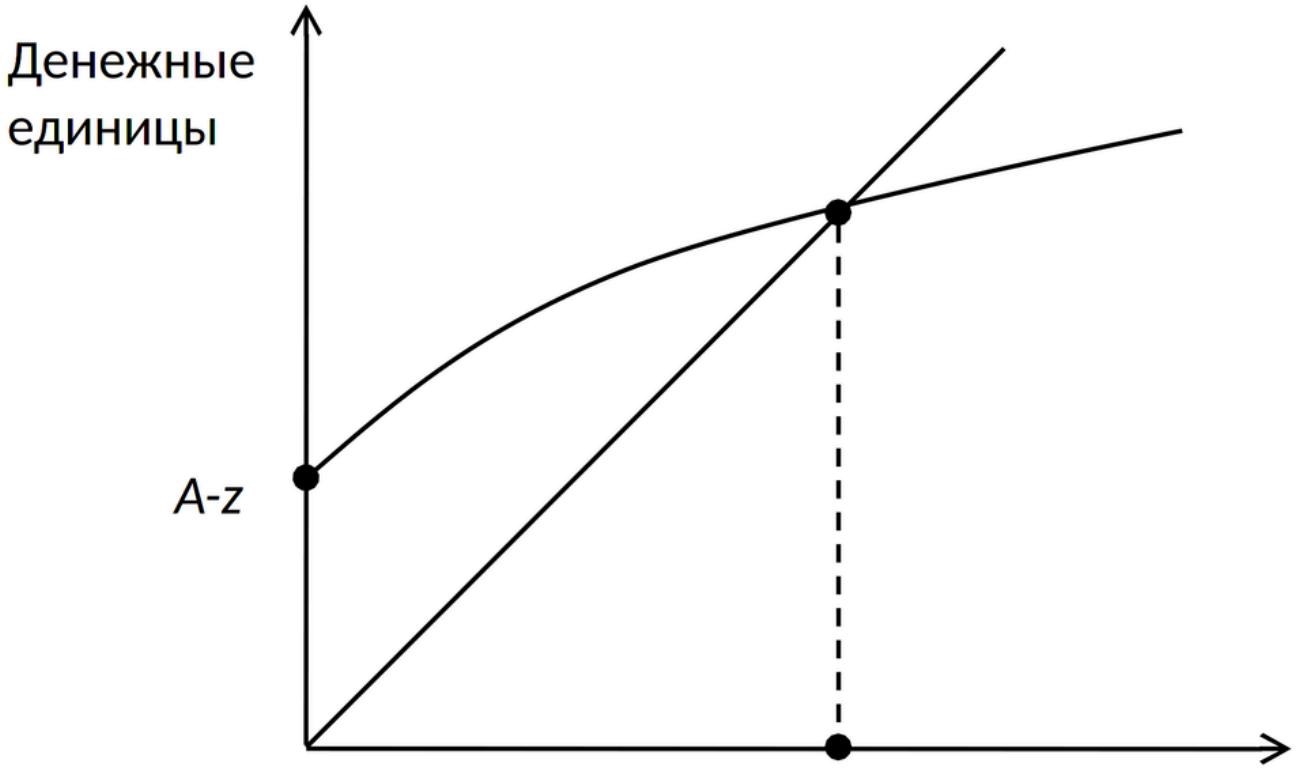


Рисунок 10.11. Равновесный выпуск репрезентативной фирмы

Для сливающихся групп фирм ($j = 1, 2$) имеем:

$$A - Z + v\left(m^j x^j\right) < A - Z + v\left(m^1 x^1 + m^2 x^2\right) \text{ при всех } x^1, x^2 > 0.$$

Поскольку увеличение отраслевого выпуска приводит к тому, что не входящие в сливающиеся группы фирмы производят меньше, фирмы в сливающихся группах производят больше:

$$m^1 \tilde{x}^1 + m^2 \tilde{x}^2 > m^1 \hat{x}^1 + m^2 \hat{x}^2.$$

Таким образом, средний выпуск фирмы в сливающихся группах возрастает.

Если общеотраслевой выпуск в равновесии до слияния больше или равен A, рост совместимости может привести к снижению как общеотраслевого выпуска, так и среднего уровня выпуска фирм в сливающихся группах.

10.2.3.7. Частные и общественные стимулы к сетевой совместимости

а) Основные способы достижения совместимости

На рынках с сетевыми эффектами решения фирм о совместимости продукции могут сознательно приниматься, а могут, напротив, умышленно отвергаться в зависимости от того, как устроены и как работают стимулы к сетевой совместимости. Следовательно, они могут рассматриваться как эндогенная характеристика рынка. При этом выбор фирм в пользу совместимости или отказ от нее будут влиять на результативность рынка с точки зрения общественной эффективности.

Существуют два основных способа достижения совместимости:

- общее принятие сетевого стандарта, когда все фирмы следуют определенным принципам совместимости;
- создание адаптера, когда фирма в одностороннем порядке делает свой товар совместимым с продуктами всех других фирм или их групп.

Когда фирмы самостоятельно финансируют достижение совместимости, решение о стандартизации принимается только в том случае, если в результате него каждая фирма увеличит свою прибыль, а решение о создании адаптера – если хотя бы для одной из двух фирм оно окажется прибыльным.

Когда группа фирм может профинансировать достижение сопоставимости с помощью межфирменных платежей, фирмы пойдут на это только в том случае, если увеличение их прибылей в результате совместимости превзойдет суммарные издержки ее достижения.

Для оценки частных и общественных стимулов к сетевой совместимости используются традиционные индикаторы. Частные стимулы отслеживаются через изменение прибыли отдельной фирмы $\Delta\pi_i = \pi_i^C - \pi_i^I$, а также изменение их совокупной прибыли $\Delta\pi = \sum_{i=1}^{n} \Delta\pi_i$ с учетом издержек совместимости. Общественные стимулы оцениваются через изменение общественного благосостояния $\Delta W = W^C - W^I$. При этом изменение благосостояния потребителей отражает изменение потребительского излишка $\Delta CS = CS^C - CS^I$.

б) Межфирменные платежи

Межфирменные платежи могут принимать форму лицензионных выплат или компенсаций дополнительных затрат на производство совместимых товаров. Они могут быть устроены таким образом, что прибыли фирм увеличиваются только в том случае, если в результате совместимости увеличивается совокупная прибыль.

Изменение общественного благосостояния оценивается как $\Delta W = \Delta\pi + \Delta CS$. Как было показано выше, излишек потребителей $CS(z) = \frac{z^2}{2}$ увеличивается, только если увеличивается совокупный выпуск. Поэтому, поскольку переход к полной совместимости сопровождается ростом выпуска, потребительский излишек увеличивается. Следовательно, если $\Delta\pi > 0$, то и $\Delta W = (\Delta\pi + \Delta CS) > 0$.

Ситуацию вокруг стимулов при реализуемости выплат между любыми фирмами характеризуют два утверждения.

1. Если затраты на совместимость постоянны, то любое изменение, направленное на достижение полной совместимости и увеличивающее общеотраслевую прибыль, является общественно выгодным.
2. Несмотря на реализуемость выплат между любыми максимизирующими прибыль фирмами, они могут не суметь достичь полной совместимости товаров в случаях, когда полная совместимость является общественно оптимальной.

Это утверждение обращает внимание на то, что при $\Delta CS > 0$ и $\Delta W > \Delta\pi$, если общеотраслевые затраты на совместимость F удовлетворяют неравенству $\Delta\pi < F < \Delta W$, то частным фирмам оказывается не под силу достичь той совместимости, которая желательна со стороны общества в целом. Причина этого в том, что фирмы не могут присвоить себе все выгоды от совместимости.

Как было показано выше, если фирмы стремятся сделать свою продукцию взаимно совместимой и общеотраслевой выпуск изначально меньше A, то, несмотря на рост отраслевого выпуска, отраслевая совместимость гарантированно не достигается.

в) Принятие отраслевого стандарта

Если межфирменные платежи реализуемы, то достаточным условием достижения совместимости через стандартизацию станет рост совокупной прибыли всех фирм, добивающихся совместимости.

Если разделение издержек путем межфирменных платежей нереализуемо и фирма i сама несет затраты F_i по принятию стандарта, то оно будет иметь место только тогда, когда $\Delta\pi_i > F_i$ для всех i. Если это условие выполняется и каждая из фирм предпочитает принятие стандарта, то его предпочтут и фирмы в целом ($\sum \Delta\pi_i > \sum F_i$). Однако обратное неверно.

В отношении принятия отраслевого стандарта справедливы два утверждения.

1. Когда разделение издержек недостижимо, условия стандартизации становятся жестче. Тем не менее, если принятие стандарта прибыльно для всех фирм, то такой стандарт желателен для благосостояния общества в целом.

Если начальное равновесие симметрично и $F_1 = F_2 = F$, то $\Delta\pi_1 - F = \Delta\pi_2 - F$ и наличие или отсутствие разделения издержек не имеет значения. Однако если начальное равновесие асимметрично, то меньшими стимулами к принятию стандарта будет обладать фирма, получающая бо'льшую прибыль, например, фирма 1. В этом случае условие стандартизации принимает вид: $\Delta\pi_1 > F$. Проблема заключается в том, что получающая бо'льшую прибыль фирма в результате введения стандарта опасается потерять часть своей доли рынка в пользу своего менее сильного соперника.

2. Если рост совместимости не ведет к всеотраслевой совместимости, то частные стимулы к стандартизации могут быть чрезмерными.

Частные стимулы могут оказаться чрезмерными по двум причинам:

- Если сопоставимость возрастает, но не становится полной, а общий выпуск и излишек потребителей уменьшаются, так что $\Delta\pi > \Delta W$;
- Если некоторые фирмы оказываются вне групп, делающих товары совместимыми, и их потери ($\sum_{j\neq i} \Delta\pi_j$) не принимаются в расчет, однако общественная выгода от совместимости зависит от изменений прибылей всех фирм и изменения суммарного потребительского излишка: $\Delta W = \Delta\pi_i + \sum_{j\neq i} \Delta\pi_j + \Delta CS$.

г) Создание адаптера

Пусть F – затраты, которые несет фирма i на установку адаптера. Тогда ее частный выигрыш будет равен $\Delta\pi_i - F$, а изменение общественного благосостояния составит $\Delta W = \Delta\pi_i + \sum_{j\neq i} \Delta\pi_j + \Delta CS - F$. При этом разница между частными и общественными стимулами $\sum_{j\neq i} \Delta\pi_j + \Delta CS$ может быт как положительной, так и отрицательной. Это зависит от того, насколько сильны стимулы фирмы i к установке адаптера с частной и с общественной точки зрения.

Предположим, что существуют только две фирмы (или две коалиции фирм). Разную силу стимулов отражают два утверждения.

1. Если равновесие несовместимости двух фирм (или групп фирм) симметрично и межфирменные платежи отсутствуют, то частные стимулы к установке адаптера слишком слабы.

   При симметричном равновесии несовместимости $\Delta\pi_1 = \Delta\pi_2$. Поэтому если $\Delta\pi_i > 0$ для одной фирмы, то изменение прибыли для другой фирмы также положительно. В результате благосостояние общества растет только при $\Delta\pi_i > 0$, но частные стимулы к установке адаптера слишком слабы. Устанавливающая адаптер фирма как бы дарит выгоды как сопернику, так и потребителям.

2. Одна из двух групп фирм, обладающая при несовместимости долей рынка меньше 50%, может иметь чрезмерные с общественной точки зрения стимулы к установке адаптера.

   При асимметричном равновесии несовместимости изначально более крупная фирма (фирма 1), не прибегающая к адаптеру, в результате установки адаптера малой фирмой (фирмой 2) может потерять настолько большую долю рынка, что ее прибыль упадет, т.е. $\Delta\pi_1 < 0$. Если в таком случае абсолютная величина изменения прибыли превышает

прирост потребительского излишка, т.е. $\Delta\pi_1 + \Delta CS < 0$, то $\Delta W < \Delta\pi_2$. Следовательно, частный стимул фирмы 2 к совместимости избыточен с общественной точки зрения.

На практике нередки случаи, когда фирма 1 идет на расходы (например, судебные), чтобы воспрепятствовать установке адаптера фирмой 2 и не допустить существенной потери своей прибыли. О влиянии таких действий фирмы 1 на общественное благосостояние однозначно утверждать нельзя, поскольку возможен как его рост (при $\Delta\pi_1 < 0, \Delta\pi_2 > F$ и $\Delta W > F$), так и снижение (при $\Delta\pi_1 < 0, \Delta\pi_2 > F$ и $\Delta W < F$).

д) Искажения частных и общественных стимулов к сетевой совместимости

Принимая решение относительно совместимости, каждая фирма игнорирует влияние своих действий на величину излишка потребителей и прибыли других фирм.

Изменение излишка потребителей может происходить за счет двух факторов – общего выпуска и наличия разницы в оценках сетевого внешнего эффекта между предельным и средним потребителями.

Если издержки на достижение совместимости постоянны, т.е. не влияют на равновесие, то переход к полной совместимости приводит к увеличению выпуска и, соответственно, излишка потребителей. Если же приближение к совместимости влияет на предельные издержки, например, повышая их в силу необходимости адаптации продукта к стандарту, то общий выпуск будет снижаться, уменьшая и потребительский излишек.

Если, как в модели Каца-Шапиро, все потребители оценивают сетевые внешние эффекты одинаково, то при достижении совместимости фирмы могут поднимать цены для заданного уровня выпуска на ту же постоянную величину, на которую выросли оценки сетевого внешнего эффекта. В этом случае суммарный потребительский излишек не изменится. Если же сетевой эффект оценивается предельным потребителем выше, чем средним, то при достижении совместимости, поднимая цены для заданного уровня выпуска на величину, превышающую готовность платить среднего потребителя, фирмы уменьшают суммарный потребительский излишек. Если сетевой эффект оценивается предельным потребителем ниже, чем средним, то искажение носит противоположный характер.

В итоге, если переход к совместимости увеличивает потребительский излишек, то стимулы фирм к совместимости чересчур низки, а если достижение совместимости уменьшает потребительский излишек, то стимулы фирм к совместимости чересчур велики.

Другое обстоятельство, которое не учитывается при принятии фирмой решения о совместимости, - это прибыли других фирм. Во-первых, как показано выше, если одна группа фирм, стремясь к совместимости, увеличивает свою долю рынка и прибыль за счет другой группы фирм, то последняя может предпринять защитные действия. Во-вторых, издержки достижения совместимости у разных фирм могут отличаться, что может делать ее непривлекательной для ряда фирм, у которых эти затраты выше.

10.2.3.8. Выводы из модели Каца-Шапиро

Во-первых, возникающие на стороне спроса сетевые внешние эффекты оказывают влияние на конкуренцию и характер рыночного равновесия, демонстрируя важную роль потребительских ожиданий. Возможны различные виды равновесий с исполняющимися ожиданиями: отраслевой выпуск может обеспечиваться как одной фирмой, так и множеством фирм. В случае несовместимости производимых товаров, если потребители ожидают, что некий продавец будет доминирующим (например, в силу его репутации), то их готовность платить за его товар будет выше по сравнению с товарами других фирм, что и приведет к доминированию именно этой фирмы. Если при полной совместимости число фирм в отрасли неограниченно возрастает, равновесие с исполняющимися ожиданиями превращается в равновесие совершенной конкуренции.

Во-вторых, решения фирм о совместимости определяются условиями их принятия и возможностями реализации межфирменных платежей. Например, развитость авторского и патентного права будет существенно влиять на распространение стандартов совместимости, а слабость этих институтов будет компенсироваться односторонними установками адаптеров. Реализация чрезмерных частных стимулов к совместимости может приводить к формированию неявных картелей, против чего должно работать антимонопольное законодательство.

---

1. Модель Каца-Шапиро изложена ниже по: Katz M., Shapiro C. Network Externalities, Competition and Compatibility. *The American Economic Review*, 1985, Vol. 75, №3, pp. 424-440 [На русском языке: Кац М., Шапиро К. Сетевые внешние эффекты, конкуренция и совместимость. – Вехи экономической мысли. Теория отраслевых рынков. Т.5. – СПб.: Экономическая школа, 2003. С. 500-535]. ↩

2. Авторы модели не вводят нижнюю границу значений *r* во избежание рассмотрения угловых решений, когда на рынок выходят все потребители. ↩

3. Гедоническая (или гедонистическая) цена – это часть цены товара, связанная с конкретной характеристикой, которая определяет его качество. ↩

10.2.4. Регулирование сетевых экстерналий

Экономисты еще не пришли к окончательному выводу относительно регулирования сетевых экстерналий.

С одной стороны, монополизация сетевых рынков происходит по ряду объективных причин:

- Выгоды от покупки сетевого продукта превышают выгоды от покупки даже более качественного, но не сетевого. Следовательно, качество сетевых благ не всегда высокое, но потребители покупают именно их благодаря выгоде от сетевого эффекта.
- Высокие издержки переключения приводят к снижению числа конкурентов.
- Наличие у фирм, продающих сетевые продукты, чрезмерных стимулов к совместимости, преимуществ в продаже дополняющих благ.
- Трудности выявления «антиконкурентных» стратегий продавцов.
- Традиционные черты естественных монополий: во-первых, высокая экономия от масштаба вследствие больших первоначальных издержек на создание производства и всей его инфраструктуры и, во-вторых, низкие предельные издержки, обеспечиваемые уже имеющимися производственными мощностями.

С другой стороны, на сетевых рынках возможна конкуренция, в которой побеждает сильнейший, но не всегда наилучший с точки зрения потребительских характеристик игрок.

Проблема государственного вмешательства с целью регулирования сетевых экстерналий сводится к дилемме: поддержать стандарт, который представляется наилучшим, и таким образом избежать ценовой войны или допустить конкуренцию для победы сильнейшего путем болезненного вытеснения проигравших.

Следовательно, результативность государственной политики зависит от успешного решения двух задач – информированности и своевременности. При отсутствии достоверной информации может быть ошибочно поддержан не наилучший стандарт. Если же точная информация о наилучшем стандарте имеется, но допускается промедление с решением о его поддержке, конкуренция может привести к утверждению не наилучшего стандарта. Сложность этих задач ставит под сомнение целесообразность вмешательства государства в функционирование сетевых рынков, которое может быть оправданным только при их комплексном решении.

10.2.5. Экономика платформ

Многосторонние платформы [1] – это рынки, на которых платформы могут обеспечить взаимодействие между конечными пользователями и «принять две (или несколько) сторон на борт» через установление для каждой из них соответствующей цены [2].

Характерные черты многосторонних платформ:

- непосредственный контакт участников благодаря инфраструктуре и «правилам игры», генерируемым платформой;
- значительные сетевые экстерналии (могут быть положительными и отрицательными), когда изменение числа участников влияет на индивидуальную полезность для каждого агента на той же стороне платформы (прямые экстерналии) и изменение числа участников на одной стороне платформы приводит к изменению индивидуальной полезности, получаемой на другой стороне платформы (перекрестные экстерналии);
- «ненейтральность структуры цен», которая позволяет платформе влиять на количество заключающихся на ней сделок с помощью установления разных цен для различных участников.

Основные виды платформ:

- Мэтчинговые, на которых с минимальными трансакционными издержками происходит стыковка продавцов и покупателей (примеры: услуги такси (*Яндекс.Такси*), аренда жилья (*Циан, Tutu.ru, Ostrovok.ru*));
- Мультимедиа сервисы и средства массовой информации (примеры: телевидение, веб-порталы, газеты, журналы и другие СМИ);
- Платежные системы (примеры: *Мир, MasterCard*, *Visa);*
- Компьютерные платформы, создающие среду для разработки и приобретения программных продуктов для компьютеров и цифровых мобильных устройств, а также видеоигр (пример: *VK Play*).

Приведенная классификация многосторонних платформ не является исчерпывающей. В современной экономике платформенная инфраструктура получает все большее распространение в сфере услуг государственного управления (пример: «Госуслуги»), в образовании (примеры: Инфоурок, Учи.ру), в здравоохранении (примеры: МЕДТЕРА, «Мобильный доктор»).

Ключевое правило настройки структуры цен на платформе состоит в следующем: сторона, создающая относительно более сильный положительный внешний эффект, должна субсидироваться за счет другой стороны. Это означает, что первостепенную важность для платформы приобретает выявление экстерналий на каждой стороне и сравнение их интенсивности [3]. Максимизирующая прибыль ценовая стратегия будет заключаться в том, чтобы «разделять и властвовать» (divide-and-conquer), субсидируя (разделяя) участие одной стороны и покрывая издержки (властвуя) на другой стороне [4]. Если участник стороны X извлекает большую положительную экстерналию от каждого участника стороны Y, то стороне X платформа должна назначать более высокую плату. Как показано на рис. 10.12, платформы обычно «используют два ценовых инструмента: регистрационные взносы, которые специфичны для пользователей и уплачиваются *ex ante*, и плату за трансакцию, которая уплачивается *ex post*, когда совершается трансакция между двумя уже состыкованными сторонами» [5]. Следовательно, регистрационный взнос для X должен быть больше, чем для Y, а помимо него сторона X может также вносить плату за совершенную сделку. Фактическая комбинация платежей будет зависеть от конкретных условий платформы. Более того, сторона Y может быть и вовсе освобождена от каких бы то ни было платежей, а на сторону X может налагаться только фиксированный регистрационный платеж. Однако принципиально важно то, что, так или иначе, Y становится субсидируемой стороной, а X – стороной издержек. Это правило Ж. Ш. Роше и Ж. Тироль назвали “принципом качелей” (“seesaw principle”) [6].

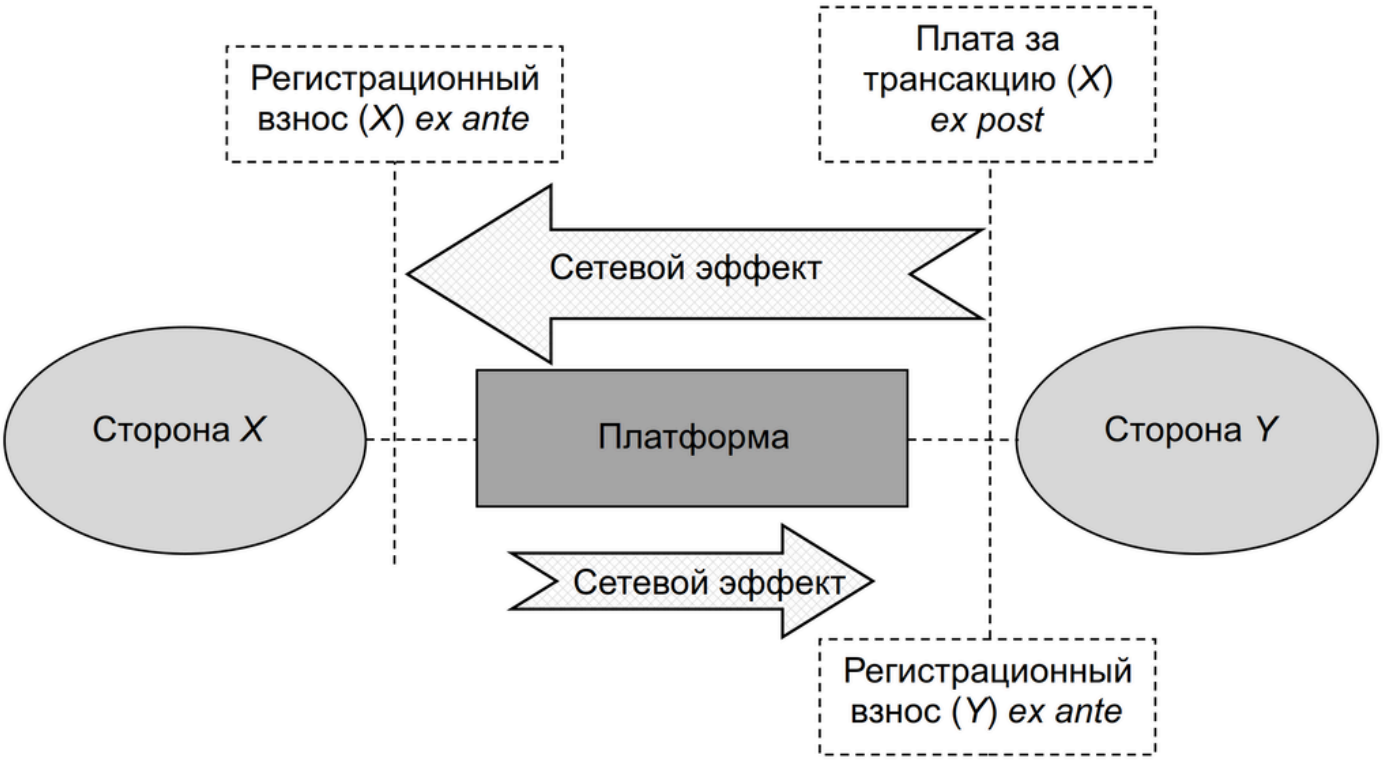


Рисунок 10.12. Схема применения ценовых инструментов платформы
Источник рисунка: Антипина О. Н. Сколько стоит цифра? О природе цены благ в цифровой экономике. Общественные науки и современность, 2019, № 5, с. 11.

Ж.-Ш. Роше и Ж. Тироль рассмотрели случай обладающей монопольной властью платформы [7], обеспечивающей оптимальное рыночное взаимодействие сторон B (byers – покупатели) и S (sellers – продавцы).

При определении цен платформа должна принять во внимание измеряемую с помощью коэффициентов эластичности чувствительность каждой из сторон к изменению назначаемой ей цены, а также предельные издержки производства дополнительной единицы продукта, либо подключения дополнительного участника, равные c.

Тогда индекс Лернера следует представить в его двусторонней версии:

$$\frac{P^B+P^S-c}{P^B+P^S}=\frac{1}{\eta^B+\eta^S},$$

где: η^B и η^S – абсолютные величины коэффициентов ценовой эластичности для каждой из сторон;

P^B и P^S – цены, назначаемые платформой для каждой из сторон.

Отсюда:

$$P^B=\frac{\eta^B}{\eta^B+\eta^S-1}c,$$

$$P^S=\frac{\eta^S}{\eta^B+\eta^S-1}c.$$

Или:

$$\frac{P^B}{P^S}=\frac{\eta^B}{\eta^S}.$$

Из равенства отношения цен и абсолютных величин коэффициентов ценовой эластичности для каждой из сторон платформы-монополиста следуют выводы:

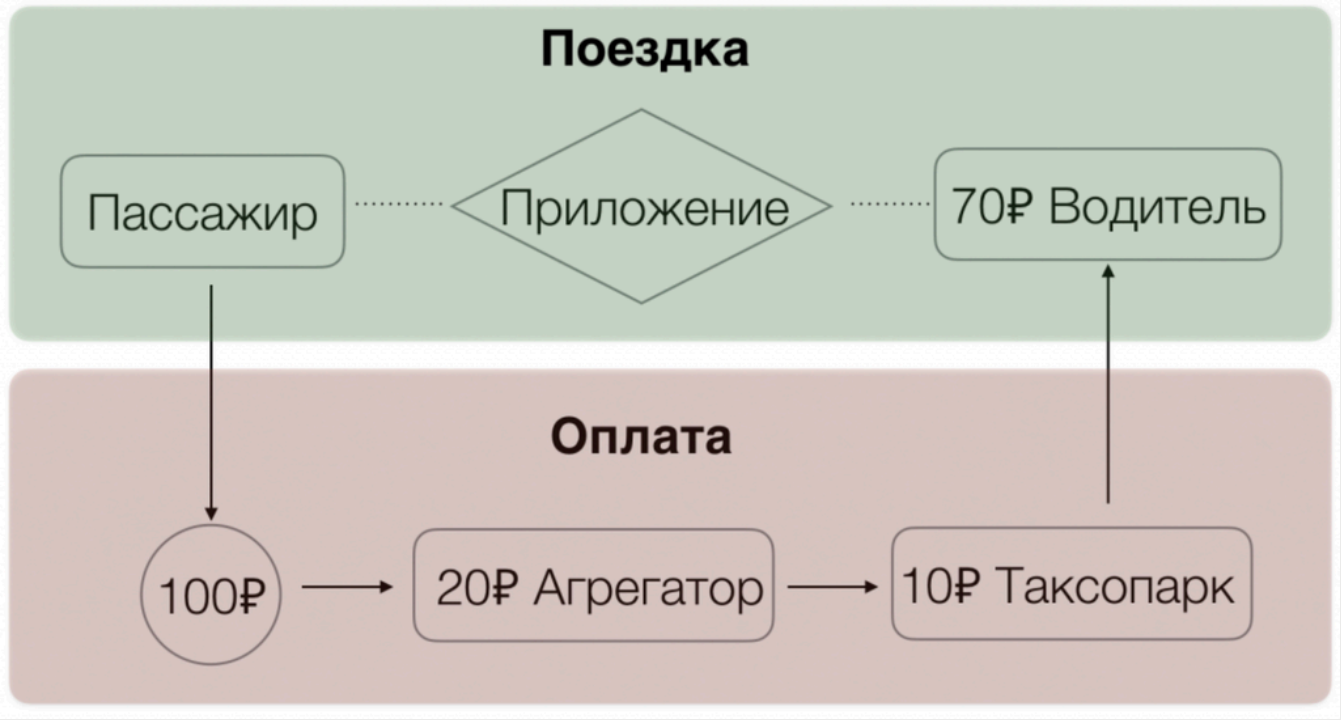
1. соотношение цен, устанавливаемых для сторон платформы-монополиста, не зависит от предельных издержек;
2. платформа-монополист может назначать цену ниже предельных издержек на той стороне, где относительно выше ценовая чувствительность, чтобы привлечь на другой ее стороне большое число участников, которые имеют относительно низкую ценовую чувствительность.

В экономике платформ возможны не только монополистические структуры. Конкуренция в экономике платформ проявляется как технологическое соперничество, борьба за пороговую базу агентов, поиск превосходства с помощью сервисных характеристик и цен.

Наблюдательный микроэкономист: **Принцип работы агрегаторов такси в России**

Агрегаторы такси являются разновидностью мэтчинговых платформ. Агрегаторы (от латинского слова aggregatio - «накопление»), с одной стороны, объединяют таксопарки и водителей, а с другой – привлекают пассажиров. Первым агрегатором в России в 2009 г. стал Uber, за ним в 2011 г. появились Я-такси и Gett-такси.

Почему услуги агрегаторов стали популярными и число их пользователей превысило критическую массу? Это произошло по совокупности причин:



Источник: Принцип работы агрегаторов такси в России // https://vist-m.ru/articles/concept/

Научная монография

Как работают платформы, обеспечивающие достижение эксклюзивных парных соответствий - мэтчинг (от англ. «matching» - соответствие) - между разнородными участниками рынка? Узнать ответ на этот вопрос можно, прочитав монографию:

Evans D.S., Schmalensee R. Matchmakers: The New Economics of Multisided Platforms. Boston, Mass.: Harvard Business Review Press, 2016.<

1. В разделе использованы материалы статей: Антипина О. Н. Сколько стоит цифра? О природе цены благ в цифровой экономике. Общественные науки и современность, 2019, № 5, сс. 5-16; Антипина О.Н. Платформы как многосторонние рынки эпохи цифровизации. Мировая экономика и международные отношения, 2020, том 64, № 3, с. 12-19. ↩
2. Rochet J., Tirole J. Two-Sided Markets: a Progress Report. The RAND Journal of Economics, 2006, vol. 37, no. 3, p. 645. ↩
3. Armstrong M. Competition in Two-Sided Markets. The RAND Journal of Economics, 2006, vol. 37, no. 3, p. 668. ↩
4. Caillaud B., Jullien B. Chicken and Egg: Competition among Intermediation Service Providers. The RAND Journal of Economics, 2003, vol. 34, no. 2, p. 310. ↩
5. Ibid. ↩
6. Rochet J., Tirole J. Two-Sided Markets: a Progress Report. The RAND Journal of Economics, 2006, vol. 37, no. 3, p. 659. ↩
7. Rochet J., Tirole J. Platform Competition in Two-Sided Markets. Journal of the European Economic Association, 2003, vol. 1, no. 4, pp. 990-1029. ↩

10.3. Общественные блага

10.3.1. Эффективное предоставление общественного блага
10.3.2. Долевое финансирование общественных благ
10.3.3. Голосование
10.3.4. Назначение цен по Линдалю
10.3.5. Механизм Викри-Кларка-Гровса

10.3.1. Эффективное предоставление общественного блага

По определению, данному П. Самуэльсоном в 1954 г., в составе экономических благ выделяются две категории [1]. Первая категория – *частно потребляемые блага* ($X_1, \ldots, X_n$), или *частные блага*, которые распределяются по частям среди потребителей ($1, 2, \ldots, i, \ldots s$) так, что выполняется условие:

$$X_j = \sum_1^s X_j^i.$$

Частными являются конкурентные и исключаемые блага.

Коллективно потребляемые блага ($X_n + 1, \ldots, X_{n+m}$) – это блага, которые потребляют все индивиды вместе, т.е. одновременно для каждого i-го индивида и каждого коллективного потребительского товара выполняется условие:

$$X_{n+j} = X_{n+j}^i.$$

Такие блага называют *чистыми общественными благами* [Гиперссылка на определение чистых общественных благ в параграфе 1.1 Главы 1]. Они являются неконкурентными и неисключаемыми в потреблении.

Междисциплинарный взгляд: ***Общественные блага и ресурсы общего доступа (Материал интерактивного цифрового учебника «Институциональная экономика»)***

Пусть:

- каждый индивид имеет упорядоченные предпочтения в отношении всех потребляемых благ как частных, так и коллективных;
- предпочтения индивида описываются выпуклой функцией полезности:

$$u^i = u^i \left(X_1^i, \ldots, X_{n+m}^i\right);$$

- выпуклая граница производственных возможностей задана:

$$F = F\left(X_1, \ldots, X_{n+m}\right).$$

Тогда Парето-эффективное условие предоставления чистого общественного блага имеет вид:

$$\sum_{i=1}^s \frac{u_{n+j}^i}{u_r^i} = \frac{F_{n+j}}{F_r}. \quad (10.3.1)$$

Условие эффективного предоставления чистого общественного блага (10.3.1) получило известность как уравнение Самуэльсона. Его экономический смысл состоит в том, что сумма предельных норм замещения частного блага общественным в потреблении (выражение в левой части равенства) в Парето-оптимальном распределении должна быть равна предельной норме трансформации частного блага в общественное в производстве (выражение в правой части равенства).

Докажем это условие на примере двух индивидов ($i = 1, 2$) в экономике, которая производит два блага: x – частное благо и G – общественное благо.

Пусть:

- $G = f(g_1 + g_2)$, где g_1 и g_2 – затраты индивидов на общественное благо;
- w_i – начальный запас частного блага у i-го индивида;
- x_i – объем потребления частного блага i-м индивидом.

Поскольку полезность, в итоге получаемая i-м индивидом, зависит от x_i и вкладов обоих индивидов в производство общественного блага, $U_i = (G, x_i)$ или $U_i = (g_1 + g_2, w_i - g_i)$ можно определить как $U_i = (f(G), x_i)$ или $U_i = (f(g_1 + g_2), w_i - g_i)$.

Предположим, что в экономике максимизируется взвешенная сумма полезностей индивидов: $W = a_1 U_1 + a2U_2$ или:

Запишем условие первого порядка для g_1 и g_2:

$$a_1 \frac{\partial U_1(G, x_1)}{\partial G} - a_1 \frac{\partial U_1(G, x_1)}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial U_2(G, x_2)}{\partial G} = 0,$$
$$a_1 \frac{\partial U_1(G, x_1)}{\partial G} - a_2 \frac{\partial U_2(G, x_2)}{\partial x_2} + a_2 \frac{\partial U_2(G, x_2)}{\partial G} = 0.$$

Преобразовав эти условия, получим:

$$a_1 \frac{\partial U_1(G, x_1)}{\partial G} + a_2 \frac{\partial U_2(G, x_2)}{\partial G} = a_1 \frac{\partial U_1(G, x_1)}{\partial x_1}, \quad (10.3.2)$$
$$a_1 \frac{\partial U_1(G, x_1)}{\partial G} + a_2 \frac{\partial U_2(G, x_2)}{\partial G} = a_2 \frac{\partial U_2(G, x_2)}{\partial x_2}. \quad (10.3.3)$$

Поскольку левые части равенств (10.3.2) и (10.3.3) совпадают, равны их правые части:

$$a_1 \frac{\partial U_1(G,x_1)}{\partial x_1} = a_2 \frac{\partial U_2(G,x_2)}{\partial x_2}. \quad (10.3.4)$$

Разделив левые части равенств (10.3.2) и (10.3.3) на правые, с учетом равенства (10.3.4) получаем:

$$\frac{\frac{\partial U_1(G,x_1)}{\partial G}}{\frac{\partial U_1(G,x_1)}{\partial x_1}} + \frac{\frac{\partial U_2(G,x_2)}{\partial G}}{\frac{\partial U_2(G,x_2)}{\partial x_2}} = 1$$

или уравнение Самуэльсона для случая $MC_G = 1$, когда общественное благо представляет собой сумму вкладов индивидов (иными словами, производство общественного блага финансируется на суммарные взносы индивидов):

$$MRS^1_{Gx} + MRS^2_{Gx} = 1.$$

---

1. Samuelson P.A. The Pure Theory of Public Expenditure // The Review of Economics and Statistics. 1954. Vol. 36. No. 4 (Nov.). P. 387-389. ↩

10.3.2. Долевое финансирование общественных благ

Пусть:

- в экономике существуют два индивида ($i = 1, 2$) и производятся два блага: x – частное благо и G – общественное благо;
- $G = f(g_1 + g_2)$, где g_1 и g_2 – затраты индивидов на общественное благо;
- w_i – начальный запас частного блага у i-го индивида;
- x_i – объем потребления частного блага i-м индивидом.

Тогда, если индивид 1 полагает, что индивид 2 тратит на общественное благо g_2, то его задача максимизации полезности имеет вид:

$$\max_{g_1} u_1 (g_1 + g_2, w_1 - g_1),$$
$$g_1 \geq 0.$$

Условие первого порядка Куна-Таккера:

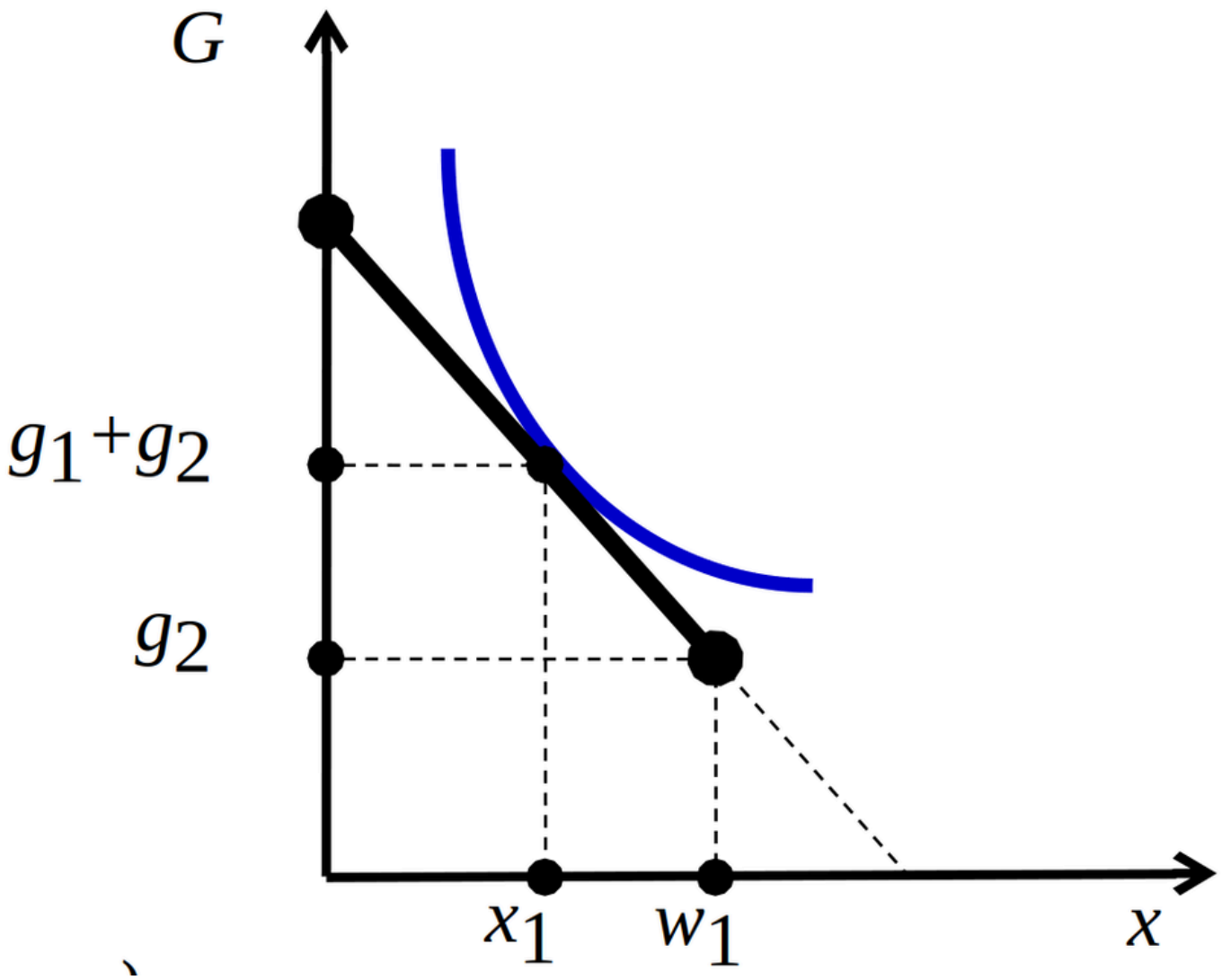
$$\frac{\partial u_1(g_1+g_2,x_1)}{\partial G} - \frac{\partial u_1(g_1+g_2,x_1)}{\partial x_1} \leq 0$$

или

$$\frac{\frac{\partial u_1(g_1+g_2,x_1)}{\partial G}}{\frac{\partial u_1(g_1+g_2,x_1)}{\partial x_1}} \leq 1.$$

Условие Куна-Таккера превращается в равенство при $g_1 > 0$.

Когда индивид 1 вносит положительный вклад в производство общественного блага, его $MRS^1_{G_x} = 1$ (рис. 10.14.(а)). Если $MRS^1_{G_x} < 1$, то он не вносит вклад в производство общественного блага (рис. 10.14.(б)).


G
g_1+g_2
g_2
x_1
w_1
x

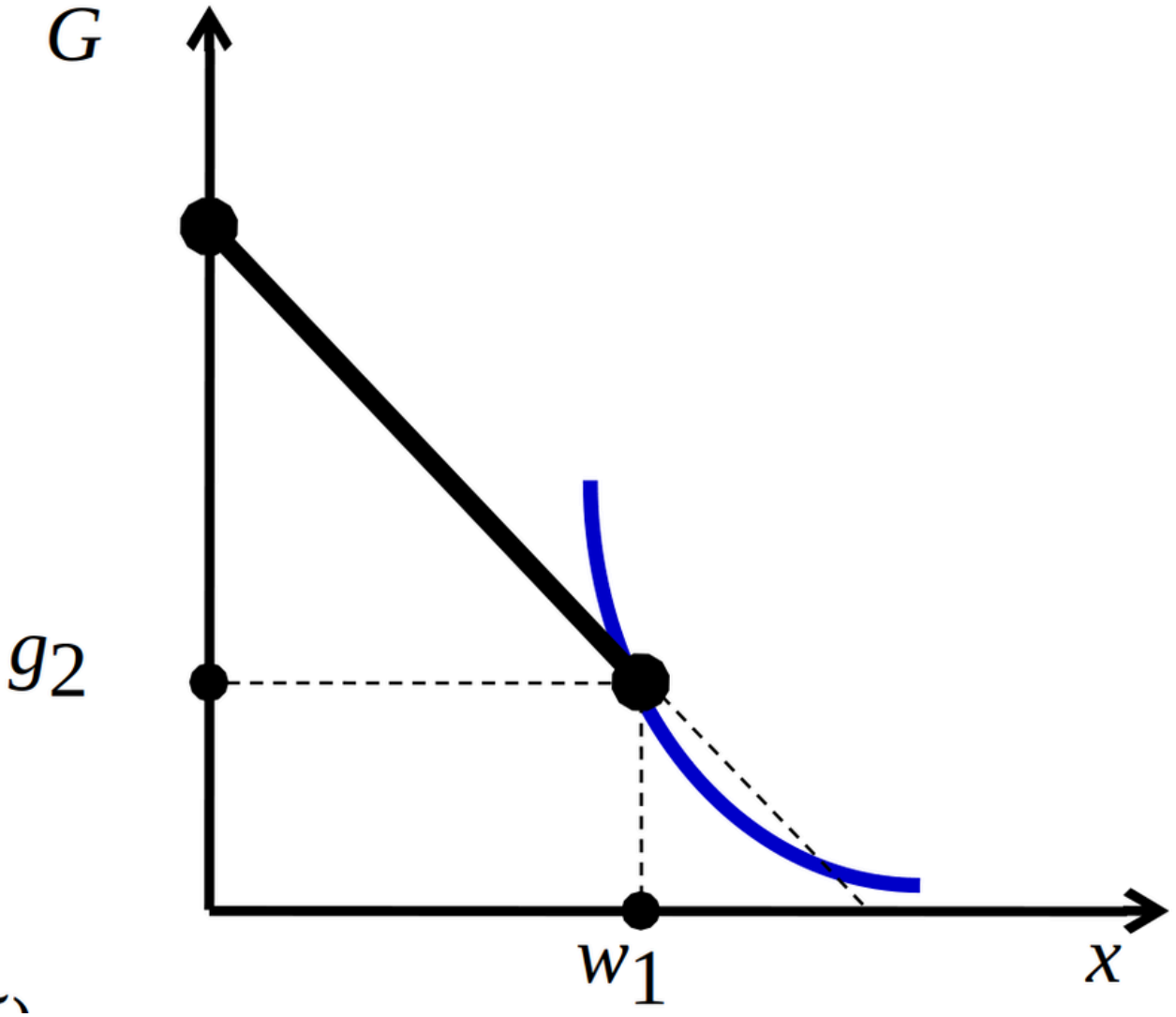


Рисунок 10.14 Долевое финансирование общественных благ

Набор (g_1^*, g_2^*), в котором каждый из индивидов вносит оптимальный вклад при заданном вкладе другого, будет равновесием по Нэшу в данной игре, условие которого:

$$\frac{\frac{\partial u_1\left(G^*, x_1^*\right)}{\partial G^*}}{\frac{\partial u_1\left(G^*, x_1^*\right)}{\partial x_1}} \leq 1,$$

$$\frac{\frac{\partial u_2\left(G^*, x_2^*\right)}{\partial G^*}}{\frac{\partial u_2\left(G^*, x_2^*\right)}{\partial x_2}} \leq 1.$$

Если предоставляется положительный объем общественного блага G, то по крайней мере одно из этих неравенств должно выполняться как равенство.

Выведем функцию реакции индивида, показывающую его вклад в производство общественного блага как функцию вклада другого индивида. Для этого запишем задачу максимизации полезности индивида 1:

$$\max_{g_1, x_1} u_1\left(g_1 + g_2, x_1\right),$$
$$g_1 + x_1 = w_1,$$
$$g_1 \geq 0.$$

С учетом $G = g_1 + g_2$ эту задачу можно переписать в виде:

$$\max_{G, x_1} u_1\left(G, x_1\right),$$
$$G + x_1 = w_1 + g_2,$$
$$G \geq g_2.$$

Заметим, что бюджетное ограничение в задаче означает, что максимальная стоимость потребительского набора индивида 1 равна стоимости его «начального запаса», составляющей $w_1 + g_2$.

Пусть $f(w)$ – функция спроса индивида 1 на общественное благо как функция его богатства, тогда G, являющееся решением задачи максимизации полезности, равно:

$$G=\max\{f_1(w_1+g_2),g_2\}.$$

Вычитая g_2 из обеих частей равенства, получим функцию реакции индивида 1, показывающую его оптимальный вклад в создание общественного блага как функцию вклада другого индивида:

$$g_1=\max\{f_1(w_1+g_2)-g_2,0\}.$$

Аналогично будет выглядеть функция реакции индивида 2:

$$g_2=\max\{f_2(w_2+g_1)-g_1,0\}.$$

Равновесие по Нэшу – это такой набор вкладов, при котором:

$$g_1^*=\max\{f_1(w_1+g_2^*)-g_2^*,0\},$$
$$g_2^*=\max\{f_2(w_2+g_1^*)-g_1^*,0\}.$$

Пусть индивидуальная функция полезности квазилинейна, что представляет собой условие, гарантирующее единственность оптимального количества общественного блага (однако при низком уровне дохода оно может стать невыполнимым):

$U_i=u_i(G)+x_i.$

Тогда спрос на общественное благо независим от дохода, т.е. $f_i(w)\equiv\overline{g}_i$.

Следовательно:

$$g_1^*=\max\{\overline{g}_1-g_2^*,0\},$$
$$g_2^*=\max\{\overline{g}_2-g_1^*,0\}.$$

Таким образом, к примеру, если $\overline{g}_1>\overline{g}_2$, то $g_1^*=\overline{g}_1$ и $g_2^*=0$. В этом случае индивид 2 становится «безбилетником».

Полученный вывод обнаруживает фундаментальную «проблему безбилетника», возникающую вследствие свойств чистого общественного блага: при произведенном объеме такого блага предельные издержки его предоставления дополнительному потребителю равны нулю, и даже не заплатившего индивида нельзя лишить возможности быть его потребителем.

10.3.3. Голосование

Пусть:

- s_i – доля расходов i-го индивида на общественное благо;
- все индивиды имеют квазилинейные функции полезности и $U_i=u_i(G)+x_i$ – функция полезности i-го индивида;
- G – предоставляемый объем общественного блага;
- $u_i(G)-s_iG$ – полезность, получаемая i-м индивидом;
- если $u_i'(G)>s_i$, то i-й избиратель отдаст свой голос;
- из $n+1$ избирателей m – медианный избиратель, т.е. $n/2$ избирателей предпочитают меньший, чем он, объем общественного блага и столько же избирателей – больший.

Тогда для установленного путем голосования равновесного объема общественного блага G_v выполняется условие:

$$u_m'(G_v)=s_m.$$

Это условие носит название *равновесия Боуэна* [1].

Ховард Боуэн, сформулировавший в 1943 г. условие определения равновесного объема общественного блага путем голосования, проиллюстрировал его на примере.

Предположим, сообщество граждан решает, сколько публичных школ должно быть доступно для получения образования. Кто-то в этом сообществе не видит в них необходимости, другие считают правильным наличие нескольких школ, но есть и те, кто заинтересован в большом количестве школ для наилучшего охвата населения образованием. Пусть предпочтения каждой группы индивидов отражает кривая предельной готовности платить за появление дополнительной школы (рис. 10.15). Наклон каждой кривой (MS_a, MS_b, MS_c) показывает предельную норму замещения денег на школу, характерную для соответствующей группы индивидов. Кривая совокупной предельной готовности платить (TMS) показывает совокупную предельную норму замещения денег на школу, отражающую мнение сообщества о достаточном количестве школ. Оптимальное количество школ (Q) будет определено точкой пересечения кривой совокупной предельной готовности платить (TMS) и кривой предельных издержек строительства школы (MC).

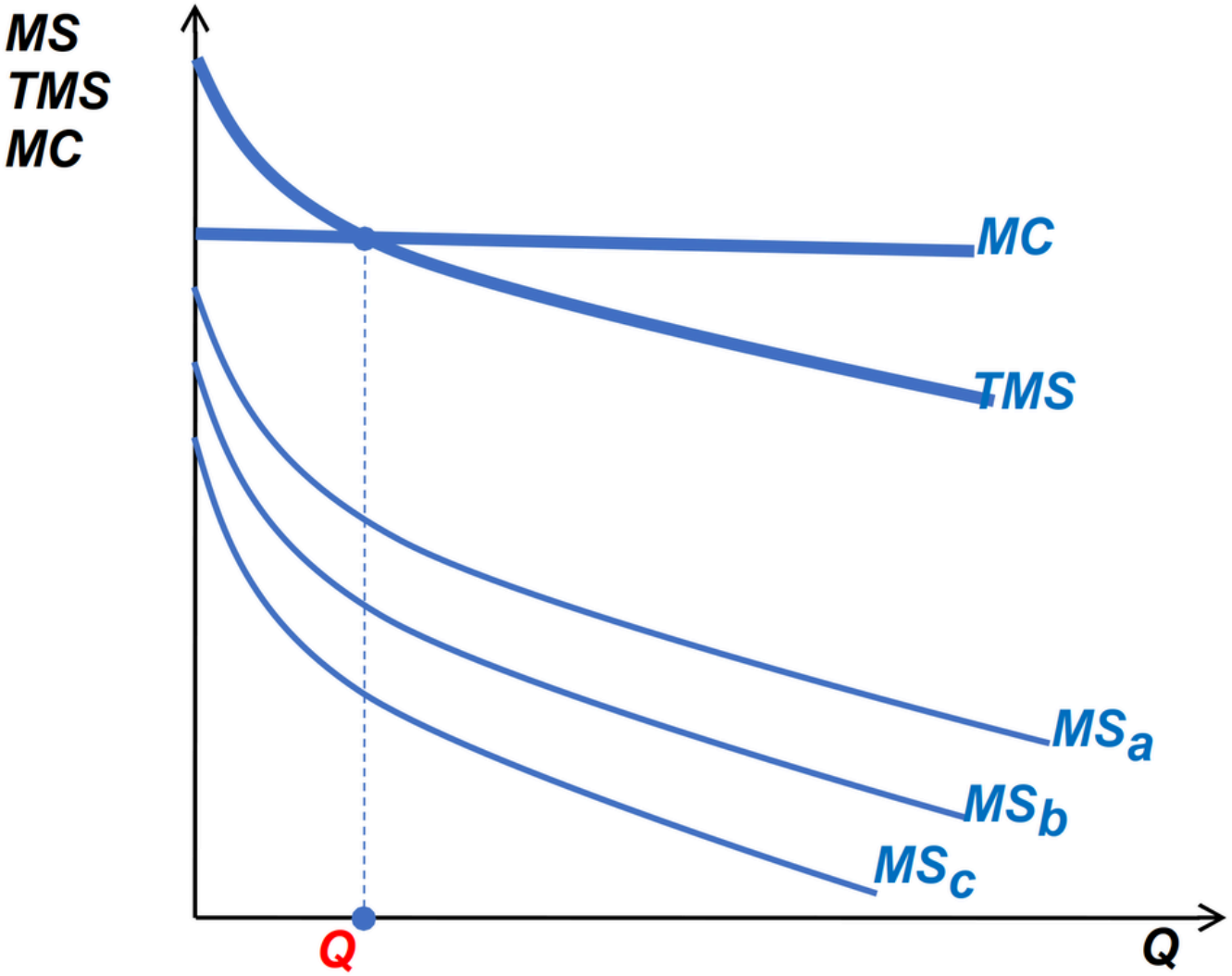


Рисунок 10.15. Установление оптимального объема общественного блага путем голосования: равновесие Боуэна

Покажем, что равновесие Боуэна соотносится с уравнением Самуэльсона.

Если $MC_G = 1$ и все индивиды имеют квазилинейные функции полезности, эффективный объем общественного блага будет удовлетворять условию:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^{'}(G_e)=1$$

или

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i^{'}(G_e)=\frac{1}{n}.$$

Это условие означает, что при эффективном объеме общественного блага (рис. 10.16) средняя совокупная предельная готовность платить за него (TMS/N) равна средним предельным издержкам его производства (MC/N).

Таким образом, если *средний потребитель* предпочитает иметь такой же объем общественного блага, что и *медианный избиратель*, то с помощью голосования будет определен эффективный объем предоставления общественного блага.

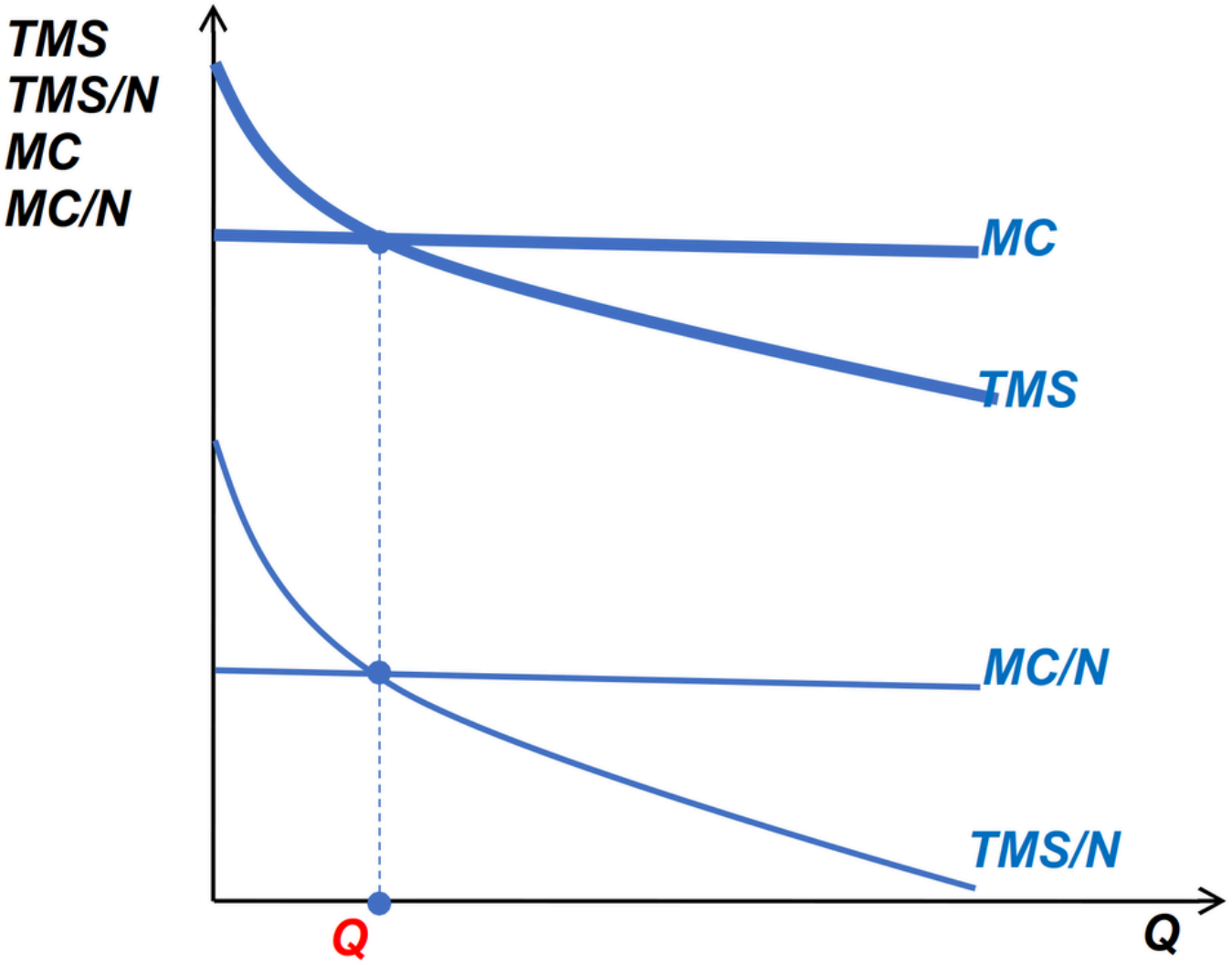


Рисунок 10.16. Установление оптимального объема общественного блага путем голосования: равновесие медианного избирателя

1. Bowen H.R. The Interpretation of Voting in the Allocation of Resources. *Quarterly Journal of Economics*, 1943, Vol. 58, pp. 27-48. ↩

10.3.4. Назначение цен по Линдалю

Модель финансирования производства общественных благ шведского экономиста Эрика Линдаля (1919) максимально воспроизводит пути, по которым рынок обеспечивает эффективное производство частных благ.

Главное условие этой модели: готовность каждого индивида платить за возможность потреблять общественное благо хорошо известна.

Пусть:

- w_i – начальный запас частного блага у i-го индивида;
- x_i – объем потребления частного блага i-м индивидом;
- p_i – цена, по которой i-й индивид имеет право «купить» столько общественного блага, сколько ему необходимо.

Тогда задача максимизации полезности i-м индивидом имеет вид:

$$\max_{G,x_i} u_i\,(G, x_i),$$
$$G + x_i = w_i.$$

Из условия первого порядка для этой задачи получаем:

$$\frac{\frac{\partial u_i}{\partial G}}{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}} = p_i.$$

Решение задачи – оптимальный объем общественного блага как функция спроса на него: $G_i(p_i, w_i)$.

Если предпочтения индивидов выпуклы, то существует такой вектор цен, при котором они выберут оптимальный объем предоставляемого общественного блага.

Покажем, что назначение цен по Линдалю соотносится с уравнением Самуэльсона, задающим условие эффективного предоставления общественного блага.

Для двух индивидов из уравнения Самуэльсона имеем:

$$\frac{\frac{\partial u_1(G,x_1)}{\partial G}}{\frac{\partial u_1(G,x_1)}{\partial x_1}}+\frac{\frac{\partial u_2(G,x_2)}{\partial G}}{\frac{\partial u_2(G,x_2)}{\partial x_2}}=1.$$

Отсюда:

$$p_i=\frac{\frac{\partial u_i(G,x_i)}{\partial G}}{\frac{\partial u_i(G,x_i)}{\partial x_i}}.$$

Цены, которые обеспечивают эффективное предоставление общественного блага, называются *ценами Линдаля* или *налогами Линдаля*, если за предоставление G единиц общественного блага i-й индивид должен заплатить налог p_iG.

На рис. 10.17 показан спрос первого индивида (D_1), отражающий его предельную готовность платить за общественное благо, и D – суммарный спрос со стороны обоих индивидов ($D = D_1 + D_2$), отражающий суммарную предельную готовность платить. Оптимальный объем предоставления общественного блага (Q^*) определяется равенством суммарной предельной готовности платить и предельных издержек производства общественного блага (MC), играющих роль кривой предложения (S). Тогда P_1 и P_2 будут ценами Линдаля, суммы которых будет достаточно для представления общественного блага в оптимальном объеме.

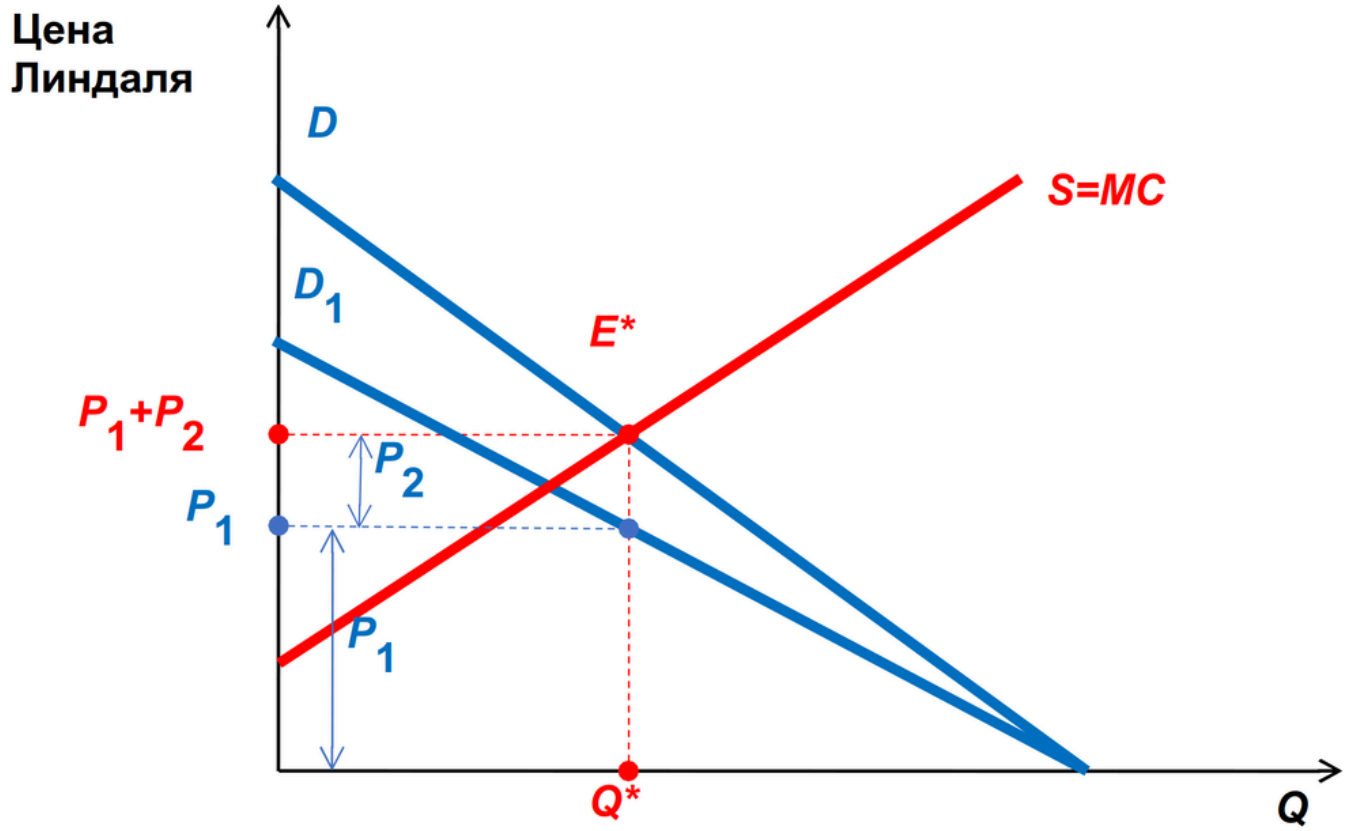


Рисунок 10.17. Назначение цен по Линдалю

Основное возражение критиков подхода Линдаля состоит в том, что у индивидов нет стимула честно выражать свою готовность платить за возможность потреблять общественное благо. Однако при выполнении этого условия цены Линдаля уместны для обеспечения эффективного финансирования предоставления общественного блага.

10.3.5. Механизм Викри-Кларка-Гровса

Поскольку производство общественного блага финансируется на сумму индивидуальных вкладов, отражающих готовность платить за него, одним из простых способов осуществить финансирование производства общественного блага может стать выяснение оценок тех расходов, которые индивиды согласны понести и установление выплат пропорционально этим оценкам. Однако этот простой способ сопряжен с проблемой «безбилетника», которая не позволяет его эффективно реализовать. Во-первых, некоторые индивиды могут лукаво заявить, что им вовсе не нужно общественное благо. Во-вторых, часть индивидов может сознательно занизить свою готовность платить. В итоге на производство общественного блага не будет собрана нужная сумма.

Другой простой способ состоит в том, чтобы разделить сборы на производство общественного блага поровну между всеми индивидами, но при этом выяснить, какую ценность общественное благо представляет для каждого. Тогда, если v_i – чистая ценность общественного блага для *i*-го индивида, представляющая собой разность между ценностью, которую для *i*-го индивида имеет общественное благо, и расходами, которые он должен будет понести в качестве взноса на его создание, решение о производстве общественного блага будет принято, когда:

$$\sum_i v_i \geq 0.$$

Однако и этот способ может не дать истинно желаемого результата, поскольку, во-первых, среди индивидов могут оказаться те, кто сильно завысят ценность общественного блага, понимая, что им все равно придется платить фиксированную сумму. Во-вторых, среди индивидов могут оказаться яростные противники производства этого общественного блага, которые существенно занизят свои оценки.

Таким образом, главной задачей, которую необходимо решить, является создание стимулов для высказывания честных индивидуальных оценок общественного блага.

Механизм Викри-Кларка-Гровса, разработанный на базе идей американских экономистов - Нобелевского лауреата 1996 г. Уильяма Викри, а также Эдварда Кларка и Теодора Гровса, предлагает решение этой задачи, которое имеет непосредственное практическое применение.

Главной теоретической конструкцией этого механизма является *центральный индивид* – тот, кто своей оценкой изменяет знак суммарной чистой ценности общественного блага, т.е. общественное решение относительно его производства. И за это центральный индивид должен заплатить налог, получивший название - *налог Кларка*.

Пусть b_i – заявленная индивидами оценка чистой ценности общественного блага, которая может совпадать, а может и не совпадать с истинной оценкой общественного блага для каждого индивида. Тогда:

- общественное благо производится, если $\sum_i b_i \geq 0$, и не производится, если $\sum_i b_i < 0$;
- если индивид *j* своей оценкой превращает неотрицательную сумму заявленных чистых ценностей всех других индивидов $\sum_{j \neq i} b_i$ в величину отрицательную и общественное благо не производится, то он становится центральным индивидом, а наносимый им ущерб равен $\sum_{j \neq i} b_i$;
- если индивид *j* своей оценкой превращает отрицательную сумму заявленных чистых ценностей всех других индивидов $\sum_{j \neq i} b_i$ в величину неотрицательную и общественное благо производится, то он становится центральным индивидом, а наносимый им ущерб равен - $\sum_{j \neq i} b_i$;
- Если из-за *j*-го индивида решение предоставить общественное благо заменяется решением не предоставлять его, налог Кларка равен:

$$T_K = \sum_{j \neq i} b_i;$$

- Если из-за *j*-го индивида решение не предоставлять общественное благо заменяется решением предоставлять его, налог Кларка равен:

$$T_K = -\sum_{j \neq i} b_i.$$

Таким образом, налог Кларка равен ущербу, который наносит обществу центральный индивид своей заявленной оценкой чистой ценности общественного блага. В результате механизм Викри-Кларка-Гровса приводит к тому, что для каждого индивида оптимальным становится «говорить правду», т.е. правдиво заявлять о ценности общественного блага для него.

Поясним действие механизма Викри-Кларка-Гровса на условном примере.

Представим, что три студента *x*, *y* и *z*, проживающие в одной комнате в общежитии, обсуждают вопрос о приобретении на российском интернет-сервисе Авито подержанного холодильника для его совместного использования (табл. 10.1). Цена холодильника равна 600 руб., поэтому индивидуальные расходы на представление общественного блага составят 200 руб. При этом заявленная ценность общественного блага у студентов оказалась разной: для *x* и *y* – по 100 руб. у каждого, а для любителя домашней еды *z* она оказалась равной 500 руб. Поскольку суммарная заявленная ценность общественного блага (700 руб.) превысила цену холодильника, его приобретение следует считать целесообразным. Заявленная чистая ценность холодильника для *x*, *y* и *z* составит: -100, -100 и 300 руб. соответственно. Очевидно, что среди соседей есть центральный индивид, и им является студент *z*, поскольку именно его заявление об индивидуальной чистой ценности холодильника меняет общественное решение *x* и *y* с отрицательного («не покупать холодильник», т.к. -100-100=-200) на положительное («покупать холодильник», т.к. -200+300=100). Следовательно, студент *z* должен заплатить налог Кларка в размере: -(-200)=200 руб.

Таблица 10.1. **Налог Кларка (пример)**

	Индивидуальные расходы на предоставление общественного блага	Заявленная ценность обществен-ного блага	Заявленная чистая ценность обществен-ного блага (b_i)	Налог Кларка	Общественное решение
x	200	100	-100	0	200-100=100
y	200	100	-100	0	200-100=100
z	200	500	300	200	-200+300=100

Принципиальным условием механизма Викри-Кларка-Гровса является следующее: налог Кларка не поступает от центрального индивида другим индивидам, а изымается на нужды, не имеющие отношения к решению рассматриваемого вопроса о представлении общественного блага. Это условие обеспечивает отсутствие заинтересованности у не-центральных индивидов в получении денег.

Практическая реализация механизма Викри-Кларка-Гровса сопряжена с рядом проблем:

- величина индивидуальных расходов на общественное благо не должна влиять на величину спроса на него, что с точки зрения теории потребительского выбора возможно лишь в случае квазилинейных предпочтений у индивидов;
- исход не будет эффективным по Парето, поскольку объем предоставления общественного блага будет оптимальным, но частное потребление снизится (т.к. налоги «исчезают» из круга лиц, заинтересованных в общественном благе);
- среди большого числа участников вероятность обнаружения центрального индивида не очень велика, поэтому налоговые сборы могут быть малы;
- издержки сбора информации о заявленной ценности общественного блага могут оказаться слишком высоки.

Тем не менее, механизм Викри-Кларка-Гровса активно используется в практике аукционов и известен как *VCG*-аукцион. В частности, принцип *VCG*-аукциона применяется в Интернет-рекламе. К примеру, правила *VCG*-аукциона используются для определения списываемой цены в блоках на первой странице поиска в Яндекс-Директе, а также на поисковых площадках рекламной сети Яндекса.



Наблюдательный микроэкономист: Как работает аукцион в Директе?

Правила VCG-аукциона используются для определения списываемой цены в блоках на первой странице поиска Яндекса, а также на поисковых площадках рекламной сети Яндекс.

Стоимость кликов не фиксирована, а определяется в результате торгов между рекламодателями.

Объявления рекламодателей отбираются отдельно для каждого рекламного блока на странице, которую открывает пользователь, и ранжируются по комбинации ставки, коэффициента качества (характеризует точность попадания в интересы пользователя) и прогноза кликабельности (CTR - Click-through rate - отношение числа кликов на баннер или рекламное объявление к числу показов, измеряемое в процентах, например, если рекламный блок был показан 10 раз и на него кликнули 4 раза, то его CTR — 40%), рассчитываемого методами машинного обучения, для конкретного показа.

В зависимости от конкуренции по конкретному поисковому запросу, в блоке может показываться от 0 до 4 объявлений.

Объем трафика в премиум-показах (для 4-х мест): первое место - 100, второе - 85, третье - 75, четвертое - 65.

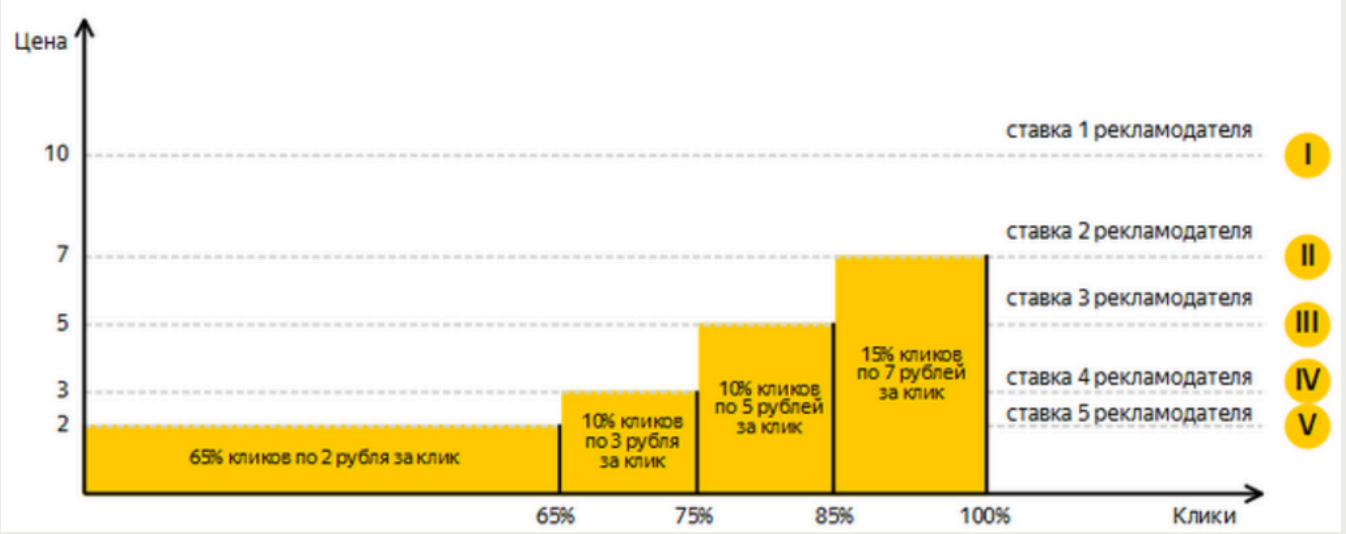
Объем трафика прямо пропорционален кликабельности места показа объявления. Он не постоянен и вычисляется для конкретного запроса. При расчете объема трафика учитываются дизайн объявления, количество объявлений в блоке и их дизайн, место показа объявления на поиске.

Если пять рекламодателей конкурируют за 4 места в премиум-показах, а коэффициенты качества и прогнозы кликабельности CTR объявлений совпадают, то в блок попадут четыре рекламодателя с наибольшими ставками.

Ставки рекламодаетелей по ключевой фразе равны 10, 7, 5, 3 и 2 руб.

Количество кликов по объявлениям и средняя стоимость этих кликов будет зависеть от места рекламодателя в блоке:

- *Каждый из четырех победивших рекламодателей получает объем трафика 65 по 2 рубля за клик (ставка пятого конкурента, который не вошел в блок). За этот трафик рекламодателям не нужно конкурировать.*
- *Дополнительный объем трафика 10 по 3 рубля за клик (ставка четвертого рекламодателя) гарантированно получат три рекламодателя с наивысшими ставками. За эти клики с ними конкурирует четвертый рекламодатель.*
- *Дополнительный объем трафика 10 по 5 рублей за клик (ставка третьего рекламодателя) гарантированно получат два рекламодателя с наивысшими ставками. За эти клики с ними конкурирует третий рекламодатель.*
- *Дополнительный объем трафика 15 по 7 рублей за клик (ставка первого рекламодателя) гарантированно получит первый рекламодатель. За эти клики с ним конкурирует второй рекламодатель.*



Источник: Как работает аукцион в Директе // https://yandex.ru/support/direct/technologies-and-services/vcg-auction.html

Литература

Основная литература

1. Антипина О.Н., Вереникин А.О. Микроэкономика продвинутого уровня: Учебное пособие. 2-е изд., исправл. и доп. — М.: Экономический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2021. §2.7, §3.7.
2. Бусыгин В.П., Желободько Е.В., Цыплаков А.А. Микроэкономика – третий уровень. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2003. Гл. 10, 11.
3. Мас-Колелл А., Уинстон М., Грин Д. Микроэкономическая теория. М.: Дело, 2016. Гл. 11. Экстерналии и общественные блага.
4. Фридман А.А. Лекции по курсу микроэкономики продвинутого уровня. – М.: Изд. дом ГУ-ВШЭ, 2007. Лекции 22-27.

Дополнительная литература

1. Антипина О. Н. Сколько стоит цифра? О природе цены благ в цифровой экономике // Общественные науки и современность. – 2019. - № 5. - С. 5-16.
2. Антипина О.Н. Информационная экономика: современные технологии и ценообразование. – М.: Экономический факультет МГУ, ТЕИС, 2009. Глава 5 (п. 5.2.1).
3. Антипина О.Н. Платформы как многосторонние рынки эпохи цифровизации // Мировая экономика и международные отношения. – 2020. - Том 64. - № 3. - С. 12-19.
4. Капелюшников Р.И. Экономическая теория прав собственности (методология, основные понятия, круг проблем). – М.: ИМЭМО РАН, 1991.
5. Кутер Р.Д. Теорема Коуза // Экономическая теория / Под ред. Дж. Итуэлла, М. Милгейта, П. Ньюмена. – М.: ИНФРА-М, 2004. С. 61-69.
6. Пигу А. Экономическая теория благосостояния. В 2-х т. М.: «Прогресс», 1985.
7. Armstrong M. Competition in Two-Sided Markets // The RAND Journal of Economics. – 2006. - Vol. 37. - No. 3. - P. 668-691.
8. Bergstrom T., Blume L., Varian H. On the Private Provision of Public Goods // Journal of Public Economics. – 1986. - Vol. 29. - Issue 1. - P. 25-49.
9. Bowen H.R. The Interpretation of Voting in the Allocation of Resources // Quarterly Journal of Economics. – 1943. - Vol. 58. - P. 27-48.
10. Caillaud B., Jullien B. Chicken and Egg: Competition among Intermediation Service Providers // The RAND Journal of Economics. – 2003. - Vol. 34. - No. 2. - P. 309-28.
11. Clarke E. Multipart Pricing of Public Goods // Public Choice. – 1971. - Vol. 11. - P. 17-33.
12. Coase R. The Problem of Social Cost // Journal of Law and Economics. – 1960. - Vol. 3. - P. 1-44. [На русском языке: Коуз Р. Проблема социальных издержек // Фирма, рынок и право. – М.: Новое издательство, 2007. С. 92-149].
13. Evans D.S., Schmalensee R. Matchmakers: The New Economics of Multisided Platforms. Boston, Mass.: Harvard Business Review Press, 2016.
14. Groves T. Incentives in Teams // Econometrica. – 1973. - Vol. 41. – No.4. - P. 617-631.
15. Katz M., Shapiro C. Network Externalities, Competition and Compatibility // The American Economic Review. – 1985. - Vol. 75. – No.3. - P. 424-440 [На русском языке: Кац М., Шапиро К. Сетевые внешние эффекты, конкуренция и совместимость. – Вехи экономической мысли. Теория отраслевых рынков. Т.5. – СПб.: Экономическая школа, 2003. С. 500-535].
16. Kessler J.B. Announcements of Support and Public Good Provision // American Economic Review. – 2017. - Vol. 107. – No.12. - P. 3760-3787.
17. Rochet J., Tirole J. Platform Competition in Two-Sided Markets // Journal of the European Economic Association. – 2003. - Vol. 1. - No. 4. - P. 990-1029.
18. Rochet J., Tirole J. Two-Sided Markets: A Progress Report // The RAND Journal of Economics. – 2006. - Vol. 37. - No. 3. - P. 645-667.
19. Samuelson P. The Pure Theory of Public Expenditure // The Review of Economics and Statistics. – 1954. - Vol. 36. – No.4. - P. 387-389.
20. Shapiro C., Varian H. Information Rules: A Strategic Guide to the Network Economy. - Boston, Mass.: Harvard Business School Press, 1999.
21. Shapiro C., Varian H.R. Notes to accompany Information Rules: A Strategic Guide to the Network Economy, Harvard Business School Press, 1998.
22. Stigler G.J. The Theory of Price. 3rd ed. – N.Y.: Macmillan Co., 1966.
23. Varian H.R. A Solution to the Problem of Externalities when Agents are Well-Informed // The American Economic Review. – 1994. - Vol. 84. - Issue 5. - P. 1278-1293.
24. Varian H.R. Microeconomic Analysis. - 3rd ed. – N.Y., L.: W.W. Norton & Company, 1992. Ch. 23, 24.

Глоссарий

А В И Л

А

Аффинное преобразование

Аффинное преобразование — отображение плоскости или пространства в себя, при котором прямые переходят в прямые.

5.1. Теория ожидаемой полезности

В

Версионирование

Версионирование (versioning) – это технический термин, который заимствован микроэкономистами у производителей компьютерных программ и информационных систем. Версионирование означает:

1. *контроль версий, управление версиями (обеспечение преемственности версий программных компонентов, достигаемое введением новых интерфейсов);*
2. *организацию разработки новых поколений информационных систем или программных средств.*

7.2. Версионирование. Модель Вэриана

И

Информационные блага

Информационные блага – это блага, которые могут быть представлены в цифровой форме (“can be digitized”) – книги, фильмы, телефонные разговоры и т.п. «Обратите внимание, что в определении утверждается возможность представления этих благ в цифровой форме, но я не предполагаю, что эти блага фактически должны быть представлены в цифровой форме», - акцентирует Хэл Вэриан.

Источник: Varian H. Markets for Information Goods. Prepared for Bank of Japan conference, 1998, June 18-19. P. 3 <https://people.ischool.berkeley.edu/~hal/Papers/japan/japan.pdf>

7.2. Версионирование. Модель Вэриана

Л

Лотерея

Простая лотерея сопоставляет вероятность $\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, *каждому исходу* x_i *из множества* $X=\{x_1, \ldots x_n\}$.

Лотерея, в которой исходы сами являются лотереями, называется сложной лотереей (например, когда в лотереях в качестве выигрыша выдаются билеты следующей лотереи).

5.1. Теория ожидаемой полезности